ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящего издания – снабдить студентов-заочников рабочей программой и контрольными заданиями по курсу высшей математики.

Пособие содержит рабочую программу и контрольные вопросы по каждой теме, список учебной литературы, примеры решения задач, контрольные задания и основной теоретический материал, необходимый для освоения курса и решения задач.

Распределение объемов занятий и видов учебной работы при изучении высшей математики для студентов-заочников всех специальностей дано в табл. 1.

Таблица 1

Семестр	Занятия, часы				Выполнение контрольных работ	Контроль
	Лекции	Лабораторные работы	Практические занятия	Самостоятельные работы		
1-6	8-32	-	8-12	600-800	1-6	Экзамен или зачет

Основной формой изучения дисциплины являются самостоятельная работа студента с рекомендованной литературой и решение индивидуальных контрольных заданий. Ознакомление с теоретическими сведениями, содержащимися в пособии, не может заменить системной работы с литературой. Прежде чем переходить к решению задач, следует ответить на контрольные теоретические вопросы по данной теме, приведенные в пособии.

По каждой теме достаточно ознакомиться с одним (любым) из указанных учебников.

Номер темы в пособии	1	2	3	4	5	6
Рекомендуемая для предварительной проработки литература	[1], гл.1, §§1-3; гл.5, §§1-6 [4], гл.3,9	[1], гл.2-3, §§1,2 [4], гл. 3,	[3], гл.1-6, [4], гл.4,5,6	[3], гл.10-12, [4], гл.7,8	[3], гл.8, [4],гл.11,12	[3], гл.13, [4], гл.15

Выполнять контрольные работы следует по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой учебного шифра. В качестве учебного шифра принимают последнюю цифру номера зачетной книжки студента. Если эта цифра ноль, то следует выполнять десятый вариант. Каждый пример (или примеры, если их в задании несколько) пронумерован тремя цифрами: первая означает номер контрольной работы, вторая - номер задания в контрольной работе, третья - номер варианта. Например, если учебный шифр оканчивается цифрой 7, то нужно решать в каждом задании контрольной работы №1 примеры под номером 7, т.е. примеры 1.1.7., 1.2.7., 1.3.7., 1.4.7., 1.5.7.

При выполнении и оформлении контрольных работ необходимо соблюдать следующие указания:

1. Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. На обложке тетради должны быть написаны фамилия и инициалы студента, учебный шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в институт.

3. В работу должны быть включены все примеры, указанные в заданиях, строго по варианту. Работы, содержащие не все задачи, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач следует располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условия. Если несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условия задачи, следует заменить общие данные конкретными из данного варианта.

6. Решение задач и объяснения к ним должны излагаться подробно и аккуратно.

7. После получения из ПГТУ прорецензированной работы, студент обязан исправить все отмеченные в работе недостатки; в случае незачета - в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя и предоставить работу на повторную проверку, приложив при этом первоначальный её вариант.

8. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы.

Тема 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Программный объём темы:

1. Матрицы и операции над ними. Ранг матицы.
2. Определители и их свойства. Вычисление определителей.
3. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса, правило Крамера, матричный метод решения систем.
4. Векторы, операции над векторами, разложение вектора, линейные операции над векторами.
5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства и приложения.

1.1. Линейная алгебра

Определение. Матрицей A размера $m \times n$ называется таблица чисел, записанная в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Короче матрицу обозначают так:

$$A = (a_{ij})(i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n).$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Элементы матрицы образуют столбцы и строки. В обозначении элемента a_{ij} первый индекс (i) указывает номер строки, а второй (j) - номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Если в матрице число строк равно числу столбцов $(m = n)$, то матрица называется квадратной *n*-го порядка. Если же $m \neq n$, то матрица называется прямоугольной.

В матрице *A* *m* строк и *n* столбцов.

Если $m=1, n>1$, то получается однострочная матрица $(a_1, a_2, ..., a_j, ..., a_n)$, которая называется вектор-строкой.

Если же $m>1, n=1$, то получается одностолбцовая матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

которая называется вектор-столбцом.

Две матрицы: $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными, если равны элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е. $(a_{ij})=(b_{ij})$, если $a_{ij}=b_{ij}$ при всех *i,j* (при этом число столбцов и строк матриц *A* и *B* должно быть одинаковым).

Матрицы можно складывать, умножать на число и друг на друга. Рассмотрим операции над матрицами.

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ одного размера $m \times n$ называется новая матрица $C=(c_{ij})$ того же размера $m \times n$, элементы которой определяются равенством

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n).$$

Обозначение: *A*+*B*=*C* .

Пример 1.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} + \underset{B}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Аналогично определяется разность двух матриц.

Чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ, нужно умножить на это число все элементы матрицы

$$\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$$

Пример 2.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot0 \\ 3\cdot0 & 3\cdot1 & 3\cdot0 \\ 3\cdot1 & 3\cdot0 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times k$ (m строк, k столбцов) на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $k \times n$ (k строк, n столбцов) называется матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$ (m строк, n столбцов), у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$$

При этом число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B. В противном случае произведение матриц не определено.

Обозначение: $A \cdot B = C$.

Пример 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1 \\ 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Пример 4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Отсюда видно, что $A\cdot B\neq B\cdot A$,т.е. умножение матриц не перестановочно.

Легко проверить, что для суммы и произведения матриц справедливы следующие свойства.

1. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C.$
2. $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B.$
3. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C.$
4. $(A+B)+C=A+(B+C).$

Единичная матрица.

Совокупность элементов $a_{11},a_{22},...,a_{nn}$ квадратной матрицы $A=(a_{ij})\,(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$ называется главной диагональю матрицы.

Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной матрицей и обозначается буквой *E*. Единичной матрицей 3-го порядка будет

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Произведение квадратной матрицы любого порядка на единичную матицу того же порядка не меняет данную матрицу.

Пример 5.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$AE = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Очевидно, $AE = EA = A$.

Определители и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу3-го порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Определение. Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим матрице *A*, называют число, обозначаемое символом

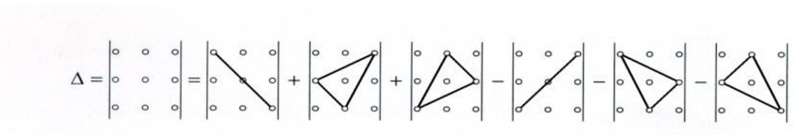
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - a_2b_1c_3 \ (*).$$

Числа $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 c_1, c_2, c_3$ называются элементами определителя. Диагональ, образованная элементами a_1, b_2, c_3 называется главной , а диагональ, образованная элементами $a_3, b_2, c_1,$ -побочной.

Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (*) берутся со знаком +, а какие со знаком - , полезно пользоваться правилом треугольников.



Пример.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 0\cdot 1+$$

$$+(-2)\cdot 3\cdot 2-2\cdot 1\cdot 1-0\cdot 3\cdot 3-(-2)(-2)(-2)=-12$$

Замечание

Определителем 2-го порядка $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, соответствующим матрице $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, называется число, равное $a_1b_1 - a_2b_2$.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного, вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор этого элемента M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Свойства определителей рассмотрим на примере определителей третьего порядка.

1. Величина определителя не изменится, если строки и столбцы определителя поменять местами.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. При перестановке двух рядом стоящих строк (или столбцов) определителя знак определителя меняется на противоположенный, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковых строки, то он равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов некоторого столбца (или строки) выносится за знак определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Если все элементы столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю.

6. Если элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если каждый элемент некоторого столбца (строки) есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: в одном на месте суммы стоит первое слагаемое, в другом –второе.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + d_3 & c_1 \\ a_2 & b_2 + d_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 + d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8. Если к элементам некоторого столбца (строки) определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число, то определитель при этом не изменится.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 + \lambda c_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 + \lambda c_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 + \lambda c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

9. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (строки) на их алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Представление определителя в соответствии со свойством 9 называется разложением определителя по элементам некоторого столбца (строки).

10. Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца (строки) на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

Пример.

Вычислить определитель, разлагая его по элементам первой строки.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(12 \cdot 17 - 19 \cdot 9) - 4(5 \cdot 17 - 3 \cdot 19) + 6(5 \cdot 9 - 3 \cdot 12) =$$

$$= 2 \cdot 33 - 4 \cdot 28 + 6 \cdot 9 = 8$$

1.2. Векторная алгебра

Прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием единицы измерения длины и трёх пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей: Ox,Oy, и Oz.

Точка 0 - начало координат, Ox- ось абсцисс, Oy-ось ординат,

Oz – ось аппликат.

Пусть M- произвольная точка пространства (рис. 1.1). Проведем через точку M три плоскости, перпендикулярные координатным осям Ox, Oy, и Oz. Точка пересечения построенных плоскостей обозначается через M_x, M_y, M_z соответственно.

Прямоугольными координатами точки M называются числа

$$x = OM_x\,,\ y = OM_y\,,\ z = OM_z$$

При этом называют x - абсциссой, y – ординатой, z – аппликатой точки M.

При заданной системе координат каждой точке M соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (x, y, z) – её прямоугольные координаты и, наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел (x, y, z) соответствует, и при том одна, точка M в пространстве.

Плоскости Oxy,Oxz,Oyz называются координатными плоскостями.

Скалярные и векторные величины

Некоторые величины в физике, механике и других науках полностью определяются заданием одного числа. Например, объем, масса, температура и др. Такие величины называются **скалярными**, а числа иногда называют скалярами. Но есть величины, для определения которых надо задать не только число, но и направление. Например, при изучении движения тела мы должны указать не только величину скорости, с которой движется тело, но и направление движения. При определении действия силы необходимо указать не только величину этой силы, но и направление её действия.

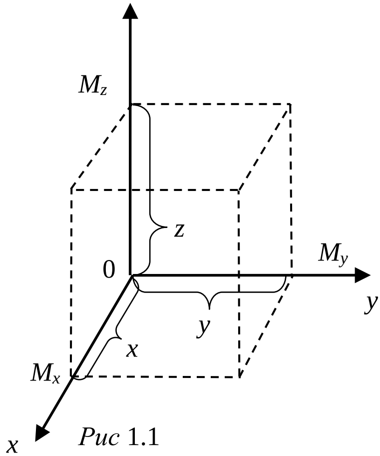


Рис 1.1

Такие величины называются **векторными**. Для работы с ними было введено понятие **вектора**, имеющее и самостоятельное значение в математике.

Любая упорядоченная пара точек A и B в пространстве определяет направленный отрезок, т.е. отрезок вместе с заданным на нём направлением. Если точка A – первая, то её называют началом отрезка, а точку B – его концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу отрезка.

Определение. Вектором называется направленный отрезок, или (что то же самое) упорядоченная пара точек.

Вектор обозначается $\overline{AB}$ - двумя буквами, при этом первая буква- начало вектора, а вторая - его конец.

Вектор можно обозначать одной буквой с черточкой наверху - $\overline{a}$. Направление вектора на рисунке указывается стрелкой.

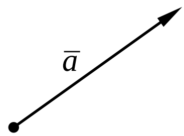


Рис. 1.2.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется нулевым и обозначается $\overline{0}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной (или модулем)и обозначается

$|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления, длина его, очевидно, равна нулю, т.е. $|\bar{0}| = 0$.

Определение. Векторы $|\bar{a}|$ и $|\bar{b}|$ называются равными $\bar{a} = \bar{b}$, если они:

а) коллинеарны;

б) одинаково направлены;

в) равны по длине.

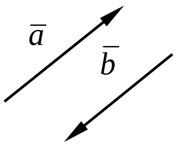


Рис.1.3.

$\bar{a} \neq \bar{b}$, не выполнено условие *б*.

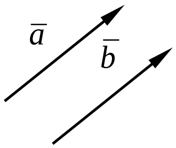


Рис.1.4.

$\bar{a} = \bar{b}$

Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, т.е. начало вектора может быть в любой точке пространства, но длина и направление фиксированы. Такие векторы называются свободными. В дальнейшем будем изучать только свободные векторы, называя их просто векторами.

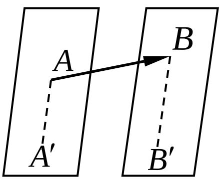


Рис.1.5.

Проекция вектора на ось

Рассмотрим некоторый вектор $\overline{AB}$ и числовую ось *Ou*. Проведём через точки *A* и *B* плоскости, перпендикулярные к оси *Ou*. Обозначим через A' и B' точки пересечения этих плоскостей с осью.

Проекция вектора *AB* на ось *Ou* обозначается пр$_u$*AB*.

Определение. Проекцией вектора *AB* на ось *Ou* называется число, равное $|A'B'|$, если направление $\overline{A'B'}$ совпадает с направлением *Ou* и $-|A'B'|$, если направление $\overline{A'B'}$ противоположно *Ou*.

Нетрудно показать, что

$$\text{пр}_u AB = |\overline{AB}| \cdot \cos\varphi \ ,$$

где φ - угол, образованный вектором *AB* с осью *Ou* .

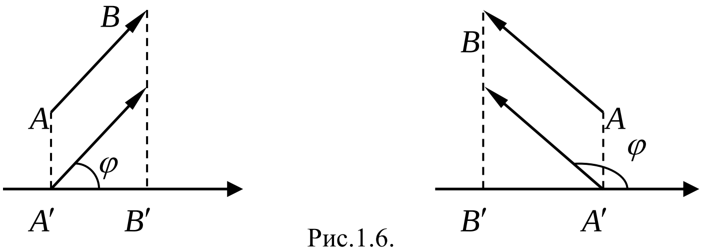


Рис.1.6.

Координаты вектора. Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат и произвольный вектор $\overline{AB}$. Пусть далее

$$X = \text{пр}_x \overline{AB}; Y = \text{пр}_y \overline{AB}; Z = \text{пр}_z \overline{AB} \ .$$

Проекции *X, Y, Z* вектора $\overline{AB}$ называют его координатами и записывают так: $\overline{AB} = \{X, Y, Z\}$.

Для любых точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ координаты вектора $\overline{AB}$ определяются формулами

$$X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1; Z = z_2 - z_1.$$

В этом случае модуль вектора $\overline{AB}$ находится по формуле

$$|\overline{AB}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

Если через $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ обозначить углы наклона вектора к осям координат, то

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называют направляющими косинусами вектора $\overline{AB}$.

Очевидно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Линейные операции над векторами и их свойства

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение. Для любых двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ суммой $\overline{a}+\overline{b}$ называется третий вектор, который идёт из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$, если вектор $\overline{b}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$.

Разностью двух векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$ называется вектор $\overline{b}-\overline{a}$, который в сумме с вектором $\overline{a}$ составляет вектор $\overline{b}$.

Аналогично сумме двух векторов можно находить сумму любого числа векторов.

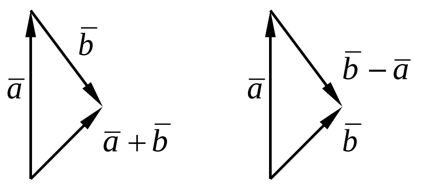


*Рис.*1.7.

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны, то $\overline{a}+\overline{b}$ и разность $\overline{a}-\overline{b}$ этих векторов можно найти по правилу параллелограмма.

Построим параллелограмм на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, выходящих из одной точки, как на сторонах. Тогда одна диагональ этого параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, является суммой $\overline{a}+\overline{b}$, а другая диагональ – разностью этих векторов.

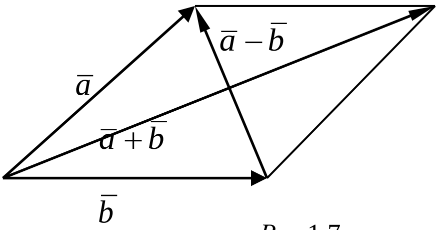


*Рис.*1.7.

Определение. Пусть даны вектор $\overline{a}$ и число λ. Произведением $\lambda\overline{a}$ называется вектор, который коллинеарен вектору $\overline{a}$, имеет длину, равную $|\lambda||\overline{a}|$, и направление такое же, как у вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$, и противоположенное, если $\lambda<0$.

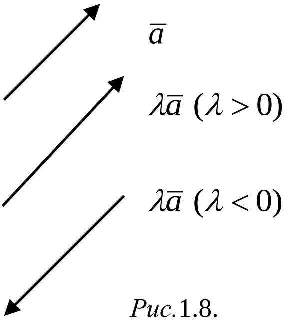


*Рис.*1.8.

Если $|\lambda|>1$, то при умножении вектора $\overline{a}$ на число λ вектор $\overline{a}$ «растягивается» в λ раз, а если $|\lambda|<1$ - «сжимается». При $\lambda<0$ изменяется направление вектора на противоположное.

Свойства линейных операций:

1. $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$
2. $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$
3. $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$
4. $(\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$
5. $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$.

Эти свойства позволяют выполнять действия с векторными многочленами по тем же правилам, по которым выполняются действия с алгебраическими многочленами.

Если известны координаты векторов

$\overline{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ и $\overline{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = \{X_1 \pm X_2, Y_1 \pm Y_2, Z_1 \pm Z_2\}$$
$$\lambda\overline{a} = \{\lambda X_1, \lambda Y_1, \lambda Z_1\}$$

Отсюда легко получить условия коллинеарности двух векторов.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2};$$

Определение. Три вектора $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости.

Любые три некомпланарных вектора образуют в пространстве базис. Это означает, что любой вектор $\overline{d}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\overline{d} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \gamma\overline{c}\,, \qquad (2)$$

где λ, μ, γ – некоторые числа.

Представление (2) называется разложением вектора $\overline{d}$ по базису $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

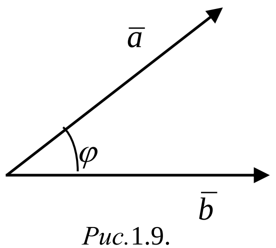


*Рис.*1.9.

Скалярное произведение обозначается $(\overline{a}, \overline{b})$.

Таким образом,

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Учитывая, что $\overline{a}\cos\varphi = np_{\overline{b}}\overline{a}$,а $\overline{b}\cos\varphi = np_{\overline{a}}\overline{b}$, можно записать

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{b}| \cdot np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}| \cdot np_{\overline{a}}\overline{b}\,.$$

Отсюда получаются формулы

$$np_{\bar b}\bar a=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar b|};cos\,\varphi=\frac{(\bar a,\bar b)}{|\bar a||\bar b|}.$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\bar a,\bar b)=(\bar b,\bar a)$.
2. $(\lambda\bar a,\bar b)=\lambda(\bar a,\bar b)$.
3. $(\bar a,\bar b+\bar c)=(\bar a,\bar b)+(\bar a,\bar c)$.

Указанные свойства позволяют находить скалярное произведение векторных многочленов по тем же правилам, по которым перемножаются алгебраические многочлены, например:

$$((2\bar a+5\bar b),(3\bar c+4\bar d))=(2\bar a,3\bar c)+(5\bar b,3\bar c)+(2\bar a,4\bar d)+$$
$$+(5\bar b,4\bar d)=6(\bar a,\bar c)+15(\bar b,\bar c)+8(\bar a,\bar d)+20(\bar b,\bar d).$$

4. $(\bar a,\bar a)=|\bar a|^2$,если $\bar a\neq 0.$

Скалярное произведение $(\bar a,\bar a)$ называется скалярным квадратом вектора $\bar a$ и обозначается $\bar a^2$.Таким образом, $\bar a^2=|\bar a|^2$, откуда, в частности, получаем $|\bar a|=\sqrt{\bar a^2}=\sqrt{(\bar a,\bar a)}.$

5. $\bar a\perp\bar b\Leftrightarrow(\bar a,\bar b)=0$.

Два вектора $\bar a$ и $\bar b$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение равно нулю.

Выражение скалярного произведения через координаты векторов

Если $\bar a=\{X_1,Y_1,Z_1\};\ \bar b=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, то справедливы следующие формулы и утверждения:

$$(\bar a,\bar b)=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2,$$
$$\bar a\perp\bar b\Leftrightarrow X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0,$$
$$cos\,\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}.$$

Векторное произведение векторов

Векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называются компланарными, если они лежат в параллельных плоскостях (или в одной плоскости).

Тройка векторов, приведенных к одному началу, называется упорядоченной, если указанно какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим. Например, в записи $(\overline{b},\overline{c},\overline{a})$ $\overline{b}$ – первый вектор, $\overline{c}$ – второй, $\overline{a}$ – третий.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется правой, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка векторов называется левой.

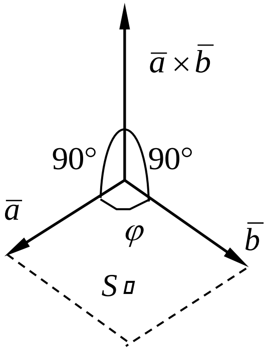


*Рис.*1.10.

Определение. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор, обозначаемый символом $\overline{a}\times\overline{b}$, который определяется следующими условиями:

1) $\left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot sin\varphi$, где $\varphi = (\overline{a},\hat{\ }\overline{b})$;
2) вектор $\overline{a}\times\overline{b}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;
3) векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{a}\times\overline{b}$ образуют правую тройку векторов.

Свойства векторного произведения

1. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю. $\overline{a}\,||\,\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\times\overline{b} = 0$.
2. Модуль векторного произведения $|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|$ равен площади параллелограмма S ,построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. $S = |\,\overline{a}\times\overline{b}\,|$.
3. $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$.
4. $(\lambda\overline{a})\times\overline{b} = \lambda(\overline{a}\times\overline{b})$.

5. $(\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$.

Если $\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$,то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}=\bar{i}\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}-\bar{j}\begin{vmatrix}X_1 & Z_2\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}+\bar{k}\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}$$

Смешанное произведение трех векторов

Определение. Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, $(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))$.

Теорема. Смешанное произведение $(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))$ равно объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятому со знаком «+», если тройка векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая, и со знаком «-», если тройка левая. Если же $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны, то $(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))=0$. Т.е.

$$(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))=\begin{cases} V, \text{если } \bar{a},\bar{b},\bar{c} - \text{правая тройка}\\ -V, \text{если } \bar{a},\bar{b},\bar{c} - \text{левая тройка}\\ 0, \text{если } \bar{a},\bar{b},\bar{c} - \text{коллинеарны}\end{cases}$$

Из теоремы легко получается следующее свойство:

$$(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))=((\bar{a}\times\bar{b}),\bar{c})),$$

которое позволяет обозначать смешанное произведение более простым символом: $\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}$, т.е.

$$(\bar{a},(\bar{b}\times\bar{c}))=((\bar{a}\times\bar{b}),\bar{c}))=\bar{a}\bar{b}\bar{c} .$$

Если $\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$, $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, $\bar{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$, то смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ определяется формулой

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$$

Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Метод Гаусса. Матричный способ

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=5, \\ 5x-6y-4z=-3, \\ -4x+5y+3z=1. \end{cases}$$

1-й способ. По формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta};\, y=\frac{\Delta y}{\Delta};\, z=\frac{\Delta z}{\Delta},$$

где Δ-главный определитель системы, столбцы которого есть коэффициенты при неизвестных

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix}=12;$$

Δx -вспомогательный определитель, который получается из главного заменой 1-го столбца (коэффициентов при *x*) столбцом свободных членов.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}=12;$$

Аналогично получаем Δy и Δz :

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-24 \quad \Delta z=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}=60,$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{12}{12}=1;\; y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-24}{12}=-2;\, z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{60}{12}=5.$$

Если $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение, если $\Delta=0$, а хотя бы один из $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ не равен 0, то система не имеет решений. Если $\Delta=\Delta x=\Delta y=\Delta z=0$, то система имеет множество решений.

2-й способ. Метод Гаусса, или метод исключения неизвестных.

Рассмотрим сначала несколько понятий.

Определение. Рангом матрицы (r) называется наивысший порядок её минора, отличного от нуля.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 6 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Вычислим все миноры третьего порядка:

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & 6 & 2\end{vmatrix}=0,\ M_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & -2 & 5\\ 1 & 6 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0,\ M_4=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 5\\ 6 & 2 & 3\end{vmatrix}=0.$$

Вычислим минор второго порядка:

$$M=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 9\end{vmatrix}=14\neq 0,$$

поэтому ранг матрицы A равен 2:

$$r(A)=rang\,A=2.$$

Рассмотрим более простой способ вычисления ранга матрицы, основанный на приведении матрицы к ступенчатому виду.

Определение. Матрицу A называют ступенчатой, если

а) любая её строка имеет хотя бы один отличный от нуля элемент,

б) первый отличный от нуля элемент каждой её строки, начиная со второй, расположен правее неравного нулю элемента предыдущей строки.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix};A_2=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования её строки:

а) перестановка двух каких-нибудь строк;

б) умножение элементов какой-либо строки на число, отличное от нуля;

в) прибавление к элементам какой-либо строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на некоторое число.

Пример.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 4 & 5\\ 1 & 6 & 2 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 6 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 4 & 5\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 6 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1-1 & 6-2 & 2-3 & 3-4\\ -1+1 & 2+2 & -4+3 & -5+4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы (ступенчатый вид) видно, что $r=2$.

Приведем несколько утверждений без доказательств.

Теорема 1. При элементарных преобразованиях и отбрасывании нулевой строки ранг матрицы не изменяется.

Теорема 2. Всякую ненулевую матрицу можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований и выбрасывания нулевых строк.

Теорема 3. Ранг ненулевой матрицы равен числу строк её ступенчатого вида.

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}.$$

Определение. Матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных системы, называется матрицей системы.

Определение. Матрица называется расширенной матрицей системы, если к матрице A присоединить столбец из свободных членов системы.

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right).$$

Расширенная матрица- это закодированная запись системы. Строки матрицы соответствуют уравнениям системы. Умножение уравнения на число и сложение этого произведения с другим уравнением эквивалентно умножению строки матрицы на это число и почленному сложению произведения с другой строкой матрицы. Таким образом, работу с уравнениями мы можем заменить работой со строками матрицы.

Эффективным методом решения и исследования системы линейных уравнений является метод исключения неизвестных, называемый также методом Гаусса. Он состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему ступенчатого вида (или, в частности, треугольную систему), которая легко исследуется и решается. Применение метода Гаусса не зависит ни от числа уравнений, ни от числа неизвестных в системе.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$,которую запишем в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Заметим, что иногда могут встречаться уравнения, все коэффициенты которых (т.е. соответствующая строка матрицы) равны 0:

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + ... + 0\cdot x_n = b.$$

Если в этом уравнении $b \neq 0$, то ему, очевидно, не удовлетворяют никакие значения неизвестных, и система, содержащая хотя бы одно такое уравнение, несовместна, т.е. не имеет решения. Если же $b = 0$, то ему удовлетворяют любые решения неизвестных, т.е. рассматриваемое уравнение является тождеством и его можно удалить из системы.

Элементарные преобразования матрицы, рассмотренные ранее, можно производить и над расширенной матрицей системы, поэтому в дальнейшем будем говорить об элементарных преобразованиях, не делая различий между уравнениями системы и строками расширенной матрицы.

Разберём идею метода Гаусса на конкретных примерах.

Пример 2.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 14x_4 = 10. \end{cases}$$

Решение.

I этап: запишем систему в виде расширенной матрицы

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 6 & -14 & 10 \end{array}\right)$$

II этап: исключим с помощью первого уравнения x из остальных уравнений. Для этого домножим первую строку на –3 и сложим её со второй, затем умножим первую строку на –2 и сложим её с третьей.

Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Последняя строка состоит из нулей, если её расписать в виде уравнения, то получим

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.$$

Это уравнение является тождеством, поэтому его нет смысла оставлять в системе.

Раскодируем полученную матрицу:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ -8x_3 + 17x_4 = -8. \end{cases}$$

Выразим из второго уравнения x_3:

$$x_3 = \frac{8 + 17x_4}{8} = 1 + \frac{17}{8}x_4.$$

Подставим в первое уравнение вместо x_3 его выражение через x_4 и выразим x_1:

$$2x_1 - x_2 + 3 + \frac{51}{8}x_4 - 7x_4 = 5,$$

$$2x_1 - x_2 - \frac{5}{8}x_4 = 2\,,$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{16}x_4\,.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_3 = 1 + \frac{17}{8}x_4, \\ x_1 = 1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{16}x_4\,. \end{cases}$$

Получим так называемое общее решение системы, которое является формулой для получения конкретных её решений. Эти конкретные решения системы называются частными решениями. Получают их следующим образом: придавая переменным x_2, x_4 произвольные значения и находя по этим значениям x_1 и x_3, всякий раз находят решение системы. Так как x_2 и x_4 можно придавать произвольные значения, то эти переменные называются свободными. Неизвестные x_1 и x_3, значения которых вычисляются по значениям x_2 и x_4, называются базисными.

Получим одно из частных решений в предыдущем примере.
Пусть $x_4 = 8$, а $x_2 = 1$, тогда $x_3 = 18$, $x_1 = 4$.

Ответ: $\{4{,}1{,}18{,}8\}$-частное решение.

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение.

Закодируем систему и приведем матрицу к треугольному виду

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 16 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \\ 0 & -2 & -10 & -14 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом, заданная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ \quad x_2 + 2x_3 = 4, \\ \qquad 3x_3 = 3. \end{cases}$$

Находим $x_3 = 1$ из последнего уравнения, затем $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2 = 2$ из второго, и наконец, из первого:

$$x_1 = 10 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 3.$$

Ответ: $\{3,2,1\}$.

Пример 4.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 8x_1 - 14x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу и упростим её:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 8 & -14 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 2 \\ 0 & 10 & -5 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

Полученная система

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 10x_2 - 5x_3 = 2, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 0 \cdot x_3 = 8 \end{cases}$$

несовместна, так как её последнее уравнение не имеет смысла. Следовательно, исходная система также несовместна.

Матричный способ решения систем.

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных и столбец свободных членов, соответственно.

Тогда систему можно записать в матричной форме:

$$AX = B$$

Пусть матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Умножим матричное уравнение на A^{-1},получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Заметив, что $A^{-1}AX = EX = X$, получим

$$X = A^{-1}B$$ -решение матричного уравнения.

Переходя к координатной записи в последнем равенстве, выпишем решение исходной системы уравнений.

Построение обратной матрицы

Обратная матрица существует только для квадратной матрицы, определитель которой не равен нулю. Такая матрица называется невырожденной.

Пусть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - невырождена, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Построим союзную матрицу $\tilde{A}$, которая составлена из алгебраических дополнений элементов матрицы A, причём в столбцах матрицы A записываются алгебраические дополнения соответствующих строк этой матрицы.

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}, \text{ где}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}; A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица A^{-1} имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Решим систему (см. пример 1) матричным способом.

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 5, \\ 5x - 6y - 4z = -3, \\ -4x + 5y + 3z = 1. \end{cases}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение $AX = B$.

Составим обратную матрицу A^{-1}.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Выпишем все алгебраические дополнения для данной матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -6 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2; A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2; A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 1; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 17; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 22;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 1; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -31; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -38.$$

Составим матрицу A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 22 \\ 1 & -31 & -38 \end{pmatrix}$$

Решим матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 17 & 22 \\ 1 & -31 & -38 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + (-2)(-3) + (-4) \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 + 17 \cdot (-3) + 22 \cdot 1 \\ 1 \cdot 5 - 31 \cdot (-3) - 38 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 \\ -24 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем решение системы:

$x = 1; y = -2; z = 5.$

Ответ: $\{1,-2,5\}$

Замечание.

Аналогично, матричным способом, можно решать любые системы n уравнений с n неизвестными, если только определитель системы не равен нулю.

Контрольная работа №1 по теме

«ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ»

1.1. Вычислить определитель.

1.1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.1.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 9 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.1.3. $\begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 11 \end{vmatrix}$

1.1.4. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 \\ -4 & -3 & 7 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ 1.1.5 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 5 & 10 & 11 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix}$ 1.1.6. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 9 & 7 \\ 15 & 19 & 18 \end{vmatrix}$

1.1.7. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 12 \\ 3 & 6 & -5 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.1.8 $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 9 & 7 & 5 \end{vmatrix}$ 1.1.9. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -5 \\ 22 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

1.1.10. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 2 & 7 & 11 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

1.2. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными тремя способами: методом Гаусса, по формулам Крамера и матричным способом.

1.2.1. $\begin{cases} x - 5z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = 5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ 1.2.2. $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + 2y - 5z = -13 \\ 3x + 5y + 5z = 22 \end{cases}$

1.2.3. $\begin{cases} x - 6y = 8 \\ 3x + 6z = 24 \\ 4x + 7z = 29 \end{cases}$ 1.2.4. $\begin{cases} x - y + 2z = 8 \\ 2x + 6y - 9z = -18 \\ 3x - y + 3z = 16 \end{cases}$

1.2.5. $\begin{cases} x+y-2z=4 \\ 2x-y+z=0 \\ x+3y-z=5 \end{cases}$

1.2.6. $\begin{cases} 2x-3y+z=-4 \\ x-y+2z=3 \\ 3x-5z=-21 \end{cases}$

1.2.7. $\begin{cases} x+2y-z=-6 \\ 2x+3z=11 \\ 3y-5z=-21 \end{cases}$

1.2.8. $\begin{cases} x+y-z=-4 \\ x-y+z=6 \\ x-2y+2z=11 \end{cases}$

1.2.9. $\begin{cases} 3x-y+z=-2 \\ 3y-2z=12 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

1.2.10. $\begin{cases} x+6y-2z=17 \\ 4x-y+5z=-21 \\ x+3y-z=8 \end{cases}$

1.2. Вычислить $A^2+2AB-BA$.

1.3.1.
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.3.2.
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3.
$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.4.
$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.5.
$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1.3.7. $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.3.8. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1.3.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1.3.10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

1.4. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$.

1. Показать, что $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.
2. Найти: а) $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}$;

   б) $|\bar{a}+3\bar{c}|$;

   в) $(\bar{a}+\bar{b}, \bar{c})$;

   г) $(\bar{a}+2\bar{b})\times(\bar{c}-2\bar{d})$;

   д) $\bar{a}\bar{b}\bar{d}$;

   е) угол между векторами $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

1.4.1. $\bar{a}=\{1,2,3\}$; $\bar{b}=\{-1,3,2\}$; $\bar{c}=\{7,-3,5\}$; $\bar{d}=\{6,10,17\}$

1.4.2. $\bar{a}=\{9,1,3\}$; $\bar{b}=\{4,7,8\}$; $\bar{c}=\{2,-4,1\}$; $\bar{d}=\{1,-13,-13\}$

1.4.3. $\bar{a}=\{8,2,3\}$; $\bar{b}=\{3,-2,1\}$; $\bar{c}=\{4,6,10\}$; $\bar{d}=\{7,4,11\}$

1.4.4. $\bar{a}=\{3,9,2\}$; $\bar{b}=\{10,3,1\}$; $\bar{c}=\{1,4,2\}$; $\bar{d}=\{19,30,7\}$

1.4.5. $\bar{a}=\{2,4,1\}$; $\bar{b}=\{5,3,1\}$; $\bar{c}=\{1,3,6\}$; $\bar{d}=\{24,20,6\}$

1.4.6. $\bar{a}=\{4,8,5\}$; $\bar{b}=\{1,7,3\}$; $\bar{c}=\{3,4,2\}$; $\bar{d}=\{7,32,14\}$

1.4.7. $\bar{a}=\{-1,2,-3\}$; $\bar{b}=\{6,4,2\}$; $\bar{c}=\{4,7,2\}$; $\bar{d}=\{14,18,6\}$

1.4.8. $\bar{a}=\{6,8,5\}$; $\bar{b}=\{1,4,3\}$; $\bar{c}=\{3,1,4\}$; $\bar{d}=\{21,18,33\}$

1.4.9. $\bar{a}=\{-2,7,-4\}$; $\bar{b}=\{2,7,3\}$; $\bar{c}=\{3,7,2\}$; $\bar{d}=\{16,14,27\}$

1.4.10. $\bar{a}=\{4,3,5\}$; $\bar{b}=\{-3,-4,2\}$; $\bar{c}=\{7,2,1\}$; $\bar{d}=\{-2,5,13\}$

1.5. Даны точки A, B, C, D

1. Показать, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.
2. Вычислить: а)объем пирамиды ;

   б)длину ребра $\overline{AB}$;

   в) площадь грани ABC ;

   г)угол между гранями AB и CD.

1.5.1. $A(0,7,2)$; $B(0,2,7)$; $C(4,2,5)$; $D(1,5,0)$;

1.5.2. $A(4,4,10)$; $B(4,10,2)$; $C(2,8,4)$; $D(9,6,4)$;

1.5.3. $A(4,6,5)$; $B(6,9,4)$; $C(2,10,10)$; $D(7,5,9)$;

1.5.4. $A(3,5,4)$; $B(8,7,4)$; $C(5,10,4)$; $D(4,7,8)$;

1.5.5. $A(10,6,6)$; $B(-2,8,2)$; $C(6,8,9)$; $D(7,10,3)$;

1.5.6. $A(5,2,6)$; $B(5,7,4)$; $C(4,10,9)$; $D(1,8,2)$;

1.5.7. $A(6,9,3)$; $B(4,6,11)$; $C(4,9,5)$; $D(6,6,5)$;

1.5.8. $A(5,3,1)$; $B(5,7,7)$; $C(7,2,2)$; $D(2,3,7)$;

1.5.9. $A(10,5,5)$; $B(8,6,4)$; $C(8,10,7)$; $D(5,6,8)$;

1.5.10. $A(6,5,8)$; $B(7,7,3)$; $C(8,4,1)$; $D(3,5,8)$;

Контрольные вопросы к экзамену

1. Матрицы и действия над ними.
2. Обратная матрица.
3. Определители и их свойства, вычисление (на примере определителей третьего порядка).
4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
5. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
6. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
7. Векторы, координаты вектора, модуль, направляющие косинусы.
8. Линейные операции над векторами.
9. Скалярное произведение векторов, свойства, вычисление, приложение к геометрическим задачам.
10. Векторное произведение векторов, свойства, вычисление, применение к геометрическим задачам.
11. Смешанное произведение векторов, свойства, вычисление, приложение к геометрическим задачам.

Тема 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Программный объем темы:

1. Декартова и полярная системы координат. Переход из одной системы в другую.
2. Параллельный перенос координатных осей.
3. Основные виды уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Основные виды уравнения плоскости.
4. Кривые второго порядка, их канонические уравнения и графики. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду.

ДЕКАРТОВА И ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Если на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x, y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется ее расстоянием $|0M| = \rho$ от полюса ρ (ρ - полярный радиус-вектор точки). Угол φ считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось OX направить по полярной оси, то прямоугольные координаты x и y точки M и ее полярные координаты ρ и φ связаны следующими формулами:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

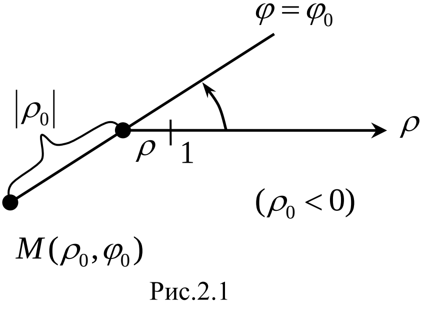


Рис.2.1

Так как ρ – расстояние, то $\rho \geq 0$. Обычно это ограничение снимают. Тогда получается обобщенная полярная система координат. Положение точки $M_0(\rho_0, \varphi_0), \rho_0 < 0$ в такой системе определяется следующим образом. Проводим из полюса луч $\varphi = \varphi_0$, продляем его за полюс и на его продолжении откладываем отрезок, равный по длине $|\rho_0|$ (рис 2.1).

В задании 2.5 кривые требуется построить в обобщенной полярной системе координат.

Пример.

В обобщенной полярной системе координат построить кривую $\rho = \cos\varphi$.

Для решения задачи следует найти точки, лежащие на кривой, давая φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ значения через какой-то промежуток (чем меньше промежуток, тем точнее можно построить кривую, но тем больше объем вычислительной работы). Результат построения – окружность с диаметром $d=1$ – приведен на рис. 2.2. Там же показаны две точки, M_1 и M_2, принадлежащие этой окружности, способ построения которых ясен из рисунка. Любые другие точки этой кривой строятся аналогично.

Всякой линии на плоскости xOy, рассматриваемой как множество точек, соответствует некоторое уравнение, в которое входят координаты любой точки $M(x, y)$ ("текущей точки"), лежащей на этой линии. Такое уравнение называется уравнением данной линии.

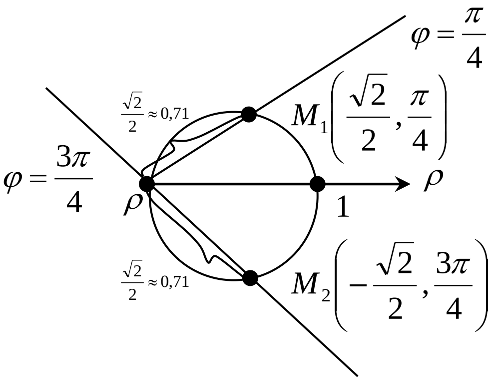


Рис.2.2

Чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих одинаковым свойством, нужно:

1) взять произвольную (текущую) точку $M(x, y)$ линии,

2) записать равенством общее свойство всех точек M линии,

3) входящие в это равенство отрезки (и углы) выразить через текущие координаты точки $M(x, y)$ и через данные в задаче.

Пример. В декартовой прямоугольной системе координат вывести уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек $A(-3,4)$ и $B(3,4)$ есть величина постоянная, равная 47.

Решение.

Обозначим буквой M произвольную точку линии.

x и y - текущие координаты этой точки.

Запишем геометрическое свойство линии символически.

$$(MA)^2+(MB)^2=47\,. \tag{1}$$

Выразим MA и MB через текущие координаты точки M :

$$MA=\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2};MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}.$$

Подставив полученные выражения в равенство (1), найдем уравнение, связывающее координаты x, y точки M :

$$(x+3)^2+(y-4)^2+(x-3)^2+(y+2)^2=47.$$

Упростим последнее уравнение:

$$x^2+6x+9+y^2-8y+16+x^2-6x+9+y^2+4y+4=47\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y+38=47\Rightarrow 2x^2+2(y^2-2y-\frac{9}{2})=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+((y^2-2y+1)-1-\frac{9}{2})=0\Rightarrow x^2-(y-1)^2-\frac{11}{2}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=\frac{11}{2}.$$

Получили уравнение окружности с центром в т. (0,1) и радиусом $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат xOy может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax+By+C$ - общее уравнение прямой.

A, B - координаты нормального вектора $\overline{n}=\{A, B\}$ прямой (вектора, перпендикулярного данной прямой).

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}$.

3) $y=kx+b$ - уравнение с угловым коэффициентом, где b - отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy, $k=-\dfrac{A}{B}$ или $k=\operatorname{tg}\varphi$, где φ - угол наклона прямой к оси Ox.

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через данную т. $M_0(x_0, y_0)$.

5) $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}$ - каноническое уравнение прямой, или уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\overline{q} = \{l, m\}$.

6) $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = x_0 + mt \end{cases}$ $t \in (-\infty, \infty)$ - параметрические уравнения прямой, t - параметр.

7) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой в отрезках, где a и b - величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях OX и OY соответственно.

8) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Угол между двумя прямыми можно найти, зная угловые коэффициенты прямых: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

Условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$, или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

ПЛОСКОСТЬ

Плоскость α в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением одного из следующих видов:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ - общее уравнение плоскости, $\overline{N} = \{A, B, C\}$ - нормальный вектор плоскости, A, B, C - его координаты;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\overline{N}=\{A,B,C\}$.

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ - уравнение плоскости в отрезках, где a,b,c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат Ox,Oy,Oz соответственно.

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки: $M_1(x_1,y_1,z_1),\ M_2(x_2,y_2,z_2),\ M_3(x_3,y_3,z_3)$.

ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в пространстве может быть задана:

1) общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

т.е. системой уравнений двух пересекающихся плоскостей.

2) параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}$$

где x_0,y_0,z_0 - координаты данной точки, а l,m,n – координаты направляющего вектора прямой $\overline{S}=\{l,m,n\}$, т.е. вектора, параллельного данной прямой;

3) каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};$$

4) уравнениями прямой, проходящей через две точки:

$$M_1(x_1,y_1,z_1) \text{ и } M_2(x_2,y_2,z_2):$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Угол φ между плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Условие параллельности плоскостей: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, определяемой уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, можно найти по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Угол между двумя прямыми в пространстве, заданными их каноническими уравнениями, определяется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^{\,2}+m_1^{\,2}+n_1^{\,2}}\cdot\sqrt{l_2^{\,2}+m_2^{\,2}+n_2^{\,2}}};$$

условие параллельности двух прямых: $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$; условие перпендикулярности двух прямых: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$. Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

условие параллельности прямой и плоскости: $Al+Bm+Cn=0$;

условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$.

При решении задач надо уметь переходить от общих уравнений прямой в пространстве к каноническим.

Пример.

По уравнениям плоскостей $\begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0, \\ 3x + y - 4z - 3 = 0, \end{cases}$

образующих прямую, составить ее уравнения в каноническом виде. Решение. Определим координаты одной точки прямой: положим $x_0 = 1$, тогда для значений y_0 и z_0 решим систему уравнений $\begin{cases} -y + z = 3 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = -1; y = -4.$

Теперь канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y+4}{m} = \frac{z+1}{n}.$$

Направляющий вектор $\overline{S} = \{l, m, n\}$ искомой прямой будет перпендикулярен нормальным векторам $\overline{N}_1 = \{2; -1; 1\}$ и $\overline{N}_2 = \{3; 1; -4\}$ данных плоскостей, следовательно, его координаты можно найти, используя векторное произведение.

$$\overline{S} = \overline{N}_1 \times \overline{N}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 3\overline{i} + 11\overline{j} + 5\overline{k}, \text{ т.е. } \overline{S} = \{3; 11; 5\}.$$

Канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Определение кривой второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат.

В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $A, 2B, C, 2D, 2E$ и F — действительные числа и, кроме того, по крайней мере одно из чисел: A, B или C отлично от нуля. Коэффициенты при xy, x и y обозначены соответственно через $2B, 2D$ и $2E$ для удобства преобразований уравнения. Известно, что уравнение окружности с центром в точке $M(x_0, y_0)$ и радиуса R имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$

Это уравнение второй степени относительно x и y. Следовательно, окружность есть кривая второго порядка. Далее будут рассмотрены четыре кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

2. Окружность

Раскрыв скобки в уравнении (2) и выполнив некоторые тождественные преобразования, мы получим уравнение окружности в следующем виде:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0.$$

При сравнении этого уравнения с общим уравнением (1) кривой второго порядка легко заметить, что для уравнения окружности выполнены два условия: 1) отсутствует член с произведением координат xy; 2) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой.

Пример. Показать, что уравнение $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ определяет окружность, и найти координаты ее центра и радиус.

Решение. Условия $A=C=1$ и $2B=0$ здесь выполняются. Преобразуем данное уравнение:

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)-1-4-11=0,$$

или

$$(x-1)^2+(y+2)^2=16.$$

Мы получили уравнение окружности с центром $O_1(1;-2)$ и радиусом $R=4$.

Пример. Показать, что уравнение $x^2+y^2+6x-6y+22=0$ не определяет никакой линии.

Решение. Преобразуем это уравнение:

$$(x^2+6x+9)+(y^2-6y+9)-9-9+22=0,$$

или

$$(x+3)^2+(y-3)^2=-4.$$

Теперь ясно, что данное уравнение не определяет никакой линии.

3. Эллипс

Определение. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина* (при условии, что эта величина больше расстояния между фокусами).

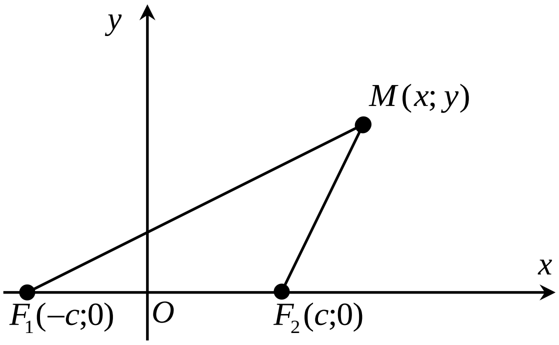


Рис. 2.3

Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними – через $2c$, а постоянную величину, равную сумме расстояний от каждой точки эллипса до фокусов, – через $2a$ (по условию $2a > 2c$).

Построим декартову систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 оказались на оси абсцисс, а начало координат совпало с серединой отрезка F_1F_2 (рис.2.3). Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: левый фокус $F_1(-c;0)$ и правый фокус $F_2(c;0)$. Выведем уравнение эллипса в выбранной нами системе координат. С этой целью рассмотрим произвольную точку $M(x;y)$ эллипса. По определению эллипса сумма расстояний от этой точки до фокусов F_1 и F_2 равна $2a$:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Пользуясь формулой для расстояния между двумя точками, получим $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Для упрощения этого уравнения запишем его в форме

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возведя затем обе части уравнения в квадрат, получим

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

или, после очевидных упрощений:

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Теперь опять возводим обе части уравнения в квадрат, после чего будем иметь

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$$

или после тождественных преобразований:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Так как согласно условию в определении эллипса $2a > 2c$, то $a^2 - c^2$ — число положительное. Введем обозначение

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Тогда уравнение примет следующий вид:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

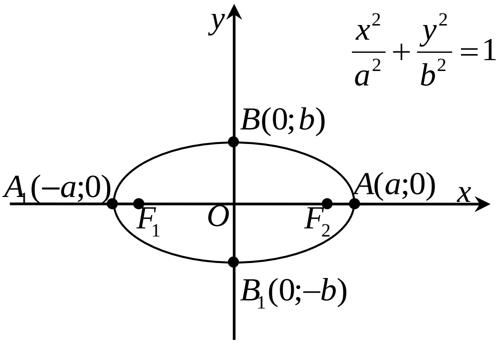


Рис. 2.4

Можно показать, что эллипс имеет форму, изображенную на рис. 2.4. Точки пересечения эллипса с осями называются *вершинами* эллипса. Из симметрии эллипса следует, что, кроме вершин $A(a;0)$ и $B(0;b)$, эллипс имеет еще две вершины: $A_1(-a;0)$ и $B_1(0;-b)$ (см. рис. 2.4). Отрезки AA_1 и BB_1, соединяющие противоположные вершины эллипса, а также их длины $2a$ и $2b$, называются соответственно *большой* и *малой осями* эллипса. Числа a и b называются соответственно *большой* и *малой* *полуосями* эллипса. Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса и обозначается обычно буквой ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как $c < a$, то эксцентриситет эллипса меньше единицы: $\varepsilon < 1$.

Пример. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось $a=5$ и эксцентриситет $\varepsilon=0{,}6$.

Решение. По условию $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=0{,}6$. Следовательно, половина расстояния между фокусами $c=a\cdot 0{,}6=5\cdot 0{,}6=3$. Но тогда квадрат малой полуоси эллипса $b^2=a^2-c^2=25-9=16$. Таким образом, искомое каноническое уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Пример. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2;-3)$ и имеющего большую полуось $a=4$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса при $a=4$ имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Этому уравнению должны удовлетворять координаты точки $M_1(2;-3)$. Следовательно,

$$\frac{2^2}{16}+\frac{(-3)^2}{b^2}=1.$$

Найдя отсюда $b^2=12$ и подставив его в уравнение, получим искомое каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

4. Гипербола

Определение. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости; называемых фокусами, есть постоянная величина, при условии, что эта величина не равна нулю и меньше расстояния между фокусами.*

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через $2c$, а постоянную величину, равную модулю разности расстояний от каждой точки гиперболы до фокусов, через $2a$ (по условию $0<2a<2c$). Как и в случае эллипса, ось абсцисс проведем через фокусы, а за начало координат примем середину отрезка F_1F_2 (см. рис. 2.3). Фокусы в такой системе будут иметь координаты $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$. Выведем уравнение гиперболы в выбранной системе координат. По определению гиперболы для любой ее точки $M(x,y)$ имеем $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$, или

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Но $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Поэтому получим

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

После упрощений, подобных тем, которые были сделаны при выводе уравнения эллипса, получим следующее уравнение:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

Нетрудно заметить, что это уравнение совпадает с уравнением, полученным для эллипса. Однако здесь разность $a^2 - c^2 < 0$, так как для гиперболы $2a < 2c$. Поэтому положим

$$c^2 - a^2 = b^2.$$

Тогда последнее уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

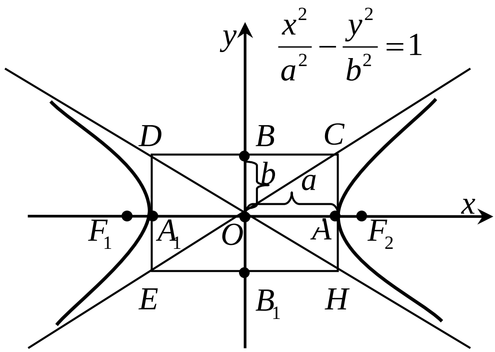


Рис. 2.5

Форма гиперболы и способ её построения показаны на рис. 2.5. Точки $A(a;0)$ и $A_1(-a;0)$ – вершины гиперболы. Прямые EC и EX, имеющие уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$, называются асимптотами гиперболы.

Отношение половины расстояния между фокусами к действительной полуоси гиперболы называется *эксцентриситетом* гиперболы и обозначается обычно буквой ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как для гиперболы $c > a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы $\varepsilon > 1$.

Пример. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная что расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет равен $\frac{13}{12}$.

Решение. По условию $2c = 26$ и $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$. Следовательно, большая полуось гиперболы $a = \frac{12}{13} \cdot c = \frac{12}{13} \cdot \frac{26}{2} = 12$. Согласно формуле малая полуось гиперболы $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

Уравнение гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Пример. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, проходит через точки $M_1\left(-3; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_2(4;-2)$. Найти ее каноническое уравнение.

Решение. Напишем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты точек $M_1\left(-3; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $M_2(4;-2)$. Следовательно,

$$\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\frac{9}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1 \text{ и } \frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1.$$

Отсюда находим $a^2=8$ и $b^2=4$ и подставляем их в каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$$

5. Парабола

Определение. *Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой*. (Предполагается, что фокус не лежит на директрисе.)

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p. Эта величина называется *параметром* параболы.

Выведем уравнение параболы. Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу (рис. 2.6). За начало координат выберем середину перпендикуляра FR, опущенного из фокуса на директрису. В выбранной таким образом системе координат фокус будет иметь координаты $F\left(\frac{p}{2};0\right)$. Уравнение директрисы будет иметь следующий вид:

$$x=-\frac{p}{2}.$$

Пусть $M(x;y)$ — точка параболы. По определению параболы, расстояние MN точки $M(x;y)$ от директрисы равно ее расстоянию MF от фокуса: $MN=MF$.

Из рис. 2.6 ясно, что $MN=NQ+QM=\frac{p}{2}+x,$ а $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$. Следовательно,

$$\frac{p}{2}+x=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

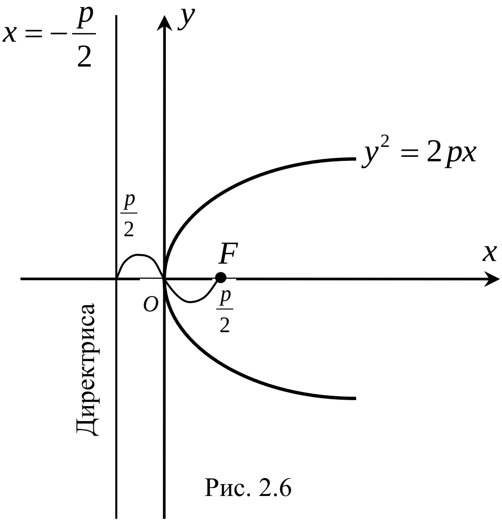


Рис. 2.6

или, после упрощений:

$$y^2=2px.$$

Полученное уравнение называется *каноническим уравнением параболы*. Ему, очевидно, удовлетворяют координаты любой точки параболы. Можно показать, что координаты точек, не лежащих на параболе, уравнению не удовлетворяют.

Парабола, определяемая уравнением $y^2=2px$ имеет вид, изображенный на рис. 2.6.

Ось симметрии параболы называется *фокальной осью*. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее *вершиной*. В данном случае вершина параболы совпадает с началом координат.

Пример. Дана парабола $y^2=6x$. Составить уравнение ее директрисы и найти ее фокус.

Решение. Сравнивая данное уравнение с каноническим уравнением параболы, видим, что $2p=6,\ \ p=3$. Так как директриса параболы имеет уравнение $x=-\frac{p}{2}$, а фокус — координаты $\frac{p}{2}$ и 0, то уравнение директрисы $x=-\frac{3}{2}$, а фокус $F\left(\frac{3}{2};0\right)$.

Замечание. Если фокальную ось параболы принять за ось ординат, то уравнение параболы примет вид

$$x^2 = 2py.$$

Уравнение второй степени вида

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

(не содержащее члена xy с произведением координат) называется пятичленным уравнением кривой второго порядка.

Причем, если $AC > 0$, то определяемая этим уравнением кривая есть эллипс.

Если $AC < 0$, то соответствующая кривая является гиперболой, которая может вырождаться в две пересекающиеся прямые, если левая часть уравнения распадается на произведение двух линейных множителей.

Если $AC = 0$ (т.е. либо $A = 0, C \neq 0$, либо $C = 0, A \neq 0$), то уравнение определяет параболу, которая может вырождаться в две параллельные прямые, если левая часть уравнения не содержит либо x, либо y.

Вид кривой и расположение ее на плоскости легко устанавливаются преобразованием пятичленного уравнения к виду $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = f$ (т.е. группируем в скобки члены с одноименными координатами и дополняем выражения в скобках до полных квадратов). Затем переносим начало координат в точку $O_1(x_0, y_0)$, сохраняя направление осей координат (параллельный перенос). Таким образом получаем канонический вид кривой второго порядка.

Пример. Уравнение кривой второго порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду:

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 8 = 0$$

Решение.

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = +8;$$

$$(x^2 - 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 2y + 1 - 1) = +8;$$

$$(x - 2)^2 - 4 + 4(y - 1)^2 - 4 = +8;$$

$$(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 16;$$

$$\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1.$$

Произведем параллельный перенос осей координат, приняв за новое начало координат точку $O^{/}(2;1)$. Относительно новых осей уравнение кривой примет вид $\dfrac{x^{/2}}{16}+\dfrac{y^{/2}}{4}=1$. Таким образом, заданная кривая является эллипсом с полуосями $a=4$; $b=2$. (рис. 2.7).

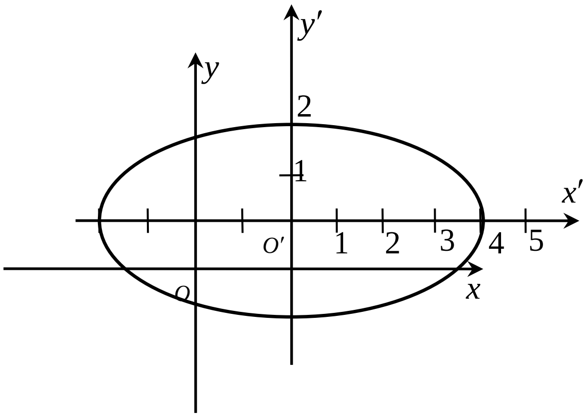


Рис. 2.7

Приведение к каноническому виду уравнения второй степени, содержащего член с произведением переменных, значительно сложнее. Этот вопрос подробно рассмотрен в литературе [1].

В заключение этой темы рассмотрим два примера на определение уравнения геометрического места точек.

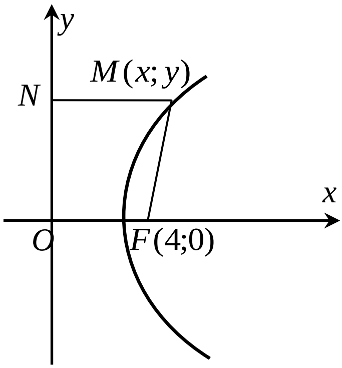


Рис. 2.8

Пример. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от оси Oy и от точки $F(4;0)$.

Решение. Пусть точка $M(x;y)$ лежит на искомом геометрическом месте точек (черт. 2.8). Тогда согласно условию задачи $MF=MN$, $MF=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$, $MN=x$.

В силу равенства

$$MF=MN$$

имеем:

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=x,$$

или

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = x^2,$$

и окончательно: $y^2 = 8x - 16$.

Искомое геометрическое место точек есть парабола, симметричная оси Ox и с фокусом в точке $(4;0)$ (рис. 2.8).

Покажем, что координаты точки, не принадлежащей нашему геометрическому месту, т. е. параболе, не удовлетворяют найденному уравнению $y^2 = 8x - 16$.

Предположим, что точка $M(x, y)$ не принадлежит искомому геометрическому месту. Тогда либо $MF > MN$, либо $MF < MN$.

Пусть, например, $MF > MN$. Тогда $\sqrt{(x-4)^2 + y^2} > x.$

После возведения в квадрат, раскрытия скобок и переноса всех членов влево, получим: $y^2 - 8x + 16 > 0$.

Следовательно, точка $M(x, y)$ не удовлетворяет уравнению геометрического места $y^2 = 8x - 16$.

Для случая $MF < MN$ доказательство аналогично.

Пример. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(4;0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-8;0)$.

Решение. Пусть точка $M(x, y)$ лежит на искомой траектории. Тогда, согласно условию, $2MA = MB$.

Расстояние $MA = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$,

расстояние $MB = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$.

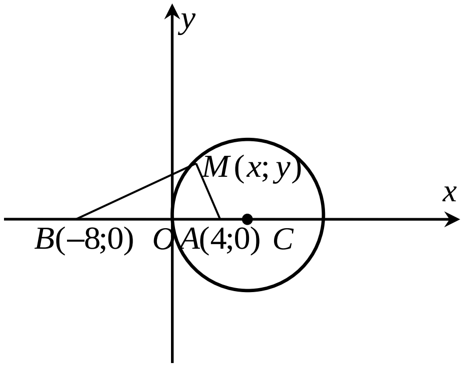


Рис. 2.9

В силу равенства $2MA = MB$ имеем:

$$2\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}.$$

Возводим правую и левую части равенства в квадрат, получаем

$$4[(x-4)^2 + y^2] = (x+8)^2 + y^2.$$

После преобразования получим

$$x^2 + y^2 - 16x = 0.$$

Таким образом, искомая траектория точки M — окружность (рис.2.9).

Контрольная работа № 2 по теме

"АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ"

2.1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A, B, C.

Найти:

1) уравнение стороны AD;

2) уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты;

3) уравнение диагонали BD;

4) площадь параллелограмма;

5) угол между диагоналями параллелограмма;

2.1.1. $A(2;8), B(-4;-6), C(-3;2)$,

2.1.2. $A(5;1), B(3;-4), C(2;7)$,

2.1.3. $A(2;3), B(4;5), C(6;-1)$,

2.1.4. $A(-4;1), B(2;-3), C(4;-2)$,

2.1.5. $A(2;5), B(3;4), C(7;3)$,

2.1.6. $A(4;2), B(3;-1), C(4;3)$,

2.1.7. $A(8;-6), B(7;5), C(-9;-1)$,

2.1.8. $A(2;-3), B(6;-3), C(5;-5)$,

2.1.9. $A(2;-3), B(2;3), C(7;8)$,

2.1.10. $A(-3;3), B(5;-1), C(5;5)$.

2.2. Задачи на уравнения прямой и плоскости в пространстве.

2.2.1. Даны две точки: $M_1(2;-2;3)$ и $M_2(4;0;4)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. M_1 перпендикулярно к вектору M_1M_2.

2.2.2. Составить уравнение плоскости, которая проходит через т. $M_1(2;-3;5)$ параллельно плоскости $3x+2y-4z+7=0$.

2.2.3. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через т. $M_1(3;0;-2)$ параллельно прямой $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$.

2.2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $A(2;5;-4)$ параллельно двум векторам: $\bar{a}_1=\{2,3,1\}$ и $\bar{a}_2=\{3,-1,2\}$.

2.2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(2;-1;3)$, $M_2(5;-2;7)$, $M_3(3;0;3)$.

2.2.6. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $M_0(3;-2;-7)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z+4=0$.

2.2.7. Найти угол между прямыми $\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z+5}{2}$; $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+5}{3}$.

2.2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через т. $M_0(3;-2;-7)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+7}{-3}$.

2.2.9. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{4}$; $5x-3y+2z-3=0$.

2.2.10. При каком значении l прямая $\frac{x-2}{2}=\frac{y-5}{4}=\frac{z+1}{l}$ параллельна плоскости $2x+5y-3z+5=0$?

2.3. Уравнение кривой 2-го порядка путем выделения полного квадрата привести к каноническому виду. Построить кривую.

2.3.1. $5x^2+2y^2-12x+4y=0$.

2.3.2. $3x^2+12y^2-4x+16y+7=0$.

2.3.3. $x^2-2y+4x+9=0$.

2.3.4. $2x^2-6x+4y^2+3y-8=0$.

2.3.5. $3x^2-2x+3y-5=0$.

2.3.6. $4x^2+3y^2+2x-4y+7=0$.

2.3.7. $5x^2+2x-y^2+4y+6=0$.

2.3.8. $3x-2y^2+6y-3=0$.

2.3.9. $8x^2+12y-4x+15=0$.

2.3.10. $4x^2-3y+2y^2+8x=12$.

2.4.1. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от т. $M(9;0)$ и от оси Oy.

2.4.2. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от т. $A(0,3)$ и от оси Ox.

2.4.3. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от начала координат и точки $B(-2;7)$.

2.4.4. Составить уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых до точек $F_1(-2;0)$ и $F_2(3;0)$ равна 5.

2.4.5. Найти уравнение траектории т. M, которая при своем движении остается вдвое дальше от т. $A(-4;0)$, чем от прямой $x=-5$.

2.4.6. Найти уравнение траектории т. A, которая в каждый момент движения находится вдвое дальше от т. $B(5;0)$, чем от оси абсцисс.

2.4.7. Составить уравнение геометрического места точек, каждая из которых одинаково удалена от т. $A(2;-3)$ и т. $B(-4;5)$.

2.4.8. Составить уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от начала координат и от прямой $x=2$.

2.4.9. Составить уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых от точки $M(3;0)$ и точки $N(0,3)$ равна квадрату расстояний между точками M и N.

2.4.10. Составить уравнение геометрического места точек, равно удаленных от оси Oy и от точки $F(5;0)$.

2.5. Даны кривые, описанные уравнениями в обобщенной полярной системе координат. Требуется:

1) найти точки, лежащие на кривой, давая φ значения через промежуток, равный $\frac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi=0$ до $\varphi=2\pi$;

2) построить кривую, соединив полученные точки линией;

3) составить уравнение этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат (полюс совпадает с началом координат, положительная полуось абсцисс берется совпадающей с полярной осью):

2.5.1. $\rho=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$, 2.5.2. $\rho=\dfrac{3}{1-\cos\varphi}$,

2.5.3. $\rho=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$, 2.5.4. $\rho=3+2\cos 2\varphi$,

2.5.5. $\rho=3-\sin 3\varphi$, 2.5.6. $\rho=2\cos 2\varphi$,

2.5.7. $\rho=4(1+\cos\varphi)$, 2.5.8. $\rho=2-\sin\varphi$, 2.5.9. $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}\cos\varphi}$, 2.5.10. $\rho = \dfrac{1}{2 - \sqrt{5}\cos\varphi}$.

Контрольные вопросы к экзамену

1. Понятие системы координат. Декартовая и полярная системы координат. Переход из одной системы в другую.
2. Построение кривой по её уравнению в декартовой и полярной системах координат.
3. Основные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве. Основные виды уравнений плоскости.
4. Понятие о кривых второго порядка. Общее уравнение кривой второго порядка.
5. Эллипс.
6. Гипербола.
7. Парабола.
8. Понятие геометрического места точек. Нахождение уравнения геометрического места точек.

Тема 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Программный объем темы

1. Предел, непрерывность функции, основные свойства пределов, бесконечно малые и бесконечно большие. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые. Вычисление пределов с различными видами неопределенностей.

2. Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Непрерывность и дифференцируемость. Основные правила нахождения производных. Дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков.

3. Применение пределов и производных к исследованию функций и построению их графиков. Правило Лопиталя и его применение к вычислению пределов.

3.1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности некоторой точки $x=a$, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих соотношениям $0<|x-a|<\delta$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Тот факт, что A есть предел $f(x)$ при $x\to a$, записывают в виде
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Если $x<a$ ($x>a$) и $x\to a$, то пишут $x\to a-0$ ($x\to a+0$). В первом случае говорят, что X стремится к a слева, во втором случае – справа.

Определение (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a-0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех X, удовлетворяющих соотношениям $a-\delta<x<a$, имеет место неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x\to a$ справа. Тот факт, что функция $f(x)$ при $x\to a$ слева и справа имеет своими пределами числа A_- и A_+; записывают в виде $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=A_-$, $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=A_+$.

Данные пределы обозначают также символами $f(a-0)$, $f(a+0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена для всех x, достаточно больших по абсолютной величине ($|x|>K$).

Определение (на языке «$\varepsilon-\delta$»). Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать число *M (M>K),* такое, что для всех $|x|>M$ выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Подобным образом вводятся пределы при $x\to+\infty,\ x\to-\infty$.

По аналогии со случаями конечных пределов (*A* - конечно) можно ввести пределы:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

Например, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ обозначает, что при любом заданном отрицательном числе *N* существует такое число *M*>0, что *f*(*x*)<*N*, если *x*>*M*.

Основные свойства пределов.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, где *A* и *B* - конечные числа.

Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$,
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$,
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (при условии, что $B\neq 0$).

При решении задач полезно помнить таблицу простейших пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}=\infty,\qquad \lim_{x\to\infty} cx=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{c}=\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} a^x=0, a<1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0, a>1,\qquad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty, a>1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x}=0,\qquad \lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty, a<1,$$

$$\lim_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty, a>1,\qquad \lim_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty, a>1.$$

В таблице $a>0$, $c \neq 0$.

Технически проще всего находится предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$, если x_0 принадлежит области определения этой функции. Такой предел равен $f(x_0)$. Ниже приведены основные положения, объясняющие этот результат.

Определение. Класс функций, включающий в себя многочлены, рациональные функции, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, а также функции, получающиеся из перечисленных с помощью четырех арифметических действий и суперпозиций (образование сложной функции), примененных конечное число раз, называют элементарными функциями.

Например, $y = \dfrac{e^{\cos x^3} - 8}{\sin 4x}$, $y = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$, $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - x + 1}{4x^2 - x + 21}$, $y = \mathrm{tg} \ln \cos^3 x^2$ принадлежат к классу элементарных функций.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Теорема. Под знаком непрерывной в данной точке X_0 функции $f(x)$ возможен предельный переход в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$.

Пример. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2} = -\dfrac{1}{2}$.

При вычислении пределов необходимо уметь раскрывать (решать) неопределенности.

Определение. Выражения вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty \cdot 0$, 1^{∞}, $\infty - \infty$ принято называть неопределенностями и обозначать, заключая в квадратные скобки: $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $[\infty \cdot 0]$, $[1^{\infty}]$, $[\infty - \infty]$.

Далее на примерах рассматриваются приемы раскрытия основных типов неопределенностей.

При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \to \infty$ полезно предварительно разделить оба члена отношения на x^n, где n - наивысшая степень этих многочленов.

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-x^2+1}{x^4+10x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}+\frac{10x}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{10}{x^3}}=3.$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^4+2x-1}{x^6-x^5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x^6}}{1-\frac{1}{x}}=0..$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-x^2+x+1}{x-2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}}=\infty..$$

Пример.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}}=\frac{2^3 3^2}{1}=72.$$

Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

Пример. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}=2.$

Если $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены и $P(a)=Q(a)=0$, то при отыскании предела $\lim_{x\to a}\left[P(x)/Q(x)\right]$ рекомендуется разделить один или несколько раз числитель и знаменатель на (*x*-*a*).

Пример.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+6x+8}{x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left|\begin{array}{c}x^2+6x+8\\ x_1=-2, x_2=-4\end{array}\right|=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+4)}{(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}(x+4)=2.$$

Выражения, содержащие иррациональности, во многих случаях приводятся к рациональному виду путем введения новой переменной.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Введем новую переменную $y=\sqrt{x}.$

Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{y(y^3-1)}{y-1}=\lim\limits_{x\to 1}y(y^2+y+1)=3.$

Другим приемом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

Пример. Найти $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\left[\dfrac{0}{0}\right](x>0).$

Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$, сопряженное с числителем.

Первый замечательный предел удобно представить в виде $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\upsilon}{\upsilon}=1,$

где υ – функция независимой переменной *x* и $\upsilon\to 0$ - при $x\to 0$.

Первый замечательный предел может быть использован для раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Учитывая формулу $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Введем новую переменную z: z=arcsin2x. Тогда sin$z$=2x, $x=\dfrac{\sin z}{2}$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{5x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{5\frac{\sin z}{2}}=\frac{2}{5}\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}}=\frac{2}{5}.$$

Второй замечательный предел запишем в виде $\lim\limits_{x\to 0}(1+\upsilon)^{\frac{1}{\upsilon}}=e$, если $\upsilon\to 0$ при $x\to 0$; или $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{\upsilon})^{\upsilon}=e$, если $\upsilon\to\infty$ при $x\to\infty$. Здесь υ – функция независимой переменной x. Полезно также помнить пределы $\lim\limits_{x\to 0}(1+\alpha\upsilon)^{\frac{1}{\upsilon}}=e^{\alpha}$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{\alpha}{\upsilon})^{\upsilon}=e^{\alpha}$, где $\alpha=\mathrm{const}$.

Второй замечательный предел может быть использован для раскрытия неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$.

Пример. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{3x}=\left[1^{\infty}\right]$.

Используем известный прием деления «уголком» многочлена x+5 на многочлен x-1.

$$\begin{array}{r|l} x+5 & x-1 \\ \cline{2-2} -\;x-1 & 1 \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Значит, $\dfrac{x+5}{x-1}=1+\dfrac{6}{x-1}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{6}}\right]^{\frac{6}{x-1}\cdot 3x}=e^{18}.$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)\left[\ln(x+1)-\ln(x-2)\right]=\left[\infty-\infty\right].$

Учитывая свойства логарифмов, находим

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3)\left[\ln(x+1)-\ln(x-2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x+3}=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{x+3}\right]=\ln\left[\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3}}\right]=$$

$$=\ln\frac{e\cdot 1}{e^{-2}\cdot 1}=\ln e^{3}=3.$$

Замечание. Если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\left[\ln f(x)\right]=\ln\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right].$

Полезно также помнить и другие замечательные пределы.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Введя замену переменной $y=\cos^2 x$, находим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}=\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{\frac{1}{2}\ln(1-y)}=2\lim_{y\to 0}\frac{\frac{2^y-1}{y}}{\frac{\ln(1-y)}{y}}=$$

$$= -2\lim_{y\to 0}\frac{\dfrac{2^y-1}{y}}{\dfrac{\ln[1+(-y)]}{(-y)}} = -2\lim_{y\to 0}\frac{\ln 2}{\ln e} = -2\ln 2.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right].$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x\cdot e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{e^x} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} = 2.$$

Определение.

Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0.$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$. Если при этом их отношение стремится к единице $\left(\lim\limits_{x\to a}[\alpha(x)/\beta(x)] = 1\right)$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными малыми и пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ($x \to a$).

Примеры эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\sin x \sim x\\ \mathrm{tg}x \sim x\\ \arcsin x \sim x\\ \mathrm{arctg}x \sim x\\ 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\ln(1+x) \sim x\\ a^x - 1 \sim x\ln a\\ (1+x)^m - 1 \sim mx\end{array}\right\}$$

m=const.

При отыскании предела отношения двух бесконечно малых функций каждую из них можно заменить эквивалентной бесконечно малой функцией.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3^{2x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{3^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x\ln 3}=\frac{5}{2\ln 3}.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg}x=[0\cdot\infty].$

$$\lim_{x\to 0}(1-e^{2x})\operatorname{ctg}x=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{2x}}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2.$$

3.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется производной функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается одним из следующих символов: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$.

$$y'=f'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.(1)$$

Если указанный в формуле (1) предел существует, то функцию *f(x)* называют дифференцируемой в точке *x*, а операцию нахождения производной *y'* – дифференцированием.

Пример. Найти производную функции $y=\dfrac{2x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной.

Решение. При любом приращении Δx имеем:

$$\Delta y=\frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1}-\frac{2x}{3x+1}=$$

$$=\frac{6x^2+2x+6x\Delta x+2\Delta x-6x^2-2x-6x\Delta x}{[3(x+\Delta x)+1](3x+1)}=$$

$$=\frac{2\Delta x}{(3x+1+3\Delta x)(3x+1)}.$$

Так как $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2}{(3x+1+3\Delta x)(3x+1)}$, то

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{(3x+1+3\Delta x)(3x+1)}=\frac{2}{(3x+1)^2}.$$

Справедливы следующие правила дифференцирования, где *C* – постоянное число, *U(x)* и *V(x)* –некоторые дифференцируемые функции.

1. $(C)'=0$;
2. $(x)'=1$;
3. $(U\pm V)=U'\pm V'$;
4. $(C\cdot U)'=C\cdot U'$;
5. $(U\cdot V)'=U'\cdot V+U\cdot V'$;
6. $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'\cdot V-U\cdot V'}{V^2},(V\neq 0)$;
7. $\left(\dfrac{C}{V}\right)'=\dfrac{-C}{V^2}\cdot V',(V\neq 0)$.

8. Если $y=f(u),u=\varphi(x)$, т.е. $y=f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx};$$

9. Если для функции $y=f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция, $x=g(y)$ и $\dfrac{dg}{dy}=g'(y)\neq 0$, то $f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}$.

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить таблицу производных основных элементарных функций:

1. $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u';(\alpha\in R)$;
2. $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$;
3. $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$;
4. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$;
5. $\left(\ln u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$;
6. $\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9. $(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11. $(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12. $(\mathrm{arctg}u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13. $(\mathrm{arcctg}u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

14. $(\mathrm{sh}u)' = \mathrm{ch}u \cdot u'$;

15. $(\mathrm{ch}u)' = \mathrm{sh}u \cdot u'$;

16. $(\mathrm{th}u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u} \cdot u'$;

17. $(\mathrm{cth}u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u} \cdot u'$.

Примеры.

а) $$y' = \left(\sqrt[3]{\frac{(x^3+1)}{(x^3-1)}}\right)' = \left(\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right)^2}} \cdot \frac{(x^3+1)'(x^3-1) - (x^3+1)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} =$$

$$= \frac{(x^3-1)^{2/3}}{3(x^3+1)^{2/3}} \cdot \frac{3x^2(x^3-1) - (x^3+1)3x^2}{(x^3-1)^2} =$$

$$\frac{(x^3-1)^{2/3}}{3(x^3+1)^{2/3}} \cdot \frac{3x^2(-2)}{(x^3-1)^2} = -\frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x^3-1)^4}};$$

б) $$y' = \left[\left(2^{x^4} - \mathrm{tg}^4 x\right)^3\right]' = 3\left(2^{x^4} - \mathrm{tg}^4 x\right)^2 \cdot \left(2^{x^4} - \mathrm{tg}^4 x\right)' =$$

$$= 3\left(2^{x^4} - \mathrm{tg}^4 x\right)^2 \cdot \left[\left(2^{x^4}\right)' - \left(\mathrm{tg}^4 x\right)'\right] =$$

$$=3\left(2^{x^4}-\mathrm{tg}^4x\right)^2\cdot\left(2^{x^4}\cdot\ln 2\cdot 4x^3-4\mathrm{tg}^3x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\right)=$$

$$=12\left(2^{x^4}-\mathrm{tg}^4x\right)^2\cdot\left(2^{x^4}\cdot\ln 2\cdot x^3-\frac{\mathrm{tg}^3x}{\cos^2 x}\right)$$

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде $f(x,y)=0$, то для нахождения производной в простейших случаях достаточно продифференцировать обе части уравнения $f(x,y)=0$, y, считая функцией от x, и из полученного уравнения, линейного относительно y', найти производную.

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т.е.

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют логарифмическим дифференцированием.

Пример. Найти производную функцию y', если

$$x^3+y^3-3xy=0.$$

Решение. Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x:

$$3x^2+3y^2\cdot y'-3y-3xy'=0;$$

$$y'\left(3y^2-3x\right)=3y-3x^2;$$

$$y'=\frac{3y-3x^2}{3y^2-3x}.$$

Пример. Найти производную функции $y=(\sin 2x)^{x^3}$.

Решение. Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y=x^3\cdot\ln(\sin 2x).$$

Дифференцируя обе части последнего равенства по x,

$$(\ln y)'=\left(x^3\right)'\ln(\sin 2x)+x^3\cdot(\ln(\sin 2x))';$$

отсюда

$$\frac{y'}{y}=3x^2\cdot\ln(\sin 2x)+x^3\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot 2;$$

$$y' = y(3x^2 \cdot \ln(\sin 2x) + 2x^3 \mathrm{ctg} 2x);$$

$$y' = (\sin 2x)^{x^3}[3x^2 \cdot \ln(\sin 2x) + 2x^3 \cdot \mathrm{ctg} 2x].$$

Производной второго порядка или второй производной функции $y=f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: $y'',\ f''(x), \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производной n–го порядка функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n–1)$–го порядка данной функции.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, то: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'}{x'}\right) \cdot \dfrac{1}{x'}$, где штрих обозначает производную по t.

Пример. Найти производную второго порядка функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$.

Решение.

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \cdot \sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(x^2 + a^2\right)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2 + a^2\right)^3}}.$$

Пример. Найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями: $x=\ln t$, $y = t^3 + 2t + 1$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3t^2+2}{\frac{1}{t}}=3t^3+2t;$$

Геометрически производная функции *f(x)* в т. x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0 с положительным направлением оси *Ox*.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha .$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha$ называется угловым коэффициентом касательной, то можно записать $\operatorname{tg}\alpha=k$, т.е. $f'(x_0)=k$. Тогда уравнение касательной, как уравнение прямой, проходящей через т. $M(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом $k=f'(x_0)$, может быть записано в виде $y-y_0=k(x-x_0)$.

Пример. Составить уравнение касательной к гиперболе $x\cdot y=1$ в т. $x_0=1$.

Решение. Здесь $x_0=1$, $f(x_0)=f(1)=1,$ $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $k=f'(1)=-1.$ Подставим найденные значения в уравнение касательной $y-1=-(x-1),$ $y=2-x$.

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),$ $f'(x_0)\neq 0$ (если $f'(x_0)=0$, уравнение нормали имеет вид $x=x_0$).

Пример. Записать уравнение нормали к кривой $y=x^2-16x+7$ в т. с абсциссой x=1.

Решение. $x_0=1;$ $f(x_0)=f(1)=-8.$

$f'(x)=2x-16,$ $f'(x_0)=f'(1)=-14.$

Тогда $y+8=-\frac{1}{-14}\cdot(x-1);$ $y=\frac{1}{14}x-8\frac{1}{14}.$

Рассмотрим применение производной к вычислению некоторых пределов.

Правило Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы на некотором отрезке $[a,b]$ и обращаются в нуль в т. $x=a$, т.е. $f(a)=g(a)=0$, тогда, если существует предел отношения $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x\to a$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\frac{x}{2}\right)'}{(5x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{5}=\dfrac{1}{10}.$

При необходимости это правило может быть применено многократно.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя применимо и для раскрытия неопределенностей вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos 3x\sin x}{\sin 3x\cos x}=1.$

Пусть тело движется по прямой по закону $S=S(t)$. За промежуток времени Δt (от момента t до момента $t+\Delta t$) оно пройдет некоторый путь ΔS. Тогда отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ есть средняя скорость движения за промежуток времени Δt.

Скоростью движения тела в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути ΔS к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю:

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}V_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t).$$

Следовательно, производная пути S по времени t равна скорости прямолинейного движения тела в данный момент времени t:

$$V(t) = S'(t).$$

Скорость протекания физических, химических и других процессов также выражается с помощью производной.

Рассмотрим произвольную функцию $y = f(x)$. Дадим x приращение Δx, тогда приращение функции равно $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ - называется средней скоростью изменения этой функции на отрезке Δx.

Скоростью изменения функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$V(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x).$$

Итак, скорость изменения функции в точке x равна производной функции в этой точке.

Если тело движется прямолинейно по закону $S = S(t)$, то вторая производная пути S по времени t равна ускорению движения тела в данный момент времени t:

$$a(t) = V'(t) = S''(t).$$

Таким образом, первая производная характеризует скорость некоторого процесса, а вторая - ускорение того же процесса.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна при рассматриваемых значениях x и имеет производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Из этого следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где α - бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x.$

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения Δx независимой переменной.

I. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается dy.

Итак, $dy = f'(x)\Delta x.$

Положив $y = x$, получим $dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, и поэтому

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

При достаточно малом $dx = \Delta x$ приращение функции приближенно равно ее дифференциалу, $\Delta y \approx dy$.

Таким образом, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$.

Эта формула позволяет использовать дифференциал функции для приближенных вычислений значений функций.

Применение производной при исследовании функций

Пределы и производные удобно применять к исследованию функций и построению графиков.

Общая схема исследования функций и построения их графиков:

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной или периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти асимптоты графика функции:

а) вертикальные;

б) невертикальные.

6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования.

Рассмотрим отдельно некоторые пункты исследования.

Асимптотой кривой называется такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

а) если при $x = a$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т.е. если при $x \to a$ слева или справа функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x = a$ является ее вертикальной асимптотой;

б) невертикальные асимптоты кривой $y = f(x)$, если они существуют, имеют уравнения вида $y = kx + b$, где параметры k и b определяются формулами:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - kx\right].$$

Пример. Найти асимптоты кривой $\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$.

Решение:

а) при $x=3$ кривая имеет бесконечный разрыв. Поэтому прямая $x=3$ есть вертикальная асимптота. Найдем односторонние пределы:

- слева $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x^2-6x+3}{x-3} = +\infty;$

- справа $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x^2-6x+3}{x-3} = -\infty;$

Значит, при стремлении $x \to 3$ слева функция неограниченно возрастает, а справа - неограниченно убывает;

б) найдем невертикальные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+3}{(x-3)x} = 1,\ b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3} - x\right) = -3.$$

Уравнение невертикальной, наклонной асимптоты будет $y = x-3.$

Других невертикальных асимптот кривая не имеет, так как при $x \to -\infty$ значения k, b будут те же самые.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y' > 0$, то функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Значение функции $f(x)$ в точке x_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках слева и справа от x_0. Функция $f(x)$ может иметь экстремум (максимум или минимум) только в тех точках, которые лежат внутри области определения функции и где ее первая производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.

Функция будет иметь экстремум в тех точках, где ее производная y' меняет свой знак, а сама функция непрерывна.

Из определений вытекает правило исследования функции на экстремум:

1. Найти производную y' и критические точки, лежащие внутри области определения функции.

2. Определить знак y' слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе аргумента x через критическую точку x_0:

1) y' меняет знак с + на -, то x_0 есть точка максимума;

2) y' меняет знак с - на +, то x_0 есть точка минимума;

3) y' не меняет знак, то в этой точке нет экстремума.

Для исследования критических точек, где $y' = 0$, можно также рассмотреть знак второй производной:

1) если $y''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка минимума;

2) если $y''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка максимума;

3) если $y''(x_0) = 0$, то характер точки x можно выяснить только по изменению знака y' этой точки.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = \left(1 - x^2\right)^3$ и точки экстремума.

Область определения функции есть множество всех действительных чисел.

$$y' = \left(\left(1 - x^2\right)^3\right)' = -6x\left(1 - x^2\right)^2.$$

Полагая $y' = 0$, получим $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$. Других критических точек нет.

Исследуем критические точки по изменению знака первой производной. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y'	+	0	+	0	-	0	-
y	возрастает	нет экстр.	возрастает	максимум	убывает	нет экстр.	убывает

В первой строке размещены критические точки и интервалы монотонности функции. Во второй - знаки производной в интервалах и значения в критических точках. В третьей - выводы о поведении функции.

Соответственно результатам исследования функция возрастает на интервале $(-\infty,0)$ и убывает на интервале $(0,\infty)$. Точка $x = 0$ есть точка максимума.

Если в некотором интервале кривая расположена ниже любой своей касательной, то кривая называется выпуклой, а если она расположена выше любой своей касательной, то вогнутой.

Точкой перегиба называется точка на кривой, разделяющая области выпуклости и вогнутости.

Характер кривой $y = f(x)$ определяется знаком второй производной y'': если в некотором интервале $y'' > 0$, то кривая вогнутая, а если $y'' < 0$, то кривая выпуклая.

Нахождение точек перегиба и интервалов выгнутости и выпуклости сводится к следующему:

1. Найти вторую производную y''. В области определения функции и непрерывности кривой найти точки x, в которых $y'' = 0$ или не существует.

2. Определить знак y'' слева и справа от каждой из этих точек. Исследуемая точка x будет абсциссой точки перегиба, если по разные стороны от нее y'' имеет разные знаки.

Интервалы выпуклости и вогнутости кривой определяются из условия, что их границами могут быть только точки перегиба, точки разрыва и граничные точки области расположения кривой.

Пример. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = 1 - \ln(x^2 + 4)$.

Область определения функции есть множество всех действительных чисел.

$$y' = -\frac{2x}{x^2 + 4}, \; y'' = -\left(\frac{2\left(x^2 + 4\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2 + 4\right)^2}\right) = \frac{2x^2 - 8}{\left(x^2 + 4\right)^2},$$

$y'' = 0$ точках $x_1 = -2; x_2 = 2.$

Других точек, которые могут быть абсциссами точек перегиба, нет.

Исследуем найденные точки, определяя знак y'' слева и справа от каждой из них. Составим таблицу:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;2)$	2	$(2;\infty)$
y''	+	0	-	0	+
y	вогнута	т.перегиба	выпукла	т.перегиба	вогнута

Рассмотрим пример полного исследования функции и построения ее графика.

$$y = \frac{x^3}{3 - x^2}.$$

1. Функция определена и непрерывна на всей оси OX за исключением точек $x_1 = -\sqrt{3}; x_2 = \sqrt{3}$.

2. Определим односторонние пределы в точках разрыва:

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \infty, \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty, \lim_{x \to +\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \infty,$$

$$\lim_{x \to +\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty.$$

Значит, точки $x = \pm\sqrt{3}$ есть точки бесконечного разрыва.

3. Функция нечетная, т.к. $y(-x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2} = -y(x)$. .

Ее график симметричен относительно начала координат.

4. При $x = 0$ $y = 0$, т.е. график функции проходит через начало координат. Интервалы оси OX , в которых функция сохраняет постоянный знак:

$(-\infty; -\sqrt{3})$ - здесь $y > 0$; $(-\sqrt{3}; 0)$ - здесь $y < 0$.

В силу симметрии графика функции:

$(0; \sqrt{3})$ - здесь $y > 0$; $(\sqrt{3}; \infty)$ - здесь $y < 0$.

5. Прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ есть вертикальные асимптоты графика. В соответствии с результатами п.2 при $x \to -\sqrt{3}$ слева функция неограниченно возрастает, а при стремлении справа неограниченно убывает. Аналогично поведение функции вблизи точки $x = \sqrt{3}$.

Определим невертикальные асимптоты

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{(3 - x^2)x} = -1; b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = 0.$$

Те же значения коэффициентов при $x \to -\infty$. Заключаем, что график исследуемой функции имеет невертикальную асимптоту $y = -x$.

6. Найдем интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума:

$$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)' = \frac{3x^2(3-x^2)+x^3\cdot 2x}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2(9-x^2)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

Приравняем числитель выражения к нулю в найдем критические точки:

$$x^2(9-x^2)=0, x_1=-3, x_2=0, x_3=3.$$

Производная может менять знак при переходе аргумента через эти точки и точки разрыва $x=\pm\sqrt{3}.$ Составим таблицу:

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
y''	-	0	+	∞	+	0	+	∞	+	0	-
y	убывает	миним.	возрас-тает	г.разр	возрас-тает	нет экстр	возрас-тает	г.разр	возрас-тает	макс.	убы-вает

Таким образом, при $x=-3$ функция имеет минимум, а при $x=3$ - максимум. Определим ординаты точек экстремума: $y(-3)=4{,}5; \quad y(3)=-4{,}5.$

7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{x^2(9-x^2)}{\left(3-x^2\right)^2}\right)' = \frac{6x(4x^2+9)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Видно, что $y''=0$ только при $x=0$. Вторая производная может менять знак только в этой точке и точках разрыва. Составим таблицу:

x	$(-\infty;\sqrt{3})$	-3	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\infty)$
y''	+	∞	-	0	+	∞	-
y	вогнута	т.разрыва	выпукла	т.перегиба	вогнута	т.разрыва	выпукла

Значит, $x=0$ - абсцисса точки перегиба.

8. Все результаты исследования используем для построения графика.

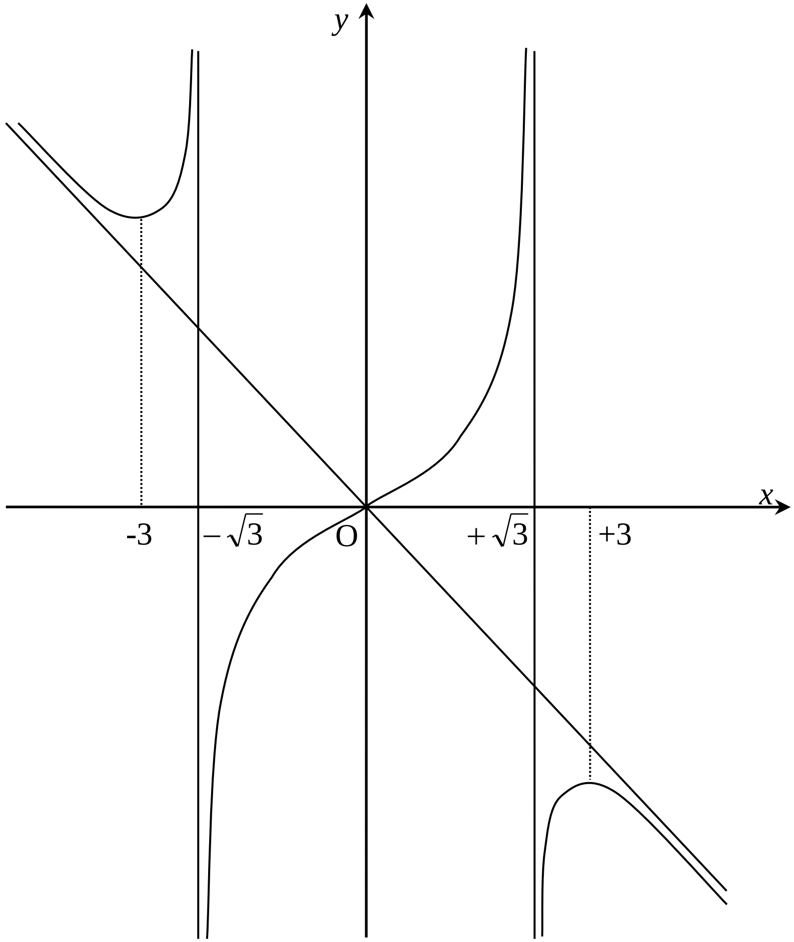


Рис. 3.1.

Вычерчивание графика следует начинать с нанесения на плоскость его асимптот, затем точек экстремума и перегиба данной функции. Знание интервалов возрастания и убывания функции, выпуклости и вогнутости, а также поведение функции вблизи асимптот помогут вычертить график осмысленно и точно.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывных функций основывается на следующих свойствах этих функций:

если в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция $f(x)$ непрерывна и имеет только один экстремум и если это максимум (минимум), то он будет наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале;

если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$, то она обязательно имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются или в точках экстремума, лежащих внутри отрезка, или на границах этого отрезка.

Таким образом, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует:

1. Найти критические точки, лежащие внутри отрезка $[a,b]$ и вычислить значения функции в этих точках.

2. Вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. $f(a)$ и $f(b)$.

3. Из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - 2\ln x$ на отрезке $[1,e]$.

Решение:

1. Найдем критические точки функции $y' = (x - 2\ln x)' = 1 - 2/x$, $y' = 0$ при $x = 2, y(2) = 2(1 - \ln 2).$ Других критических точек внутри данного отрезка нет.

2. Вычислим значения функции на концах отрезка: $y(1) = 1, y(e) = e - 2.$

3. Сравним полученные значения: $y(1) > y(e) > y(2).$

Таким образом, наибольшее значение функции $y(1) = 1,$ а наименьшее – $y(2) = 2(1 - \ln 2).$

Контрольная работа №3 по теме

«ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

3.1 Найти пределы:

3.1.1а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-3x^2}{5x^2+10x-\sqrt{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-2}\right)^{4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^6+3x^5-5}{x^7+x^3+x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^5+x}{\sqrt{3}x^6-1}$.

3.1.2 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x^2+7x+11}{2x^3-5x^2-7x-11}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{\sqrt{2}x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x^5-x^4+x^2+x+2}{4x^5+100}$; е) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+2x^4+x^2-3x-10}{x^4+2x^3+3x^2+5x-2}$.

3.1.3 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^2+5x-6}{\pi^2-2x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-3x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sqrt{x}}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{5x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^2+x-3}{2x^4+3x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}x^4+x^2+x}{5(x^3+x^2-x-1)}$.

3.1.4 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{3x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{3x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}x}$

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{100}+1}{4x^{99}+2}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+x^2-3}{3x^6+2x^4-x^2-6}$.

3.1.5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4+x+3}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x(\ln(x+1)-\ln x))$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2+2x-6}{x^2+2x-15}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^7-0.3x}{4x^8+0.2x^2}$.

3.1.6 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-0.1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{3}(\ln(x-1)-\ln x)\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x^3+2x^2+2x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{10x^3+11x+12}$.

3.1.7 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-5)(\ln(x-3)-\ln x)\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4+5x^3+x^2-11}{x^3+x^2-2}$; е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x-x^2-x^3-x^4}{2-x^5}$.

3.1.8 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(5x\cdot\operatorname{ctg}3x)$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{2x}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^4+5x^3+x^2-11}{x^3+x^2-2}$; е) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-x^5+2x^4-1}{2x^4-3x-6}$.

3.1.9 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{0.1|x|}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0.1x^5+0.2x^4+0.3}{0.1x^6+0.2x}$.

3.1.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\cdot \mathrm{tg}2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{11x^2+9x-20}{x^5-x^4-x^3+2x^2-x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^8}{1-x^7}$.

3.2. Найти производные

3.2.1. а) $y=4x^4-5\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{7}$; б) $y=\mathrm{ctg}x\cdot 2^x$;

в) $y=\cos x/(\sin x-2)$; г) $y=15\ln(2x+1)$;

д) $y=3^{1+\cos^2 x}$; е) $y=\mathrm{arcctg}\dfrac{x+2}{3-x}$;

ж) $y=\mathrm{ctg}\ln^2 x$;

3.2.2. а) $y=3x^5+\dfrac{1}{2x^3}+\sqrt{x^3}+\sqrt{5}$; б) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-3}}$;

в) $y=\cos x\cdot\sqrt{x}$; г) $y=3^{\sin\frac{1}{x}}$;

д) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x-2}$; е) $y=\sin^2\dfrac{1}{1-x^2}$;

ж) $y=\lg(4x-x^2)$;

3.2.3. а) $y=5x^7-\sqrt[3]{2x}-\dfrac{4}{x^2}+\sqrt{51}$; б) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{\sqrt{2}}$;

в) $y=\operatorname{ctg}\lg x$; г) $y=x^3\cdot 10^x$;

д) $y=\dfrac{\arccos x^2}{\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}}$; е) $y=e^{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$;

ж) $y=\log_5(1-x^2)$;

3.2.4. а) $y=\dfrac{x^2}{3}-\sqrt[7]{x^{10}}+\dfrac{1}{3x}+13$; б) $y=\cos 2^x+3^{\sin x}$;

в) $y=\cos 2x\cdot\arcsin\sqrt{x}$; г) $y=\operatorname{tg}\dfrac{e^x}{x^2}$;

д) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-4}$; е) $y=\ln(x^2+3\sqrt{x})$;

ж) $y=\operatorname{ctg}(2^x+3^{x^2})$;

3.2.5. а) $y=4x^3-2\sqrt[5]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{7}$; б) $y=\cos x\cdot\arcsin x$;

в) $y=\dfrac{\arccos x^2}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$; г) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2^x}$;

д) $y=\cos^2 2x$; е) $y=\log_7(1-x^3)$;

ж) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

3.2.6. а) $y=7x-2\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{3}{x}-12$; б) $y=\lg x+\cos\dfrac{2}{x}$;

в) $y=\dfrac{\sin x^2}{\operatorname{ctg} x}$; г) $y=\arcsin(x^2\cdot\sqrt{x-1})$;

д) $y=e^{-x^2+2x}$; е) $y=(1+\ln\cos)^2$;

ж) $y=3\cos^2\dfrac{1}{1+x^2}$;

3.2.7. а) $y=51\cdot x^7-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}-\sqrt{3}$; б) $y=\lg x-\arcsin\frac{x}{2}$;

в) $y=\frac{\cos 2x}{\sin x^2}$; г) $y=\arccos(2x\cdot\sqrt{1-x^2})$;

д) $y=2^{10x+3x^2}$; е) $y=(1+\cos\ln x)^3$;

ж) $y=2\sin^2\left(\frac{x}{1+x}\right)$;

3.2.8. а) $y=x^{10}+3\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{2}$; б) $y=e^{\cos x}$;

в) $y=\sin x\cdot\arcsin x$; г) $y=\frac{\cos x}{3^x}$;

д) $y=\operatorname{tg}\left(2^{\frac{x}{x+1}}\right)$; е) $y=\log_3(x^2-x+2)$;

ж) $y=\operatorname{arctg}\ln(1-3x)$;

3.2.9. а) $y=8x^3-4\sqrt[4]{x^3}-\frac{2}{x^3}+3$; б) $y=x^4\cdot e^{\frac{4}{x^2}}$;

в) $y=\frac{\ln\arcsin x}{\arcsin\ln x}$; г) $y=\operatorname{ctg}2^x$;

д) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; е) $y=\frac{1}{\sin 3^{(x-1)}}$;

ж) $y=3x\cdot\operatorname{arcctg}x+\frac{x-1}{x+2}$;

3.2.10. а) $y=7\cdot x^8-4\sqrt{x^5}+\frac{5}{x^4}-7$; б) $y=(1+\sqrt{1+x})^2$;

в) $y=\cos^3 e^{\sqrt{x}}$; г) $y=\sin 2x\cdot\arcsin 3x$;

д) $y=\frac{\lg(x^2-1)}{\ln(1-x)}$; е) $y=\frac{1}{\arccos 7^x}$;

ж) $y=\operatorname{ctg}\ln(2^x+x^2)$;

3.3. Найти производную

3.3.1. $y^2 - \frac{x}{y} = 1$;

3.3.2. $xy - \sin(y \cdot x) = 0$;

3.3.3. $y = \cos\frac{y}{x} - y^2$;

3.3.4. $\arcsin(x \cdot y) + \cos(x \cdot y) = 1$;

3.3.5. $y = 3^{x-y} + \lg(x+y)$;

3.3.6. $10 \cdot \frac{y}{x} + ctg\,(x+y) = 3$;

3.3.7. $tg\,(x-y) + y \cdot ctgx = 0$;

3.3.8. $e^{x \cdot y} + 8\frac{x}{y} = 10x$;

3.3.9. $\sqrt[7]{x \cdot y} + \cos(x-y) = 1$;

3.3.10. $2^{y-x} + \ln\left(\frac{x-y}{y}\right) = 0$;

3.4. Найти производную

3.4.1. $y = x^{x^2}$;

3.4.2. $y = (\cos x)^{\sin x}$;

3.4.3. $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

3.4.4. $y = \left(\sqrt{1-x}\right)^x$;

3.4.5. $y = (x-1)^{x^2}$;

3.4.6. $y = (\mathrm{tg}x)^{\arcsin x}$;

3.4.7. $y = (\lg x)^{\sqrt{x+1}}$;

3.4.8. $y = (2x)^{2x}$;

3.4.9. $y = (x-1)^{(x+1)}$;

3.4.10. $y = (\sin x)^{\cos 2x}$;

3.5. Найти производную

3.5.1. $\begin{cases} x = \cos t - t\sin t \\ y = t^2 - \sin 3t \end{cases}$;

3.5.2. $\begin{cases} x = (t^2 - 1)^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$;

3.5.3. $\begin{cases} x = 5t\ln t \\ y = (3t^2 + 4)^4 \end{cases}$;

3.5.4. $\begin{cases} x = t \cdot \cos t \\ y = \dfrac{t}{\sin t} \end{cases}$;

3.5.5. $\begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{arctg}t}{t^2} \\ y = \ln(t-1) \end{cases}$;

3.5.6. $\begin{cases} x = \ln(1 - \dfrac{t^2}{2}) \\ y = (t+1)^3 \end{cases}$;

3.5.7. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}^2 t \\ y = \arcsin\sqrt{\dfrac{1}{t}} \end{cases}$; 3.5.8. $\begin{cases} x = \log_5(1+t^2) \\ y = \sqrt{t+2} \end{cases}$;

3.5.9. $\begin{cases} x = (1-t^2)\operatorname{ctg} t \\ y = (t-1)\operatorname{tg} t \end{cases}$; 3.5.10. $\begin{cases} x = t \cdot \sin^2 t \\ y = \dfrac{\cos 2t}{t^2} \end{cases}$;

3.6.1. Записать уравнение касательной к линии $y = \sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x = 8$.

3.6.2. Выяснить, в какой точке кривой $y = \dfrac{x^2}{4} - 7x + 5$ касательная параллельна прямой $y = 2x + 5$.

3.6.3. Записать уравнение нормали к линии $y = \sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x = -3$.

3.6.4. Выяснить, в какой точке кривой $y = 7x^2 - 5x + 4$ касательная перпендикулярна прямой $23y + x - 1 = 0$.

3.6.5. Найти, какой угол образует с осью обсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 5x + 7$ в т. $M(2;1)$.

3.6.6. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке с ординатой $y = 1$.

3.6.7. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ в точке с ординатой $y = 2$.

3.6.8. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $(3;2)$.

3.6.9. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$.

3.6.10.Выяснить, в какой точке кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью OX угол $\pi/4$.

3.7.1. Траектория движения тела – кубическая парабола $12y = x^3$. В каких ее точках скорость возрастания абсциссы и ординаты одинаковы?

3.7.2. Закон движения материальной точки $S = \frac{3}{4}t^2 - 3t + 7$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 2 м/с?

3.7.3. Тело движется по прямой OX по закону $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2$. Определить скорость и ускорение движения тела.

3.7.4. Тело, брошенное вверх, движется по закону $S = -\frac{1}{3}t^3$. В какой момент времени скорость тела станет равна нулю? Найти наибольшую высоту подъема тела.

3.7.5. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $V = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4 с? После начала движения?

3.7.6. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $S = 2t^2 + 3t + 1$. Определить кинетическую энергию $0{,}5mv^2$ тела через 5 с после начала движения.

3.7.7. Заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, определяется формулой $Q = t^3 - 9t^2 + 15t + 1$. В какие моменты времени сила тока в проводнике будет равна нулю?

3.7.8. Тело массой 6 т движется прямолинейно по закону. Требуется вычислить кинетическую энергию $S = -1 + \ln(1+t) + (t+1)^3$ тела через 1 с после начала движения.

3.7.9. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки $S = 3t^3 + 2t - 1$. Найти скорость и ускорение через 1 секунду после начала движения.

3.7.10.Тело движется по прямой OX согласно закону $x = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

3.8. Найти дифференциал функции:

3.8.1. $y = \operatorname{tg} \arccos(2^x)$;   3.8.2. $y = \ln \frac{4 - x}{x^3 - 1}$;

3.8.3. $y = \arcsin \frac{x^2}{\ln x}$; 3.8.4. $y = \mathrm{ctg} \frac{\ln x}{x}$;

3.8.5. $y = \arccos \sqrt{x+1}$; 3.8.6. $y = 2^{x^2 \cdot \mathrm{ctg} x}$;

3.8.7. $y = \mathrm{arcctg} \frac{3}{x}$; 3.8.8. $y = x \cdot \sqrt{1-x^3}$;

3.8.9. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} \cdot \mathrm{tg} x^2$; 3.8.10. $y = x^2 \cdot \lg(x^2 - 1)$;

3.9. Исследовать функцию и построить график

3.9.1. $y = \frac{x}{x^2 - 5}$; 3.9.2. $y = \frac{1-2x}{4x^2}$;

3.9.3. $y = \frac{x^3 - 1}{x+2}$; 3.9.4. $y = \frac{x^2 + 16}{1-x}$;

3.9.5. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 3.9.6. $y = \frac{x^2 + 4}{x+5}$;

3.9.7. $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$; 3.9.8. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$;

3.9.9. $y = \frac{x}{3-x^2}$; 3.9.10. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$;

3.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

3.10.1. $y = \sqrt{64 - x^2}; [-3;4]$; 3.10.2. $y = \frac{x-1}{x+1}; [0;3]$;

3.10.3. $y = 2\sin x + \sin 2x; \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; 3.10.4. $y = x^2 \cdot \ln x; \left[\frac{1}{e}; e\right]$;

3.10.5. $y = x^4 - 2x^2 + 3; [-2;3]$; 3.10.6. $y = \sin x - \frac{x}{2}; \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$;

3.10.7. $y = \frac{x-5}{x^2 + 10}; [-2;5]$; 3.10.8. $y = \frac{x+6}{x^2 + 12}; [-4;4]$;

3.10.9. $y = \cos^2 x - \cos 2x; \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; 3.10.10. $y = \sqrt{100 - x^2}; [1;5]$;

Контрольные вопросы к экзамену

1. Определение предела функции в точке.
2. Вычисление пределов элементарных функций в точке, принадлежащей области определения.
3. Виды неопределенностей и способы их раскрытия.
4. Первый и второй замечательные пределы.
5. Понятие бесконечно малой величины. Сравнение бесконечно малых.
6. Основные свойства пределов.
7. Применение понятия бесконечно малой для вычисления пределов.
8. Определение непрерывной функции в точке.
9. Определение производной, её геометрический и механический смысл.
10. Связь понятий непрерывности и дифференцируемости.
11. Основные правила нахождения производных. Производная сложной функции.
12. Таблицы основных производных.
13. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
14. Производные и дифференциалы высших порядков: определения, нахождение.
15. Правило Лопиталя и его применение к вычислению пределов.
16. Применение пределов и производных к исследованию функций и построению их графиков. (Промежутки возрастания и убывания, выпуклости и вогнутости, точки экстремума, точки перегиба, асимптоты).

Тема 4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Программный объем темы:

1. Первообразная, неопределенный интеграл и его основные свойства. Таблица простейших интегралов.
2. Непосредственное интегрирование функций. Интегрирование методами замены переменной и по частям.
3. Интегрирование рациональных дробей, тригонометрических выражений и иррациональностей.
4. Определенный интеграл, его основные свойства.
5. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла с помощью замены переменной и интегрирования по частям.
6. Несобственные интегралы,
7. Приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги, объем тела.
8. Приближенное вычисление определенного интеграла.

4.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x)$ является производной для функции $F(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Тогда функция $F(x)$ называется первообразной функцией от $f(x)$ (или для $f(x)$).

Например, функция $3x^2$ является производной для x^3, а x^3 является первообразной для $3x^2$.

В курсе интегрального исчисления решается задача о нахождении первообразной для данной функции, т.е. о нахождении функции по заданной ее производной.

Первообразная у данной функции не одна: например, $(x^3)'=3x^2$ и $(x^3+5)=3x^2$. Если функция $f(x)$ имеет первообразные $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то $F'_1(x)=f(x)$ и $F_2'(x)=f(x)$, т.е. $(F_1-F_2)'=F_1'-F_2'=0$, $F_1-F_2=c-\text{const}$, и значит, $F_1=F_2+\text{const}$.

Таким образом, любые две первообразные к одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

Чтобы получить все первообразные для данной функции, надо взять какую-нибудь одну из них и прибавить к ней произвольную постоянную.

Совокупность всех первообразных к функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Здесь $\int$ - знак интеграла.

$f(x)$ -подынтегральная функция; $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Таким образом, если $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+c$, и наоборот.

Например,

$$\int 3x^2dx=x^3+c.$$

Из определения неопределенного интеграла следует, что

$$(\int f(x)dx)'=f(x),\quad d(\int f(x)dx)=f(x)dx,$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+c,$$

т.е. знаки дифференциала и интеграла уничтожают друг друга. Результат вычисления неопределенного интеграла всегда можно проверить, найдя производную от ответа; при этом должна получиться подынтегральная функция.

Простейшие интегралы получаются обращением формул для производных основных элементарных функций.

Например, из формулы $(\sin x)'=\cos x$ получаем $\int \cos xdx=\sin x+c$.

Таким образом, создается таблица основных интегралов (т.и.):

1.	$\int u^M du=\dfrac{u^{M+1}}{M+1}+c;(M\neq 1)$	2.	$\int \dfrac{du}{u}=\ln\lvert u\rvert+c;$
3.	$\int a^u du=\dfrac{a^u}{\ln a}+c;$	4.	$\int \cos udu=\sin u+c;$
5.	$\int \sin udu=-\cos u+c;$	6.	$\int \dfrac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}u+c;$
7.	$\int \dfrac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}u+c;$	8.	$\int \dfrac{du}{u^2+a^2}=\dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a}+c;$
9.	$\int \dfrac{du}{u^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert+c;$	10.	$\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\dfrac{u}{a}+c;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u+\sqrt{a^2+u^2}|+c.$

Здесь $u = u(x)$ - дифференцируемая функция.

Простейшие свойства неопределенного интеграла вытекают непосредственно из аналогичных свойств производной:

1. $\int [f(u) \pm g(u)] \cdot du = \int f(u)du \pm \int g(u)du$ -т.е. «интеграл от суммы равен сумме интегралов»;

2. $\int k \cdot f(u)du = k\int f(u)du$ -т.е. «постоянный множитель можно выносить за знак интеграла».

Применяя указанные свойства, некоторые интегралы удается вычислить, представив их в виде суммы табличных интегралов.

Например:

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + c.$$

Существует два основных метода интегрирования: по частям и замены переменной.

Рассмотрим сначала метод замены переменной.

Пусть $\varphi(t)$ - некоторая дифференцируемая функция, тогда формула замены переменной $\left. \int f(x)dx \right|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$.

Эту формулу можно истолковать так: любая формула интегрирования вида $\int f(x)dx = F(x)+c$ сохраняется, если в подынтегральном выражении и в правой части формулы сделать произвольную замену переменной $x = \varphi(t)$. В этом смысле все табличные формулы инвариантны.

Пример: Вычислить интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$.

Так как $d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, то

$$J=2\int\frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sin^2\sqrt{x}}=-2\mathrm{ctg}\sqrt{x}+c\,.$$

(здесь использовали табличный интеграл $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}u+c$).

В некоторых случаях замена переменной (подстановка) сопровождается преобразованиями.

Пример: $\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx.$

Применим подстановку $\sqrt{2x-5}=t$. Тогда $2x-5=t^2$,

$x=\frac{t^2+5}{2}, dx=tdt$,откуда

$$\int\frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx=\int\frac{\frac{1}{4}(t^2+5)^2+3}{\sqrt{(t^2)^3}}tdt=\frac{1}{4}\int\frac{(t^4+10t^2+37)t}{t^3}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int(t^2+10+\frac{37}{t^2})dt=\frac{1}{4}(\int t^2dt+10\int dt+37\int t^{-2}dt)=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{t^3}{3}+10t-\frac{37}{t})+c=$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3}+\frac{5}{2}\sqrt{2x-5}-\frac{37}{4\sqrt{2x-5}}+c.$$

Интегрирование по частям основано на использовании формулы

$$\int udv=uv-\int vdu\,.$$

При применении этой формулы подынтегральная функция разбивается на два множителя (u,v') , один из которых интегрируется, а второй - дифференцируется. При этом в правой части формулы может получиться табличный интеграл или интеграл более простой, чем исходный.

Пример:

$$\int(x-6)e^{3x}dx=\begin{vmatrix}x-6=u & du=dx\\ dv=e^{3x}dx & v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}(x-6)e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}dx==\frac{e^{3x}}{3}(x-6)-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$=\frac{e^{3x}}{3}(x-6)-\frac{1}{9}e^{3x}+c.$$

Вообще метод интегрирования по частям применяют к интегралам вида

1. $\int P(x)e^{\alpha x}dx;\quad \int P(x)\sin\alpha x dx;\quad \int P(x)\cos\alpha x dx;$

2. $\int P(x)\ln x dx;\quad \int P(x)\operatorname{arctg} x dx;$

$\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx;\quad \int P(x)\arcsin x dx;\quad \int P(x)\arccos x dx;$

3. $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx;\quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx;$

За U принимают трансцендентную функцию, являющуюся множителем при $P(x)$,

Пример:

$$\int x\operatorname{arctg} x dx=\begin{vmatrix}\operatorname{arctg} x=u; & du=\dfrac{dx}{1+x^2};\\ xdx=dv; & v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{2(1+x^2)}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+c.$$

Пример:

$$J=\int e^{2x}\sin 3x dx=\begin{vmatrix}e^{2x}=u; & du=e^{2x}dx;\\ \sin 3x dx=dv; v=\int\sin 3x dx=-\dfrac{\cos 3x}{3}= & \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3x\cdot 2e^{2x}dx=$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}J_1.$$

Последний интеграл справа интегрируем по частям; полагая

$$u = e^{2x}; dv = \cos 3x dx; du = 2e^{2x}dx; v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x.$$

Следовательно,

$$J_1 = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

Таким образом,

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

Откуда

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x),$$

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{3}{13}e^{2x}(\frac{2}{3}\sin 3x - \cos 3x) + c.$$

Далее рассмотрим интегрирование некоторых классов функций, начиная с рациональных функций.

Интеграл от дробно-рациональной функции $\frac{P(x)}{Q(x)}$,($P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены) всегда может быть выражен через элементарные функции. Среди всех дробно-рациональных функций выделяют 4 типа простейших дробей:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{B}{(x-a)^k}, k \in N$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, D<0$;

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, D<0, n \in N$.

Интегралы от простейших дробей существуют и выражаются через элементарные функции.

Рассмотрим $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$.

Если знаменатель $Q(x)$ правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлен в виде

$$Q(x) = (x-a)^k (x-b)^l ...(x^2+\alpha x+\beta)^r (x^2+\gamma x+\mu)^s ...,$$

причем все множители, фигурирующие в разложении, различны, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней, то

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + ... + \frac{B_l}{(x-b)^l} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+\alpha x+\beta} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+\alpha x+\beta)^2} + ... + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+\alpha x+\beta)^r} +$$

$$+\frac{R_1x+L_1}{x^2+\gamma x+\mu} + \frac{R_2x+L_2}{(x^2+\gamma x+\mu)^2} + ... + \frac{R_sx+L_s}{(x^2+\gamma x+\mu)^s} + ...$$

где

$$A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_l, M_1, N_1, M_2, N_2, ..., M_r, N_r,$$

$R_1, L_1, R_2, L_2, ..., R_s, L_s$ - действительные числа, которые нужно найти. Для их определения обе части последнего тождества приводят к целому виду, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, что дает систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

В случае, когда рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная (т.е. степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе), следует предварительно выделить целую часть.

Пример:

$$J = \int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}dx.$$

Подынтегральная функция - правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя действительные и простые, поэтому подынтегральная функция представима в виде суммы трех простейших дробей первого типа:

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{D}{x-1},$$

где A, B, D - неопределенные коэффициенты, которые следует найти.

Приводя дроби к общему знаменателю и отбрасывая его, получим тождество

$$15x^2-4x-81=A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+$$
$$+D(x-3)(x+4).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B+D=15 \\ x^1 & 3A-4B+D=-4 \\ x^0 & -4A+3B-12D=-81. \end{array}$$

Решая эту систему уравнений, найдем $A=3, B=5, D=7$. Следовательно,

$$J=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=$$
$$=\ln|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7|+C.$$

Пример:

$$J=\int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx.$$

Так как степень числителя выше степени знаменателя, т. е. дробь неправильная, то нужно выделить целую часть.

Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{rl} -\,x^4-0x^3-3x^2-3x-2 & \big|\,\underline{x^3-x^2-2x} \\ \underline{x^4-3x^3-2x^2\quad\quad} & \big|\,x+1 \\ -\,x^3-x^2-3x-2 & \\ \underline{x^3-x^2-2x\quad\quad} & . \\ x-2 & \end{array}$$

Разложим знаменатель дроби на простейшие множители:

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1).$$

Следовательно,

$$J=\int\frac{x^4-3x^3-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx=\int(x+1)dx-\int\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}dx.$$

Разложим оставшуюся правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Отсюда

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Dx(X-2).$$

Найдем коэффициенты A, B и D:

$$A=-1; B=\frac{2}{3}; D=\frac{1}{3},$$

$$J=\int(x+1)dx-\int\frac{dx}{x}-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x-\ln|x|-\frac{2}{3}\ln|x-2|-\frac{1}{3}\ln|x+1|+C.$$

Пример:

$$J=\int\frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx.$$

Под знаком интеграла стоит правильная дробь, у которой знаменатель раскладывается на множители вида

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 .$$

Следовательно, разложение на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx}{x(x-1)^2} .$$

Отсюда получим тождество

$$2x^2 - 3x + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему для определения чисел A, B и D.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A + B = 2 \\ x^1 & -2A - B - D = -3 \\ x^0 & A = 3 \end{array}$$

Отсюда $A = 3;\ B = -1;\ D = 2$. Таким образом,

$$J = 3\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| + 2(x-1)^{-1}(-1) + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C .$$

Пример:

$$J = \int \frac{xdx}{x^3 + 1} ,$$

$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, причем второй множитель не раскладывается на линейные множители, т. к. его дискриминант отрицателен. Подынтегральная функция представима в виде

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + D}{x^2 - x + 1} = \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + D)(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} .$$

Отсюда

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + D)(x+1) .$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x^1 & -A+B+D=1 \\ x^0 & A+D=0 \end{array}$$

Решая полученную систему относительно неизвестных коэффициентов, получим

$$A=-\frac{1}{3};B=\frac{1}{3};D=\frac{1}{3};$$

Таким образом,

$$J=-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}J_1$$

Для вычисления интеграла

$$J_1=\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

выделим в знаменателе полный квадрат:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

и сделаем подстановку $x-\frac{1}{2}=t, dx=dt$.

Тогда

$$J_1=\int\frac{t+\frac{1}{2}+1}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+\frac{3}{4})}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$J_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно получаем

$$J = \int \frac{x}{x^3+1}dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln\left(x^2 - x + 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Теперь рассмотрим интегрирование простейших иррациональностей.

1) Интеграл от функции, рационально зависящей от дробных степеней независимой переменной x, т.е.

$$\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, ..., x^{\frac{p_k}{q_k}})dx,$$

сводится к интегралу от дробно-рациональной функции с помощью подстановки $x = t^m$, где m есть наименьшее общее кратное чисел $q_1, ..., q_k$

2) $$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ... \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right]dx$$

вычисляется с помощью подстановки $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m$,

где $m = \text{Н.О.К.}(q_1, q_2, ..., q_k)$.

Пример:

$$J = \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx.$$

Используем подстановку $x = t^6$, так как $6 = \text{Н.О.К.}(3,6)$;

$dx = 6t^5 dt$.

Откуда

$$J = \int \frac{(t^6 + t^4 + t)t^5}{t^6(1+t^2)}dt = 6\int \frac{t^5 + t^3 + 1}{1+t^2}dt = 6\int \frac{t^3(t^2+1)+1}{1+t^2}dt =$$

$$= 6\int t^3 dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6\frac{t^4}{4} + 6\operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем

$$J = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

Пример:

$$J = \int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}dx.$$

Подынтегральное выражение есть рациональная функция от $\sqrt[6]{2x-3}$, поэтому положим $2x-3=t^6$, отсюда $x=\frac{1}{2}(t^6+3)$,

$$dx = 3t^5dt; \sqrt{2x-3} = t^3; \sqrt[3]{2x-3} = t^2.$$

Следовательно,

$$J = \int \frac{t^3 3t^5 dt}{t^2+1} = 3\int \frac{t^8 dt}{t^2+1} = 3\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1)dt +$$

$$+3\int \frac{dt}{t^2+1} = 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t5}{5} + 3\frac{t^3}{3} - 3t + 3\operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$J = \frac{3}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}} + (2x-3)^{\frac{1}{2}} - 3(2x-3)^{\frac{1}{6}} +$$

$$+3\operatorname{arctg}(2x-3)^{\frac{1}{6}} + C.$$

Перейдем к интегрированию некоторых тригонометрических функций.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, приводятся к интегралам от дробно-рациональных функций с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Эта подстановка называется универсальной.

При этом

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка часто приводит к слишком громоздким выкладкам. Иногда бывает выгоднее пользоваться более простыми подстановками:

а) если выполняется равенство

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то удобнее использовать подстановку $\cos x = t$;

б) если выполняется равенство

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то $\sin x = t$;

в) если выполняется равенство

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то $\operatorname{tg} x = t$.

Пример:

$$J = \int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}.$$

Положим $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Тогда $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$,

$$2 + \cos x - 2\sin x = 2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2\frac{2t}{1+t^2} =$$

$$= \frac{2(1+t^2) + 1 - t^2 - 4t}{1+t^2} = \frac{t^2 - 4t + 3}{1+t^2}$$

Отсюда

$$J = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2 - 4t + 3)}.$$

Разложим знаменатель подынтегральной функции на простейшие множители: $t(t^2 - 4t + 3) = t(t-3)(t-1)$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{D}{t-1} =$$

$$=\frac{A(t-3)(t-1)+Bt(t-1)+Dt(t-3)}{t(t-3)(t-1)}.$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2=A(t-3)(t-1)+Bt(t-1)+Dt(t-3).$$

Найдем коэффициенты

$$A=\frac{1}{3}, D=1, B=\frac{5}{3}.$$

Следовательно,

$$J=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

4.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $f(x)$.

Интегральной суммой называется

$$J_n=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$,

$$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i; \xi_i\in[x_i,x_{i+1}], i=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

при $\max|\Delta x_i|\to 0$.

Если этот предел существует, функция называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Всякая непрерывная функция интегрируема на конечном промежутке $[a,b]$.

Формулой Ньютона-Лейбница называется формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ - одна из первообразных для функции $f(x)$,т.е.

$F'(x) = f(x) (a \le x \le b)$.

Если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ - непрерывно-дифференцируемая однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha, \beta]$;

2) значения функции $x = \varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha, \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a, b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a; \varphi(\beta) = b$,то для любой непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Если U и V - функции от x ,имеющие непрерывные производные, то

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_\alpha^\beta V(x)U'(x)dx.$$

Или в более короткой записи:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_\alpha^\beta VdU.$$

Это формулы интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \mathrm{arctg}\sqrt{3} - \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

Пример:

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x},$$

Применим подстановку $\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

откуда $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $x=2\mathrm{arctg}t$

x	t
0	0
$\dfrac{\pi}{2}$	1

$dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Следовательно,

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\mathrm{arctg}0\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

В технических приложениях часто приходится иметь дело с определенными интегралами, вычислить которые с помощью формулы Ньютона-Лейбница или искусственными приемами практически невозможно. В этом случае значение интеграла находят приближенно. Вычислим, например, с точностью до 0,001 интеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$. Применим для этого формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}\big[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+...+y_{n-1})+$$
$$+2(y_2+y_4+...+y_{n-2})\big],$$

где n - четное число; $h=(b-a)/n$.

Можно показать, что погрешность этой формулы

$$|R_n|\le\frac{h^4}{180}(b-a)M_4,$$

где M_4-наибольшее значение модуля четвертой производной интегрируемой функции на отрезке $[a,b]$. Последовательно дифференцируя четыре раза функцию $f(x) = y = e^{x^2}$,найдем

$$y^{(4)} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3).$$

Легко видеть, что $y^{(4)} > 0$ и $|y^{(4)}| = y^{(4)}$. Далее очевидно, что производная $y^{(4)}$ возрастает при $0 \le x \le 1$ и, следовательно, принимает наибольшее значение при $x = 1$.Итак,

$$M_4 = y^{(4)}(1) = 76e, |R_n| \le \frac{1}{180n^4} \cdot 76e.$$

При $n = 10$ получим

$$|R_n| \le \frac{76e}{180 \cdot 10^4} < 0{,}00012.$$

Таким образом, погрешность, получающаяся при использовании формулы Симпсона $(n = 10)$ для вычисления данного интеграла, не превосходит 0,00012.

Вычислим интеграл по формуле Симпсона (при $n = 10)$:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{1}{30}\big[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\big].$$

Используя таблицу значений показательной функции (см., например: Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.. Справочник по математике - М: Наука, 1980), находим

$x_1 = 0{,}1$, $y_1 = 1{,}0101$, $x_2 = 0{,}2$, $y_2 = 1{,}0408$,

$x_3 = 0{,}3$, $y_3 = 1{,}0942$, $x_4 = 0{,}4$, $y_4 = 1{,}1735$,

$x_5 = 0{,}5$, $y_5 = 1{,}2840$, $x_6 = 0{,}7$, $y_1 = 1{,}4333$ и.т.д.

Окончательно получаем $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1{,}463$.

Как было установлено, в результате применения приближенной формулы Симпсона погрешность не превышает 0,00012. Однако еще нельзя утверждать, что найденное значение интеграла удовлетворяет условию задачи, т.е.

отличается от истинного менее чем на 0,001. Дело в том, что использованные значения $y_1, y_2, ..., y_{10}$ не точные, а приближенные значения соответствующих величин (значение y_0 является точным). Каждое из этих значений взято с четырьмя десятичными знаками, т.е. отличается от соответствующего истинного значения y_i не более чем на 0,00005. Поэтому погрешность суммы, заключенной в квадратных скобках, не превышает

$$0{,}00005 + 4 \cdot 5 \cdot 0{,}00005 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}00005 = 29 \cdot 0{,}00005.$$

Перед этой суммой стоит множитель $1/30$, поэтому погрешность, получающаяся в результате округления чисел, включая и погрешность из-за округления результата деления числа 43,8805 на 30 (эта погрешность не превышает 0,00033), не превосходит величины

$$\delta = (1/30) \cdot 29 \cdot 0{,}00005 + 0{,}00033 < 0{,}00038$$

Таким образом, найденное значение интеграла отличается от истинного его значения не более чем на величину

$$\delta + | R_n | < 0{,}00038 + 0{,}00012 = 0{,}0005 < 0{,}001.$$

Полученный результат удовлетворяет условию задачи.

Теперь перейдем к несобственным интегралам с бесконечными пределами (1 рода).

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \ge a$ и интегрируема на любом отрезке $[a, A]$. Тогда $\lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$ называется несобственным интегралом от $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Аналогично определяются интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом,

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_B^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B\to\infty}\int_{c}^{B} f(x)dx\,.$$

Если эти пределы существуют и конечны, то соответствующие интегралы называются сходящимися. В противном случае интегралы называются расходящимися,

Пример. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}\,.$$

Решение.

По определению

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{A\to\infty}\int_{e^2}^{A}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Big|_{e^2}^{A}\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A}\right) = \frac{1}{8}.$$

Пример. Вычислить $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение.

По определению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} + \lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A}\frac{dx}{x^2+2x+5}$$

(вместо точки $x=0$ в качестве промежуточного предела интегрирования можно взять любую другую конечную точку оси OX). Вычислим каждый из пределов, стоящих в правой части написанного выше равенства:

$$\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_{B}^{0} = \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \lim_{B\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{B+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,;$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_0^A =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{A+1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}.$$

Далее рассмотрим несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода).

Если функция $f(x)$ определена при $a \le x \le b$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon], 0 < \varepsilon < b-a$ и не ограничена слева от точки b, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся. В противном случае интеграл называется расходящимся.

Аналогично, если функция не ограничена справа от точки a, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

И, наконец, если функция $f(x)$ в окрестности внутренней точки C не ограничена, то по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c-\delta}^{b} f(x)dx.$$

Пример.

Вычислить $\int_1^0 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$.

Решение.

Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не ограничена в окрестности точки $x=1$. На любом же отрезке $[1+\varepsilon,e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией. Поэтому

$$\int_1^0 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^{e}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right]=\frac{3}{2}.$$

Пример.

Вычислить $\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

Решение.

Подынтегральная функция не ограничена в окрестности точек $x=1$ и $x=3$.

Поэтому по определению

$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}+\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

Вместо точки $x=2$ можно взять любую другую внутреннюю точку отрезка $[1,3]$.

Вычислим теперь каждое слагаемое в отдельности

$$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1-\varepsilon}^{2}\frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(x-2)\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[0-\arcsin(\varepsilon-1)\right]=-\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_2^3\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2}^{3-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin(x-2)\Big|_2^{3-\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin(1-\varepsilon)-0\right]=\frac{\pi}{2}$$

Следовательно

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi .$$

Перейдем теперь к некоторым геометрическим приложениям определенного интеграла.

1. Вычисление площадей плоских фигур.

Если плоская фигура ограничена прямыми $x=a, x=b (a<b)$ и кривыми $y=y_1(x), y=y_2(x)$, причем, $y_1(x)\le y_2(x)$ $(a\le x\le b)$, то её площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b\left[y_2(x)-y_1(x)\right]dx .$$

В отдельных случаях левая граница $x=a$ (или правая граница $x=b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$. В этих случаях величины a и b отыскиваются как абсциссы точек пересечения указанных кривых (см.рис.4.1.)

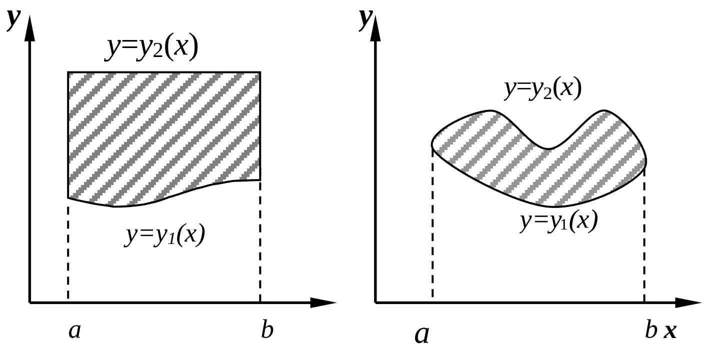


Рис.4.1.

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями $x=x(t), y=y(t)$, то площадь фигуры вычисляется по одной из трёх формул:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}x(t)y'(t)dt,\quad S=-\int_{\alpha}^{\beta}y(t)x'(t)dt,\quad S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx')dt,$$

где a и b - значения параметра t ,соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

В полярных координатах площадь сектора, ограниченного дугой кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1=\alpha$ и $\varphi_2=\beta$, выражается формулой

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=0$, $x=2$ и кривыми $y=2^x$, $y=2x-x^2$.

Решение.

Так как максимум функции $y=2x-x^2$ достигается в точке $x=1$ и

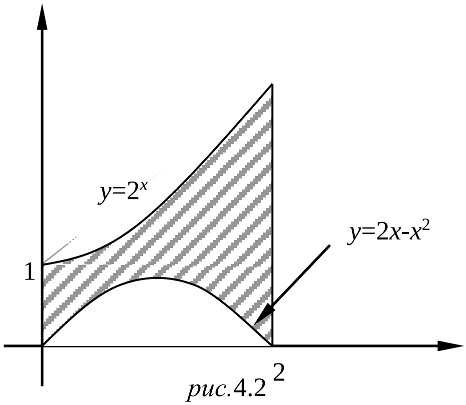


*рис.*4.2

равен 1, а функция $y=2x\geq 1$ на отрезке $[0,2]$, то (см. рис. 4.2.)

$$S=\int_{0}^{2}\left[2^x-(2x-x^2)\right]dx=\left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2-\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2=$$

$$= \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} - \left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$.

Решение.

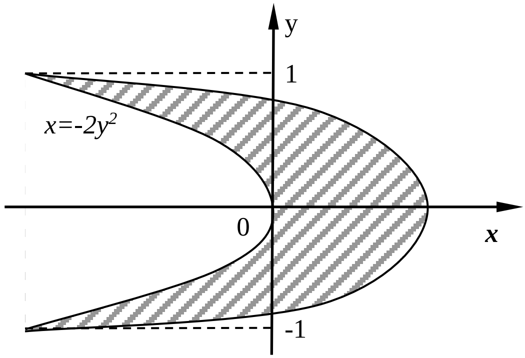


Рис.4.3

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x = -2y^2 \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases}$$

найдем ординаты точек пересечения кривых $y_1 = -1$, $y_2 = 1$.

Так как $1 - 3y^2 \geq -2y^2$ при $-1 \leq y \leq 1$,то

$$S = \int_{-1}^{1} \left[(1 - 3y^2) - (2y^2)\right] dy = 2\int_{0}^{1} (1 - y^2) dy = 2\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \ (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Решение.

Здесь удобно вычислить сначала

$$xy' - yx' = a\cos t \cdot b\cos t + b\sin t \cdot a\sin t = ab\,.$$

Отсюда

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab\,.$$

Пример.

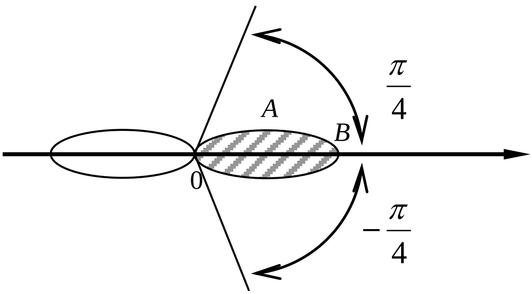


Рис 4.4

Найти площадь фигуры, ограниченной одним лепестком кривой $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемниската).

Решение.

Правая часть уравнения кривой неотрицательна при значениях φ, для которых $\cos 2\varphi \ge 0$.

Поэтому первый лепесток лежит в угловом секторе, в котором

$-\frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le \frac{\pi}{2}$,т.е. $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Следовательно,

$$S_{OABCO} = 2S_{OABO} = 2\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = a^2\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = \frac{a^2}{2}.$$

2. Вычисление длин дуг плоских кривых

Если плоская кривая задана уравнением в декартовых координатах $y = y(x)$ и производная $y(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'}\, dx,$$

где a и b -абсциссы концов данной дуги.

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$ и $y'(t)'$ непрерывны на отрезке $[t_1, t_2]$, то длина дуги кривой выражается формулой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt,$$

где t_1 и t_2 - значения параметра t, соответствующие концам дуги $(t_1 < t_2)$.

Если кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах, то длина дуги l кривой выражается интегралом

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 - значения полярного угла φ в концах дуги (φ_1, φ_2).

Пример.

Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной между точками $(0,0)$ и $(4,8)$.

Решение.

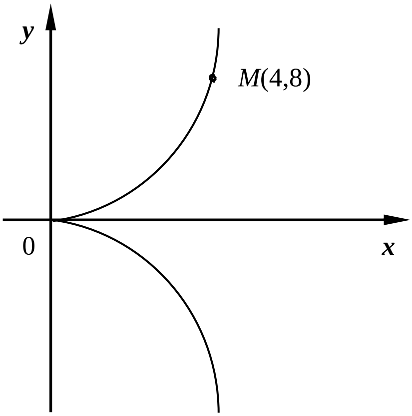


Рис 4.5.

Функция $y(x)$ определена при $x \geq 0$. Поскольку данные точки $(0,0)$ и $(4,8)$ лежат в первой четверти, то $y = x^{\frac{3}{2}}$.

Отсюда

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

Следовательно,

$$l = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Пример.

Вычислить длину дуги развертки круга

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \text{ от } t = 0 \text{ до } t = 2\pi .$$

Решение.

Дифференцируя по t, получим

$$x_t' = at\cos t, y_t' = at\sin t,$$

откуда $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = at$.

Следовательно,

$$l = \int_0^{2\pi} atdt = \left.\frac{at^2}{2}\right|_0^2 = 2a\pi^2 .$$

Пример.

Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$.

Решение.

Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла от 0 до 2π. Поэтому

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi .$$

Вычислим первообразную для функции $\sqrt{\varphi^2 + 1}$ методом интегрирования по частям:

$$J = \int \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi = \begin{vmatrix} u = \sqrt{\varphi^2 + 1} & du = \dfrac{\varphi d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} \\ d\varphi = dv & v = \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} - \int \frac{(\varphi^2 + 1) - 1}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} d\varphi = \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} - \int \sqrt{\varphi^2 + 1}\, d\varphi +$$

$$+ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}} = \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} - J + \ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}| .$$

Откуда

$$2J = \varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}| ,$$

$$J = \int \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}|,$$

и, следовательно,

$$l = a\frac{1}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln|\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}|\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})\right].$$

3. Вычисление объемов тел

Объем тела выражается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

где $S(x)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси OX в точке с абсциссой x. a и b - левая и правая границы изменения x, $S(x)$ непрерывна при $x \in [a,b]$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, осью абсцисс и прямыми $x = a, x = b$, $(a < b)$, выражается интегралом

$$V_{TB} = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ $[0 \leq y_1(x) \leq y_2(x)]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, выражается формулой

$$V_{TB} = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Если кривая задана параметрически или в полярных координатах, то следует сделать соответствующую замену переменной в указанных формулах.

Пример.
Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение.

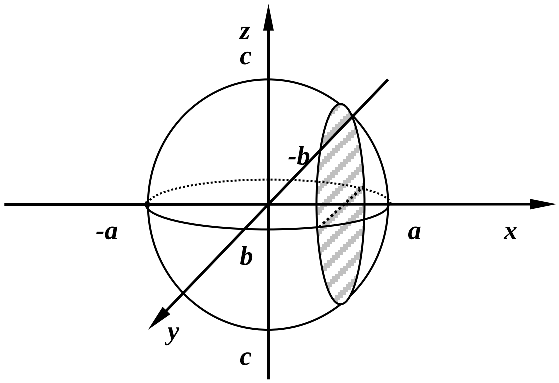


Рис.4.6

Сечение эллипсоида плоскостью $x=\mathrm{const}$ есть эллипс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1$$

с полуосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$.

Следовательно площадь сечения

$$S(x)=\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\quad -a\le x\le a,$$

Поэтому объем эллипсоида

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Положив, в частности, $a=b=c=R$,получим объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

Пример.

Вычислить вокруг оси абсцисс объем тела, которое образуется при вращении одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

вокруг оси абсцисс.

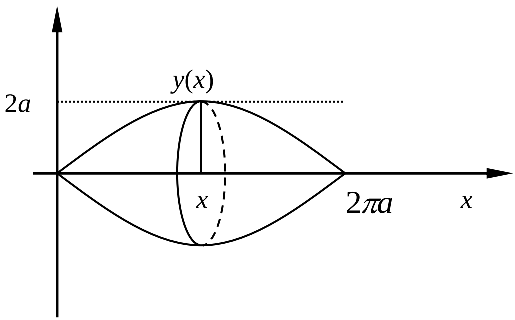


*Рис.*4.7.

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx$$

делаем замену переменной, полагая

$$x = a(t - \sin t) .$$

x	t
0	0
$2\pi a$	2π

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_0^{2\pi} dt - 3\int_0^{2\pi} \cos t dt + 3\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \right] = \pi a^3 \left[t\Big|_0^{2\pi} - 3\sin t\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} t \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} - \sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} \right] =$$

$$= \pi a^3 (2\pi + 3\pi) = 5\pi^2 a^3 .$$

Контрольная работа №4 по теме

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕНОЙ»

4.1. Найти неопределенные интегралы.

4.1.1. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx$; $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}dx$; $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-2}}$; $\int \frac{dx}{1+2\sin x}$;

4.1.2. $\int \frac{xdx}{(x^2-2)^5}$; $\int e^x \ln(1-5e^x)dx$; $\int \frac{3x^2+2x-1}{x^3-1}dx$;

$\int \frac{dx}{\cos x+\operatorname{tg}x}$ $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$;

4.1.3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{1+x^8}}$; $\int x5^{2x}dx$; $\int \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$; $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$;

4.1.4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(3\operatorname{ctg}x-1)}$; $\int \frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;

$\int \frac{x^2+\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}}dx$; $\int \frac{dx}{1-2\cos x}$;

4.1.5. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}dx$; $\int x^2 e^{\frac{x}{2}}dx$; $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

$\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt[3]{x+1}}dx$; $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}dx$;

4.1.6. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$; $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$; $\int \frac{x}{2x^2-3x-2}dx$;

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})};\ \int \frac{dx}{\sin x-\cos x};$$

4.1.7. $$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx;\ \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx;\ \int \frac{x^3-1}{4x^3-x^2}dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)};\ \int \frac{dx}{2-\sin x};$$

4.1.8. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}};\ \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx;\ \int \frac{x}{2x^2+3x+1}dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}};\ \int \frac{dx}{2\cos x-\sin x};$$

4.1.9. $$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{2-3\sin x}}dx;\ \int x^2\cos 3x dx;\ \int \frac{dx}{x^4-x^2};$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx;\ \int \frac{dx}{\sin x+\cos x};$$

4.1.10. $$\int \frac{\sqrt[3]{1-\ln x}}{x}dx;\ \int x\ln^2(x-1)dx;\ \int \frac{dx}{x(x^2+1)};$$

$$\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};\ \int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx;$$

4.2. Вычислить определенные интегралы.

4.2.1. $$\int_0^2 \ln(x^2+4)dx; \qquad \int_0^3 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}.$$

4.2.2. $$\int_0^1 x^3\operatorname{arctg} x dx; \qquad \int_0^1 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+\sqrt[3]{9x-1}+1}.$$

4.2.3. $$\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-2x}dx; \qquad \int_0^7 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}.$$

4.2.4. $\int_0^1 3x\arcsin x\,dx$; $\int_{-1}^{0}\frac{(7x+16)dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{(7x+8)}}$.

4.2.5. $\int_0^{\pi/2} x^2\sin 2x\,dx$; $\int_1^4\frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$.

4.2.6. $\int_{-1}^{2} 3x^2\ln(x+2)dx$; $\int_0^3\frac{15x\,dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+\sqrt[4]{5x+1}}$.

4.2.7. $\int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$; $\int_0^5\frac{27x\,dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+\sqrt[4]{3x+1}}$.

4.2.8. $\int_0^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$; $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3}+3\sqrt[4]{5x-4}}$.

4.2.9. $\int_0^{1/2}\arcsin 2x\,dx$; $\int_0^5\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$.

4.2.10. $\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x^3}dx$; $\int_1^2\frac{5x\,dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$.

4.3. Вычислить приближенное значение определенного интеграла с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления проводить с округлением до третьего десятичного знака.

4.3.1. $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\,dx$.

4.3.2. $\int_2^{12}\sqrt{x^3+9}\,dx$.

4.3.3. $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^3+32}\,dx$.

4.3.4. $\int_0^{10}\sqrt{x^3+5}\,dx$.

4.3.5. $\int_{-1}^{9}\sqrt{x^3+2}\,dx$.

4.3.6. $\int_2^{12}\sqrt{x^3+4}\,dx$.

4.3.7. $\int\limits_{1}^{11}\sqrt{x^3+3}dx$.

4.3.8. $\int\limits_{-3}^{7}\sqrt{x^3+36}dx$.

4.3.9. $\int\limits_{-2}^{8}\sqrt{x^3+8}dx$.

4.3.10. $\int\limits_{-2}^{8}\sqrt{x^3+11}dx$.

4.4. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

4.4.1. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$; $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

4.4.2. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^6 x}$; $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

4.4.3. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{3x+1}{3x^2+2x-3}dx$; $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}$.

4.4.4. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}\frac{dx}{1-\cos 4x}$.

4.4.5. $\int\limits_{e}^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x dx$.

4.4.6. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$ $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\cos x}$.

4.4.7. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2}$; $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-1)^3}}$.

4.4.8. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[5]{(x-2)}}$.

4.4.9. $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$; $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{x^3}}$.

4.4.10. $\int\limits_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+1}$; $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

4.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

4.5.1. $y = x^2; y = 2 - x^2$.

4.5.2. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{6}$.

4.5.3. $y = x^2 + 4x; y = x + 4.$

4.5.4. $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{5\pi}{6}$.

4.5.5. $\rho = 3\sin 6\varphi$.

4.5.6. $y^3 = x^2; y = 0; x = 8.$

4.5.7. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$, $\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3}$.

4.5.8. $\rho = \cos\varphi; \rho = 2\cos\varphi$.

4.5.9. $4y = x^2; y = 4x$.

4.5.10. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

4.6. Вычислить длину кривой.

4.6.1. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

4.6.2. $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4.6.3. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

4.6.4. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 2$.

4.6.5. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\le x\le \frac{7}{9}$.

4.6.6. $\begin{cases} x=4(\cos t+t\sin t) \\ y=4(\sin t-t\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le 2$.

4.6.7. $y=\ln\frac{5}{2}x$, $\sqrt{3}\le x\le \sqrt{8}$.

4.6.8. $y=-\ln\cos x$, $0\le x\le \frac{\pi}{6}$.

4.6.9. $\rho=6e^{\frac{12}{5\varphi}}$, $-\frac{\pi}{2}\le \varphi\le \frac{\pi}{2}$.

4.6.10. $y=e^x+6$, $\ln\sqrt{2}\le x\le \ln\sqrt{15}$.

4.7. Вычислить объем тела:

а) по поперечному сечению, используя формулу площади эллипса πcd ,где c и d -полуоси эллипса.

б) полученного вращением фигуры вокруг некоторой оси.

4.7.1. а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$; б) $y=\sin x, y=0, 0\le x\le\pi$, ось $0x$

4.7.2. а) $x^2+\frac{y^2}{25}+z^2=1$; б) $y=\frac{6}{x}, x=0, y=1, y=6$, ось $0y$

4.7.3. а) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; б) $y=\frac{1}{4}x^2, x=4, y=0$, ось $0x$

4.7.4. а) $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$; б) $y=\frac{x^2}{4}, y=4$, ось $0y$

4.7.5. а) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$; б) $y=4x^2, x=2, y=0$, ось $0x$

4.7.6. а) $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=1$; б) $y=x^3, y=4x, x>0$, ось $0y$

4.7.7. а) $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=1$; б) $y=\frac{5}{x}, y+x=6$, ось $0x$

4.7.8. а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$; б) $x^2+\frac{y^2}{4}=1$, ось $0y$

4.7.9. а) $x^2+y^2+\frac{z^2}{25}=1$; б) $y=9x^2, x=3, y=0$, ось $0x$

4.7.10 а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$; б) $y=x^3, y=9x, x>0$, ось $0y$

Контрольные вопросы к экзамену

1. Первообразная и неопределенный интеграл, основные свойства.
2. Таблица интегралов, инвариантность формул интегрирования.
3. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
4. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
5. Интегрирование рациональных дробей. Примеры.
6. Интегрирование простейших иррациональностей. Примеры.
7. Интегрирование тригонометрических функций. Примеры.
8. Определенный интеграл и его основные свойства.
9. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница. Примеры.
10. Замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
11. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Примеры.
12. Несобственные интегралы, их вычисление. Примеры.
13. Вычисление площадей плоских фигур, примеры.
14. Вычисление длин дуг плоских кривых, примеры.
15. Вычисление объёмов тел, примеры

Тема 5. **ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Программный объем темы:

1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.

2. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала.

3. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент.

4. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.

5. Производные сложной функции. Неявные функции. Дифференцирование неявных функций.

6. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимое условие. Достаточные условия.

7. Условный экстремум. Метод Лагранжа.

Существуют различные способы задания функции двух переменных:

а) аналитическое задание - когда функция $z = f(x,y)$ задана аналитическим выражением, например, $z = x^2 + 2y\sin(x-3y)$;

б) табличное задание - с помощью таблицы, в которой на пересечении строки и столбца, соответствующих определенным значениям x и y, поставлено соответствующее значение функции $f(x,y)$;

в) графическое изображение функции $z = f(x,y)$. Пусть эта функция определена в области D на плоскости Oxy, т.е. для таких пар чисел (x,y), что точка $M(x,y)$ лежит в D (рис. 5.1.). Условно можно

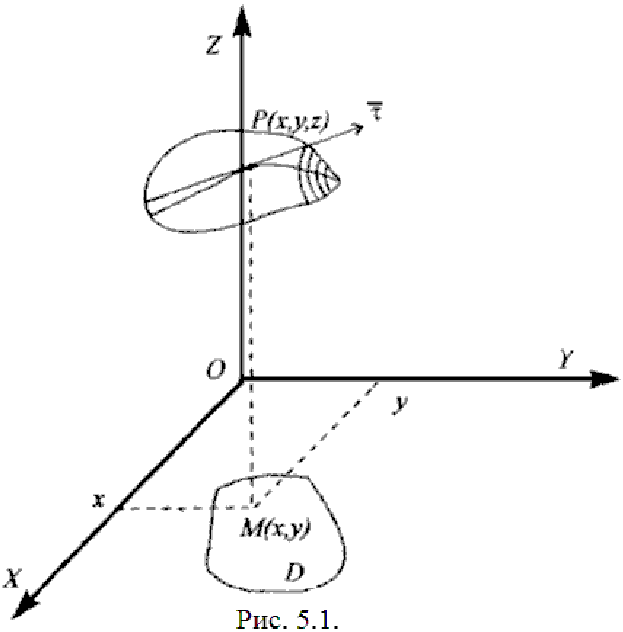


Рис. 5.1.

записать $z = f(M)$. Из каждой такой точки восставим перпендикуляр к плоскости Oxy и отложим на нем отрезок, равный $f(x, y)$. Получим в пространстве точку $P(x, y, z)$, где $z = f(x, y) = f(M)$. Множество таких точек P при всевозможных $M \in D$ называют графиком функции $z = f(x, y)$, т.е. график - это поверхность с уравнением $z = f(x, y)$.

Число A называется пределом функции $z = f(x, y) = f(M)$ при $M \to M_0$ (т.е., при $x \to x_0$, $y \to y_0$), если разность $|f(M) - A|$ можно сделать как угодно малой, взяв т. M достаточно близко к т. M_0. При этом пишут $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y) = f(M)$ называется непрерывной в т. M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Пусть аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ получили приращение Δx и Δy. Частным приращением функции z по x (по y) и полным приращением называются разности

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y), \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$
$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частными производными по x (по y) от функции $z = f(x, y)$ называются

$$z'_x = f'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$
$$z'_y = f'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Отсюда видно, что z'_x есть производная по x, вычисленная в предположении, что $y = \text{const}$, а z'_y есть производная по y, вычисленная в предположении, что $x = \text{const}$.

Пример.

$$z = x^{\sin y}; z'_x = \sin y \cdot x^{\sin y - 1}; z'_y = x^{\sin y} \ln x \cdot \cos y.$$

Аналогично определяются частные производные функций большого числа переменных.

Если $z = f(x, y), x = x(t), y = y(t),$ то $z = f(x(t), y(t))$ является сложной функцией от t. При этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

и называется полной производной функции z.

Пример.

Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$, если $z = \ln(x^2 + y)$, $x = t^3 + 2,$ $y = 3t^4 - 1.$

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y}; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y};$$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2; \frac{dy}{dt} = 12t^3.$$

Подставляя найденные выражения в формулу полной производной, получим

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y} \cdot 3t^2 + \frac{1}{x^2 + y} \cdot 12t^3.$$

В случае, когда функция $z = f(x, y)$ задана неявно равенством $F(x, y, z) = 0$, частные производные находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} \Bigg/ \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}.$$

Полным дифференциалом dz функции $z = f(x, y)$ называется

$$dz = df(x, y) = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Как и для дифференциала функции одного переменного, верно приближенное равенство $\Delta f \approx df$ (где Δf – полное приращение).

Пример.

Вычислить приближенно с помощью дифференциала
$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}$.

Искомое число будем рассматривать как значение функции
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ при $x_2=x_1+\Delta x$, $y_2=y_1+\Delta y$, если $x_1=4$, $y_1=3$, $\Delta x=0{,}05$, $\Delta y=0{,}07$. Имеем

$$f(4{,}3)=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(4{,}3)=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(4,3)}=\frac{4}{5};\ \frac{\partial f}{\partial y}(4{,}3)=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(4,3)}=\frac{3}{5};$$

$$df(4{,}3)=\frac{4}{5}\cdot 0{,}05+\frac{3}{5}\cdot 0{,}07\cong 0{,}08.$$

Следовательно,

$$\Delta f=\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}-\sqrt{4^2+3^2}\approx df(4{,}3)=0{,}08$$

и поэтому искомое

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(3{,}07)^2}\cong 5+0{,}08=5{,}08.$$

Прямая линия называется касательной к поверхности с уравнением $\Phi(x,y,z)=0$ в точке $P(x_0,y_0,z_0)$, если она является касательной к какой-либо кривой, лежащей на поверхности и проходящей через т. P. Так как таких кривых бесконечно много, то и касательных к поверхности в т. P бесконечно много. Если в т. P производные $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ существуют и непрерывны, причем хотя бы одна из них отлична от нуля, то все касательные прямые к данной поверхности в точке P лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности $\Phi(x,y,z)=0$ в точке P. Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через т. P, называется *нормалью* к поверхности. Оказывается, что касательная плоскость к поверхности $\Phi(x,y,z)=0$ в точке $P(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярна вектору $\overline{N}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(P),\frac{\partial\Phi}{\partial y}(P),\frac{\partial\Phi}{\partial z}(P)\right)$.

Поэтому уравнения касательной плоскости и нормали имеют вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}},$$

где значения $\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ вычисляются в т. $P(x_0,y_0,z_0)$.

Пример.

В точке $P(1,1,1)$ провести касательную плоскость и нормаль к поверхности, заданной уравнением

$$3x^4-4y^2z+4z^2xy-4z^3x+1=0.$$

Так как $\Phi(x,y,z)=3x^4-4y^2z+4z^2xy-4z^3x+1,$ то

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_p=\left[12x^3+4z^2y-4z^3\right]_p=12,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_p=\left[-8yz+4z^2x\right]_p=-4,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_p=\left[-4y^2+8zxy-12z^2x\right]_p=-8.$$

После упрощений получим, что уравнение касательной плоскости имеет вид

$$3x-y-2z=0,$$

а уравнение нормали

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-2}.$$

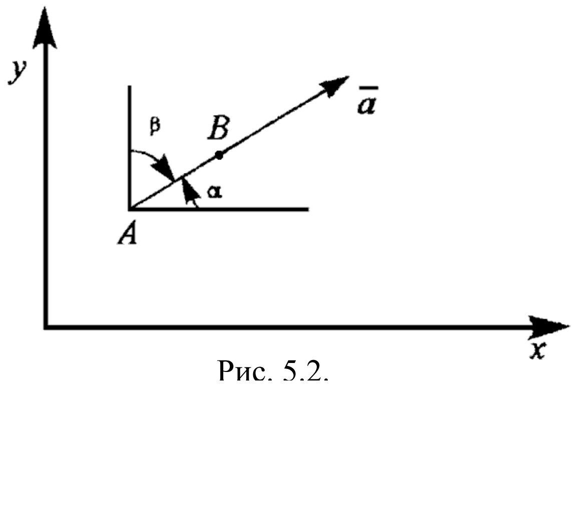


Рис. 5.2.

Пусть даны функция $u=f(x,y)$, точка

$A(x_0, y_0)$ и вектор $\bar{a} = (a_x, a_y)$. Пусть также B - точка на векторе $\bar{a}$. Производной от функции $u = f(x, y)$ в точке A по направлению вектора $\bar{a}$ называется

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \lim_{B \to A} \frac{f(B) - f(A)}{|AB|}. \tag{1}$$

Эта производная выражается через частные производные так:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta, \tag{2}$$

где $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}}$.

Введем вектор $\operatorname{grad} u = \left(u_x', u_y'\right)$, который называется градиентом функции $u = f(x, y)$, а также вектор единичной длины $\bar{a}^0 = \bar{a}/|\bar{a}| = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Тогда производную по направлению можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\operatorname{grad} u, \bar{a}^0). \tag{3}$$

В случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, точки $A(x_0, y_0, z_0)$ и вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ производная по направлению также определяется формулами (1), (3), но вместо (2) будет

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \bar{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Отметим следующее свойство производной по направлению: производная в данной точке по направлению $\bar{a}$ имеет наибольшее значение, если направление вектора $\bar{a}$ совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно $|\operatorname{grad} u|$.

Пример.

Дана функция $u = 5x^2 + 6xy$, точка $A(2,1)$ и вектор $\bar{a} = (1,2)$. Найти: 1) $\operatorname{grad} u$ в точке A; 2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

Вычислим частные производные функции $u = f(x, y)$ в точке A:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = (10x + 6y)\big|_A = 26, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = (6x)\big|_A = 12.$$

Поэтому

$$\operatorname{grad} u(A) = 26\bar{i} + 12\bar{j}.$$

Возьмем теперь вектор $\bar{a}$. Так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, то

$$\left.\frac{\partial u}{\partial a}\right|_A = 26 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 10 \cdot \sqrt{5}.$$

Вторые частные производные (или частные производные 2-го порядка) от функции $z = f(x, y)$, определяются так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x.$$

Можно показать, что $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в т. $M(x_0, y_0)$, то каждая из частных производных z'_x и z'_y, в т. M_0 или не существует, или обращается в нуль. Эти условия аналогичны необходимому условию экстремума функции одного переменного. Точки, в которых z'_x и z'_y не существуют или равны нулю, называются критическими точками функции $z = f(x, y)$. Каждая точка экстремума является критической точкой, но не каждая критическая точка — точка экстремума.

Обозначим $A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0).$

Пусть M_0 — критическая точка, причем $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$

Тогда в точке M_0:

1) $f(x,y)$ имеет максимум, если $AC-B^2>0$ и $A<0$;

2) $f(x,y)$ имеет минимум, если $AC-B^2>0$ и $A>0$;

3) $f(x,y)$ не имеет экстремума, если $AC-B^2<0$.

4) если $AC-B^2=0$, то экстремум может быть и может не быть (требуется дальнейшее исследование).

Пример.

Дана функция $z=f(x,y)=x^3+21xy^2-48x+63y^2$.

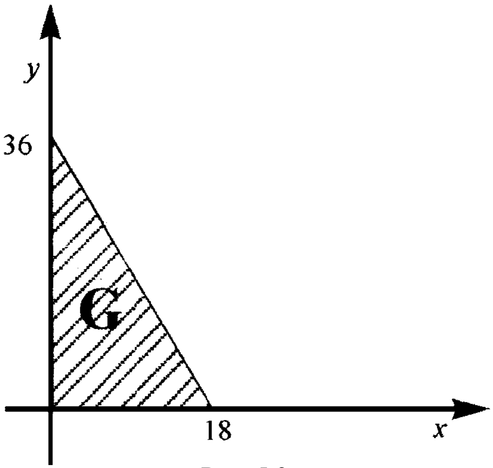


Рис. 5.3.

Требуется исследовать данную функцию на экстремум в области G, ограниченной линиями $2x+y=36$, $x=0$, $y=0$, найти точки M_1 и M_2 соответственно наименьшего и наибольшего значений функции в области G и подсчитать эти значения.

Построим данную область G (рис. 5.3.).

Найдем критические точки внутри области:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+21y^2-48,\ \frac{\partial z}{\partial y}=42xy+126y,$$

$$\begin{cases}3x^2+21y^2-48=0\\42xy+126y=0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\x^2=16\end{cases}\\ \begin{cases}x=-3\\y^2=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$P_1(-4,0),P_2(4,0),P_3(-3,1),P_4(-3,-1).$$

Из этих точек лишь только $P_2(4,0)$ принадлежит области G. В ней имеем

$$A=(6x)\Big|_{p_2}=24, B=(42y)\Big|_{p_2}=0, C=(42x+126)\Big|_{p_2}=294.$$

Поэтому $A=24>0$ и $AC-B^2=7056>0$. Следовательно, P_2 - точка экстремума, а именно - точка минимума. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z\Big|_{p_2}=-128.$$

Найдем теперь наибольшее и наименьшее значения функции z в области G. Для этого рассмотрим каждый участок границы G:

а) $y=0, 0\le x\le 18 \Rightarrow$

$$z(x,0)=z(x)=x^3-48x, z'(x)=3x^2-48x=3x(x-16)\Rightarrow$$

$$z'(x)=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=16.$$

Вычислим значения функции z в точках $P_5(0,0), P_6(16,0), P_7(18,0)$:

$$z\Big|_{p_5}=0, z\Big|_{p_6}=3328, z\Big|_{p_7}=4968.$$

б) $x=0, 0\le y\le 36 \Rightarrow z(0,y)=z(y)=63y^2, z'(y)=126y \Rightarrow$ $z'(y)=0$ при $y=0.$

Значение функции z в т. $P_5(0,0)$ известно.

Вычислим функцию в т. $P_8(0,36)$:

$$z\Big|_{p_8}=81648.$$

в) $y=y(x)=36-2x, 0\le x\le 18 \Rightarrow$

$$z(x,y(x))=z(x)=x^3+21x(36-2x)^2-48x+63(36-2x)^2.$$

Вычисления показывают, что $z'(x)\ne 0$ при $0\le x\le 18$.

Сравнивая найденные в точках P_2, P_5, P_6, P_7, P_8 значения функции, получаем $Z_{\text{наиб.}}=81648$ (в точке P_8), $Z_{\text{наим.}}=-128$ (в точке P_2).

Таким образом, $M_1=P_2(4,0), M_2=P_8(0,36).$

Контрольная работа №5 по теме

"ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

5.1. Дана функция $z = f(x, y)$. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

5.1.1. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{1+x^2}$;

5.1.2. $z = e^{x+y}(x\cos y + y\sin x)$;

5.1.3. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}$;

5.1.4. $z = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5.1.5. $z = e^{x}(\cos y + x\sin y)$;

5.1.6. $z = x^{\frac{1}{y}} + \sin y$;

5.1.7. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

5.1.8. $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{y}{x}\right)$;

5.1.9. $z = \sqrt[3]{5e^{x} + xy + y^2}$;

5.1.10. $z = x^2\ln(x+y)$.

5.2. Вычислить значение производной сложной функции $z = z(x, y)$, где $x = x(t),\ \ y = y(t)$, при $t = t_0$.

5.2.1. $z = x^{y}, x = e^{t}, y = \ln t, t_0 = 1$;

5.2.2. $z = e^{y-2x+2}, x = \sin t, y = \cos t, t_0 = \frac{\pi}{2}$;

5.2.3. $z = \ln(e^{2x} + e^{y}), x = t^4, y = t^3, t_0 = 1$;

5.2.4. $z = y^{x}, x = \ln(t-1), y = e^{\frac{t}{2}}, t_0 = 2$;

5.2.5. $z = x^2e^{y}, x = \cos t, y = \sin t, t_0 = \pi$;

5.2.6. $z=\ln(e^{x}+e^{-y}), x=t^{2}, y=t^{3}, t_{0}=-1;$

5.2.7. $z=\dfrac{y}{x}, x=e^{t}, y=1-e^{2t}, t_{0}=0;$

5.2.8. $z=x\sin\dfrac{x}{y}, x=1+3t, y=\sqrt{1+t^{3}}, t_{0}=0;$

5.2.9. $z=x^{2}+xy^{2}, x=e^{2t}, y=\sin t, t_{0}=0;$

5.2.10. $z=ye^{x^{2}}, x=2-t, y=5t^{2}, t_{0}=1.$

5.3. Функция $z=f(x,y)$ задана в неявном виде. Найти полный дифференциал функции dz.

5.3.1. $z^{3}-3(x+y)z^{2}+y^{3}=0;$

5.3.2. $z^{3}-3xyz=a^{3};$

5.3.3. $x+y+z=e^{z};$

5.3.4. $x^{2}+y^{2}+z^{2}-3xyz=0;$

5.3.5. $\cos^{2}x+\cos^{2}y+\cos^{2}z=1;$

5.3.6. $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}+\dfrac{z^{2}}{c^{2}}=1;$

5.3.7. $xyz=x+y+z^{2};$

5.3.8. $z=x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z-x};$

5.3.9. $e^{z}+x+2y+z=4;$

5.3.10. $x^{2}+y^{2}+z^{2}-xy+3z=7.$

5.4. Дана функция $w=f(x,y,z)$. Показать, что справедливо указанное в задаче соотношение.

5.4.1. $w=\dfrac{y^{4}}{12}+\dfrac{y^{3}}{6}(z+x)+\dfrac{y^{2}zx}{2}+\dfrac{z-x}{z+y};$

$$\frac{\partial^{2}w}{\partial y^{2}}-\frac{\partial^{2}w}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^{2}w}{\partial y\partial x}=zx.$$

5.4.2. $w = x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{x}{y} e^{\frac{x}{z}};$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 4y.$$

5.4.3. $w = \dfrac{x}{z} + e^{xy}\,\mathrm{arctg}\,xz;$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{z}.$$

5.4.4. $w = \dfrac{z^4}{12} - \dfrac{z^3}{6}(x + y) + \dfrac{z^2 yx}{2} + (x - z)\cos(y - x);$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = yz.$$

5.4.5. $w = xyz + e^{x+y+z} \ln \dfrac{y}{z};$

$$y\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (y + z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 2yz.$$

5.4.6. $w = \dfrac{z}{x} + e^{zy}\sin xz;$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2z}{x^2}.$$

5.4.7. $w = \dfrac{xy}{z}\ln x + x\sin\dfrac{yz}{x^2};$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + y\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{xy}{z^2}.$$

5.4.8. $w = x + y + z + yze^{x^2 + y^2};$

$$y^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + xz\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} - y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = z - y.$$

5.4.9. $w = \frac{x}{z} + x^2 yz\mathrm{tg}xz;$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

5.4.10. $w = xyz + e^{\frac{x}{z}}\cos(x+y+z);$

$$x\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - (x+z)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 2xz.$$

5.5. Дана функция $z = f(x, y)$ и две точки $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.
Требуется:

1) вычислить значение z в т. B;
2) вычислить приближенное значение функции в т. B, исходя из значения функции в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B её дифференциалом;
3) оценить в процентах относительную погрешность, получающуюся при замене приращения функции её дифференциалом;
4) составить уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $C(x_1, y_1, z_1)$.

5.5.1. $z = xy - 3y^2 - 4x; A(2;3), B(3.03;2.95);$

5.5.2. $z = 2x^2 + 2y^2 - xy; A(-1;3), B(-0.97;2.98);$

5.5.3. $z = 2x^2 + xy + x - y; A(1;3), B(1.07;2.95);$

5.5.4. $z = 3x^2 + 2y^2 - xy; A(-1;3), B(-0.98;2.97);$

5.5.5. $z = xy + 3y^2 - x; A(2;1), B(2.03;1.02);$

5.5.6. $z = x^2 - y^2 + 7x + 2y; A(2;3), B(2.03;2.98);$

5.5.7. $z = x^2 + xy + y^2; A(1;2), B(1.02;1.96);$

5.5.8. $z = x^2 + y^2 - 3x + 4y; A(2;1), B(2.05;0.97);$

5.5.9. $z = xy - 2y^2 + 2x; A(1;3), B(0.98;3.02);$

5.5.10. $z = x^2 + 3xy - 6y; A(4;1), B(3.96;1.03).$

5.6. Дана функция $z = f(x, y)$, точка $A(x_0, y_0)$ и вектор $\bar{a} = (a_1; a_2)$. Найти

1) $\operatorname{grad} z$ в точке A;

2) производную в точке A по направлению вектора $\bar{a}$.

5.6.1. $z = \ln(3x^2 + 2y^2); A(1;2), \bar{a} = (3;-1);$

5.6.2. $z = 2x^2 + xy + y^2; A(2;2), \bar{a} = (3;-2);$

5.6.3. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y); A(1;2), \bar{a} = (2;-3);$

5.6.4. $z = x^2 + xy + y^2; A(1;1), \bar{a} = (2;-1);$

5.6.5. $z = \ln(2x^2 + 3y^2); A(2;1), \bar{a} = (-1;2);$

5.6.6. $z = x^2 + 2xy + 2y^2; A(3;2), \bar{a} = (3;-2);$

5.6.7. $z = \arcsin(x^2 / y); A(-1;2), \bar{a} = (3;-8);$

5.6.8. $z = 2x^2 + 3xy + y^2; A(2;1), \bar{a} = (3;-4);$

5.6.9. $z = \ln(3x^2 + y^2); A(1;2), \bar{a} = (3;1);$

5.6.10. $z = \ln(5x^2 + 3y^2); A(1;1), \bar{a} = (3;2).$

5.7. Дана функция $z = x^3 + Bxy^2 + Cx + Dy^2$. Требуется исследовать данную функцию на экстремум в области G, ограниченной линиями $Ax + y = E, x = 0, y = 0;$ найти точки M_1, M_2 соответственно наименьшего и наибольшего значений заданной функции в области G и подсчитать эти значения.

5.7.1. $B = 21, C = -48, D = -63, A = 3, E = 18;$

5.7.2. $B = 63, C = -75, D = -126, A = 2, E = 22;$

5.7.3. $B = 24, C = -27, D = 24, A = 2, E = 22;$

5.7.4. $B = 36, C = -48, D = -72, A = 3, E = 24;$

5.7.5. $B = 48, C = -75, D = 144, A = 2, E = 42;$

5.7.6. $B = 9, C = -12, D = -9, A = 3, E = 12;$

5.7.7. $B = 72, C = -75, D = 72, A = 2, E = 34;$

5.7.8. $B = 45, C = -48, D = 45, A = 2, E = 28;$

5.7.9. $B = 27, C = -75, D = -108, A = 3, E = 21;$

5.7.10. $B = 15, C = -27, D = 30, A = 2, E = 22.$

Контрольные вопросы к экзамену

1. Как находятся частные производные функции нескольких переменных, вторые частные производные?
2. Определение точек экстремума функции. Как их найти?
3. Опишите поиск наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.
4. Определение производной по направлению. Формула для её вычисления.
5. Градиент функции и его свойства.
6. Как найти уравнения нормали и касательной плоскости в некоторой точке поверхности?
7. Постановка задачи на условный экстремум. Метод Лагранжа.
8. Как найти полную производную сложной функции?

Тема 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Программный объем темы:

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Понятие об особых решениях дифференциальных уравнений. Основные классы уравнений, интегрируемых в квадратурах.
2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.
3. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (однородные и неоднородные). Понятие общего решения. Метод вариации произвольных постоянных.
4. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида.
5. Задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод исключения. Векторно-матричная запись нормальной системы. Структура общего решения.
6. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение в случае простых корней характеристического уравнения.

Дифференциальное уравнение 1-го порядка - уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную

$$f(x, y, y') = 0.$$

Решением дифференциальных уравнений называется любая действительная функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале (a, b) и обращающая данное уравнение в тождество.

Если функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, определена в неявном виде: $F(x, y) = 0$, то $F(x, y) = 0$ называется интегралом данного дифференциального уравнения.

Рассмотрим некоторые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1. Уравнения с разделяющимися переменными

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0,$$

$$\text{или } y' = f_1(x) f_2(y).$$

Разделение переменных производится следующим образом:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy=0;\ f_1(x)dx=\frac{dy}{f_2(y)},$$

которые интегрируются

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_1(y)}{N_2(y)}dy=C;$$

$$\int f_1(x)dx+C=\int\frac{dy}{f_2(y)}.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy+y)dx+(xy+x)dy=0,$$

$$y(x+1)dx+x(y+1)dy=0,$$

$$(1+\frac{1}{x})dx+(1+\frac{1}{y})dy=0,$$

$$\int(1+\frac{1}{x})dx+\int(1+\frac{1}{y})dy=\ln C,$$

$$x+\ln|x|+y+\ln|y|=\ln|C|,$$

$$\ln(xy)+\ln e^{x+y}=\ln C,$$

$xye^{x+y}=C$ - общий интеграл уравнения.

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения. $(1+e^{2x})y^2y'=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$:

$$y^2y'=\frac{e^x}{1+e^{2x}},$$

$$y^2\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{1+e^{2x}},$$

$$y^2dy=\frac{e^xdx}{1+e^{2x}},$$

$$\int y^2dy=\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}=C,$$

$$\frac{y^3}{3}=\operatorname{arctg}e^x+C,$$

$$y=\sqrt{C+3\operatorname{arctg}e^{x}}\ .$$

Общее решение.

Используем начальные условия, определим значение произвольной постоянной:

$$1=\sqrt[3]{C+3\operatorname{arctg}e^{0}}\ ,$$

$$1=\sqrt[3]{C+3\frac{\pi}{4}}\ ,$$

$$C=1-\frac{3}{4}\pi\ .$$

Следовательно, частное решение:

$$y=\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}\pi+3\operatorname{arctg}e^{x}}\ .$$

2. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

Уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным, если $f(x,y)$ - однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов, т.е.

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{0}f(x,y)=f(x,y).$$

Решение выполняется с помощью замены $\dfrac{y}{x}=U(x)$.

$$y=x\cdot U,\ y'=U+xU'$$

и сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример.

$$xy'=x\sin\frac{y}{x}+y;\ y(2)=\pi\ ,$$

$$y'=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\ ,$$

замена $\dfrac{y}{x}=U\ ,y=xU\ ,y'=U+xU'$,

$$U+xU'=\sin U+U\ ,$$

$$xU'=\sin U\ ,$$

$$x\frac{dU}{dx}=\sin U\ ,$$

$$\frac{dU}{\sin U} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dU}{\sin U} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|,$$

$$\ln|\operatorname{tg}\frac{U}{2}| = \ln x + \ln C,$$

$$\operatorname{tg}\frac{U}{2} = xC,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = xC;$$

$y = 2x \operatorname{arctg} xC$ - общее решение.

Найдем C , используя начальное условие

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 2C, 1 = 2C, C = \frac{1}{2};$$

$y = 2x \operatorname{arctg}\frac{1}{2}x$ - частное решение.

3. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли

Уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, линейное относительно неизвестной функции и ее производной y', называется неоднородным линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Функции $P(x) \neq 0$ и $Q(x) \neq 0$ должны быть непрерывными на отрезке $[a, b]$ для того, чтобы выполнились условия теоремы Коши существования и единственности решения.

Для решения выполняем замену $y = U(x)V(x)$.

$$U = e^{-\int P(x)dx},$$

$$V = \int \frac{Q(x)}{U(x)}dx + C,$$

т.е. общее решение всегда можно записать в виде

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx + C\right).$$

Пример:

$$y'+y\,\mathrm{tg}x=\frac{1}{\cos x}.$$

Ищем решение в виде $y=UV$, где

$$U=e^{-\int \mathrm{tg}\,x dx}=e^{\ln\cos x}=\cos x,$$

$$V=\int\frac{1}{\cos x\cos x}dx=\mathrm{tg}x+C,$$

$$y=\cos x(\mathrm{tg}x+C).$$

Пример:

$$xy'-2y=2x^4,$$

$$y'-\frac{2}{x}y=2x^3,$$

$$y=UV,$$

$$U=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2,$$

$$V=\int\frac{2x^3}{x^2}dx=x^2+C,$$

$$y=x^2(x^2+C)=x^4+Cx^2.$$

Уравнение Бернулли

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n,$$

замена $z=y^{1-n}$ приводит его к линейному.

Пример:

$y'+2e^x y=2e^x\sqrt{y}$ или $y'+2e^x y=2e^x y^{\frac{1}{2}}$,

$$y^{-\frac{1}{2}}y'+2e^x y^{\frac{1}{2}}=2e^x,$$

$$y^{\frac{1}{2}}=z,\ \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=z',$$

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'+e^x y^{\frac{1}{2}}=e^x,$$

$$z'+e^x z=e^x,$$

$$z = UV, U = e^{-\int e^x dx} = e^{-e^x},$$

$$V = \int \frac{e^x}{e^{-e^x}} dx = \int e^{+e^x} d(e^x) = e^{e^x} + C,$$

$$z = e^{-e^x}(e^{e^x} + C) = 1 + Ce^{-e^x},$$

$$y = (1 + Ce^{-e^x})^2.$$

Пример решения задачи на составления дифференциальных уравнений.

Задача. Записать уравнения кривой, проходящей через т. $P(1,2)$ и обладающей следующим свойством: площадь треугольника, образованного радиус-вектором любой точки кривой, касательной в этой точке и осью абсцисс, равна 2.

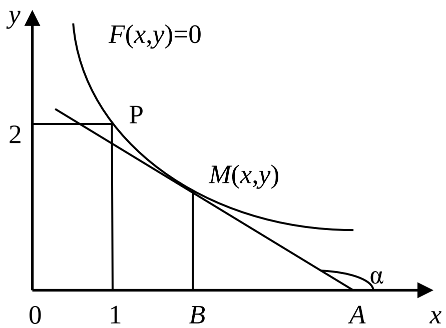


Рис 6.1.

Как видно из рисунка, $|OA| = |OB| + |AB| = x + |AB|$.

Из ΔBMA получаем

$$\frac{|BA|}{y} = \mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$|BA| = -y\,\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$|BA| = -\frac{y}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = -y\frac{dx}{dy},$$

$$|OA| = |OB| + |BA| = x - y\frac{dx}{dy},$$

$$S_{OMA} = 0.5|OA| \cdot |MB| = 2\,.$$

Поставим в это равенство выражение $|OA|$ и $|MB|$ и придем к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2}(x - y\frac{dx}{dy})y = 2\,,$$

$$y^2 \frac{dx}{dy} = xy - 4\,,$$

$\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} = -\dfrac{4}{y^2}$ -линейное уравнение 1-го порядка. Решаем его с помощью подстановки $x = UV$:

$$U'V + UV' - \frac{UV}{y} = -\frac{4}{y^2}\,,$$

$$U'V + U(V' - \frac{V}{y}) = -\frac{4}{y^2}\,,$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{V}{y}\,,$$

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dy}{y}\,,$$

$$\ln|V| = \ln|y|\,,$$

$$V = y\,,$$

$$\frac{dU}{dy}y = -\frac{4}{y^2}\,,$$

$$\int dU = \int -\frac{4}{y^3}dy\,,$$

$$U = \frac{2}{y^2} + C\,,$$

$$x = (\frac{2}{y^2} + C)y\,.$$

Ответ: $x = Cy + \dfrac{2}{y}$, искомая кривая проходит через точку $(1,2)$ поэтому $1 = 2C + 1 \Rightarrow C = 0, x = \dfrac{2}{y}$; $xy = 2$ -данная кривая гипербола.

Перейдем теперь к дифференциальным уравнениям 2-го порядка, допускающим понижения порядка.

1. $y'' = f(x)$ -общее решение такого вида находим методом 2-кратного интегрирования.

2. Пусть дифференциальное уравнение 2-го порядка не содержит искомой функции $f(x, y', y'') = 0$.

В этом случае выполняется замена $y' = P(x), y'' = P'(x)$ и уравнение становиться уравнением $f(x, P, P') = 0$ первого порядка.

После нахождения $P(x)$ находим y.

Пример. $xy'' + y' = (y')^2$,

$$y' = p(x), y'' = p'(x),$$

$xp' + p = p^2$ -уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dp}{dx} = p^2 - p, \frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dp}{p^2 - p} = \int \frac{dx}{x} + C_1, \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln\left|\frac{p - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{p - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}\right| = \ln C_1 x,$$

$$\frac{p-1}{p} = C_1 x, p(1 - C_1 x) = 1, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 x},$$

$$\int dy = \int \frac{dx}{1 - C_1 x} + C_2, y = -\frac{1}{C_1} \ln\left|\frac{1}{C_1} - x\right| + C_2.$$

3. Дифференциальное уравнение 2-го порядка не содержит независимую переменную $f(y, y', y'') = 0$.

В этом случае выполняется замена

$$y' = p(y), y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

После чего уравнение сводится к уравнению 1-го порядка.

Пример: $yy'' + y'^2 = 0, yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$,

$$y\frac{dp}{dy} = -p, \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dy}{y}, \ln|p| = \ln|y^{-1}| + \ln C_1,$$

$$p = \frac{C_1}{y}, \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{y}, \int ydy = \int C_1dx, \frac{y^2}{2} = C_1x + C_2.$$

Далее рассмотрим линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y^1 + p_ny = f(x)$ - не-однородное уравнение n -го порядка.

$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y^1 + p_ny = 0$ - однородное уравнение, $p_i - \mathrm{const}$.

Составляется характеристическое уравнение

$$k^n + p_1k^{n-1} + p_2k^{n-2} + ... + p_{n-1}k + p_n = 0.$$

Пример: $y''' - 3y' = 9x^2$

Характеристическое уравнение $k^3 - 3k = 0$,

Находятся его корни: $k_1 = 0, k_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

Корни характеристического уравнения могут быть:

1) различные действительные;
2) действительные равные;
3) комплексные сопряженные.

Пусть $y'' + p_1y' + p_2y = 0$ - линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

$k^2 + p_1k + p_2 = 0$ -характеристическое уравнение.

1) $k_1 \neq k_2$ -действительные, решение запишется в виде

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

2) $k_1 = k_2$ -корни равные, решение имеет вид

$$y=(C_1x+C_2)e^{kx}.$$

3) $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ - решение имеет вид

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Примеры:

1) $y''-15y'+26y=0$,

$$k^2-15k+26=0,$$
$$k_1=2, k_2=13,$$
$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{13x}.$$

2) $y''+6y'+9y=0$,

$$k^2+6k+9=0,$$
$$k_1=k_2=-3,$$
$$y=(C_1x+C_2)e^{-3x}.$$

3) $y''-2y'+10y=0$,

$$k^2-2k+10=0,$$
$$k_{1,2}=1\pm 3i,$$
$$y=e^{x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x).$$

4) $y^{\mathrm{VI}}-16y=0$,

$$k^4-16=0, (k^2+4)(k-2)(k+2)=0,$$
$$k_1=-2, k_2=2, k_{3,4}=0\pm 2i,$$
$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x.$$

Если уравнение с постоянными коэффициентами неоднородное, то его решение состоит из суммы решений: общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, которое ищем по виду правой части.

Пусть

$y''+p_1y'+p_2y=f(x)$ p_1 и p_2 -const, то $y=y_1+y_2$, где y_1 -общее решение однородного уравнения, y_2 -частное решение, которое ищем в зависимости от вида, а именно:

1) $f(x) = P_n(x)$ $y_2 = Q_n(x) \cdot x^r$,

где r - число коней характеристического уравнения, равных 0;

2) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ $y_2 = e^{\alpha x} Q_n(x) \cdot x^r$,

где r - число корней характеристического уравнения, равных α;

3) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ $y_2 = (A\cos\beta x + B\sin\beta x^r)x^r$,

где r - число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$;

4) $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$,

$y_2 = e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]x^r$,

где r - число корней характеристического уравнения, равных $\alpha \pm \beta i$.

$Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ многочлены степени p, где $p = \max\{n, m\}$.

Пример:

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x,$$

$$y = y_1 + y_2,$$

$$y_1 : y'' - 7y' + 6y = 0,$$

$$k^2 - 7k + 6 = 0 k_1 = 1 k_2 = 6,$$

$$y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{6x},$$

$y_2 : f(x) = (x-2)e^x$, так как $f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}$;

$y_2 = Q_1(x)e^{\alpha x} \cdot x^r$, так как $\alpha = 1$ и корень характеристического уравнения $k_1 = 1$, то $r = 1$,

$$y_2 = (Ax + B)e^x \cdot x.$$

y_2-решение, подставляем его в уравнение и находим неизвестные коэффициенты A и B:

$$y_2' = (2Ax + B)e^x + (2Ax^2 + Bx)e^x = (2Ax + 2Ax^2 + Bx + B)e^x$$

$$y_2'' = (2Ax + 2A + B)e^x + (2Ax^2 + 2Ax + Bx + B)e^x =$$

$$= (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x.$$

Подставив y_2, y_2', y_2'' в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты в левой и правой частях при одинаковой степени x, получаем систему для нахождения A и B.

$$\begin{cases} -10A = 1, \\ 2A - 5B = -2. \end{cases}$$

$$A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}.$$

Записываем решение

$$y_2 = xe^x\left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25}\right).$$

Общим решением уравнения будет

$$y = y_1 + y_2 \text{ ,т.е.}$$

$$y = c_1e^x + c_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Решение дифференциального уравнения методом вариаций произвольных постоянных

$$y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$$

Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - y = 0, k^2 - 1 = 0, k_{1,2} = \pm 1.$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x.$$

Считая, что C_1 и C_2 – функции, зависимые от x,

$$y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^x \quad (*).$$

Определим $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \end{cases}$$

которая для данного уравнения имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^x = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^x = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}. \end{cases}$$

находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ из этой системы, а затем $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_2'(x)=\frac{1}{e^x-1}\,, C_2(x)=\int\frac{dx}{e^x-1}=\left|\begin{matrix} e^x=t, dx=\dfrac{dt}{t} \\ x=\ln t\end{matrix}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t}=\ln|t-1|-\ln|t|+C_2 ==\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|+C_2;$$

$$C_1'(x)=-C_2'(x)e^{2x}=\frac{-e^{2x}}{e^x-1};$$

$$C_1(x)=-\int\frac{-e^{2x}}{e^x-1}dx=-e^x-\ln|e^x-1|+C_1.$$

Общее решение будет выглядеть $(*)$:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^x+e^x\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x}\right|-e^{-x}\ln|e^x-1|-1.$$

Пример: решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'=-7x+y \quad x=x(t) \quad x'(t)=\dfrac{dx}{dt}, \\ y'=-2x-5y \quad y=y(t) \quad y'(t)=\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}.$$

Продифференцируем первое уравнение по t:

$x''=-7x'+y'$ и заменим y' из второго уравнения:

$x''=-7x'-2x-5y, y=x'+7x$.

Окончательно $x''=-7x'-2x-5(x'+7x)$,

$x''+12x'+37x=0$ -однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

$k^2+12k+37=0 \quad k_{1,2}=-6\pm i$.

Следовательно, решение

$$x=e^{-6t}(c_1\cos t+c_2\sin t),$$

из первого уравнения $y=x'+7x$,

поэтому найдём

$$x'=-6e^{-6t}(c_1\cos t+c_2\sin t)+e^{-6t}(-c_1\sin t+c_2\cos t)$$

и подставим

$$y = e^{-6t}(-6c_1\cos t + c_2\cos t - 6c_2\sin t - c_1\sin t) +$$

$$+ e^{-6t}(7c_1\cos t + 7c_2\sin t),$$

$$y = e^{-6t}(c_1(\cos t - \sin t) + c_2(\cos t + \sin t)).$$

Контрольная работа №6 по теме

«ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

6.1. Найти общее решение.

6.1.1. $xyy' = \sqrt{y^2 + 1}$;

6.1.2. $2xy = y' - xy^2$;

6.1.3. $3^{x^2 + y} dy = -xdy$;

6.1.4. $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$;

6.1.5. $3^{y^2 - x^2} x = yy'$;

6.1.6. $y' - x = 2xy$;

6.1.7. $(y - 1)xdy = y^2 \ln xdx$;

6.1.8. $y' = \dfrac{1 + y^2}{xy(1 + x^2)}$;

6.1.9. $y' = 10^{x+y}$;

6.1.10. $y' + \sin\dfrac{x + y}{2} = \sin\dfrac{x - y}{2}$;

6.2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

6.2.1. $x \ln\dfrac{x}{y} dy = ydx$;

6.2.2. $x^2 dy = (y^2 - 2xy)dx$;

6.2.3. $y' = \dfrac{xy + y^2}{2x^2 + xy}$;

6.2.4. $xe^{\frac{y}{x}} = y - xy'$;

6.2.5. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$;

6.2.6. $y(x + y) = x^2 y'$;

6.2.7. $(2y + x)dx = -xdy$

6.2.8. $\sqrt{x^2+y^2}dx = xdy - ydx;$

6.2.9. $xyy' = x^2y' + y^2;$

6.2.10. $(3y^2+3xy+x^2)dx = (x^2+2xy)dy;$

6.3. Найти частное решение дифференциального уравнения.

6.3.1. $y' - y = e^x,$ $\quad y(0)=1;$

6.3.2. $x^2y' + xy + 1 = 0,$ $\quad y(1)=0;$

6.3.3. $(x+1)y' + y = x^2 + x^3,$ $\quad y(0)=0;$

6.3.4. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x},$ $\quad y(0)=0;$

6.3.5. $y' - \dfrac{x}{x^2+1}y = \dfrac{2}{1+x^2},$ $\quad y(0)=3;$

6.3.6. $x' = \dfrac{1}{2e^x - y},$ $\quad y(0)=0;$

6.3.7. $xy' = -(x+1)y + 3x^2e^{-x},$ $\quad y(1)=0;$

6.3.8. $x(y'-y) = e^x,$ $\quad y(1)=0;$

6.3.9. $x'y + x = 4y^3 + 3y^2,$ $\quad y(2)=1;$

6.3.10. $yx' + x + ye^{-y^2} = 0$ $\quad x(1) = \dfrac{1}{2e};$

6.4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

6.4.1. $xy - y^3 = x(x-1)y';$

6.4.2. $x' - x\mathrm{tg}y = -\cos y \cdot x^2;$

6.4.3. $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y;$

6.4.4. $x' - x = -x^2\cos y;$

6.4.5. $y^2 - xyy' = x;$

6.4.6. $yx' + x = 2\sqrt{y^3x};$

6.4.7. $y'x + y = -xy^2;$

6.4.8. $2y^3xx' + 3y^2x^2 + 1 = 0;$

6.4.9. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 4\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x;$

6.4.10. $y' + y = \dfrac{x}{y^2};$

6.5.1. Определить вид ДУ и указать метод решения.

6.5.1. $y' = \dfrac{xy + y^2}{2x^2};$

6.5.2. $y = 2(1 + x^2y') + xy';$

6.5.3. $x' = \dfrac{1}{2e^x - y};$

6.5.4. $(y\cos\dfrac{y}{x} - x)dx = x\cos\dfrac{y}{x}dy;$

6.5.5. $\sqrt{x^2+1} = yxx';$

6.5.6. $1 + xy' = 2e^y;$

6.5.7. $ydx = (-x + y)dy;$

6.5.8. $(2y + x)dx = (x - 2y)dy;$

6.5.9. $y' = \ln\dfrac{y^2 + x^2}{x^2} + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x};$

6.5.10. $y\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}dy = ydx - xdy;$

6.6. Составить дифференциальное уравнение, учитывая геометрический и физический смысл производной, и найти неизвестную функцию.

6.6.1. Найти кривую, проходящую через точку $(2,3)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой её касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

6.6.2. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству R .Найти зависимость R от t ; составить ДУ и определить коэффициент пропорциональности из опытных данных, согласно которым через 1600 лет останется половина наличного количества радия.
6.6.3. Найти кривую, в каждой точке которой касательная перпендикулярна к радиус-вектору точки касания.
6.6.4. Найти кривые, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат. Выделить и построить кривую, которая проходит через точку $(2,4)$.
6.6.5. Найти уравнение кривой, походящей через начало координат, тангенс наклона которой в каждой точке равен $\frac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$.
6.6.6. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(0,2)$, тангенс наклона которой во всякой точке равен $\frac{1}{3y^2}$.
6.6.7. Тело, выйдя из состояния покоя, движется со скоростью, которая определяется в каждый момент времени t по формуле $V = 5t^2 + 2$ м/с. Найти закон движения тела и путь, пройденный телом за 3 секунды.
6.6.8. Найти закон движения и скорость движения тела, если скорость его возрастает пропорционально пройденному пути, в начальный момент движения тело находилось в 8м от начала отсчета пути и имело скорость 24 м/с.
6.6.9. В комнате, где температура $20^o C$, некоторое тело остыло за 20 минут от $100^o C$ до $60^o C$. Найти закон охлаждения тела, через сколько минут оно остынет до $30^o C$. Повышением температуры в комнате пренебречь.
6.6.10. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость A_0 .Какова будет стоимость оборудования по истечении t лет?

6.7. Дифференциальные уравнения II порядка.

6.7.1. $y''=2\sin x\cos^2 x$, $y(0)=-\frac{5}{9}$, $y'(0)=-\frac{2}{3}$;

6.7.2. $y''=\cos^{-2} x$, $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{3}{5}$;

6.7.3. $x''=2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

6.7.4. $s''=4\cos 2t$, $s(0)=1$, $s'(0)=3$;

6.7.5. $x''=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $x(0)=2$, $x'(0)=3$;

6.7.6. $y''=\mathrm{arctg} x$, $y(0)=y'(0)=0$;

6.7.7. $x''=\mathrm{tg} t\cos^{-2} t$, $x(0)=\frac{1}{2}$, $x'(0)=0$;

6.7.8. $y''=\cos x+e^{-x}$, $y(0)=-e^{-\pi}$, $y'(0)=1$;

6.7.9. $y'''=\frac{5}{x^2}$, $y(0)=0, y'(1)=5, y''(1)=1$;

6.7.10. $y''=\cos^{-2}\frac{x}{2}$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

6.8. ДУ, решаемые путем понижения порядка.

6.8.1. $y''+4y'=\cos 2x$; $2y'^2=(1-y)y''$;

6.8.2. $y''+y'\mathrm{tg} x=\sin 2x$; $y''+y'^2=1$;

6.8.3. $xy''=y'+x^2$; $2yy''=y'^2+1$;

6.8.4. $y''x\ln x=2y'$; $y''\mathrm{tg} y=2y'^2$;

6.8.5. $y''-\frac{y'^2}{y}=y^3$; $2xy'y''=y'^2+1$;

6.8.6. $1+y'^2=yy'$; $x''+x'=\sin y$;

6.8.7. $xy''-y'=0$; $x''-x'e^y=0$;

6.8.8. $x''(1+x)=x'^2+x'$; $y''=\frac{2xy'}{1+x^2}$;

6.8.9. $\ln x - y' = xy''$; $y'' = \dfrac{1 - xy'}{x^2}$;

6.8.10. $xy'' = \dfrac{1}{x^2} - y'$; $yy'^3 = y''$;

6.9. Найти общее решение.

6.9.1. а) $9y'' - 6y' + y = 0$ б) $y'' + 12y' + 37y = 0$ в) $y'' - 2y' = 0$

6.9.2. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$ б) $y'' + 16y = 0$ в) $4y'' - 4y' + y = 0$

6.9.3. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$ б) $y'' + 9y' = 0$ в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$

6.9.4. а) $y'' - y = 0$ б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$ в) $y'' - 6y' + 10y = 0$

6.9.5. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$ б) $y'' - 4y' + 4y = 0$ в) $y'' - 5y' + 4y = 0$

6.9.6. а) $y'' + 5y = 0$ б) $9y'' - 6y' + y = 0$ в) $y'' + 6y' + 8y = 0$

6.9.7. а) $y'' + 10y = 0$ б) $y'' - 6y' + 8y = 0$ в) $4y'' + 4y' + y = 0$

6.9.8. а) $y'' + 2y' + y = 0$ б) $y'' + 6y' + 25y = 0$ в) $y'' - 4y = 0$

6.9.9 а) $y'' - 6y' + 13y = 0$ б) $y'' - 2y' - 15y = 0$ в) $y'' - 8y' = 0$

6.9.10. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$ б) $y'' - 6y' = 0$ в) $y'' + 2y' + 5y = 0$

6.10.Найти общее решение ЛДУ.

6.10.1. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$;

6.10.2. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$;

6. 10.3. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$;

6. 10.4. $y'' + 9y = 10e^{3x}$;

6. 10.5. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$;

6. 10.6. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$;

6. 10.7. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$;

6. 10.8. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x}$;

6. 10.9. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x$;

6. 10.10. $2y'' - 7y' + 3y = (2x + 1)e^{3x}$;

6.11.Определить и записать структуру общего решения линейного неоднородного ДУ по виду функции $f(x)$.

6.11.1.	$y''+3y'-4y=f(x)$	а) $f(x)=6xe^{-x}$; б) $f(x)=x^2\sin 2x$;
6.11.2.	$y''-4y'+5y=f(x)$	а) $f(x)=-2xe^{x}$; б) $f(x)=x\cos 2x-\sin 2x$;
6.11.3.	$y''-7y'+12y=f(x)$	а) $f(x)=xe^{3x}+2e^{x}$; б) $f(x)=3x\sin 2x$;
6.11.4.	$5y''+9y'-2y=f(x)$	а) $f(x)=x^3-2x$; б) $f(x)=2\sin 2x-3\cos 2x$;
6.11.5.	$y''-16y=f(x)$	а) $f(x)=-3e^{4x}$; б) $f(x)=\cos x-4\sin x$;
6.11.6.	$y''-4y'+4y=f(x)$	а) $f(x)=\sin 2x+2e^{x}$; б) $f(x)=x^2-4$;
6.11.7.	$y''-y'-6y=f(x)$	а) $f(x)=2xe^{3x}$; б) $f(x)=9\cos x-\sin x$;
6.11.8.	$y''-4y'=f(x)$	а) $f(x)=(x-2)e^{4x}$; б) $f(x)=3\cos 4x$;
6.11.9.	$3y''-7y'+2y=f(x)$	а) $f(x)=3xe^{2x}$; б) $f(x)=\sin 2x-3\cos 2x$;
6.11.10.	$y''+3y'+2y=f(x)$	а) $f(x)=(3x-7)e^{-x}$; б) $f(x)=\cos x-\sin x$;

6.12. Решить ДУ методом вариации произвольных постоянных.

6.12.1. $y''+4y=\mathrm{tg}2x$;

6.12.2. $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{x^3}$;

6.12.3. $y''-2y'+2y=\dfrac{e^{x}}{\sin^2 x}$;

6.12.4. $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$;

6.12.5. $y''+9y=\dfrac{1}{\sin 3x}$;

6.12.6. $y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x}$;

6.12.7. $y''+y=\dfrac{2}{\sin^2 x}$;

6.12.8. $y''+y=-ctg^2 x$;

6.12.9. $y''+2y'+2y=\dfrac{e^{-x}}{\cos x}$;

6.12.10. $y''+2y'+y=xe^x+\dfrac{1}{xe^x}$;

6.13.Решить систему дифференциальных уравнений.

6.13.1. $\begin{cases} x'=4x-y \\ y'=-x+4y \end{cases}$; 6.13.2 $\begin{cases} x'=5x+4y \\ y'=4x+5y \end{cases}$;

6.13.3 $\begin{cases} y'=y \\ x'=-2x \end{cases}$; 6.13.4 $\begin{cases} x'=-x+8y \\ y'=x+y \end{cases}$;

6.13.5 $\begin{cases} x'=x-y \\ y'=-4x+4y \end{cases}$; 6.13.6 $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=3x+6y \end{cases}$;

6.13.7 $\begin{cases} x'=4x-8y \\ y'=-8x+4y \end{cases}$; 6.13.8 $\begin{cases} x'=x-5y \\ y'=-x-3y \end{cases}$;

6.13.9 $\begin{cases} x'=x+2y \\ y'=4x+3y \end{cases}$; 6.13.10. $\begin{cases} x'=x+4y \\ y'=2x+3y \end{cases}$;

Контрольные вопросы к экзамену

1. Определение дифференциального уравнения. Порядок дифференциального уравнения.
2. Общее и частное решения.
3. Теорема существования и единственности частного решения ДУ 1-го порядка
4. Определение и методы решения дифференциальных уравнений 1-го порядка:
   а) с разделяющимися переменными,
   б) однородные уравнения,
   в) линейные уравнения,
   г)уравнения Бернулли.
5. Какое решение ДУ n -го порядка называют общим?
6. Задача Коши для ДУ 2-го порядка и её геометрическая иллюстрация.
7. Теорема существования и единственности решения задачи Коши ДУ 2-го порядка.
8. Метод интегрирования дифференциальных уравнений $y^{(n)} = f(x)$.
9. Метод интегрирования уравнений $y'' = f(x, y, y')$, когда уравнение не содержит x; y.
10. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка: однородные и неоднородные.
11. Какая система функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называется линейно зависимой, независимой?
12. Записать определитель Вронского для системы функций $y_1, y_2, ..., y_n$.
13. Какая система частных решений линейного однородного уравнения образует фундаментальную систему решений?
14. Теорема о структуре общего решения ЛДУ однородного и неоднородного.
15. Вид общего решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами в случаях:
    а) действительных различных корней,
    б) действительных кратных корней,
    в)комплексных корней характеристического уравнения.
16. Правило отыскания частного решения неоднородного ДУ с правой частью.
17. Метод вариации произвольных постоянных.
18. Какая система ДУ называется нормальной?

19. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы ДУ.
20. Общие свойства решений линейных систем ДУ.
21. Метод исключения решений системы ДУ.
22. Метод характеристического уравнения решений системы ДУ с постоянными коэффициентами.

Список рекомендуемой литературы

1. *Беклемышев Д.В*. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2000. 375 с.
2. *Кремер Н.Ш*. Высшая математика для экономистов. М.: ЮНИТИ, 1998. 472 с.
3. *Пискунов Н.С*. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.1: Учеб. пособие. М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2000. 416 с.
4. *Шипачёв В.С*. Высшая математика. М.: Высшая школа, 2000. 471 с.
5. *Ильич В.А., Позняк Э.Г*. Линейная алгебра: Учеб. пособие. М.: Наука, 1999. 293 с.
6. *Морозов В.Д*. Введение в анализ: Учеб. пособие. М.: МГТУ, 2000. 407 с.
7. *Шнейдер В.Е*. и др. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1978. 640 с.

СОДЕРЖАНИЕ