

ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический  
университет»

ФБУН «Федеральный научный центр медико-профилактических технологий  
управления рисками здоровью населения»

На правах рукописи

Цинкер Михаил Юрьевич

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВОЗДУХА  
В ВОЗДУХОНОСНЫХ ПУТЯХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЛЕГКИХ  
ЧЕЛОВЕКА В ПРОЦЕССЕ ДЫХАНИЯ**

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

по специальности 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

Научный руководитель  
Доктор физико-математических наук,  
профессор Петр Валентинович Трусков

Пермь – 2024

## Оглавление

Введение.....	4
1 Подходы к описанию процесса дыхания.....	13
1.1 Строение и основные функции дыхательной системы человека.....	13
1.2 Аналитический обзор существующих математических моделей для описания биомеханики дыхания.....	18
2 Концептуальная и математическая постановка задачи движения воздуха в каналах и упруго-деформируемой пористой среде для описания дыхательных процессов в организме человека.....	34
2.1 Структура математической модели для описания функционирования дыхательной системы человека.....	34
2.2 Постановка задачи течения воздуха в деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека.....	42
2.3. Постановка задачи течения воздуха в воздухоносных путях человека.....	69
3 Разрешающие соотношения для исследования течения воздуха в деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека.....	75
3.1 Обобщенное решение краевой задачи исследования деформирования двухфазной пористой среды, аппроксимирующей легкие человека.....	75
3.2 Конечно-элементное представление обобщенного решения для двухфазной деформируемой пористой среды.....	88
3.3 Разрешающие соотношения для описания относительного движения воздуха за счет просачивания через двухфазную деформируемую пористую среду.....	94
4 Алгоритмы численной реализации модели для описания течения воздуха в воздухоносных путях и деформируемых легких человека в процессе дыхания....	99
4.1 Общий алгоритм решения задачи.....	99
4.2 Алгоритм решения задачи фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде легких.....	101

4.3 Алгоритм построения трехмерной геометрии воздухопроводящих путей и легких человека и закон изменения формы легких .....	118
5 Анализ результатов численного исследования течения воздуха в воздухоносных путях и легких человека в процессе дыхания .....	130
5.1. Результаты численного исследования течения воздуха в деформируемых легких.....	130
5.2. Результаты численного исследования течения воздуха в воздухоносных путях человека.....	138
Заключение .....	150
Приложение А .....	152
Приложение Б.....	173
Приложение В.....	174
Приложение Г .....	175
Приложение Д.....	176
Список литературы .....	177

## Введение

### **Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.**

Проблема загрязнения атмосферного воздуха является одной из серьезных современных угроз здоровью человека для большинства стран мира, в том числе – Российской Федерации (РФ), что находит отражение в докладах Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ), стратегических государственных документах РФ<sup>1,2</sup>. Многочисленными зарубежными и российскими исследованиями доказано негативное воздействие загрязнения объектов окружающей среды на здоровье человека (Г.Г. Онищенко, Ю.А. Рахманин, Н.Ф. Измеров, Н.В. Зайцева и др.), регулярно появляются новые работы, подтверждающие наличие связей и выявляющие новые механизмы влияния факторов среды обитания на здоровье. Неудовлетворительное качество вдыхаемого воздуха является причиной возникновения неинфекционных заболеваний (НИЗ), включающими в себя сердечно-сосудистые заболевания, злокачественные новообразования, хронические болезни органов дыхания, диабет. Загрязнение воздуха рабочей зоны является причиной возникновения профессиональной бронхолегочной патологии. Сохранение здоровья населения, улучшение качества объектов среды обитания являются приоритетами политики РФ; так, Правительством РФ реализуется федеральный проект «Чистый воздух»<sup>3,4</sup>, направленный на снижение выбросов загрязняющих веществ в атмосферный воздух в крупных промышленных центрах.

Современные методы и технологии медицинской диагностики позволяют выполнить всестороннее обследование пациента, составить полное объективное

---

<sup>1</sup> Указ Президента Российской Федерации от 07.05.2018 №204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года».

<sup>2</sup> Указ Президента Российской Федерации от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года»

<sup>3</sup> Постановление Правительства РФ от 15 апреля 2014 г. № 326 «Об утверждении государственной программы Российской Федерации "Охрана окружающей среды» (с изменениями от 25 ноября 2023 г. № 1994)

<sup>4</sup> Перечень поручений по итогам совещания по вопросам развития дальневосточных городов (утв. Президентом РФ 05.05.2023 № Пр-914)

представление о состоянии здоровья на момент исследования, точно поставить диагноз, составить план лечения [88, 13, 24]. Несмотря на постоянное развитие и совершенствование диагностических методов, все возрастающую точность, высокую информативность и их неоценимый вклад при решении широкого спектра задач практической медицины, они не предназначены для использования при решении прогностических проблем в области оценки влияния внешних факторов, в том числе вредных и опасных, на состояние здоровья. Проведение экспериментальных исследований с непредсказуемыми последствиями на людях недопустимо, однако существует необходимость в оценке влияния на индивидуумов и популяцию катастрофических явлений (включая массовые аварийные выбросы в атмосферу загрязняющих и отравляющих веществ). Перспективным инструментом для решения таких проблем является математическое моделирование. Для количественной оценки поступления ингаляционным путем загрязняющих веществ из атмосферного воздуха в организм человека и их распределения по организму, для последующего прогнозирования риска развития профессиональной бронхолегочной патологии, обусловленной их влиянием, а также для описания процесса дыхания в норме и при наличии патологии разрабатывается математическая модель дыхательной системы (ДС) человека.

ДС представляет собой биомеханическую систему, представляющую разветвленную сеть биологических каналов, в которой под действием перепада давления, обусловленного изменением объема легких, осуществляется транспорт воздуха из атмосферы к легким и обратно. С развитием методов неинвазивной медицинской диагностики, вычислительной техники, методов и программных средств современными тенденциями в данной области стало создание трехмерных моделей ДС или отдельных ее элементов, разработка персонализированных моделей с реальной геометрией, получаемой на основе данных компьютерной томографии (КТ). При моделировании течения воздуха в воздухоносных путях

(ВП) (или их отдельных участков) получили широкое распространение и успешно применяются методы газовой динамики (Z.Zhang, T. Gemci, Md.M. Rahman и др.).

Однако описание движения воздуха по всей разветвляющейся системе каналов ВП вплоть до альвеол затруднено в связи с очень большим их количеством и нерегулярной пространственной структурой – в легких взрослого человека содержится около 600-700 млн. альвеол, а также соединяющих их каналов (радиус альвеол составляет – 0,1-0,15 мм, радиус поперечного сечения каналов – 0,1-0,3 мм). Построение геометрии всей системы каналов является чрезвычайно сложной задачей, а прямое численное моделирование течения воздуха в такой системе потребовало бы колоссальных вычислительных и временных ресурсов. Кроме того, легкие человека подвергаются циклическим упругим деформациям (с большими градиентами перемещений), благодаря которым изменяется их объем и давление в них, что приводит к движению воздуха в ВП. При рассмотрении нестационарного течения воздуха в ВП возникают дополнительные сложности с заданием корректных граничных условий (ГУ) на выходах из ВП.

Преодолеть указанные сложности позволяет подход, в котором легкие рассматриваются как сплошная насыщенная деформируемая пористая среда. Подобный подход используется в работах (С.Т. De Groot, А.Г. Straatman), а также (О.Ј. Pегбуси, В. Seyfi, L. Berger, N. Avilés-Rojas, D.E. Hurtado и др.). Однако в первой группе исследований рассматривается течение воздуха в «пассивной» пористой среде, не учитывающей взаимодействие воздуха и легочной ткани. Во второй группе моделей акцент в работе делается на исследовании поведения легочной ткани в процессе дыхания (для задач радиотерапии), при этом пространственному описанию течения воздуха уделяется существенно меньшее внимание.

На основе проведенного обзора можно констатировать, что вычислительная пульмонология является быстро развивающейся областью, исследования в данном направлении требуют дальнейшего развития. В рамках выполнения

работы предлагается учесть перечисленные недостатки существующих подходов: разработать комплексную трехмерную модель, описывающую нестационарное течение воздуха в ВП и легких человека, испытывающие циклические упругие деформации. Последние предлагается рассматривать с использованием модели пористой среды, при этом в модели учитываются геометрическая нелинейность задачи, взаимодействие воздуха в легких и легочной ткани.

Таким образом, **объектом исследования** диссертационной работы являются процессы, происходящие в дыхательной системе, во время дыхания; **предметом исследования** является моделирование движения воздуха в воздухоносных путях и легких человека в процессе дыхания.

**Цель работы** – построение математической модели, позволяющей описывать процессы течения воздуха в воздухоносных путях (ВП) и легких человека, рассматриваемых как деформируемая пористая среда, в процессе дыхательного цикла.

**Основные задачи:**

– на основе аналитического обзора выявить основные структурные и функциональные элементы ДС, связи между ними, а также подходы к исследованию биомеханики дыхания в различных участках ДС, необходимые для включения в разрабатываемую математическую модель;

– разработать концептуальную и математическую постановки задачи исследования течения воздуха в ВП и циклически упруго-деформируемых легких человека, рассматриваемых как насыщенная пористая среда, испытывающая большие градиенты перемещений;

– получить разрешающие соотношения для решения нелинейной задачи описания течения воздуха в ВП и деформируемой пористой среде легких человека;

– разработать алгоритмы и комплекс программ для численной реализации разработанной математической модели;

– восстановить трехмерную форму ВП и легких человека, выполнить идентификацию параметров модели на основе томографических снимков и литературных данных; описать кинематику движения границ (закон изменения формы легких) и разработать программу реализации кинематических граничных условий;

– с использованием инженерных пакетов и разработанного комплекса программ выполнить численные эксперименты по исследованию течения воздуха в ВП (в том числе – запыленного воздуха) и деформируемой пористой среде легких человека, описать и проанализировать результаты расчетов течения воздуха в ВП и пористой среде легких в процессе дыхательного цикла.

**Методология и методы исследования.** Работа опирается на методы математического моделирования, механики сплошных сред, нелинейной теории упругости, теории фильтрации, вычислительной математики. Численная реализация модели выполнена с использованием пакета Ansys (модулей CFX, Mechanical APDL, ICEM CFD) и комплекса программ, разработанного на языке C++ с использованием технологий параллельных вычислений. Процедура сегментации КТ-снимков выполнялась с помощью программного продукта ИТК-SNAP, обработка восстановленной геометрии выполнялась в графическом редакторе Blender. Для представления результатов использовался графический кросс-платформенный пакет для интерактивной визуализации ParaView.

### **Научная новизна.**

1. Предложена новая математическая модель для исследования течения воздуха в ДС, состоящая из двух взаимосвязанных через граничные условия подмоделей: 1) подмодель течения воздуха в ВП и 2) подмодель течения воздуха в легких, которые представлены упруго-деформируемой насыщенной пористой средой.

2. Получены разрешающие соотношения для решения нелинейной задачи течения воздуха в деформируемой пористой среде легких человека, учитывающие взаимодействие воздуха в легких и легочной ткани.

3. Разработан алгоритм и комплекс программ для решения нелинейной связанной задачи течения воздуха в деформируемой пористой среде легких с использованием пошаговой процедуры.

4. Построена трехмерная геометрия ВП и легких человека на основе данных компьютерной томографии; предложен закон изменения формы легких, учитывающий грудное и диафрагмальное дыхание, в процессе дыхательного цикла.

5. С использованием серии численных расчетов выявлены особенности течения воздуха, содержащего пылевые частицы реального дисперсного состава и плотности, а также получены количественные оценки оседания частиц в ВП человека; получены параметры течения воздуха и деформирования легочной ткани в различные моменты дыхательного цикла.

Содержание приведенных выше пунктов п.п.1-3 характеризуют **теоретическую значимость** работы.

**Практическая значимость работы** заключается в возможности применения разработанной модели для моделирования процесса дыхания в норме и при патологии, для выявления пространственного распределения зон локализации риска развития морфологических нарушений, а также для последующего прогнозирования риска развития профессиональной бронхолегочной патологии. Модель может быть использована при формулировании требований к разрабатываемым средствам индивидуальной защиты (СИЗ) органов дыхания работников различных отраслей, оценки эффективности СИЗ; при разработке рекомендаций к корректировке гигиенических нормативов о допустимых концентрациях взвешенных частиц в воздухе жилой и рабочей зон; при корректировке трудового режима работников в зависимости от условий работы. Еще одним аспектом применения работы является исследование доставки лекарственных препаратов в организм человека ингаляционным способом. Модель может быть полезна для анализа движения

новообразований при лучевой терапии, а также для исследования процессов при искусственной вентиляции легких человека.

В рамках исследований получены свидетельства о регистрации программ ЭВМ №2024667751 от 29.07.2024 [86], № 2024682468 от 24.09.2024 [78], №2021610660 от 18.01.2021 [83], свидетельство о регистрации базы данных №2023624733 от 19.12.2023 [85]. Отдельные результаты исследования приведены в опубликованной монографии «Анализ риска здоровью в стратегии государственного социально-экономического развития» [1].

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Концептуальная и математическая постановки задачи исследования течения воздуха в ВП и циклически упруго-деформируемых легких человека, рассматриваемых как насыщенная пористая среда.

2. Разрешающие соотношения для решения нелинейной задачи исследования течения воздуха в деформируемой пористой среде легких человека, учитывающие взаимодействие воздуха в легких и легочной ткани.

3. Алгоритмы и комплекс программ для численного решения нелинейной задачи течения воздуха в ВП и деформируемой пористой среде легких.

4. Алгоритм восстановления трехмерной геометрии ВП и легких человека на основе данных компьютерной томографии; закон изменения формы легких, учитывающий грудное и диафрагмальное дыхание, в процессе дыхательного цикла.

5. Описание и анализ результатов численного моделирования течения воздуха, содержащего пылевые частицы реального дисперсного состава и плотности, а также количественные оценки оседания частиц в ВП человека; рассчитанные характеристики воздуха и легочной ткани в различные моменты дыхательного цикла.

**Достоверность результатов** численного моделирования подтверждается удовлетворительным качественным и количественным соответствием с данными, приведенными в публикациях других авторов. Результаты по оседанию частиц в

ВП качественно согласуются с результатами проведенного натурального эксперимента по исследованию закономерностей распределения пылевых частиц атмосферного воздуха в ВП человека. Изменение общего объема воздуха в легких, смещение диафрагмы и изменение окружности грудной клетки в процессе дыхания соответствуют результатам медицинских исследований.

**Апробация результатов.** Полученные результаты докладывались и обсуждались на Всероссийских конференциях «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2014-2019, 2021-2024); на Всероссийских конференциях с международным участием «Биомеханика-2014» (Пермь, 2014), «Экспериментальная и компьютерная биомедицина» (Екатеринбург, 2016), «Математика и междисциплинарные исследования» (Пермь, 2017, 2019), «Фундаментальные и прикладные аспекты анализа риска здоровью населения» (Пермь, 2020-2022), «Анализ риска здоровью» (Пермь, 2021, 2022, 2024); на Международных конференциях «Математическое и компьютерное моделирование в биологии и химии» (Казань, 2014), «Механика биомедицинских материалов и устройств» (Пермь, 2023), «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2024).

Работа полностью докладывалась и обсуждалась на семинарах кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. П.В. Трусков), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН, д.т.н., проф. В. П. Матвеев), кафедры «Экспериментальная механика и конструкционное материаловедение» ПНИПУ (руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.Э. Вильдеман).

Часть результатов исследования было получено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0003 «Математические модели и новые материалы для высокотехнологичной медицины»).

**Публикации.** Результаты диссертационной работы содержатся в 45 публикациях; основные результаты представлены в публикациях [66, 84, 68, 67,

70, 18, 69, 76, 215, 77], среди которых 10 публикаций [66, 84, 68, 67, 70, 18, 69, 76, 215, 77] – в изданиях, входящих в международные базы цитирования, 2 публикации [76, 77] – в журналах, входящих в перечень ВАК.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка цитированной литературы. Диссертация изложена на 206 страницах, содержит 21 рисунок, 2 таблицы, 5 приложений. Библиографический список включает 245 наименований.

**Благодарности.** Автор благодарит за помощь и поддержку в подготовке работы д.ф.-м.н., проф. П.В. Трусова, акад. РАН, д.м.н., проф. Н. В. Зайцеву, В.В. Нурисламова, П.Д. Свинцову, а также весь коллектив ФБУН «Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения» и кафедры Математическое моделирование систем и процессов ПНИПУ.

## 1 Подходы к описанию процесса дыхания

### 1.1 Строение и основные функции дыхательной системы человека

Дыхательная система (ДС) человека представляет собой биомеханическую систему, обеспечивающую транспорт воздуха из атмосферы в легкие и обратно, газообмен кислородом ( $O_2$ ) и углекислым газом ( $CO_2$ ) между воздухом в легких и кровью. Структурными элементами ДС являются верхние воздухоносные пути (ВП) (носовая полость; ротовая полость; глотка, включающая в себя носоглотку, ротоглотку и гортаноглотку) и нижние ВП (гортань, трахея, главные бронхи, легкие, в которых продолжается ветвление бронхов) (рисунок 1.1а).

Нижние ВП представляют собой древовидную структуру – бронхиальное дерево, продолжающееся в виде альвеолярного дерева. У каждого последующего поколения ВП уменьшается радиус поперечного сечения и длина. Бронхиальное дерево (рисунок 1.1б) состоит из трахеи, главных бронхов, долевых бронхов, около 10 ветвей (генераций) субсегментарных бронхов, дольковых бронхов (входящих в легочные дольки), переходящих в терминальные (конечные) бронхиолы (рисунок 1.1б, 1.2а). Далее ветвление дыхательных путей продолжается в виде альвеолярного дерева (также имеющее название «ацинус»): терминальная бронхиола ветвится на дыхательные бронхиолы, альвеолярные ходы, альвеолярные мешочки; ветвление заканчивается альвеолами, имеющими сферическую форму (рисунок 1.1б, 1.2а). Всего согласно морфометрической модели Вейбеля [7, 56] насчитывается 23 генерации нижних ВП; диаметр каналов различается от 1,5-1,8 см для трахеи до 0,25-0,3 мм для альвеолы, которых около 300 млн в каждом легком [7, 56, 58].

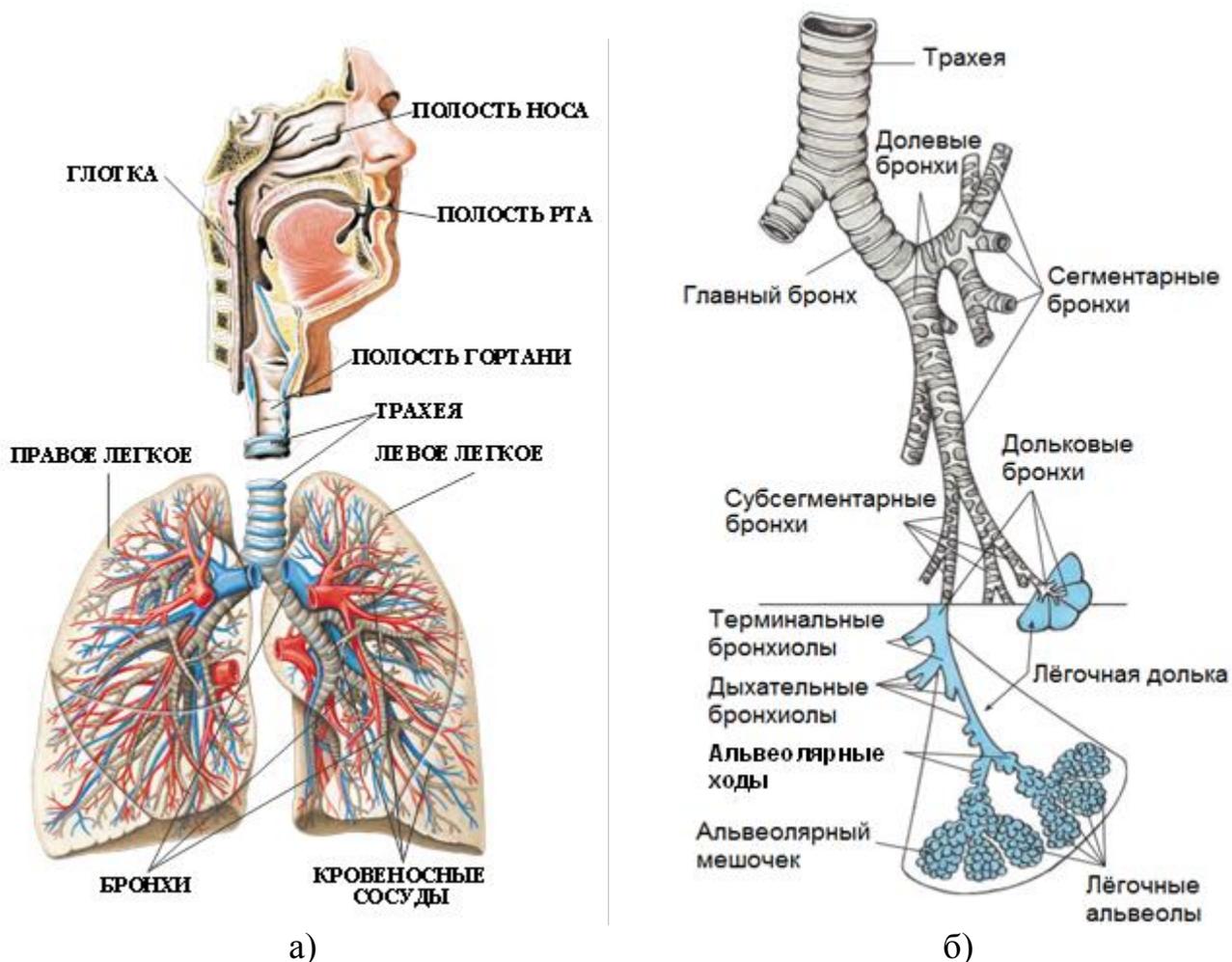
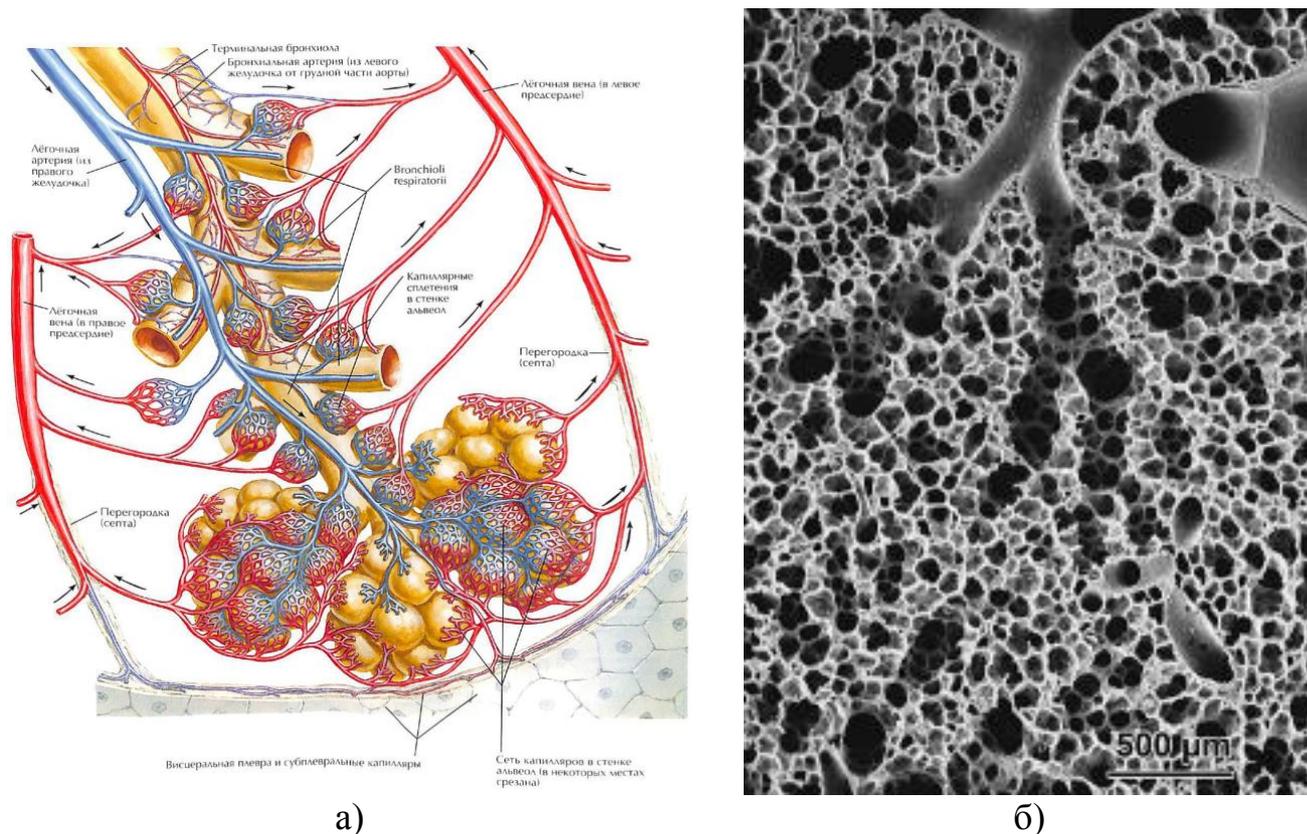


Рисунок 1.1 – Строение дыхательной системы [58] (а); строение бронхиального и альвеолярного деревьев [58] (б)

Через стенки альвеол, окруженных плотной сетью кровеносных капилляров, (рисунок 1.2а) происходит обмен газами между воздухом в альвеолах легких и кровью посредством диффузии за счет градиента концентраций. Легочная ткань, состоящая из стенок дыхательных путей, альвеолярных ходов и альвеол, альвеолярных капилляров, называемая «паренхимой», представляет собой «ячеистую», пористую структуру, в которой содержится воздух (рисунок 1.2б) [7]. Паренхима легкого помимо респираторной функции выполняет опорную функцию (образуют каркас, матрикс) легких. При этом легочная ткань по разным оценкам занимает от 12,6% до 19% объема легких; доля воздуха в легких – от 81% до 87,4% [225, 130, 95, 150].



а) б)  
 Рисунок 1.2 – Строение терминальной бронхиолы, включая альвеолы и кровеносные сосуды [43] (а); увеличенный фрагмент терминальных бронхиол, заканчивающихся альвеолами [226] (б)

Правое легкое имеет три доли, левое – две. Легкие снизу соприкасаются с главной дыхательной мышцей – диафрагмой, разделяющей грудную и брюшную полости; по сторонам граничат с грудной стенкой; правое и левое легкие отделены друг от друга средостением. Легкие человека находятся в плевральных мешках (каждое в своем), внутренний (висцеральный) листок плевры соприкасается со стенкой легких, наружный (париетальный) – со стенками грудной полости, средостения и диафрагмы.

Стенки верхних (и крупных нижних) ВП содержат хрящевую ткань, которая делает ВП жесткими, трудно деформируемыми. Поток воздуха из атмосферы по ВП в легкие (и обратно) происходит из-за разницы между атмосферным давлением и давлением в легких. Изменение давления в легких обусловлено

изменением их объема, который в зависимости от глубины дыхания может изменяться на 15-55%. Во время дыхания в процессе изменения конфигурации легких происходят взаимосвязанные изменения напряжений в легочной ткани и давления воздуха, содержащегося в легких человека. В изменении объема легких в процессе дыхания можно выделить две составляющие: 1) грудное дыхание за счет расширения/сжатия грудной клетки; 2) диафрагмальное (брюшное) дыхание за счет движения диафрагмы.

Помимо основной функции по доставке в организм  $O_2$  и удалению  $CO_2$ , ДС выполняет жизненно важные защитные функции: нагревание вдыхаемого воздуха и улавливание частиц, присутствующих в нем. Вместе с вдыхаемым атмосферным воздухом, содержащим необходимый для жизнедеятельности кислород, в организм человека в процессе дыхания попадают и другие химические вещества, а также пылевые частицы, в том числе – опасные для человека [111, 237, 173, 238, 53, 135, 89, 223]. Сложная искривленная сеть ВП представляют собой своеобразный фильтр, двигаясь по которой частицы оседают на вязком секрете подстилающей поверхности верхних отделов ВП, вследствие чего бóльшая часть частиц не достигают более глубоких отделов. С одной стороны, благодаря данному механизму повышается защита мелких ВП и альвеол, часть частиц впоследствии выводится из организма; с другой стороны, верхние отделы ВП сами становятся мишенью для потенциального негативного воздействия частиц. Повышенной опасности подвержены работники сфер промышленности, технологические процессы которых сопровождаются пылеобразованием. Загрязнение воздуха рабочей зоны является причиной возникновения профессиональной бронхолегочной патологии, в том числе болезней верхних дыхательных путей и трахеобронхиального дерева, хронических бронхитов, интерстициальных и диссеминированных заболеваний легких [52].

Бóльшая часть твердых (взвешенных) частиц  $PM_{10}$  ( $PM$  – particulate matter, числа после  $PM$  обозначают диаметр частиц в мкм;  $PM_{10}$  – частицы, диаметром до 10 мкм) откладывается в слизистой оболочке верхних отделов ВП, тогда как

частицы PM<sub>2,5</sub>, PM<sub>1</sub> и меньших размеров (в том числе наноразмерного диапазона) способны попадать в альвеолы [21, 241, 195, 198, 165, 70, 217, 69]. В дальнейшем мельчайшие твёрдые частицы могут преодолевать аэрогематический барьер и проникать в кровеносное русло [129, 192]. Кроме того, твёрдые частицы могут быть поглощены антигенпрезентирующими клетками, которые обеспечивают их миграцию в лимфатические узлы [108]. В частности, экспериментально подтверждено наличие наночастиц, поступивших ингаляционно, в лимфатических узлах средостения [116]. С током крови и лимфы частицы распространяются к различным органам и тканям. Так, в исследовании на мышах наночастицы диоксида титана, введённые интратрахеально, обнаружены в ткани сердца и печени [141]. В ряде исследований отмечают роль печени, как органа бионакопления различных наночастиц, поступивших ингаляционным путём, что, вероятно, связано с детоксикационной функцией органа [158, 176, 197, 17, 16]. Наличие наночастиц при ингаляционном поступлении отмечают в головном мозге. В настоящее время есть два вероятных пути их проникновения в мозг. Один из них заключается в преодолении наночастицами, присутствующими в кровеносном русле, гематоэнцефалического барьера. Другой вариант предполагает поступление из носовой полости через обонятельный нерв [138, 157, 169].

Химический состав вдыхаемых частиц, а также элементы, присутствующие на их поверхности (в том числе металлы, органические соединения, аллергены), способны усиливать негативное влияние на состояние здоровья человека [42, 61, 210-212, 14]. Взвешенные вещества начинают оказывать негативное влияние уже в верхних воздухоносных путях. Оседая на слизистой оболочке ВП, взвешенные частицы активируют процесс выработки свободных радикалов, что способствуют процессу окисления стенки легких; частицы снижают антиоксидантную активность, активируют воспалительные реакции (процессы), приводящих к повреждению клеток, поражают слизистую оболочку дыхательных путей [8, 9, 80]. В зависимости от участка воспаления слизистой оболочки воздухоносных

путей выделяют воспалительные заболевания лор-органов различной локализации: воспаление слизистой оболочки полости носа – ринит, глотки – фарингит, гортани – ларингит, трахеи – трахеит, бронхов – бронхит.

Продолжительное поступление и накопление в легких человека нерастворимых твердых частиц (обладающих фиброгенным действием) может способствовать развитию пневмокониоза [21, 52], отличительной особенностью которого является разрастание в паренхиме легких грубой неэластичной соединительной рубцовой ткани, замещающей нормальную ткань (фиброз). В результате патологии происходит уменьшение проницаемости паренхимы легкого для воздуха, увеличение толщины альвеолярно-капиллярного барьера, снижение газообменной площади, что нарушает естественный дыхательный процесс [182].

Таким образом, при моделировании движения воздуха в дыхательной системе можно выделить проводящую зону, представляющую собой систему каналов сложной формы, по которой воздух движется из атмосферы к легким и обратно, и респираторную (дыхательную) зону (отделы легких, содержащих альвеолы, в которых непосредственно осуществляется газообмен), которая подвергается циклическим упругим деформациям.

## **1.2 Аналитический обзор существующих математических моделей для описания биомеханики дыхания**

В области моделирования биомеханики процессов в дыхательной системе (ДС) человека в соответствии с анатомической структурой и физиологическим поведением можно выделить модели, описывающие процессы в отдельных участках ДС (ВП и легких), а также модели, описывающие процессы во всей ДС. ВП и легкие в свою очередь состоят из более мелких составляющих, связанных между собой, которые также имеют свои уникальные особенности. В зависимости от стоящих перед исследователями целей и задач (а также рассматриваемой зоны,

элемента или рассмотрении ДС в целом) применяются различные подходы к моделированию биомеханики дыхания и/или их комбинации.

Ниже приведен обзор работ, посвященных построению математических моделей для описания функционирования дыхательной системы человека, расположенных в порядке возрастающей сложности и степени детализации. Вначале приведено описание камерных (трактуемых как модели нулевой размерности, 0D) моделей, описываемых с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений; далее детальнее рассмотрены по отдельности модели проводящей (ВП) и респираторной зон (легких) на разных масштабных уровнях с использованием соотношений механики сплошных сред.

### ***Камерные модели***

При исследовании биомеханики дыхания широко распространены камерные (компарментальные) модели. В данных моделях ДС как механическая система представлена совокупностью камер с осредненными интегральными характеристиками, описывающими сопротивление дыхательных путей, инерционность воздуха в них, упругость легких и грудной клетки. Механика респираторной системы обычно представлена в виде набора пружин и демпферов (поршней) [100, 219, 137, 32, 102, 213] либо в виде электрической цепи с последовательно и/или параллельно расположенными резисторами и конденсаторами [134]. Модели данного типа формулируются обычно с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений.

В зависимости от предназначения модели данного класса различаются по степени сложности и количеству рассматриваемых элементов от однокамерных до многокамерных. В однокамерных моделях ДС представлена в виде одной трубки, характеризующей воздухоносные пути, которая соединена с одним упругим отсеком, характеризующим легкие. Сопротивление всех воздухоносных путей объединено в единое эквивалентное сопротивление; эластичные свойства

грудной клетки и легких характеризуется единой эквивалентной податливостью (комплайнсом). Подобные модели являются феноменологическими; идентификация, калибровка параметров модели под конкретного индивида выполняется на основе клинических измерений параметров, характеризующих функциональное состояние дыхательной системы (давление и поток воздуха) пациента. Данные модели позволяют оперативно и удовлетворительно описывать кривые давление-поток у пациентов, но не учитывают сложный характер биомеханики процесса дыхания.

Многокамерные модели позволяют более детально и реалистично описать структуру и функционирование дыхательной системы, учесть нелинейные эффекты респираторной биомеханики [102, 101, 175]. С помощью увеличения количества камер и элементов могут быть учтены различные анатомические компоненты легкого (например, дыхательные пути, альвеолярное пространство, альвеолярная мембрана, легочные капилляры), описан газообмен с кровью через альвеолярно-капиллярную мембрану, взаимодействие с другими системами организма человека, принимающими участие в дыхании (с сердечно-сосудистой, а также с костно-мышечной и нервной системами) [103, 102, 174, 12].

Данный тип моделей даёт возможность описывать функциональные зависимости между давлением-объемом-потокком на уровне органов или компартментов, применим в качестве довольно надежного базового подхода для моделирования газообмена, однако они ограниченно отражают пространственную неоднородность процессов в ДС, региональные индивидуальные анатомические особенности пациента; по сути, эти модели являются 0D моделями.

За счет ограниченной пространственной размерности камерные модели, реализуемые с использованием системы обыкновенных дифференциальных, являются вычислительно эффективными. Благодаря тому, что данный тип моделей позволяют оперативно оценивать параметры функционирования дыхательной системы, они полезны в клинических ситуациях, когда состояние пациента быстро меняется. Учитывая низкие вычислительные затраты данных

моделей, а также их ориентацию на широкодоступные, легко и быстро измеряемые исходные данные (которые могут быстро изменяться), данные модели широко распространены в практической медицинской деятельности, в том числе – при интенсивной терапии. Данные модели позволяют оценивать состояние легких в режиме реального времени и выдавать рекомендации для корректировки режима искусственной вентиляции легких (ИВЛ) у пациентов с острым респираторным дистресс-синдромом (ОРДС); так, с использованием многокамерных моделей могут быть определены оптимальные режимы, давление, продолжительность подачи воздуха во время механической вентиляции.

В последнее время появились 0D модели с большим количеством элементов, которые моделируют дыхательные пути проводящей зоны вплоть до конечных терминальных бронхиол, разветвляющихся на легочные ацинусы [144, 196]. В данных работах структура дыхательных путей была построена на основе компьютерной томографии. С использованием разработанного авторами алгоритма легочное пространство от крупных бронхов до терминальных (конечных) бронхиол было заполнено воздухоносными путями, которые в дальнейшем были представлены деревом 0D элементов. В [144] терминальные бронхиолы были связаны с ацинусами, описываемые вязкоупругой обобщенной моделью Максвелла. В [196] к моделям легочных ацинусов были добавлены элементы, описывающие соединения (взаимодействие) между ацинусами. Всего в [196] модель легких человека включала 60143 проводящих дыхательных путей, 30072 ацинусов и 140135 межацинарных соединений. Получаемые в рассмотренных работах результаты хорошо согласуются с физиологическими данными для легких здоровых людей во время спонтанного (самостоятельного (без ИВЛ) спокойного дыхания) дыхания [144], а также – для здоровых и больных [196]. Данные модели дают представление о локальном распределении давления, объема и скорости потока в легких человека, о вентиляции легких в периферических областях.

Использование камерных моделей разумно, если не требуется детального трехмерного исследования процессов, протекающих в проводящей (воздухоносных путях) и респираторной зонах. Также камерные модели могут быть использованы в качестве составных частей (подмоделей) в многоуровневых (связанных/гибридных) моделях более высокого уровня (2D/3D), например, для задания граничных условий, регуляции процесса дыхания (закона изменения давления/потока воздуха на границах ВП).

Для решения задач по оценке и прогнозированию негативного влияния комбинированного воздействия ингаляционных факторов среды обитания, связанных с загрязнением атмосферного воздуха, на формирование патологий дыхательной системы, а также для изучения процесса дыхания при наличии профессиональной бронхолегочной патологии предпочтительно использовать математические модели с более высоким уровнем детализации, которые позволяют глубже описывать патогенетические механизмы возникновения и развития заболеваний.

### ***Математические модели для исследования движения воздуха в воздухопроводящей зоне***

Воздухопроводящая (кондуктивная) зона ДС человека (включающая в себя верхние и нижние ВП), по сути, представляет собой систему биологических каналов сложной искривленной формы с переменными сечениями. Течения воздуха по кондуктивной зоне в процессе дыхания обусловлено наличием градиента давлений между окружающим воздухом и воздухом в легких и может быть описано с использованием соотношений механики жидкости и газа [44, 45]. В зависимости от предназначения разрабатываемых математических моделей исследователи уделяют детальное внимание различным участкам воздухоносного тракта и режимам дыхания.

Древовидная ветвящаяся структура нижних воздухоносных путей, начиная с трахеи, обладает признаками самоподобия [11, 230, 62, 34]. Большой вклад в описание внутренней структуры дыхательных путей в легких внесли Weibel (1963) [224, 225] и Horsfield (1971) [139]. E.R.Weibel впервые количественно измерил и аппроксимировал диаметр и длину дыхательных путей в зависимости от генерации. K.Horsfield выполнил аналогичное исследование, помимо диаметра и длины привел угол ответвления дочерних ветвей от родительской. Данные морфометрические характеристики в дальнейшем использовались во многих исследованиях [209, 193, 160, 144, 196].

В ранних работах на основе морфометрических данных E.R.Weibel и K.Horsfield некоторые исследователи принимали гипотезу, что течение в ВП можно рассматривать как стационарное ламинарное осесимметричное движение изотермической вязкой несжимаемой жидкости под постоянным градиентом давления в жестких цилиндрических каналах с постоянными круговыми сечениями. Данные допущения позволяют свести задачу к одномерной, которая имеет точное аналитическое решение (течение Пуазейля) [193, 160].

С развитием и внедрением современных инженерных пакетов, помогающих исследователям проще и быстрее решать задачи механики жидкости и газа, для изучения дыхательных процессов в ВП широкое применение получили трехмерные модели. За последние 20 лет количество работ в данной сфере многократно увеличилось. Отдельной проблемой при моделировании потока воздуха в кондуктивной зоне является восстановление трехмерной геометрии. В более ранних работах использовалась упрощенная геометрия нижних ВП, построенная с использованием простых геометрических объектов (изогнутые каналы с круговым поперечным сечением переменного радиуса, изменяющимся вдоль осевой линии) на основе морфологических данных о размерах (радиусах и длинах) и углов ответвления ВП [128, 243, 140, 66, 68, 185, 191]. Так, в [243, 185, 191] использовали геометрию симметричного дерева нижних ВП, начиная с трахеи, полученную на основе правильной дихотомии – последовательного

деления вышележащих родительских ветвей ВП на две дочерние, отходящие под одинаковыми углами и имеющими одинаковые размеры, восстановленную на основе данных Э.Р. Вейбеля [29], в [128, 140, 66; 68] – несимметричную.

Для верхних воздухоносных путей упрощенная геометрия обычно используется при исследовании дыхания через рот. В работе [114] были представлены подробные размеры (площадь поперечного сечения через каждые 0,3 см) области ВП от входа в рот до трахеи; было отмечено, что область от полости рта до гортани может быть аппроксимирована трубой с изменяющейся площадью поперечного сечения, центральная линия которой представляет собой сегмент окружности. На основе приведенных в [114] размеров Z.Zhang, C.Kleinstreuer и др. построили геометрию ВП от входа в рот до трахеи и исследовали движение воздуха в данной области [245, 154]. В данной модели использовали круговые поперечные сечения с изменяющимся диаметром, зависимость изменения диаметра вдоль дыхательных путей (от входа в рот до трахеи) представлена в работе [154]. В дальнейших работах Z.Zhang и др. [243, 140] объединили данный участок с нижними воздухоносными путями. Идеализированная геометрия участка «рот – трахея» также была построена в исследованиях других авторов [148, 99]. Геометрия носовой полости является более сложной; реалистично построить ее с использованием простых геометрических форм затруднительно, в связи с этим таких исследований существенно меньше. Упрощенная модель носовой полости была использована в [127]. От качества используемой геометрии существенно зависят получаемые результаты.

Совершенствование методов неинвазивной диагностики, развитие программных средств обработки, конвертации форматов хранения медицинских данных, дало импульс к развитию персонализированных моделей органов и систем человеческого организма, в том числе ДС [221, 168, 163, 164, 189, 151, 180, 186, 152, 190]. Движение воздуха описывается моделью вязкой жидкости. В большинстве работ используется гипотеза о несжимаемости воздуха (поскольку

число Маха в физиологических условиях меньше 0,2 [183]). Если движение неустановившееся, то сжимаемость может оказывать заметное влияние даже при малых скоростях движения газа, в связи с чем в работах [10, 30, 190, 191] воздух рассматривался сжимаемым.

В работах, посвященных изучению поступления взвешенных пылевых частиц вместе с вдыхаемым воздухом в ДС [168, 189, 151, 180, 152, 190, 191] или рассматривающих доставку лекарственных препаратов ингаляционным способом [198], воздух рассматривался как многофазная смесь газов и частиц. Частицы, как правило, принимаются сферической, реже – эллипсоидной формы [152]. Глубина проникновения частиц в ВП и эффективность их оседания существенно зависят от размера и плотности частиц, а также режима дыхания (заданных граничных условий). Вопрос выбора граничных условий является довольно важным, в зависимости от выбранных ГУ существенно различаются получаемые результаты.

Большое количество работ рассматривают движение многофазной смеси в ВП в предположении постоянного входного потока, обычно рассматриваются потоки 15, 30 и 60 л/мин, характеризующие спокойное, углубленное и интенсивное дыхание [168, 189, 151, 190, 117]. Стационарные граничные условия позволяют оценить основные тенденции, происходящие при дыхании, однако описание дыхания при этом не соответствует реальному процессу. Количество исследований, посвященных нестационарному дыханию, меньше, чем с постоянными ГУ. Так, авторы работ [180, 152] исследовали нестационарный воздушный поток с частицами микро-размера в верхних дыхательных путях; в исследованиях [140] рассмотрен воздушный поток в дыхательных путях между ртом и четвертым поколением упрощенного асимметричного трахеобронхиального дерева. Непостоянный воздушный поток (без частиц) в трахеобронхиальной области с реальной геометрией, основанной на КТ-сканировании, был рассмотрен в [186]. Особенности нестационарности воздушного потока оказывают значительное влияние на осаждение частиц [140, 68, 69].

Законы изменения скоростей потока на входе (задаваемые в качестве граничных условий) для фаз вдоха и выдоха обычно считаются синусоидальными с различными амплитудами и периодами. В работах [180, 152] рассматривается дыхательный цикл длительностью 4 с, с равной продолжительностью фазы вдоха и выдоха. В работе [140] цикл дыхания составляет 3,8 секунды, фаза вдоха – 1,8 секунды. В исследованиях [186] «вдох-выдох» полагался длящимся 5,1 секунды, фаза вдоха – 1,7 секунды. Авторы статьи [110] принимали дыхательный цикл продолжительностью 4 секунды, вдох составляет 1,65 секунды. В исследованиях [115] респираторный цикл полагался равным приблизительно 5 секунд, а вдох длится примерно 2,2 секунды.

По мере уменьшения размеров и массы частиц доля осевших в верхних дыхательных путях частиц уменьшается и, соответственно, увеличивается доля частиц, способных проникать в небольшие нижние дыхательные пути и достигать легких [21, 241, 195, 68, 70, 190, 191, 69]. Плотность оказывает значительное влияние на различия осаждения частиц микроразмера (2,5-10 мкм) и довольно незначительное – для частиц диаметром меньше 1 мкм [190, 69]. Доля осаждающихся в ВП частиц увеличивается с увеличением интенсивности дыхания [190, 117, 69].

В зависимости от режима дыхания (объемного расхода воздуха) и рассматриваемого участка воздухоносного тракта может наблюдаться различный характер течения воздуха, от ламинарного до переходного и турбулентного [233]. Авторы исследования [172] указывают, что воздушный поток в респираторном дереве (G0-G5, где G – номер генерации воздухоносных путей, начиная с трахеи (обозначаемой G0), общепринятое обозначение в англоязычной литературе) сильно отличается от ламинарного потока. Критерием подобия, характеризующим характер потока, является число Рейнольдса  $Re$ , зависящее от скорости потока  $v_f$ , размера канала  $d$ , плотности  $\rho_f$  и вязкости  $\mu_f$  жидкости ( $Re = \rho_f v_f d / \mu_f$ ). Значение числа Рейнольдса, меньшее 2300, соответствует ламинарному режиму течения, большее – переходному и турбулентному. Наибольшие скорости потока и

соответственно числа Рейнольдса возникают в гортани (самом узком месте воздухоносного тракта). Проходя через гортань, воздушный поток может стать турбулентным. Эффекты турбулентности от гортанной струи сохраняются и могут продолжать влиять на характер потока в трахее и бронхах [166, 118, 112], но ослабевают после 3-4 генерации воздухоносных путей [118]. Турбулентные эффекты в носовой полости ниже, чем в глотке, характер течения соответствует переходному режиму [112]. При этом характер течения в верхних воздухоносных путях является довольно сложным, что связано с анатомическим строением носовой полости. В работах [199, 166] показано, что течение воздуха в носовой полости оказывает существенное влияние на течение воздуха в глотке. В [171] также приводится обоснование необходимости для более корректного описания потока в ВП учета характера течения воздуха и движения частиц в вышележащих участках тракта.

Характеристики и параметры турбулентного течения влияют на результаты расчетов оседания частиц: формирующиеся вихревые потоки воздуха способствуют более интенсивному оседанию пылевых частиц на стенках дыхательных путей по сравнению с ламинарным режимом течения. В [188] показано, что при турбулентном режиме частицы пыли (1-10 мкм) осаждаются на стенках дыхательных путей более интенсивно, чем при ламинарном течении. В [233] также показано, что из-за турбулентности потока эффективность оседания частиц в начальном участке трахеобронхиального дерева (G0-G4) увеличивается.

В большинстве работ, описывающих движение воздуха в воздухопроводящей зоне или отдельных ее участках, стенки ВП полагаются неподвижными, недеформируемыми. Данное предположение обусловлено наличием хрящевой ткани в стенках верхних и крупных нижних ВП, которая затрудняет их деформацию в поперечном сечении, и тем, что стенки дыхательных путей состоят в основном из жидкости, которая может рассматриваться как несжимаемая на временных масштабах дыхательного цикла. По мере увеличения генерации ВП и уменьшения их размера, толщины стенок, а также наличия в

стенках хрящевой ткани, стенки мелких ВП становятся более податливыми. Некоторые исследования [133, 221, 234] учитывают воздействие потока воздуха на возникновение напряжений и деформаций в стенках воздухоносных путей (с использованием подхода FSI (fluid-structure interaction)). Однако существует относительно небольшое количество подобных исследований и выводы о необходимости учета взаимодействия воздуха и стенок воздухопроводящей зоны при нормальном дыхании неоднозначны. Подобные модели, вероятно, имеет смысл рассматривать при моделировании дыхания при патологии (либо моделировании возникновения заболеваний, в том числе связанных с использованием искусственной вентиляции легких (ИВЛ), например, вентилятор-ассоциированное повреждение легких (в англоязычной литературе «VALI / VILI» (Ventilator-Associated / Ventilator-Induced Lung Injury))).

### ***Математические модели для исследования процессов в легких человека***

При моделировании движения воздуха по ВП в легких с использованием средств вычислительной аэромеханики возникают существенные сложности при описании геометрии всей иерархии дыхательных путей вплоть до альвеол (в легких взрослого человека содержится около 600-700 млн. альвеол) и соединяющих их каналов. Данная проблема, в том числе, связана с ограниченной разрешающей способностью компьютерной томографии. При этом детальное математическое описание процесса дыхания по всей системе каналов требует чрезвычайно больших вычислительных ресурсов. Кроме того возникает сложность с построением объемной конечно-элементной сеткой для всей системы каналов, размеры которых различающихся на несколько порядков (так диаметр трахеи составляет 1,5-1,8 см, альвеолы – 0,2-0,3 мм), позволяющей описывать одновременно течение в крупных и мелких каналах.

В дополнение к вышесказанному процесс движения воздуха в легких является довольно сложным, обусловлен перепадом давления между атмосферой

и неоднородным распределением давления в легких, связанным с изменением их объема. Для наиболее точного описания пространственных процессов, происходящих в легких, необходимо учитывать и биомеханику легких (легочной ткани, паренхимы), и неоднородные потоки воздуха внутри легких.

В связи с указанными сложностями при моделировании процессов в легких используются два основных подхода. Первый подход основан на использовании гибридных 3D-0D моделей, в которых крупные ВП восстанавливаются на основе КТ-снимков и описываются с помощью 3D-моделей течения жидкости, а мельчайшие генерации ВП заменяются деревом упругих или вязко-упругих 0D - 1D элементов [207; 167; 239; 144; 196]. При этом дистальное дерево мелких дыхательных путей генерируется с использованием алгоритмов заполнения легочного пространства. Данный тип моделей частично был описан выше в разделе «камерные модели».

Второй подход заключается в описании легких с использованием модели сплошной среды. Можно выделить два типа моделей, в которых легкие рассматриваются как сплошная среда. В первом типе моделей акцент делается на исследовании поведения легочной ткани в процессе дыхания; легкие в данном типе моделей рассматриваются как однофазное деформируемое твердое тело [90-93; 208, 229, 126, 227, 145, 113]. Данные модели разрабатываются для решения задач противораковой терапии. Вызванное дыханием движение органов является одной из основных неопределенностей в лучевой терапии рака легких. Отслеживание и прогнозирование локального движения опухоли во время дыхания предоставляет ценную информацию для планирования лучевой терапии. Современные модели данного направления используют персонализированные данные 4D-КТ (тип компьютерной томографии, при которой записывается несколько трехмерных изображений легких с течением времени), что позволяет оценить динамику движения [229, 126, 227, 161, 132, 113].

Существуют модели, которые рассматривают только движение легких [229, 126, 227], либо взаимодействие легких с окружающими органами [161, 132]. Так,

в [161, 132] учитываются все взаимодействующие элементы в грудной полости, включая легкие, диафрагму, грудную клетку (ребра), средостение. Легочная ткань обычно моделируется изотропным гиперупругим материалом; используются различные потенциалы энергии деформации для гиперупругих материалов. Модели данного типа позволяют детально описывать изменение конфигурации легких, оценивать напряженно-деформированное состояние легочной паренхимы в процессе дыхания, но не учитывают влияние наличия воздуха на легочную ткань и не позволяют описать движение воздуха в легких.

Другой тип моделей связан с описанием легких с использованием модели пористой среды и привлечением теории фильтрации. Данный подход позволяет преодолеть трудности, связанные с моделированием движения воздуха в отдельных дыхательных каналах в легких. В работах [121-123] рассматривалось течение воздуха через «пассивную» пористую среду под действием градиента давления, обусловленного изменением объема за счет движения стенок легких (кинематических граничных условий). Предложенная модель позволяет получить поле давления воздуха в легких, потоки воздуха в легких. Однако совместное решение задач деформирования легочной ткани и фильтрации не рассматривалось в данных моделях, также не учитывалось взаимодействие легочной ткани и воздуха, содержащегося в легких.

Более адекватным представляется подход, в котором легкие моделируются двухфазной пористой средой, состоящей из легочной ткани (первая, твердая фаза) и воздуха в легких (вторая, газовая фаза), с учетом взаимодействием фаз между собой и решение совместной задачи деформации легочной ткани и фильтрации воздуха через деформируемую пористую среду. Первое упоминание об использовании модели насыщенной двухфазной пористой среды для описания легких приводится в работе Р. Kowalchuk [156]. Тестовое решение задачи получено для упрощенной геометрии (в форме параллелепипеда). В современных моделях рассматривается фильтрация воздуха через пористую паренхиму легких реалистичной трехмерной геометрии, полученной на основе данных КТ.

Подобный подход представлен в серии публикаций коллектива О. Pegbusi, В. Seyfi и др. [142, 143, 204, 205], L. Berger и др. [104], N. Avilés-Rojas, D.E.Hurtado [98].

Обычно используется гипотеза, что твердая фаза включает в себя легочную ткань, кровеносные сосуды в легких и кровь в них содержащуюся [156, 104, 98, 187]; твердая фаза полагается изотропной, несжимаемой [156, 104, 98, 187]. Несжимаемость твердой фазы обосновывается высоким содержанием жидкости (более 80%) во внутриклеточной жидкости паренхимы и крови, находящейся в легочных сосудах. Легочная ткань описывается гиперупругим материалом [156, 104, 98, 187], в [104] используется неогоковский материал, в [98] рассматривается пять гиперупругих материалов. Газовая фаза в указанных работах также полагается несжимаемой; воздушный поток через деформируемую пористую паренхиму обычно описывается законом Дарси [156, 104, 98, 142, 143, 204, 205]. Численная реализация выполняется методом конечных элементов. Несжимаемость существенно осложняет построение определяющих соотношений (ОС), в этом случае имеем материал со связью, для которого отклик нельзя получить только по движению (деформациям). В приведенных работах [104, 98, 142, 143] формулировка определяющих соотношений для двухфазной среды основывается на гипотезе смеси, с использованием ОС для двухфазной среды, учитывающее взаимодействие воздушной и газовой фазы, определяется соотношением:  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_s - p_f \mathbf{I}$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши для двухфазной среды,  $\boldsymbol{\sigma}_s$  – тензор напряжений Коши легочной ткани,  $p_f$  – давление воздуха в легких,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга).

В работах [142, 143, 204, 205] используются подробные данные об изменении формы легких, полученные на основе 4D-КТ, учитывается пространственная неоднородность упругих свойств легочной ткани. На уровне КЭ используется предположение об изотропии упругих свойств материала, при этом модуль Юнга может изменяться между элементами в легких. Области входа

главных бронхов в легкие («ворота легкого») полагаются более жесткими; принимается, что опухоль в легких имеет более высокие значения модуля Юнга. Учитывается геометрическая нелинейность задачи, в полученных результатах отмечается, что деформации легких наибольшие в области, примыкающей к диафрагме. В области «ворот легких» задается закон изменения давления газовой фазы (т.е. рассматривается скорее задача искусственной вентиляции легких, накачивания легких за счет давления воздуха, а не описания процесса дыхания), используется предположение о ламинарности входного потока.

Подход, основанный на представлении легких двухфазной упруго-деформируемой насыщенной пористой средой, может быть использован для оценивания пространственного распределения воздушных потоков в легких с учетом взаимодействия фаз. Однако в указанных работах исследованию поведения воздушной фазы уделяется мало внимания, основное внимание посвящено изучению твердой фазы (для задач радиотерапии). Так, в [104, 98] представлены поля давлений воздуха в легких для различных моделей материала в различные моменты дыхательного цикла, а также интегральные характеристики потока воздуха в процессе дыхания [104, 98]. В цитируемых работах [104, 98] авторы отмечают, что предлагаемый подход позволяет описывать изменения физиологических переменных (давление воздуха в легких, поток и объем) при спонтанном дыхании.

Таким образом, процесс движения воздуха в ДС во время дыхания довольно сложный, не до конца изученный, вычислительная пульмонология является развивающейся областью. Несмотря на довольно большое количество работ, не существует единого подхода к моделированию процессов в дыхательной системе человека, математические модели различаются в зависимости от стоящих перед исследователями задач. Наиболее перспективным в настоящее время выглядит создание комплексных моделей, включающих описание процессов в воздухоносных путях и легких человека, с использованием реальной геометрии, получаемой на основе данных компьютерной томографии, в которых

рассматриваются циклические упругие деформации легких совместно с движением воздуха в ДС.

## **2 Концептуальная и математическая постановка задачи движения воздуха в каналах и упруго-деформируемой пористой среде для описания дыхательных процессов в организме человека**

В соответствии со сказанным в предыдущей главе, в разрабатываемой математической модели, описывающей течение воздуха в дыхательной системе, исходя из анатомических и физиологических особенностей выделяются подмодель течения воздуха в воздухоносных путях и подмодель течения воздуха в легких. В разделе 2.1 данной главы приведена общая структура математической модели, основные принимаемые в работе гипотезы и связи между подмоделями; в разделе 2.2 детальное внимание уделено формулировке соотношений подмодели легких человека, рассматриваемых как деформируемая пористая среда; в разделе 2.3 приведено описание подмодели для исследования движения воздуха в воздухоносных путях человека.

### **2.1 Структура математической модели для описания функционирования дыхательной системы человека**

Дыхательная система человека, исходя из структурных и функциональных характеристик, рассматривается состоящей из 1) воздухопроводящей зоны (включающую в себя носовую полость, глотку, гортань, трахею и 5 генераций бронхов), по которой воздух движется из атмосферы к легким и обратно (изображена синим цветом, указатель 1 на рисунке 2.1), и 2) респираторной (дыхательной) зоны (отделы легких, содержащих альвеолы, в которых непосредственно осуществляется газообмен) (изображена зеленым цветом, указатель 2 на рисунке 2.1).

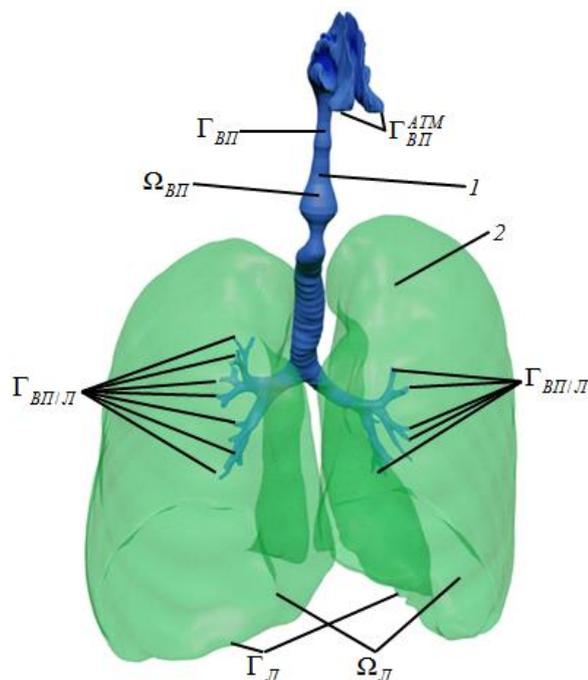


Рисунок 2.1 – Схема, поясняющая структурные элементы модели ДС, состоящей из воздухопроводящей зоны (изображена синим цветом) и легких, аппроксимированных пористой средой (изображены зеленым цветом)

При рассмотрении течения воздуха в ВП и легких человека вводится подвижная система отсчета, связанная с человеком. При обычных передвижениях человека можно пренебречь силами инерции. Поэтому введенная подвижная система отсчета, связанная с человеком, полагается инерциальной. Движение рассматриваемых материальных объектов исследуется только относительно введенной неподвижной системы отсчета.

Рассматриваемые участки ДС обладают собственными уникальными особенностями в анатомическом строении и протекающих в них процессах, патологии различных элементов ДС имеют различные механизмы патогенеза (механизмы зарождения и развития заболеваний) и этиологию, что необходимо учитывать при моделировании дыхательных процессов дыхания в норме и при патологии.

Стенки верхних и крупных нижних ВП содержат хрящевую ткань, которая мешает ВП сужаться (и расширяться); деформациями стенок при описании

течения воздуха можно пренебречь в силу их существенно большей жесткости по сравнению с легочной тканью, при этом стенки воздухоносных каналов полагаются неподвижными (относительно введенной системы отсчета). Легкие человека, состоящие из имеющих нерегулярную структуру мелких дыхательных каналов и альвеол, в процессе дыхания испытывают большие упругие квазициклические градиенты перемещений.

Рассмотрение собственно легких с применением физически и геометрически точной модели, описывающей в деталях альвеолы и соединяющие их каналы микронных размеров (в легких взрослого человека содержится около 600 млн. альвеол), представляется практически не реализуемой задачей в силу огромных вычислительных сложностей и потребных ресурсов. В связи с этим для описания процессов легочного дыхания предлагается использовать континуальный подход, в соответствии с которым легкие и содержащийся в них воздух будут рассматриваться сплошной деформируемой насыщенной пористой средой, находящейся внутри области с подвижными границами (стенками). Исследование фильтрации воздуха в пористой среде легких осложняется тем, что задача является геометрически нелинейной, в процессе деформирования возникает взаимодействие газа и легочной ткани, что необходимо учитывать при разработке математической модели ДС.

Движение воздуха в воздухопроводящей зоне, представляющей собой систему неподвижных каналов сложной формы, по которой воздух движется из атмосферы к легким и обратно, будет описываться с использованием соотношений газовой динамики, движение воздуха в деформируемой пористой среде легких – с использованием соотношений геометрически нелинейной теории упругости и теории фильтрации. Объединение подмоделей осуществляется за счет использования граничных условий (ГУ) на границе  $\Gamma_{ВП/Л}$ , являющейся одновременно выходами из системы бронхов и входами в легкие человека. При проведении локальных исследований в различных структурных элементах (например, для моделирования возникновения заболеваний в отдельном участке

дыхательной системы) каждая из подмоделей может рассматриваться изолированно, при этом подмодели встраиваются в общую структуру разрабатываемой модели дыхательной системы человека.

Введем обозначение областей и границ в подмоделях ВП и легких. Символом  $\bar{\Omega}_{ВП}$  обозначена замкнутая односвязная область ВП ( $\bar{\Omega}_{ВП} = \Omega_{ВП} \cup \Gamma_{ВП} \cup \Gamma_{ВП/Л} \cup \Gamma_{ВП}^{ATM}$ ),  $\Omega_{ВП}$  – внутренность области,  $\Gamma_{ВП}$  – граница области (стенки ВП),  $\Gamma_{ВП}^{ATM}$  – вход в ВП (граница ВП с окружающей средой (ноздри)). Легкие будут рассматриваться как совокупность двух односвязных замкнутых областей,  $\bar{\Omega}_{Л}$  – замкнутая область (представляющая собой объединение двух односвязных замкнутых областей) насыщенной пористой среды легких человека,  $\Omega_{Л}$  – внутренность области легких,  $\Gamma_{Л}$  – граница области легких ( $\bar{\Omega}_{Л} = \Omega_{Л} \cup \Gamma_{Л} \cup \Gamma_{ВП/Л}$ ),  $\Gamma_{ВП/Л}$  – границы выходов из ВП, являющиеся одновременно входами в легкие человека (граница между областями ВП и пористой средой легких  $\Gamma_{ВП/Л} = \bar{\Omega}_{ВП} \cap \bar{\Omega}_{Л}$ ).

В целом математическая модель ДС человека является существенно нелинейной, что обуславливает необходимость применения пошаговой процедуры при решении задачи. Решение задачи предполагает использование пошаговой процедуры с применением достаточно малых шагов по времени. При выборе начального момента времени в работе принимается гипотеза, что можно пренебречь инерцией потока газа; в качестве начального исходного времени при моделировании течения воздуха в ДС рассматривается момент «конец выдоха – перехода к вдоху», когда течение воздуха останавливается перед сменой направления движения. Будем полагать, что в начальный момент давление воздуха в легких и ВП (во всех внутренних областях и границах входа и выхода) равно атмосферному, движение воздуха отсутствует (скорость потока воздуха равна нулю).

Процедура, описывающая течение воздуха из атмосферы по системе каналов ВП и легким в процессе дыхания, моделируется последовательным выполнением следующих этапов: 1) решение задачи деформирования сплошной деформируемой насыщенной пористой среды легких; 2) определение граничных условий на границе ВП и легких (из задачи деформирования легких); 3) моделирование течения воздуха в воздухопроводящей зоне.

При рассмотрении задачи движения воздуха в деформируемой пористой среде легких на границах легких (стенках легких ( $\Gamma_L$ ) и границах выходов из бронхов/входах в легкие ( $\Gamma_{ВП/Л}$ )) задаются граничные условия кинематического типа (закон изменения формы легких) для двухфазной среды и условие непроницаемости для газовой фазы. При рассмотрении нормального процесса дыхания (при отсутствии задержек дыхания и экстремальных перегрузок) на выходе из системы бронхов (представляющих собой систему открытых трубок) давление полагается равным атмосферному, касательные компоненты вектора напряжения являются нулевыми.

Из подмодели движения воздуха в деформируемой пористой среде легких определяются массовые расходы (входные и выходные потоки) в сечениях выходов из системы бронхов (на границе  $\Gamma_{ВП/Л}$ ). Для подмодели движения воздуха в каналах проводящей зоны (от носовой полости до выхода из системы бронхов) на границе ( $\Gamma_{ВП}^{ATM}$ ), контактирующей с атмосферой (ноздри), задается постоянное атмосферное давление и нулевые касательные компоненты вектора напряжений, в сечениях выхода из системы бронхов ( $\Gamma_{ВП/Л}$ ) – законы изменения однородных по сечению скоростей движения воздуха, направленных по нормали к сечению, величина которых определяется по массовым расходам воздуха в течение дыхательного цикла, полученным из подмодели движения воздуха в пористой среде легких, на неподвижных стенках ( $\Gamma_{ВП}$ ) – условие прилипания.

Предлагаемая математическая модель для описания течения воздуха в ВП и легких человека является «базовой» и предназначена для дальнейшего

использования при решении широкого круга задач в области медицины. Разработанную модель предполагается использовать для моделирования возникновения патологий (различных видов и локализаций), обусловленных воздействием ингаляционных факторов среды обитания, а также для моделирования процесса дыхания при наличии функциональных нарушений элементов дыхательной системы. Одним из приоритетных факторов, оказывающих влияние на состояние здоровья, являются пылевые частицы, присутствующие в атмосферном воздухе, что необходимо учитывать при моделировании.

Воздух в общем случае представляет собой многофазную многокомпонентную смесь газов и пылевых частиц. В рамках разрабатываемой модели изменение состава воздуха в процессе дыхания не рассматривается, компонентный состав воздуха считается постоянным. Защитная (от пылевых частиц) функция за счет инерционного механизма оседания эффективно выполняется в воздухопроводящих путях, представляющих собой искривленную сеть каналов. Крупные частицы, присутствующие в воздухе, при резком изменении направления воздушного потока продолжают движение в прежнем направлении и ударяются о поверхность слизистой дыхательных путей; респираторного отдела и альвеол достигают мельчайшие частицы (менее 2,5 мкм / 1 мкм), которые в легких движутся вместе с потоком воздуха [21, 241, 195, 68, 70, 69]. При моделировании движения воздуха в воздухоносных путях воздух рассматривается многофазной смесью гомогенного газа и пылевых частиц различных размеров. Газовая фаза является основной несущей фазой, описание движения которой выполняется с использованием модели вязкой жидкости. Твердые пылевые частицы являются дисперсной несомой фазой, описание которой выполняется с использованием материального способа.

При разработке конститутивных соотношений для сплошной деформируемой насыщенной пористой среды легких последние будем рассматривать двухфазной средой, одна из фаз которой – деформируемый скелет

среды, описываемый моделью геометрически нелинейной теории упругости; вторая фаза – газ, заполняющий поровое пространство. Предполагается, что все пространство непрерывно заполнено двумя фазами, полностью взаимопроникающими и взаимодействующими друг с другом. Воздух в легких участвует в двух движениях: «переносном» вместе с деформируемой пористой средой и «относительном» движении внутри пористой среды (за счет перепада давления, обусловленного изменением объема). Присутствие мелкодисперсных пылевых частиц в воздухе не оказывает значимого влияния на процесс дыхания и формирования патологий в рамках дыхательного цикла; при этом долгосрочное поступление и накопление взвешенных частиц, обладающих фиброгенным действием, может приводить к снижению проницаемости пористой среды легких вследствие развития фиброза (за счет разрастания соединительной ткани, замещающую нормальную ткань легких).

В силу того, что при описании легких рассматривается деформируемое твердое тело, испытывающее значительные градиенты перемещений, используется формулировка в терминах лагранжевой системы координат. Для описания движения используются две системы координат: лагранжева («вмороженная») система координат, связанная с частицами деформируемой среды (легкими человека) и условно неподвижная лабораторная система координат (ЛСК), связанная с человеком. Введение лагранжевых координат (неизменных для материальных частиц на рассматриваемых интервалах движения) означает присвоение каждой материальной точке неизменной «метки», с помощью которой координаты частиц в ЛСК в каждый момент времени взаимно однозначно связываются с соответствующими материальными точками. Введение ЛСК позволяет отслеживать движение частиц относительно нее. Лагранжевы координаты обычно вводятся как координаты в ЛСК в некоторой конфигурации, выбранной за отсчетную, и в дальнейшем считаются неизменными.

При постановках геометрически нелинейных задач обычно используются два альтернативных лагранжевых подхода: отсчетный и текущий. При

использовании отсчетного лагранжева описания в качестве координат частиц в лагранжевой системе служат координаты частиц в конфигурации, принятой за отсчетную (в некоторый момент времени, принятый за начало отсчета времени исследуемого процесса); при текущем лагранжевом подходе в каждый момент процесса деформирования текущая лагранжева система координат отождествляется с лабораторной системой координат (ЛСК).

Нелинейные задачи обычно решаются с использованием пошаговой процедуры (по времени); лагранжевы координаты на каждом шаге определяются как координаты в ЛСК на начало шага с приписываемой каждой материальной точке (частице) параметров состояния, устанавливаемых всей историей нагружения предшествующих временных интервалов. Из решения задачи на текущем шаге нагружения определяются новые положения частиц в ЛСК и параметры состояния на конец шага, которые далее считаются начальными на следующем шаге.

В разрабатываемой математической модели легких человека используется скоростная постановка краевой задачи теории упругости в терминах актуальной конфигурации. Для геометрически нелинейной задачи деформирования двухфазной пористой среды легких будем использовать текущий лагранжев подход. Дыхательный цикл разбивается на ряд малых шагов по времени.

Введенная ЛСК принимается декартовой ортогональной с ортонормированным базисом  $\mathbf{k}_i$ ; базисные вектора направлены вдоль соответствующих осей  $Ox_i$  ( $\{\mathbf{k}_1\}=\{1, 0, 0\}$ ,  $\{\mathbf{k}_2\}=\{0, 1, 0\}$ ,  $\{\mathbf{k}_3\}=\{0, 0, 1\}$ ). При использовании лагранжева текущего подхода при рассматриваемой пошаговой процедуре процесса дыхания лагранжевы координаты переопределяются в ЛСК в конце каждого временного шага и полагаются неизменными на интервале следующего временного шага.

## 2.2 Постановка задачи течения воздуха в деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека

Рассматриваемая проблема исследования течения воздуха в двухфазной упруго-деформируемой насыщенной пористой среде легких человека относится к классу геометрически нелинейных задач (в силу больших градиентов перемещений). Проблеме построения геометрически нелинейных моделей посвящены работы многих авторов [57, 31, 50, 26, 23]. Вследствие геометрической нелинейности и неопределенности актуальной конфигурации в каждый момент деформирования для исследования предпочтительно использовать скоростную постановку краевой задачи теории упругости [50]. Математическая постановка представляет собой систему уравнений, состоящую из уравнения равновесия в скоростной форме; кинематических соотношений (включающих в себя соотношения для определения тензоров деформаций Альманси и скорости его изменения, соотношения для тензора деформации Генки и его коротационной производной, тензора деформации скорости и вихря, соотношение для логарифмического спина); определяющих соотношений (соотношение для скорости изменения тензора напряжений, определение коротационной производной тензора напряжений, соотношение для скорости изменения среднего напряжения, учитывающего взаимодействием легочной ткани и воздуха); закон сохранения массы и соотношение для описания относительного движения газовой фазы; начальные и граничные условия.

Паренхима легких человека, включая мелкие дыхательные каналы, альвеолярные ходы и альвеолы, а также заключенный в ней альвеолярный воздух моделируются сплошным упруго-деформируемым насыщенным двухфазным пористым континуумом. В качестве представительного объема (ПО) двухфазной среды (материальный объем двухфазной среды легких, в котором содержится достаточное для статистического описания число «носителей» рассматриваемых механизмов процесса) будем рассматривать ПО, содержащий  $10^3$ - $10^5$  альвеол.

Легкие человека неоднородны, поэтому в общем случае конкретный элементный состав легких, а также свойства ПО различных участков легких отличаются друг от друга. Проницаемость легочной ткани в общем случае анизотропна и описывается тензором второго ранга. Для описания относительного движения газовой фазы в пористой среде легких используется закон фильтрации Дарси [105, 27, 4].

В рассматриваемом представительном объеме масса двухфазной среды определяется как сумма масс газовой и твердой фазы:

$$\overset{\circ}{m} = \overset{\circ}{m}_s + \overset{\circ}{m}_f, \quad \hat{m} = \hat{m}_s + \hat{m}_f, \quad (2.1)$$

где  $\overset{\circ}{m}$ ,  $\overset{\circ}{m}_s$ ,  $\overset{\circ}{m}_f$  – масса двухфазной среды, массы твердой и газовой фазы в отсчетной конфигурации;  $\hat{m}$ ,  $\hat{m}_s$ ,  $\hat{m}_f$  – масса двухфазной среды, массы твердой и газовой фазы в текущей (актуальной) конфигурации.

Используются следующие основные гипотезы: масса твердой фазы в отсчетной и актуальной конфигурациях постоянна ( $\overset{\circ}{m}_s = \hat{m}_s$ ); масса воздуха, содержащегося в легких, много меньше массы легочной ткани, массой воздуха по сравнению с массой твердой фазы в ПО можно пренебречь ( $\hat{m}_s + \hat{m}_f \approx \hat{m}_s$ ,  $\overset{\circ}{m}_s + \overset{\circ}{m}_f \approx \overset{\circ}{m}_s$ ). Аналогичные гипотезы полагаются справедливыми и для любого малого объема легких.

В работе принимаются следующие обозначения для представительного объема:  $\hat{V}$  – объем двухфазной среды;  $\hat{V}_s$  – объем твердого каркаса;  $\hat{V}_f$  – объем газовой фазы, заполняющей поровое пространство. Следует напомнить, что понятие ПО вводится для перехода от осредненных по малым объемам характеристик реального материала к локальным параметрам соответствующего континуума, «привязывая» эти средние характеристики к некоторой точке (например, геометрическому центру ПО, взятому в форме параллелепипеда) [74]. В дальнейшем с указанными параметрами работают как с величинами (той или

иной тензорной размерности), определенными в каждой точке континуума. Приведенная ниже постановка ориентирована на дифференциальную (локальную) форму балансовых уравнений. В то же время необходимо учитывать способ введения локальных переменных, различие этих понятий с позиций математики и механики при анализе полученных результатов решения краевых задач: в механике полученные данные о состоянии тел или параметров «в точке» всегда есть осредненные по представительному объему характеристики.

Относительная скорость изменения ПО двухфазной среды при деформации равна сумме скоростей изменения объемов каждой из фаз (твердого скелета и воздуха, заполняющего поровое пространство), умноженных на объемные доли соответствующих фаз:

$$\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} = \hat{\gamma}_s \frac{\dot{\hat{V}}_s}{\hat{V}_s} + \hat{\gamma}_f \frac{\dot{\hat{V}}_f}{\hat{V}_f}, \quad (2.2)$$

где  $\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}$ ,  $\frac{\dot{\hat{V}}_s}{\hat{V}_s}$ ,  $\frac{\dot{\hat{V}}_f}{\hat{V}_f}$  – относительные скорости изменения объемов двухфазной среды,

твердого скелета (каркаса) пористой среды легких и газовой фазы, заполняющей поровое пространство;  $\hat{\gamma}_s$ ,  $\hat{\gamma}_f$  – объемные доли твердой и газовой фазы соответственно (безразмерные величины, равные отношению объемов твердой и

газовой фазы к объему двухфазной среды,  $\hat{\gamma}_s = \frac{\hat{V}_s}{\hat{V}}$ ,  $\hat{\gamma}_f = \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}$ ,  $\hat{\gamma}_s + \hat{\gamma}_f = 1$ ).

### ***Уравнение равновесия***

В нормальных условиях жизнедеятельности человека при отсутствии экстремальных перегрузок динамическими эффектами для анализа процесса дыхания можно пренебречь (процесс полагается квазистатическим); в этом случае уравнения равновесия в скоростях при пренебрежении массовыми силами для двухфазного континуума имеют вид [50]:

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{L}} \quad (2.3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  – тензор напряжений Коши двухфазной среды и его материальная производная,  $\mathbf{v}$  – скорость перемещений частиц двухфазной среды,  $\hat{\nabla}$  – оператор Гамильтона, определенный в актуальной конфигурации.

Скорость перемещений частиц двухфазной среды определяется как среднemasсовая скорость перемещений смеси, устанавливаемая через скорости движения частиц каждой из фаз [44, 45]. В связи с тем, что масса газа, находящегося в рассматриваемом ПО двухфазной среды легких, пренебрежимо мала по сравнению с массой частиц твердого скелета (каркаса), скорость перемещений частиц двухфазной среды можно считать совпадающей со скоростью материальных частиц твердой фазы ( $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$ ). Скорость движения частиц воздуха можно выразить в виде суммы скорости «переносного» движения – движения вместе с деформируемой твердой фазой относительно введенной лабораторной системы координат в рассматриваемой точке, и скорости «относительного» движения, обусловленного просачиванием газа относительно твердого каркаса. Таким образом, во всех определяющих и кинематических соотношениях скорость и перемещение частиц двухфазной среды полагаются совпадающими со скоростью и перемещениями частиц твердой фазы. Скорость «относительного» движения газовой фазы (относительно твердого деформируемого каркаса) за счет просачивания устанавливается из закона Дарси.

### ***Кинематические соотношения для двухфазной среды легких***

Градиент места  $\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r}$  [31] можно представить в виде скалярного произведения симметричного и ортогонального тензоров (полярым разложением):

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  – соответственно левый и правый тензоры искажения;  $\mathbf{R}$  – ортогональный тензор, сопровождающий деформацию (тензор ротации),  $\overset{\circ}{\nabla}(\cdot)$  – набла-оператор Гамильтона, определенный в отсчетной конфигурации,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор материальных точек твердой фазы, индекс «о» над символом обозначает принадлежность к отсчетной конфигурации.

Поскольку  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  симметричные положительно определенные тензоры, то для них существует тройка положительных действительных собственных чисел  $U_i$ ,  $V_i$  (отношения длин элементарных материальных отрезков, направленных вдоль главных векторов тензоров  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$  соответственно в актуальной и отсчетной конфигурациях) и тройки собственных (или главных) ортонормированных векторов  $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$  ( $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i = \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i$ ) тензора  $\mathbf{U}$  и  $\hat{\mathbf{p}}_i$  ( $\hat{\mathbf{p}}_i = \hat{\mathbf{p}}^i$ ) тензора  $\mathbf{V}$ . В главном базисе  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  тензоры примут вид:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 U_i (\overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \overset{\circ}{\mathbf{p}}_i), \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 V_i (\hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i), \quad (2.5)$$

где  $U_i$ ,  $V_i$  – собственные (главные) значения левого и правого тензоров искажения. Собственные значения тензоров  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  совпадают ( $U_i = V_i$ ). Градиент места можно представить в виде:

$$\overset{\circ}{\nabla} \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 U_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^3 V_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i. \quad (2.6)$$

Тензор ротации определяется как:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^3 \overset{\circ}{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i. \quad (2.7)$$

Введем обозначение:

$$\hat{\mathbf{H}} = (\ln \mathbf{V}) = \sum_{i=1}^3 \ln V_i (\hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i) = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i (\hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i), \quad (2.8)$$

где  $\hat{\mathbf{H}}$  – тензор логарифмических деформаций (мера деформации Генки), определенный в терминах актуальной конфигурации;  $\mathbf{V}$  – правый тензор

искажения;  $\lambda_i = U_i = V_i$  – собственные значения тензора искажений (отношение длин бесконечно малых материальных отрезков, направленных вдоль главных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$  и  $\overset{\circ}{\mathbf{p}}_i$ :  $\lambda_i = d\hat{S}_i / d\overset{\circ}{S}_i$ );  $\hat{\mathbf{p}}_i$  – главные векторы меры  $\mathbf{V}$ . Введенный тензор логарифмической деформации впервые был предложен Генки в [136]. Главные значения тензора  $\hat{\mathbf{H}}$  представляют собой натуральные логарифмы отношения длин бесконечно малых материальных волокон в текущей и отсчетной конфигурациях, направленных вдоль главных направлений соответственно тензоров  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{U}$ . Тензор логарифмических деформаций можно определить также через тензор Альманси согласно соотношению [31]:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^3 H_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i (\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(1 - 2A_i) \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_L \quad (2.9)$$

где  $H_i$  – главные значения тензора логарифмических деформаций  $\hat{\mathbf{H}}$ ,  $A_i$  – главные значения тензора деформации Альманси,  $\hat{\mathbf{p}}^i = \hat{\mathbf{p}}_i$  – тройка ортонормированных векторов главных направлений (собственных векторов) меры  $\mathbf{V}$  (они же являются главными векторами тензоров Альманси  $\mathbf{A}$  и Генки  $\hat{\mathbf{H}}$ ),  $\mathbf{r}$  – радиус вектор материальных частиц твердой фазы,  $\hat{\nabla}(\cdot)$  – набла-оператор Гамильтона, определенный в текущей конфигурации.

Главные значения тензоров деформаций также называются главными относительными удлинениями. Собственные значения тензоров искажения принимают положительные значения ( $\lambda_i > 0$ ), собственные значения тензора Альманси могут принимать значения от  $-\infty$  до  $1/2$ :  $A_i \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ , пределы изменения главных значений тензора  $\hat{\mathbf{H}}$  – от  $-\infty$  до  $+\infty$ ,  $H_i \in (-\infty, +\infty)$ .

Из соотношения (2.9) собственные значения тензоров искажения могут быть определены по соотношению:

$$\lambda_i = (1 - 2A_i)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

Тензор деформации Альманси двухфазной среды определяется следующим соотношением:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}^i = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^T - \hat{\nabla} \mathbf{u} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u}_s + \hat{\nabla} \mathbf{u}_s^T - \hat{\nabla} \mathbf{u}_s \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}_s^T), \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_L \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{u}_s$  – вектор перемещения материальных частиц твердой фазы ( $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$ ),  $\mathbf{A}$  – тензор деформации Альманси.

Скорость изменения тензора деформации Альманси определяется соотношением [50]:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T). \quad (2.12)$$

Тензоры деформации скорости и вихря выражаются через скорость перемещений соотношениями:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}_s + \hat{\nabla} \mathbf{v}_s^T), \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_L \quad (2.13)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \hat{\nabla} \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}_s^T - \hat{\nabla} \mathbf{v}_s), \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_L \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{W}$  – тензор вихря,  $\mathbf{D}$  – тензор деформации скорости,  $\mathbf{v}_s$  – вектор скорости перемещений частиц твердого скелета. Девiator тензора деформации скорости  $\mathbf{d}$  определяется соотношением:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad (2.15)$$

где  $I_1(\mathbf{D}) = \mathbf{I} : \mathbf{D}$  – первый инвариант тензора  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор 2-го ранга.

При операциях с тензорами в некоторых случаях возникает необходимость использовать их представление в базисе главных (собственных) векторов. Для любого симметричного тензора второго ранга существует, по крайней мере, три ортогональных вектора и тройка соответствующих собственных (главных) вещественных значений. Направления, определяемые главными векторами  $\mathbf{p}_j$ , называются главными направлениями (главными осями тензора). В механике деформируемого твердого тела (МДТТ) часто используется следующее

представление движения: при движении материальные волокна, совпадающие с ортонормированной тройкой главных векторов тензора деформации Коши-Грина (или левого тензора искажения  $\mathbf{U}$ ) в отсчетной конфигурации, переходят в материальные волокна, совпадающими с главными векторами тензора деформации Альманси (или правого тензора искажений  $\mathbf{V}$ ) в текущей конфигурации. Ориентацию осей главных векторов относительно базиса  $\mathbf{k}_i$  ЛСК определяется с помощью матрицы направляющих косинусов.

Поворот триэдра главных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$  до совмещения с ортонормированным базисом  $\mathbf{k}_i$  осуществляется с использованием собственно ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  ( $\mathbf{O} = \hat{\mathbf{p}}_i \mathbf{k}_i$ ):

$$\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}^T \cdot \hat{\mathbf{p}}_i. \quad (2.16)$$

Компоненты ортогонального тензора  $\mathbf{O}$  представляют собой косинусы углов между соответствующими базисными векторами. Переход тройки базисных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$  в тройку базисных векторов  $\mathbf{k}_j$  осуществляется через матрицу косинусов (компонентов тензора  $\mathbf{O}$ ), имеющую 9 компонент; косинусы углов между векторами определяются через их скалярное произведение по соотношению:

$$\cos(\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{p}}_j) = \mathbf{k}_i \cdot \hat{\mathbf{p}}_j. \quad (2.17)$$

При этом компоненты матрицы косинусов одинаковы в каждом из этих базисов.

Для произвольного тензора второго ранга  $\mathbf{T}$  связь компонент в ортонормированном базисе главных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$  и в базисе ЛСК  $\mathbf{k}_i$  можно записать в виде:

$$\mathbf{T} = T_{ij} \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}^j = [\mathbf{k}_m \cdot (T_{ij} \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}^j) \cdot \mathbf{k}_n] \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n \quad (2.18)$$

При построении определяющих соотношений (ОС) в скоростной форме в нелинейной механике сплошной среды, помимо выбора мер деформации, актуальной является проблема определения независимой от выбора системы отсчета производной [213, 64, 31, 50, 194, 73, 75]. Применение материальной производной не удовлетворяет требованию независимости от выбора системы

отсчета, в связи с чем используют коротационные и конвективные производные [50, 26, 23]. Коротационные производные определяют скорости изменения физических параметров (например, тензоров деформаций, напряжений и т.д.) по отношению к движущейся жесткой системе координат, т.е. относительные скорости [50].

Выбор подвижной системы координат и соответствующей конвективной или коротационной производной можно осуществить множеством способов. При использовании лагранжевой системы координат (с использованием соответствующих данной системе координат конвективных производных Олдройда [184] либо Коттер и Ривлина [119]) базис является деформируемым (при определении данных производных используется не только скорость изменения направлений векторов базиса, но и скорость изменения длин этих векторов и углов между ними). При использовании для рассмотрения движения деформируемых твердых тел разложения движения на квазитвердое и деформационное, для описания первой составляющей вводятся жесткие подвижные системы координат с неизменными длинами и углами между векторами базисов [50]; при этом удобно использовать декартовую ортогональную систему координат с ортонормированными базисами.

Наибольшее распространение получила коротационная производная Зарембы–Яуманна–Нолла [242, 147, 51, 31]. Данная производная реализована в распространенных конечно-элементных пакетах для инженерного анализа (ANSYS, ABAQUS). Использование данной коротационной производной приводит к нефизичным осцилляциям напряжений при монотонном нагружении простым сдвигом [125, 50].

В [235, 236] Н. Хiao с соавторами была предложена коротационная производная, определяемая с помощью логарифмического спина. Логарифмическая коротационная производная правого тензора Генки  $\hat{\mathbf{N}}$ , ассоциированная с этим спином, дает в точности тензор деформации скорости  $\mathbf{D}$  [236]. Использование ОС с логарифмической коротационной производной

позволяет избежать возникновения диссипации энергии и возникновения гистерезиса напряжений на замкнутых упругих циклах деформирования. Необходимо отметить, что ее корректность доказана только для изотропного упругого материала [177]. Логарифмическая коротационная производная логарифмической меры деформации (меры деформации Генки) имеет вид:

$$\hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}} = \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_J \quad (2.19)$$

где  $\mathbf{\Omega}_{\log}$  – логарифмический спин.

Скорость изменения логарифмической меры деформации определяется как [50]:

$$\dot{\hat{\mathbf{H}}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \hat{\mathbf{p}}^k \hat{\mathbf{p}}_k + \mathbf{\Omega}_V \cdot \hat{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Omega}_V, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_J \quad (2.20)$$

где  $\mathbf{\Omega}_V$  – спин, характеризующий абсолютную угловую скорость триэдра главных векторов правого тензора искажения,  $\lambda_k$  – собственные значения меры  $\mathbf{V}$ .

Из соотношения (2.19) определим тензор логарифмического спина  $\mathbf{\Omega}_{\log}$ , для чего запишем (2.19) и скорость изменения логарифмической меры деформации  $\dot{\hat{\mathbf{H}}}$  (2.20) в компонентах базиса  $\hat{\mathbf{p}}_i$ :

$$D_{ij} = \frac{\dot{\lambda}_k}{\lambda_k} \delta_{ik} \delta_{jk} + \Omega_{Vim} \hat{H}_{mj} - \hat{H}_{im} \Omega_{Vmj} + \hat{H}_{im} \Omega_{\log mj} - \Omega_{\log im} \hat{H}_{mj}, \quad (2.21)$$

где  $\Omega_{vij}$  – компоненты тензора скорости вращения триэдра базисных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$ , определенные в этом же базисе;  $D_{ij}$ ,  $\hat{H}_{ij}$  – компоненты тензора деформации скорости и правого тензора Генки в базисе  $\hat{\mathbf{p}}_i$ . Поскольку тензор  $\mathbf{\Omega}_{\log}$  является кососимметричным, в любом базисе он имеет шесть ненулевых компонент, из которых только три независимые ( $\Omega_{\log ij} = -\Omega_{\log ji}$ ,  $\Omega_{\log ii} = 0$ ). В выбранном базисе все недиагональные компоненты меры Генки равны нулю. Искомые недиагональные элементы ( $i \neq j$ ) логарифмического спина определяются из (2.21):

$$D_{ij} = \Omega_{vij} (\hat{H}_{jj} - \hat{H}_{ii}) + \Omega_{\log ii} (\hat{H}_{ii} - \hat{H}_{jj}), \quad i \neq j. \quad (2.22)$$

Таким образом, при неравенстве главных значений  $\hat{H}_{ii} \neq \hat{H}_{jj}$ , можно записать:

$$\Omega_{\log ij} = \Omega_{vij} + \frac{D_{ij}}{\hat{H}_{ii} - \hat{H}_{jj}}, \quad i \neq j. \quad (2.23)$$

Компоненты  $\Omega_v$  определяются через компоненты тензоров деформации скорости и вихря в базисе  $\hat{p}_i$  следующим соотношением [50]:

$$\Omega_{vij} = W_{ij} - \left( \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, \quad i \neq j, \quad (2.24)$$

где  $W_{ij}$  – компоненты тензора вихря в базисе  $\hat{p}_i$ .

Подставив (2.24) в (2.23), получим:

$$\Omega_{\log ij} = W_{ij} + \left( \frac{1}{\hat{H}_{ii} - \hat{H}_{jj}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, \quad i \neq j. \quad (2.25)$$

Компоненты тензора Генки связаны с главными значениями тензора  $\mathbf{V}$ :  $\hat{H}_{ii} = \ln \lambda_i$ , тогда соотношение (2.25) преобразуется к виду:

$$\Omega_{\log ij} = W_{ij} + \left( \frac{1}{\ln \lambda_i - \ln \lambda_j} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, \quad i \neq j. \quad (2.26)$$

Используя свойство логарифма, последнее соотношение можно записать в виде:

$$\Omega_{\log ij} = W_{ij} + \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, \quad i \neq j. \quad (2.27)$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения тензоров искажения.

Рассмотрим особые (сингулярные) случаи точного совпадения двух или трех главных значений меры  $\mathbf{V}$  (и  $\mathbf{U}$ ). Примем фиксированным одно из главных значений ( $\lambda_i$ ), а второе запишем как

$\lambda_j = \lambda_i + \varepsilon$ , после чего подставим это выражение в  $\left[ \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right]$  (см.

соотношения (2.27)) и найдем предел при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}} - \frac{\lambda_i^2 + (\lambda_i + \varepsilon)^2}{\lambda_i^2 - (\lambda_i + \varepsilon)^2} \right]. \quad (2.28)$$

В соотношении (2.28) имеем неопределенность вида  $(\infty - \infty)$ , преобразуем соотношение (2.28) к виду, для которого неопределенность сведется к виду  $0/0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}} - \frac{\lambda_i^2 + (\lambda_i + \varepsilon)^2}{\lambda_i^2 - (\lambda_i + \varepsilon)^2} \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\lambda_i^2 - (\lambda_i + \varepsilon)^2 - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (\lambda_i^2 + (\lambda_i + \varepsilon)^2)}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (\lambda_i^2 - (\lambda_i + \varepsilon)^2)} \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2 - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2)}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

В соотношении (2.29) для раскрытия неопределенности вида  $0/0$  воспользуемся правилом Лопиталья – возьмем производную числителя и знаменателя по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[ -2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2 - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2) \right]'}{\left[ \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2) \right]'} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2\lambda_i - 2\varepsilon - \left[ \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} \right]' (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2) - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [2\lambda_i + 2\varepsilon]}{\left[ \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} \right]' (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2) + \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [-2\lambda_i - 2\varepsilon]} = \quad (2.30) \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2\lambda_i - 2\varepsilon + \frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2) - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [2\lambda_i + 2\varepsilon]}{-\frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2) + \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [-2\lambda_i - 2\varepsilon]}.
\end{aligned}$$

В соотношении (2.30) получаем неопределенность 0/0. Воспользуемся вторично правилом Лопиталья, получим:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left[ -2\lambda_i - 2\varepsilon + \frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2) - \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [2\lambda_i + 2\varepsilon] \right]'}{\left[ -\frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2) + \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} [-2\lambda_i - 2\varepsilon] \right]'} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2 + \frac{[2\lambda_i + 2\varepsilon](\lambda_i + \varepsilon) - (2\lambda_i^2 + 2\lambda_i \varepsilon + \varepsilon^2)}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} - \left[ -\frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (2\lambda_i + 2\varepsilon) + \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} \cdot 2 \right]'}{-\frac{[-2\lambda_i - 2\varepsilon](\lambda_i + \varepsilon) - (-2\lambda_i \varepsilon - \varepsilon^2)}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} + \left[ -\frac{1}{\lambda_i + \varepsilon} (-2\lambda_i - 2\varepsilon) + \ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon} \cdot (-2) \right]}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Раскроем скобки в соотношении (2.31), приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2 + \frac{2\lambda_i^2 + 2\lambda_i\varepsilon + 2\lambda_i\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2\lambda_i^2 - 2\lambda_i\varepsilon - \varepsilon^2}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} + 2 - 2\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}}{\frac{2\lambda_i^2 + 2\lambda_i\varepsilon + 2\lambda_i\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2\lambda_i\varepsilon - \varepsilon^2}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} + 2 - 2\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}} = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{2\lambda_i\varepsilon + \varepsilon^2}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} - 2\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}}{\frac{2\lambda_i^2 + 2\lambda_i\varepsilon + \varepsilon^2}{(\lambda_i + \varepsilon)^2} + 2 - 2\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \varepsilon}} = \frac{0 - 0}{2 + 2 - 0} = \frac{0}{4} = 0.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Таким образом, показано, что при совпадении двух произвольных главных значений, компоненты тензора  $\mathbf{\Omega}_V$  можно принять совпадающими с аналогичными компонентами тензора вихря  $\mathbf{W}$ . Окончательно соотношение для определения компонент (в базисе главных векторов меры  $\mathbf{V}$ ) имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{\Omega}_{\log ij} = \mathbf{W}_{ij} + \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) \mathbf{D}_{ij}, & \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \\ \mathbf{\Omega}_{\log ij} = \mathbf{W}_{ij}, & \lambda_i = \lambda_j, i \neq j. \end{cases} \tag{2.33}$$

Соотношение (2.33) для логарифмического спина можно записать в виде:

$$\mathbf{\Omega}_{\log} = \mathbf{W} + \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}), \tag{2.34}$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$  – тензорзначная функция 2-го ранга, определяемая как:

$$\mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}) = \begin{cases} \sum_{i,j} \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{p}}_j) \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}^j, & \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, \\ 0, & \lambda_i = \lambda_j, i \neq j. \end{cases} \tag{2.35}$$

Запишем тензор  $\mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$  в компонентной форме в декартовом ортогональном базисе условно неподвижной лабораторной системы координат (связанной с человеком)  $\mathbf{k}_i$ :

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{H}, \mathbf{D}) &= (\mathbf{k}_i \cdot f(\mathbf{H}, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{k}_j) \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j = \\
&= \sum_{i,j,k,q} \left[ \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_q}{\lambda_k}} - \frac{\lambda_q^2 + \lambda_k^2}{\lambda_q^2 - \lambda_k^2} \right) (\hat{\mathbf{p}}_q \cdot \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{p}}_k) l_i^q l_j^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j \right] = \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}, \tag{2.36}
\end{aligned}$$

где

$$l_i^q = \hat{\mathbf{p}}^q \cdot \mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{p}}_q \cdot \mathbf{k}_i = l_{qi}, \tag{2.37}$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{i,j,k,q} \left[ \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_q}{\lambda_k}} - \frac{\lambda_q^2 + \lambda_k^2}{\lambda_q^2 - \lambda_k^2} \right) l_i^q l_j^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j \frac{\hat{\mathbf{p}}_q \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{p}}_q}{2} \right]. \tag{2.38}$$

Для использования при вычислениях запишем все компоненты тензора  $\mathbf{Q}$  в базисе ЛСК, для чего последний член в соотношении (2.38) переведем в базис ЛСК:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\mathbf{p}}_q \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{p}}_q}{2} &= (\mathbf{k}_m \cdot \frac{\hat{\mathbf{p}}_q \hat{\mathbf{p}}_k + \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{p}}_q}{2} \cdot \mathbf{k}_n) \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n = \\
&= \frac{\mathbf{k}_m \cdot \hat{\mathbf{p}}_q \hat{\mathbf{p}}_k \cdot \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_m \cdot \hat{\mathbf{p}}_k \hat{\mathbf{p}}_q \cdot \mathbf{k}_n}{2} \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n = \frac{l_{qm} l_{kn} + l_{km} l_{qn}}{2} \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n. \tag{2.39}
\end{aligned}$$

С учетом (2.39) соотношение (2.38) примет вид:

$$\mathbf{Q}_{ijmn} = \sum_{i,j,m,n,q,k} \left[ \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_q}{\lambda_k}} - \frac{\lambda_q^2 + \lambda_k^2}{\lambda_q^2 - \lambda_k^2} \right) l_i^q l_j^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j \frac{l_{qm} l_{kn} + l_{km} l_{qn}}{2} \mathbf{k}^m \mathbf{k}^n \right], \tag{2.40}$$

где  $l_i^q$ ,  $l_j^k$ ,  $l_{qm}$ ,  $l_{kn}$ ,  $l_{km}$ ,  $l_{qn}$  в соотношении (2.40) определяются как соответствующие компоненты матрицы косинусов углов между базисными векторами  $\mathbf{k}_i$  и  $\hat{\mathbf{p}}_j$  (соотношение (2.17)).

Отношение объемов двухфазной среды легких в отсчетной и текущей конфигурациях можно выразить через первый инвариант тензора логарифмических деформаций (меры деформации Генки):

$$\ln \left( \frac{d\hat{V}}{d\overset{\circ}{V}} \right) = I_1(\overset{\circ}{\mathbf{H}}) = I_1(\hat{\mathbf{H}}). \quad (2.41)$$

Получим аналог соотношения (2.41) в скоростной форме. Продифференцируем левую часть соотношения (2.41), получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \left( \frac{d\hat{V}}{d\overset{\circ}{V}} \right) \right) = \frac{d\overset{\circ}{V}}{d\hat{V}} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\hat{V}}{d\overset{\circ}{V}} \right) = \frac{d\overset{\circ}{V}}{d\hat{V}} \frac{d\hat{V}}{d\overset{\circ}{V}} = \frac{d\hat{V}}{d\hat{V}}. \quad (2.42)$$

Продифференцируем правую часть соотношения (2.41), получим:

$$\frac{d}{dt} (I_1(\hat{\mathbf{H}})) = \frac{d}{dt} (\hat{\mathbf{H}} : \mathbf{I}) = \dot{\hat{\mathbf{H}}} : \mathbf{I} = I_1(\dot{\hat{\mathbf{H}}}). \quad (2.43)$$

Поскольку соотношение (2.41) справедливо для любого момента времени, из него следует аналогичное соотношение в скоростной форме:

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{V}} = I_1(\dot{\hat{\mathbf{H}}}). \quad (2.44)$$

Покажем, что первый инвариант логарифмической (вообще говоря – любой коротационной) производной тензора Генки равен первому инварианту его материальной производной. Первый инвариант суммы тензоров равен сумме первых инвариантов всех этих тензоров; для двух произвольных тензоров 2-го ранга  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  справедливо соотношение:  $I_1(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{I} = \mathbf{A} : \mathbf{B}$ . Применяя данные утверждения к соотношению для логарифмической производной меры деформации Генки ( $\hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}} = \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log} = \mathbf{D}$  (соотношению (2.19)), учитывая, что свертка симметричного и антисимметричных тензоров всегда равна нулю, получаем:

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{V}} = I_1(\dot{\hat{\mathbf{H}}}) = I_1(\hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}}) = I_1(\mathbf{D}). \quad (2.45)$$

***Определяющие соотношения для двухфазной упруго-деформируемой среды легких***

Обзор работ, посвященных подходам к формулировке определяющих соотношений можно найти в [72]. Запишем определяющее соотношение для среды в целом, состоящей из твердого каркаса и газа. Газ в легких (альвеолах и каналах) и легочная ткань взаимодействуют друг с другом; изменение объема легких вызывает изменение давления газа, находящегося в легких, которое, в свою очередь, влияет на изменение напряжений в легочной ткани. Для построения определяющего соотношения двухфазной среды используем следующие физически обоснованные предположения.

Отклик материала (взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа) можно аддитивно разложить на реакцию по отношению к изменению формы (девиаторная часть) и изменению объема (шаровая часть). Основной вклад в изменение шаровой части тензора напряжений вносит давление газа, сопротивлением газа изменению формы можно пренебречь, т.е. сопротивление изменению формы оказывает только твердая фаза. Двухфазная среда способна полностью восстанавливать свою форму при возвращении воздействий к начальным значениям, т.е. ведет себя подобно упругому телу.

Таким образом, тензор напряжений для изотропного 2-хфазного континуума определяется суммой шаровой составляющей для двухфазной среды и девиатора напряжений в твердой фазе, умноженного на долю твердой фазы. Для записи упругого закона в скоростной форме (гипоупругого закона) будет использована коротационная производная взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа с логарифмическим спином:

$$\Sigma^{\Omega_{\log}} = \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + \mathbf{S}^{\Omega_{\log}} \hat{\gamma}_s, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{II}, \quad (2.46)$$

где  $\Sigma$  – взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа двухфазной среды, состоящей из воздуха и твердой фазы, связанный с тензором напряжений Коши ( $\sigma$ ) через отношение плотностей двухфазной среды в отсчетной ( $\overset{\circ}{\rho}$ ) и текущей ( $\hat{\rho}$ )

конфигурациях ( $\Sigma = \begin{pmatrix} \circ \\ \rho \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} \sigma$  [97, 31]); верхний индекс  $\Omega_{\log}$  – обозначение логарифмической коротационной производной;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\mathbf{S}$  – девиатор тензора напряжений Кирхгоффа в твердой фазе;  $\Sigma_{cp}$  – среднее напряжение Кирхгоффа двухфазной среды;  $\dot{\Sigma}_{cp}$  – скорость изменения среднего напряжения Кирхгоффа двухфазной среды.

Гипоупругий закон в скоростной форме имеет вид:

$$\Sigma^{\Omega_{\log}} = \mathbf{P} : \hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}} = \mathbf{P} : \mathbf{D}, \quad \Sigma^{\Omega_{\log}} = \dot{\Sigma} - \Omega_{\log} \cdot \Sigma + \Sigma \cdot \Omega_{\log}, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{II}, \quad (2.47)$$

где  $\mathbf{P}$  – симметричный тензор четвертого ранга упругих свойств.

Гипоупругий закон в скоростной форме вида (2.47) эквивалентен гиперупругому закону в конечной форме [235, 71]. Следует отметить, что гипоупругий закон (2.47) для изотропного материала удовлетворяет требованиям независимости от выбора системы отсчета [64], отсутствия диссипации энергии и замкнутости траектории напряжений при циклическом упругом деформировании [235]. В соответствие с (2.47) скорость изменения взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа равна:

$$\dot{\Sigma} = \Sigma^{\Omega_{\log}} + \Omega_{\log} \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega_{\log} = \mathbf{P} : \mathbf{D} + \Omega_{\log} \cdot \Sigma - \Sigma \cdot \Omega_{\log}, \quad (2.48)$$

где  $\dot{\Sigma}$  – материальная производная по времени взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа двухфазной среды.

Девиаторная часть тензора напряжений определяется только напряжениями в твердой фазе; в силу малости изменения плотности твердой фазы девиатор тензора напряжений Кирхгоффа равен девиатору тензора напряжений Коши. Скорость изменения девиатора напряжений твердой фазы в предположении изотропии упругих свойств легких определяется согласно соотношению:

$$\mathbf{S}^{\Omega_{\log}} = 2\mu \mathbf{d}, \quad (2.49)$$

где  $\mathbf{d}$  – девиаторная составляющая тензора деформации скорости  $\mathbf{D}$ ,  $\mu$  – параметр Ламе (модуль сдвига твердой фазы). Модуль сдвига связан с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  соотношением  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Подставим (2.49) в (2.46), полученное соотношение подставим в соотношение (2.48), получим соотношение для скорости изменения взвешенного напряжения Кирхгоффа двухфазной среды в виде:

$$\dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d} \hat{\gamma}_s + \mathbf{\Omega}_{log} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_{log}. \quad (2.50)$$

### *Фильтрация воздуха в пористой среде легких человека*

Запишем соотношения, описывающие перенос газовой фазы в двухфазной среде легких в процессе дыхания. Определяющие соотношения для описания поведения газа, как и для твердого тела, сформулируем по отдельности для шаровой и девиаторной составляющих. Для шаровой части будем использовать уравнения состояния идеального газа, для девиаторной – вязкого газа. При рассмотрении двухфазной среды газ, находящийся в объеме альвеол, практически не влияет на вклад в сдвиговые напряжения (т.е. не оказывает сопротивления изменению формы), в силу чего в этой части его вязкостью можно пренебречь. Однако движение газа в тонких каналах весьма существенно зависит от его вязкости, которой для данного движения уже нельзя пренебрегать. Подобный подход довольно часто используется при моделировании процессов течения воздуха в различных технических системах [39].

Нерегулярная структура мелких дыхательных путей в легких, оканчивающихся альвеолами, обуславливает существенные сложности исследования течения газа; изучить движение газа в них прямым применением обычных методов гидродинамики, т.е. решения уравнений движения вязкой жидкости для области, представляющей совокупность всех альвеол и соединяющих их каналов, при существующем уровне развития вычислительной

техники представляется нереальным. Выделение представительного объема двухфазной пористой среды легких позволяет применить для описания движения газа теорию фильтрации [105, 27, 106, 4, 107]. Для описания относительного движения газовой фазы (относительно деформируемой твердой фазы) в пористой среде легких используется закон фильтрации Дарси [105, 27, 4].

Оценим применимость закона Дарси для описания рассматриваемого процесса. Объем легких в зависимости от индивида может изменяться от 3,5 до 7 л ( $0,0035-0,007 \text{ м}^3$ ), площадь альвеолярно-капиллярной мембраны, через которую осуществляется газообмен может варьироваться от 80 до  $130 \text{ м}^2$ . Характерный размер пор ( $d$ ), который можно определить как отношение объема пор к площади из поверхности [28], находится в интервале от  $2,69 \cdot 10^{-5}$  до  $8,75 \cdot 10^{-5}$  м. При полученном размере пор, плотности воздуха  $\rho_f = 1.1455 \text{ кг/м}^3$  (при атмосферном давлении и температуре, близкой к температуре человеческого тела,  $t = 35^\circ\text{C}$ ), вязкости  $\mu_f = 18,6 \cdot 10^{-6} \text{ Па}\cdot\text{с}$ , скорости газовой фазы (по предварительным численным расчетам) от 0 до  $15,5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}$ , числа Рейнольдса, характеризующие фильтрационное течение ( $Re = \rho_f \mathbf{u}_f d / \mu_f$ ), находятся в интервале от 0 до 0,08, что значительно меньше единицы [28]. В связи с этим применение закона Дарси для описания процесса фильтрации воздуха в пористой среде легких обосновано.

Фильтрация воздуха в пористой среде легких описывается уравнениями сохранения массы и соотношением для описания относительного движения газовой фазы, полученном из закона Дарси:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\gamma}_f \hat{\rho}_f) + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho}_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{II}, t \in (0; T]; \quad (2.51)$$

$$\mathbf{v}_f = -\frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f), \quad \mathbf{r} \in \Omega_{II}, t \in (0; T], \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{v}_f$  – скорость фильтрации газовой фазы в пористой среде ( $\mathbf{v}_f = \hat{\gamma}_f \tilde{\mathbf{v}}_f$ );  $\tilde{\mathbf{v}}_f$  – относительная скорость движения газовой фазы в пористой среде;  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})$  – тензор

проницаемости (второго ранга) пористой среды,  $\text{м}^2$ ;  $\mu_f$  – динамическая вязкость,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ ;  $\hat{\mathbf{H}}$  – тензор логарифмических деформаций твердой фазы (мера деформации Генки);  $p_f$  – давление газовой фазы,  $\text{Па}$ . В первом приближении примем предположении об изотропии тензора проницаемости:  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}}) = k(I_1(\hat{\mathbf{H}}))\mathbf{I}$ , где  $I_1(\hat{\mathbf{H}})$  – первый инвариант тензора Генки,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор второго ранга,  $k(I_1(\hat{\mathbf{H}}))$  – коэффициент проницаемости, который характеризует способность вещества пропускать жидкости и газы. Численно коэффициент проницаемости определяется как объемный расход газа (жидкости) ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) через единицу площади при единичном перепаде давления на толщине в 1 м (1  $\text{Па}/\text{м}$ ) и единичной вязкости.

Давление газовой фазы описывается уравнением состояния идеального газа. Уравнение Клапейрона – Менделеева в интенсивных величинах для введенного представительного объема имеет вид [25]:

$$p_f = \frac{\hat{p}_f}{M_f} R \theta_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_D, t \in (0; T], \quad (2.53)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $\theta_f$  – температура газовой фазы,  $M_f$  – молярная масса газа. Полагается, что фильтрация воздуха в пористой среде легких происходит при постоянной температуре. Продифференцируем соотношение (2.53), получим соотношения для скорости изменения давления газовой фазы:

$$\dot{p}_f = \frac{\dot{\hat{p}}_f}{M_f} R \theta_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_D, t \in (0; T]. \quad (2.54)$$

***Соотношение для связи скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких со скоростью изменения объема двухфазной среды***

Отдельной задачей при формулировке конкретных ОС (2.50) для исследуемого двухфазного континуума выступает установление связи скорости

изменения среднего напряжения и изменения объема 2-хфазной среды. При этом воздушная фаза содержится преимущественной частью в альвеолах, связанных между собой и с ВП системой очень узких в поперечном сечении каналов, что затрудняет перетекание воздуха из внутренних областей в ВП и обратно при изменениях давления воздушной фазы. Для описания рассматриваемого тела с весьма сложной геометрией предложено использовать модель пористой среды с пористостью (долей газовой фазы), определяемой отношением суммарного объема альвеол и каналов к величине рассматриваемого представительного объема. Очевидно, что твердый несплошной деформируемый каркас при отсутствии в порах какой-либо среды ведет себя совершенно иначе, чем пористая среда, содержащая в себе газ с затрудненным истечением его из рассматриваемого объема. В связи с описанной трудностью выполнена постановка и решение вспомогательной задачи. Предполагая, что на малом шаге по времени (напомним, что решение задачи предполагается реализовать пошаговой процедурой) изменением количества газа в рассматриваемом объеме можно пренебречь, в качестве расчетной схемы для определения указанной связи гидростатических характеристик используется представительный объем (ПО) в форме замкнутой сферической оболочки, заполненной воздухом. Масса оболочки равна массе твердотельного каркаса, объем внутренности сферы в отсчетной конфигурации равен суммарному объему альвеол и каналов в естественной конфигурации ПО. Из решения вспомогательной задачи устанавливается соотношение между скоростью изменения среднего напряжения  $\dot{\Sigma}_{cp}$  и скоростью изменения объема  $I_1(\mathbf{D})$  ( $I_1(\mathbf{D})$  – первый инвариант тензора  $\mathbf{D}$ ) 2-хфазной среды легких, учитывающее взаимодействие между легочной тканью и воздухом, содержащимся в легких. Решение вспомогательной задачи в силу ее нелинейности не позволяет сформулировать искомую связь  $\dot{\Sigma}_{cp} \sim I_1(\mathbf{D})$  в виде простого алгебраического уравнения. В связи с этим на первом этапе решения поставленной задачи устанавливалось аналитическое решение геометрически

линейной задачи, после чего с помощью численного решения соответствующей геометрически нелинейной задачи проведена оценка возможности использования аналитического решения задачи в геометрически линейной постановке для умеренно больших изменений объема, характерных для процесса дыхания.

Из решения вспомогательной задачи о всестороннем сжатии (и растяжении) ПО двухфазной среды (Приложение А) был получен итоговый вид соотношения для определения скорости изменения среднего напряжения Кирхгоффа двухфазной среды:

$$\dot{\Sigma}_{cp} = I_1(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}\right) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\ \left. - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}\right) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \left(\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}}\right)^2 [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\}, \quad (2.55)$$

где  $A = (2\mu + 3\alpha)$ ,  $B = 4\mu$ ,  $C = (6\mu + 3\alpha)$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  – параметры Ламе твердой фазы

$$\left( \alpha = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right).$$

Вывод соотношения (2.55) представлен в приложении А.

### ***Начальные и граничные условия***

Постановка подзадачи деформирования двухфазной среды легких осуществляется в скоростной форме, в связи с этим и ГУ для подзадачи деформирования также ставятся в скоростях; при этом для описания движения газа нельзя использовать лагранжевы переменные, ГУ для фильтрации воздуха в пористой среде легких и для подмодели движения воздуха в ВП (приведенной в разделе 2.3) осуществляются в классической форме, применяемой для задач газовой динамики.

В силу низких скоростей движения воздуха в воздухоносных путях и его малой вязкости (т.е. близости его свойств к идеальному газу; для идеального газа давление во всех точках сообщающихся каналов равно) на входах в легкие можно принять давление в процессе всего дыхательного цикла равным атмосферному.

На границах легких (стенках легких ( $\Gamma_L$ ) и границах выходов из бронхов/входах в легкие ( $\Gamma_{ВП/Л}$ )) в качестве граничных условий для задачи упругости для двухфазной среды используются граничные условия кинематического типа (закон изменения формы легких (детально описан ниже в разделе 4.3)):

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_L}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_L, \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП/Л}, t \in [0; T]. \quad (2.56)$$

Граничные условия для газовой фазы для задачи фильтрации (в классической постановке) имеют вид:

$$\sigma_n \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p_f \Big|_{\Gamma_{ВП/Л}} = p^{Atm}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП/Л}, t \in [0; T], \quad (2.57)$$

касательные компоненты вектора напряжений полагаются нулевыми. На стенке легких задаются условия непроницаемости для газовой фазы:

$$\mathbf{v}_{f_n} \Big|_{\Gamma_L} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_L, t \in [0; T], \quad (2.58)$$

где  $p^{Atm}$  – давление на входе в легкие (на границе между областями крупных ВП и двухфазной пористой средой легких ( $\Gamma_{ВП/Л}$ )).

Начальные условия:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = p^{Atm}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП/Л}, t = 0, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_L, t = 0, \quad (2.60)$$

$$p_f \Big|_{\Gamma_{ВП/Л}} = p^{Atm}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_L, t = 0. \quad (2.61)$$

Для момента времени «конец выдоха – начало вдоха», принятым за начальный, полагаем, что давление газа в легких равно атмосферному, напряжения в твердой фазе – нулевые, перемещения также отсчитываются от

этого момента (т.е. в начальный момент времени они также являются нулевыми по всей замкнутой области):

***Система уравнений краевой задачи фильтрации воздуха в деформируемых легких человека***

Общая постановка краевой задачи описания легких как пористой среды содержит следующие соотношения:

уравнение равновесия в скоростях (в предположении отсутствия внутренних массовых сил):

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{L}}; \quad (2.62)$$

соотношение для скорости изменения взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа (в предположении изотропии упругих свойств твердой фазы и пренебрежения сдвиговыми напряжениями в газовой фазе):

$$\dot{\Sigma} = \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{d} \hat{\gamma}_s + \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log}, \quad (2.63)$$

где  $\mathbf{d}$  – девиатор тензора деформации скорости:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{D}) \mathbf{I}; \quad (2.64)$$

соотношение для тензоров деформации скорости и вихря:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T), \quad (2.65)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \hat{\nabla} \mathbf{v}); \quad (2.66)$$

соотношения, связывающие взвешенный тензор напряжения Кирхгоффа и тензор напряжения Коши двухфазной среды:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \circ \\ \rho \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \circ \\ \rho \end{pmatrix} \Sigma; \quad (2.67)$$

соотношение для скорости изменения среднего напряжения в терминах тензора напряжений Кирхгоффа двухфазной среды (Приложение А):

$$\dot{\Sigma}_{cp} = I_1(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1-\hat{\gamma}_f)(1-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\ \left. - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B][AB(1-\hat{\gamma}_f)(1-\sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \left( \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} \right)^2 [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\}; \quad (2.68)$$

соотношение для логарифмической коротационной производной логарифмической меры деформации:

$$\hat{\mathbf{H}}^{\Omega_{\log}} = \dot{\hat{\mathbf{H}}} - \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log} = \mathbf{D}; \quad (2.69)$$

соотношение для компонент тензора логарифмического спина в базисе главных векторов (осей) меры Генки ( $\mathbf{H}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\log ij} = W_{ij} + \left( \frac{1}{\ln \frac{\lambda_i}{\lambda_j}} - \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \right) D_{ij}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j, \\ \Omega_{\log ij} = W_{ij}, \quad \lambda_i = \lambda_j, \quad i \neq j; \end{array} \right. \quad (2.70)$$

соотношение для определения тензора логарифмических деформаций через тензор Альманси:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(1-2A_i) \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{u} + \hat{\nabla} \mathbf{u}^T - \hat{\nabla} \mathbf{u} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{u}^T) = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i, \quad (2.72)$$

где поле перемещений определяется интегрированием поля скоростей перемещений;

соотношение для скорости изменения тензора деформации Альманси:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T), \quad (2.73)$$

соотношение для определения собственных значений правого тензора искажений через собственные значения тензора Альманси:

$$\lambda_i = (1 - 2A_i)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.74)$$

закон сохранения массы газовой фазы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\gamma}_f \hat{\rho}_f) + \hat{\nabla} \cdot (\hat{\rho}_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{L}}, t \in (0; T]; \quad (2.75)$$

соотношение для описания относительного движения газовой фазы, полученное из закона Дарси:

$$\mathbf{v}_f = -\frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f), \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{L}}, t \in (0; T]; \quad (2.76)$$

уравнение состояния для давления:

$$\dot{p}_f = \frac{\dot{p}_f}{M_f} R \theta_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{\mathcal{L}}, t \in (0; T], \quad (2.77)$$

начальные условия:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} = p^{Atm}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\text{ВП/Л}}, t = 0, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{\mathcal{L}}, t = 0, \quad (2.79)$$

$$p_f \Big|_{\Gamma_{\text{ВП/Л}}} = p^{Atm}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{\mathcal{L}}, t = 0. \quad (2.80)$$

Граничные условия имеют вид:

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_n}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathcal{L}}, \mathbf{r} \in \Gamma_{\text{ВП/Л}}, t \in [0; T), \quad (2.81)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p_f \Big|_{\Gamma_{\text{ВП/Л}}} = p^{Atm}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\text{ВП/Л}}, t \in [0; T), \quad (2.82)$$

$$\mathbf{v}_{f_n} \Big|_{\Gamma_{\mathcal{L}}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{\mathcal{L}}, t \in [0; T). \quad (2.83)$$

В соотношении (2.81)  $\hat{\mathbf{v}}_{\Gamma_n}$  – заданное поле скоростей перемещений на границах легких.

### 2.3. Постановка задачи течения воздуха в воздухоносных путях человека

Постановка задачи течения воздуха в воздухоносных путях человека осуществляется в классической (не в скоростной) форме. Вдыхаемый воздух полагается многофазной смесью несущего гомогенного газа и несомых твердых пылевых частиц различного дисперсного состава (различных размеров и плотностей). Течение несущей фазы описывается в эйлеровых переменных. Твердые пылевые частицы являются дисперсной несомой фазой, описание которой выполняется с использованием материального подхода – пылевым частицам различных размеров присваиваются индивидуальные метки (чаще всего – номера); для описания движения каждой частицы записывается отдельное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ), описывающее индивидуальную траекторию движения в поле скорости несущей фазы. В работе предполагается, что частицы имеют сферическую форму. Вращательными движениями частиц пренебрегается, уравнения движения записываются для центра масс. Концентрация взвешенных частиц в воздухе мала, взаимодействием частиц между собой можно пренебречь. В сечении входа в ВП (ноздри) скорость частиц несомой фазы полагается совпадающей со скоростью несущей фазы; давление несущей воздушной фазы равно атмосферному ( $p^{Atm} = 101325 \text{ Па}$ ). В начальный момент времени давление в сечениях входов и во всем объеме ВП однородно и равно атмосферному, скорость течения воздуха равна нулю. Касательные составляющие тензора напряжений на входе в ноздри и выходах из ВП равны нулю. В сечении выходов из ВП – входов в легкие ( $\Gamma_{ВП/Л}$ ) задаются законы изменения массовых расходов воздуха в течение дыхательного цикла, определяемые из подмодели для описания движения газа в легких.

Стенки крупных ВП, содержащие жесткую хрящевую ткань, затрудняющую их деформацию, полагаются неподвижными. Предполагается, что поверхность ВП покрыта высоковязким секретом; контактируя со стенкой несомые твердые частицы теряют свою скорость и прекращают движение. Слизистая оболочка и

подслизистая основа ВП покрыты густым сплетением венозных сосудов, наличие которых способствует согреванию воздуха [56]. В работе принимается условие быстрого нагревания поступающего воздуха до температуры тела уже в носовой полости.

В зависимости от режима дыхания (объемного расхода воздуха) и рассматриваемого участка ВП может наблюдаться различный характер течения воздуха – от ламинарного до переходного и турбулентного [233, 172, 166, 118, 112, 188, 70, 2023]. Для описания переходного течения во всей области ВП при разной интенсивности дыхания будем использовать низкорейнольдсовую модель турбулентности (в англоязычной литературе иногда обозначаемую как LRN)  $k$ - $\omega$  модель [232], которая показала свою адекватность при моделировании внутренних потоков по искривленным каналам малых объемов и позволяет рассчитывать пристеночную турбулентность. Кроме того,  $k$ - $\omega$  модель обеспечивает точное решение для ламинарного потока, когда турбулентная вязкость приближается к нулю [232]. В [189] показано, что  $k$ - $\omega$  модель хорошо себя показала при вычисления смешанной турбулентности внутри ВП человека. Также эта модель точно предсказывает профили осаждения частиц для переходных и турбулентных потоков в ВП [233].

Движение несущей фазы (воздуха) (обозначена нижним индексом  $f$ ) описывается уравнениями сохранения массы и импульса:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{ВП}, t \in (0; T], \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \mathbf{v}_f) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f \mathbf{v}_f) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \rho_f \mathbf{g} - \sum_j \mathbf{P}_{f(j)}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_{ВП}, t \in (0; T], \quad (2.85)$$

где  $\rho_f$  – плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;  $\mathbf{v}_f$  – вектор скорости воздуха, м/с;  $\boldsymbol{\sigma}_f$  – тензор напряжений Коши газовой фазы, Па;  $\mathbf{g}$  – вектор массовых сил, м/с<sup>2</sup>;  $\mathbf{P}_{f(j)}$  – член, характеризующий интенсивность обмена импульсом между воздухом (несущей фазой) и  $j$ -ой фазами, Н/м<sup>3</sup>;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор,  $t$  – время.

Тензор напряжений Коши записывается в виде суммы шаровой и девиаторной части ( $\hat{\boldsymbol{\tau}}_f$ ):

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p_f \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.86)$$

где  $p_f$  – давление воздуха, Па.

Девиаторная часть тензора напряжений Коши определяется по соотношению [232]:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_f = \mu_f \left[ \nabla \mathbf{v}_f + (\nabla \mathbf{v}_f)^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right] + \boldsymbol{\tau}_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.87)$$

где  $\mu_f$  – динамическая вязкость несущей фазы, Па·с;  $\boldsymbol{\tau}_f$  – тензор напряжений Рейнольдса (Па), определяемый соотношением:

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mu_{Tf} \left[ \nabla \mathbf{v}_f + (\nabla \mathbf{v}_f)^T - \frac{2}{3} \mathbf{I} \nabla \cdot \mathbf{v}_f \right] - \frac{2}{3} \rho_f k \mathbf{I}, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.88)$$

где  $\mu_{Tf}$  – турбулентная вязкость, Па·с ( $\mu_{Tf} = \rho_f \frac{k}{\omega}$ );  $k$  – кинетическая энергия турбулентности на единицу массы, Дж/кг;  $\omega$  – удельная скорость диссипации энергии турбулентности на единицу энергии, с<sup>-1</sup>, где  $k$  и  $\omega$  определяются соотношениями  $k$ - $\omega$  модели:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f k) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f k) = \nabla \cdot \left( \left( \mu_f + \frac{\mu_{Tf}}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \beta' \rho_f k \omega; \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f \omega) + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f \omega) = \nabla \cdot \left( \left( \mu_f + \frac{\mu_{Tf}}{\sigma_\omega} \right) \nabla \omega \right) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho_f \omega^2, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.90)$$

где  $P_k$  – член, характеризующий переход к турбулентному режиму за счет вязких сил;  $\alpha, \beta, \beta', \sigma_k, \sigma_\omega$  – параметры модели турбулентности ( $\sigma_k=1; \sigma_\omega=1$ ).

Закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f h_{tot}) - \frac{\partial p_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}_f h_{tot}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \theta_f) + \nabla \cdot (\mathbf{v}_f \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_f), \quad \mathbf{r} \in \Omega_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.91)$$

где  $\theta_f$  – температура воздуха, градусы Цельсия °С,  $h_{tot}$  – общая удельная энтальпия, Дж;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К).

Уравнение состояния имеет вид:

$$p_f = \rho_f R \theta_f, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.92)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Движение частиц дисперсной несомой фазы (индекс « $j$ » обозначает номер частицы, при этом все частицы одного размера и плотности относятся к одной фазе) описывается с помощью 2-го закона Ньютона, учитывающим силу тяжести и силу, обусловленную воздействием обтекающего воздуха:

$$m_{(j)} \frac{d\mathbf{v}_{(j)}}{dt} = m_{(j)} \mathbf{g} + \frac{1}{8} \rho_{(j)} \pi d_{(j)}^2 C_D |\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{(j)}| (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{(j)}), \quad \mathbf{r}_{(j)} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T], \quad (2.93)$$

где  $\mathbf{v}_{(j)}$  – скорость перемещения центра масс  $j$ -ой частицы, м/с ( $\mathbf{v}_{(j)} = \frac{d\mathbf{r}_{(j)}}{dt}$ );  $\mathbf{r}_{(j)}$  – радиус-вектор центра масс  $j$ -ой частицы;  $m_{(j)}$  – масса  $j$ -ой частицы, кг

( $m_{(j)} = \frac{\pi}{6} d_{(j)}^3 \rho_{(j)}$ );  $\rho_{(j)}$  – плотность  $j$ -ой частицы, кг/м<sup>3</sup>;  $d_{(j)}$  – диаметр  $j$ -ой частицы;

$C_D$  – коэффициент сопротивления потоку воздуху, определяемый для сферических частиц по соотношению [201]:

$$C_D = \max \left( \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}), 0.44 \right) \quad \text{Re} = \frac{|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{(j)}| d_{(j)}}{v_f}, \quad (2.94)$$

где  $\text{Re}$  – критерий Рейнольдса.

Начальные условия для скорости многофазной смеси, давления и температуры несущей фазы имеют вид:

$$\mathbf{v}_f(0, \mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t = 0, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{v}_{(j)} \Big|_{\Gamma_{BII}^{ATM}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_{(j)} \in \Gamma_{BII}^{ATM}, t = 0, \quad (2.96)$$

$$p_f(0, \mathbf{r}) = p^{Atm}, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t = 0, \quad (2.97)$$

$$\theta_f(0, \mathbf{r}) = 36,6, \quad \mathbf{r} \in \bar{\Omega}_{BII}, t \in (0; T]. \quad (2.98)$$

Граничные условия включают соотношения на входе ( $\Gamma_{ВП}^{ATM}$ ), выходах ( $\Gamma_{ВП/Л}$ ) и стенках ВП ( $\Gamma_{ВП}$ ). На входе в ноздри ( $\Gamma_{ВП}^{ATM}$ ) задаются статические граничные условия:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n} = p^{Atm}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП}^{ATM}, \quad t \in (0; T]. \quad (2.99)$$

В работе используется предположение об однородности поля скорости на выходах из бронхов/входах в легкие ( $\Gamma_{ВП/Л}$ ), скорости потока ( $\mathbf{v}_f|_{\Gamma_{ВП/Л}}$ ) направлены по касательной к осям каналов в окрестности входов в ВП (по нормали к сечениям, ортогональным осям каналов), при этом их величины определяются по расходам. Законы изменения массовых расходов воздуха в течение дыхательного цикла определяются из подмодели легких (для каждого выхода используется индивидуальный закон):

$$\mathbf{n} \mathbf{v}_f|_{\Gamma_{ВП/Л}} = \frac{\dot{m}_f}{\rho_f S} \mathbf{n}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП/Л}, \quad t \in (0; T], \quad (2.100)$$

где  $\dot{m}_f$  – массовый расход воздуха на выходе из системы ВП, кг/с;  $\dot{m}_f|_{\Gamma_{ВП/Л}}$  – массовый расход газовой фазы на границах между ВП и легкими, полученный из подмодели движения воздуха в пористой среде легких ( $\dot{m}_f|_{\Gamma_{ВП/Л}} = \int_{\Gamma_{ВП/Л}} \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{n} d\Gamma_{ВП/Л}$ ,  $\dot{m}_f = \dot{m}_f|_{\Gamma_{ВП/Л}}$ ).

Поступление частиц различных фракций задается в сечении входа по равномерному закону распределения (со статистической точки зрения) при заданных средних расходах. Скорость частиц на входе в ноздри полагается равной скорости несущей газовой фазы:

$$\mathbf{v}_{(j)}|_{\Gamma_{ВП}^{ATM}} = \mathbf{v}_f, \quad \mathbf{r}_{(j)} \in \Gamma_{ВП}^{ATM}, \quad t \in (0; T], \quad (2.101)$$

На стенках ВП ( $\Gamma_{ВП}$ ) задается условие прилипания:

$$\mathbf{v}_f|_{\Gamma_{ВП}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{ВП}, \quad t \in (0; T], \quad (2.102)$$

Условие оседания частиц (несомой фазы) на стенке ВП ( $\Gamma_{ВП}$ ) имеет вид:

$$\left(\mathbf{r}_{(j)} \in \Gamma_{ВП}\right) \cap (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_j < 0), \quad t \in (0; T]. \quad (2.103)$$

Для частицы, для которой выполнено условие (18), фиксируется координата ее соприкосновения со стенкой ВП, при этом она исключается из числа движущихся.

### **3 Разрешающие соотношения для исследования течения воздуха в деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека**

Воздух в процессе дыхания участвует в двух движениях: «переносном» вместе с деформируемой пористой средой и «относительном» за счет просачивания. Для моделирования процесса движения воздуха в легких человека рассматривается совместная задача деформирования двухфазной насыщенной пористой среды и фильтрации воздушной смеси через деформируемую пористую среду. Получены разрешающие соотношения для задачи деформирования (разделы 3.1-3.2 данной работы) и задачи фильтрации (описания относительного движения воздуха через двухфазную пористую среду) (раздел 3.3).

#### **3.1 Обобщенное решение краевой задачи исследования деформирования двухфазной пористой среды, аппроксимирующей легкие человека**

Получить аналитическое решение сформулированной нелинейной задачи течения воздуха в деформируемой среде легких (описываемой соотношениями (2.62)-(2.83)) в настоящее время представляется невозможным, для решения предлагается использовать численные методы с использованием пошаговой (по времени) процедуры. Для численного решения рассматриваемых краевых задач целесообразно осуществить переход к их обобщенной (слабой) формулировке. Данный переход позволяет понизить порядок дифференциальных операторов исходной (классической) постановки, ослабить требования к гладкости искомых переменных (перейти от пространства непрерывно дифференцируемых функций к пространству кусочно-дифференцируемых функций). Для получения обобщенного решения в механике сплошной среды широкое распространение получили вариационные принципы [200, 31, 5, 6]. Обзор вариационных формулировок геометрически нелинейных задач содержится в [47]. Применение вариационных принципов для решения геометрически нелинейных

упругопластических задач рассмотрено в [181]. Другим широко распространенным подходом к формулировке обобщенных решений краевых задач является метод Галеркина [20, 41, 35, 63], не требующий наличия вариационного принципа для рассматриваемой проблемы, который используется в данной работе.

При формулировке обобщенных решений кинематические соотношения, кинематические ГУ, определяющие соотношения выполняются точно, уравнение равновесия и статические ГУ – в обобщенном смысле. Из решения задачи необходимо определить вектор-функцию  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ , с использованием которой в дальнейшем определяются параметры напряженно-деформируемого состояния двухфазной среды в исследуемой области в каждый момент времени. При решении задачи в классическом смысле искомая вектор-функция определяется в классе непрерывных функций вместе с непрерывными производными первого порядка по  $t$  и до второго порядка включительно – по пространственным переменным  $\mathbf{v} \in C^{1,2}$ , т.е.  $\mathbf{v} \in C^{1,2}([0, \infty), \bar{\Omega}^t)$ . Существующий в настоящее время математический аппарат решения краевых задач не позволяет получить их классическое решение. Осуществим переход к классу обобщенных функций, рассмотрим обобщенное (слабое) решение задачи для срезов по времени. Будем рассматривать некоторый произвольный фиксированный момент времени  $t$ , в дальнейшем индекс  $t$  опустим. По сути, осуществляется переход от пространственно-временных зависимостей чисто к пространственным в фиксированные моменты времени, при этом пространственная область полагается на каждом шаге известной и неизменной.

Запишем общую форму обобщенного решения для задач, в которых есть ГУ разного типа. Обозначим  $\Gamma_{ст}$  участок границы, на которой выполняются статические ГУ. Данный тип граничных условий может быть использован при моделировании взаимодействия стенок легких с окружающими органами (грудной клеткой, диафрагмой). Статические ГУ в скоростной форме имеют вид:

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \dot{\hat{\mathbf{T}}}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_{cm}, \quad t \in [0; T]. \quad (3.1)$$

Умножим скалярно соотношение (2.62) и (3.1) на вектор-функцию  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} \in H_1$  ( $H_1 = \{h \in H_i^1(\bar{\Omega}^t)\}$  – пространство Соболева, имеющее обобщенные производные первого порядка, компоненты вектор-значных функций принадлежат этим пространствам), проинтегрируем по  $\Omega$  и  $\Gamma_{cm}$  соответственно:

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot [\hat{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma})] d\Omega = 0, \quad (3.2)$$

$$\int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot [\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \dot{\hat{\mathbf{T}}}] d\Gamma_{cm} = 0, \quad (3.3)$$

Заметим, что функции из пространства Соболева являются дифференцируемыми почти всюду (за исключением множеств меры нуль). Взвешивающие функции зависят только от координат, являются кусочно-непрерывными, равны нулю в точках участков границы, на которых заданы кинематические ГУ.

С учетом эквивалентности (2.62) и уравнения  $(\hat{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \mathbf{v} : \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0})$ , соотношение (3.2) можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot [\hat{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla} \mathbf{v} : \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}] d\Omega = 0. \quad (3.4)$$

Учитывая симметрию материальной производной тензора напряжений Коши, преобразуем первый член объемного интеграла (3.4):

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot [\hat{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}] d\Omega = \int_{\Omega} [\hat{\nabla} \cdot (\mathbf{h} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}) - (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \dot{\boldsymbol{\sigma}}] d\Omega = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{h}) d\Gamma_{cm} - \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega. \quad (3.5)$$

Для понижения порядка производных (устранения членов, содержащих производные тензора Коши по координатам) распишем второе слагаемое объемного интеграла (3.4):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v} : \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} \{ \hat{\nabla} \cdot [\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}] - (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{h}) : \boldsymbol{\sigma}^T - \\ - \hat{\nabla} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v})] + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}^T : \hat{\nabla} \mathbf{h} + (\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{h} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \} d\Omega. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского и эквивалентность (2.62) совместно с  $\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = 0$  однородному уравнению равновесия  $\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , интеграл от второго члена объемного интеграла (3.4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\hat{\nabla} \mathbf{v} : \hat{\nabla} \boldsymbol{\sigma}) d\Omega &= \int_{\Gamma_{cm}} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} d\Gamma_{cm} + \\ &+ \int_{\Omega} [(\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{h}) : \boldsymbol{\sigma}^T - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}^T : \hat{\nabla} \mathbf{h}] d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.5), (3.7) в (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{h}) d\Gamma_{cm} - \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} d\Gamma_{cm} + \\ + \int_{\Omega} [(\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{h}) : \boldsymbol{\sigma}^T - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}^T : \hat{\nabla} \mathbf{h}] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Воспользуемся соотношениями, справедливыми для произвольных тензоров второго ранга  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} : \mathbf{B} &= \mathbf{B} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T : \mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T : \mathbf{A}^T, \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} &= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) : \mathbf{A} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) (\boldsymbol{\sigma}^T : \hat{\nabla} \mathbf{h}) = (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : (\boldsymbol{\sigma}^T)^T = (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) (\hat{\nabla} \mathbf{h}^T : \boldsymbol{\sigma}), \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} (\hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{h}) : \boldsymbol{\sigma} &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) : \hat{\nabla} \mathbf{h} = \hat{\nabla} \mathbf{h}^T : (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v})^T = \\ &= \hat{\nabla} \mathbf{h}^T : (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) = \hat{\nabla} \mathbf{h}^T : (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где использована симметрия тензора напряжений Коши.

Подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{h}) d\Gamma_{cm} - \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} d\Gamma_{cm} + \\ + \int_{\Omega} [\hat{\nabla} \mathbf{h}^T : (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^T) - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) (\hat{\nabla} \mathbf{h}^T : \boldsymbol{\sigma})] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Соотношение (3.11) можно переписать в виде:

$$\int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : [-\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}] d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{h}) d\Gamma_{cm} + \int_{\Gamma_{cm}} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \mathbf{h} d\Gamma_{cm} = 0. \quad (3.12)$$

Вычтем из соотношения (3.12) соотношение (3.3), получим:

$$\int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : [-\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}] d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \dot{\hat{\mathbf{T}}}] d\Gamma_{cm} = 0. \quad (3.13)$$

Соотношение (3.3) получено путем дифференцирования граничного условия  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{T}}$ . С использованием данного граничного условия соотношение (3.13) можно записать в виде:

$$\int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : [-\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\sigma}] d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot [\hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} + \dot{\hat{\mathbf{T}}}] d\Gamma_{cm} = 0. \quad (3.14)$$

Уравнение равновесия (соотношение (3.14)) сформулировано в терминах тензора напряжений Коши, определяющее соотношение (2.63) – в терминах тензора напряжений Кирхгоффа. Запишем уравнение равновесия в терминах тензора напряжений Кирхгоффа, для этого выразим  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  через  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d}{dt} \left[ \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \circ \\ \rho \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \right] = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \circ \\ \rho \end{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\hat{\rho}}{\rho} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}. \quad (3.15)$$

Скорость изменения плотностей в (3.15) определим через первый инвариант тензора деформации скорости. Используя определение плотности ( $\rho = \frac{m}{V}$ ) и введенные выше гипотезы для представительного объема двухфазной среды (соотношение (2.1);  $\overset{\circ}{m}_s = \hat{m}_s$ ;  $\hat{m}_s + \hat{m}_f \approx \hat{m}_s$ ,  $\overset{\circ}{m}_s + \overset{\circ}{m}_f \approx \overset{\circ}{m}_s$ ), запишем соотношение, связывающее отношение плотностей и отношение объемов:

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} = \frac{\overset{\circ}{m}}{\overset{\circ}{V}} \Big/ \frac{\hat{m}}{\hat{V}} = \frac{\overset{\circ}{m}^s + \overset{\circ}{m}^f}{\overset{\circ}{V}} \Big/ \frac{\hat{m}^s + \hat{m}^f}{\hat{V}} \approx \frac{\overset{\circ}{m}^s}{\overset{\circ}{V}} \Big/ \frac{\hat{m}^s}{\hat{V}} = \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}}. \quad (3.16)$$

С использованием соотношения (3.16) скорость изменения отношения плотностей двухфазной среды примет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \circ \\ \rho \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} d\hat{V} \\ \circ \\ d\hat{V} \end{pmatrix} = -\frac{d\hat{V} \circ d\hat{V}}{d\hat{V}^2} = -\frac{d\hat{V} \circ}{d\hat{V}} \frac{d\hat{V}}{d\hat{V}}. \quad (3.17)$$

Используя соотношения (2.45) и (3.16), из (3.17) скорость изменения плотностей примет вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{\rho} \\ \circ \\ \rho \end{pmatrix} = -\frac{\hat{\rho}}{\circ} I_1(\mathbf{D}). \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) соотношение (3.15) примет вид:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\hat{\rho}}{\circ} I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} + \frac{\hat{\rho}}{\circ} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}. \quad (3.19)$$

Подставим (3.19) и (2.67) в соотношение (3.14), получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\circ} I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} - \frac{\hat{\rho}}{\circ} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \frac{\hat{\rho}}{\circ} \boldsymbol{\Sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \frac{\hat{\rho}}{\circ} \boldsymbol{\Sigma} \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} + \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm} = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В соотношении (3.20) вынесем отношение плотностей за скобки, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\circ} \left[ I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} - \dot{\boldsymbol{\Sigma}} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} + \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставив (2.63) в (3.21), откроем скобки, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\circ} \left[ -\dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} - 2\mu d\hat{\gamma}_s - \boldsymbol{\Omega}_{\log} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\log} + I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} + \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm} = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Девииатор тензора деформации скорости определяется соотношением:

$$\mathbf{d} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{D}) \mathbf{I}. \quad (3.23)$$

Подставим (3.23) в (3.22), получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ -\dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} - 2\mu \left( \mathbf{D} - \frac{1}{3} I_1(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log} + \right. \right. \\ \left. \left. + I_1(\mathbf{D}) \mathbf{\Sigma} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{\Sigma} - (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \hat{\mathbf{T}}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} + \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm} = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подставим в (3.24) соотношение для тензора деформации скорости (2.65), перенесем слагаемые, зависящие от вектора скорости, в одну часть, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - I_1(\mathbf{D}) \mathbf{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\ + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \mathbf{\Omega}_{\log} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log} - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставив (2.66) в (2.34), получим соотношение для спина ( $\mathbf{\Omega}_{\log}$ ) в виде:

$$\mathbf{\Omega}_{\log} = \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \hat{\nabla} \mathbf{v}) + f(\mathbf{H}, \mathbf{D}), \quad (3.26)$$

где тензорзначная функция 2-го ранга  $f(\mathbf{H}, \mathbf{D})$  определяется соотношением (2.36).

Подставим соотношение (3.26) в (3.25), получим:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) + \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}) \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ -\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Соотношение (3.27) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}) \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D}) \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Подставляя тензор  $\mathbf{f}(\mathbf{H}, \mathbf{D})$  (в виде соотношения (2.36)) в соотношение (3.28), получим соотношение:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \dot{\Sigma}_{cp} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

В соотношении (3.29) скорость изменения среднего напряжения определяется соотношением (2.68):

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= I_1(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\hat{\rho}}{\rho} [A \hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\rho}}) - Cp_f (\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\
& - \frac{\hat{\rho}}{\rho} [A \hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\rho}}) - C \hat{\gamma}_f p_f] + \left. \left( \frac{\hat{\rho}}{\rho} \right)^2 [A \hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\} = \\
& = I_1(\mathbf{D}) Z,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где  $Z$  устанавливается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{\hat{\rho}}{\rho} [A \hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\rho}}) - Cp_f (\hat{\gamma}_f + 1)] - \\
& - \frac{\hat{\rho}}{\rho} [A \hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\rho}}) - C \hat{\gamma}_f p_f] + \left( \frac{\hat{\rho}}{\rho} \right)^2 [A \hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Подставляя (3.30) в (3.29), получим итоговый вид обобщенного решения:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ I_1(\mathbf{D}) \mathbf{Z} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - I_1(\mathbf{D}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

С учетом соотношения для тензора деформации скорости (2.65), из соотношения (3.32) итоговый вид обобщенного решения можно записать следующим образом [214]:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{Z} \mathbf{I} + 2\mu \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) - \frac{1}{3} I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s - \right. \right. \\
& \left. \left. - I_1 \left( \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v} + \hat{\nabla} \mathbf{v}^T) \right) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} - \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T + \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}) - \hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma} + (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \boldsymbol{\Sigma} \right] \right] d\Omega + \tag{3.33} \\
& + \int_{\Omega} (\hat{\nabla} \mathbf{h})^T : \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ -\hat{\mathbf{T}} (\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{n} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{T}} \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \mathbf{h} \cdot \left[ \dot{\hat{\mathbf{T}}} \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned}$$

Представим обобщенное решение (3.33) в компонентной форме (в базе единой лабораторной декартовой ортогональной системы координат). Рассмотрим по отдельности каждый интеграл соотношения (3.33) и слагаемые в нем. Для записи первого интеграла соотношения (3.33) в компонентной форме рассмотрим каждое слагаемое по отдельности.

Первый инвариант тензора деформации скорости, выраженного через скорости перемещений, после операции свертки с единичным (метрическим) тензором  $(I_1(\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T))\mathbf{I})$  в компонентной форме можно записать как:

$$\frac{1}{3} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_l}{\partial x^k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^l} \right) \delta^{kl} \delta^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = \frac{1}{3} \frac{1}{2} (v_{l,k} + v_{k,l}) \delta^{kl} \delta^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = \frac{1}{3} v_{,k}^k \delta^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = \frac{1}{3} v_{,k}^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}_i \quad (3.34)$$

С учетом (3.34) в соотношении (3.33) первое слагаемое первого интеграла  $(I_1(\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T))\mathbf{Z}\mathbf{I})$  в компонентах записывается как:  $\frac{1}{3} Z v_{,k}^k \delta^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = \frac{1}{3} Z v_{,k}^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}_i$ .

Второе слагаемое первого интеграла  $(2\mu \left( \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T) \right) \hat{\gamma}_s)$  в компонентах записывается как:

$$2\mu \left( \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T) \right) \hat{\gamma}_s = \mu (v_{j,i} + v_{i,j}) \hat{\gamma}_s \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j = \mu (v^{j,i} + v^{i,j}) \hat{\gamma}_s \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j. \quad (3.35)$$

Третье слагаемое первого интеграла  $(2\mu \left( -\frac{1}{3} I_1(\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T))\mathbf{I} \right) \hat{\gamma}_s)$  в компонентах записывается в виде:  $-\frac{2}{9} \mu v_{,k}^k \hat{\gamma}_s \delta^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = -\frac{2}{9} \mu v_{,k}^k \hat{\gamma}_s \mathbf{k}^i \mathbf{k}_i$ .

Четвертое слагаемое первого интеграла  $(-I_1(\frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T))\mathbf{\Sigma})$  в компонентах записывается как:  $-\frac{1}{3} v_{,k}^k \hat{\Sigma}^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j$ .

Для представления второго интеграла соотношения (3.33) в компонентной форме рассмотрим каждое слагаемое по отдельности.

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{S} &= v_{k,l} S^{ij} \mathbf{k}^k (\mathbf{k}^l \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{k}_j = v_{k,l} S^{ij} \delta_i^l \mathbf{k}^k \mathbf{k}_j = v_{k,l} S^{lj} \mathbf{k}^k \mathbf{k}_j = \\ &= v_{k,l} S^{lj} \delta_i^k \mathbf{k}^i \mathbf{k}_j = v_{i,l} S^{lj} \mathbf{k}^i \mathbf{k}_j = v_{,l}^i S^{lj} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} &= v_{l,k} S^{ij} \mathbf{k}^k (\mathbf{k}^l \cdot \mathbf{k}_i) \mathbf{k}_j = v_{l,k} S^{ij} \delta_i^l \mathbf{k}^k \mathbf{k}_j = v_{l,k} S^{lj} \mathbf{k}^k \mathbf{k}_j = \\ &= \delta_i^k v_{l,k} S^{lj} \mathbf{k}^i \mathbf{k}_j = v_{l,i} S^{lj} \mathbf{k}^i \mathbf{k}_j = v_{,l}^i S^{lj} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v}^T &= S^{ij} v_{k,l} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}^k) \mathbf{k}^l = S^{ij} v_{k,l} \delta_j^k \mathbf{k}_i \mathbf{k}^l = S^{ik} v_{k,l} \mathbf{k}_i \mathbf{k}^l = \\ &= S^{ik} v_{k,l} \delta_j^l \mathbf{k}_i \mathbf{k}^j = S^{ik} v_{k,j} \mathbf{k}_i \mathbf{k}^j = S^{ik} v_k^j \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \hat{\nabla} \mathbf{v} &= S^{ij} v_{l,k} \mathbf{k}_i (\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{k}^k) \mathbf{k}^l = S^{ij} v_{l,k} \delta_j^k \mathbf{k}_i \mathbf{k}^l = S^{ik} v_{l,k} \mathbf{k}_i \mathbf{k}^l = \\ &= \delta_j^l S^{ik} v_{l,k} \mathbf{k}_i \mathbf{k}^j = S^{ik} v_{j,k} \mathbf{k}_i \mathbf{k}^j = S^{ik} v_k^j \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\hat{\nabla} \mathbf{v}^T \cdot \Sigma = v_{i,l} \Sigma^{lj} \mathbf{k}^i \mathbf{k}_j = v_{i,l} \Sigma^{lj} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \quad (3.40)$$

$$(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v}) \Sigma = \frac{\partial v_l}{\partial x^k} \delta^{kl} \hat{\Sigma}^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = v_{l,k} \delta^{kl} \hat{\Sigma}^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = v_k^k \hat{\Sigma}^{ij} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j. \quad (3.41)$$

Для записи третьего интеграла соотношения (3.33) в компонентной форме рассмотрим каждое слагаемое по отдельности:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q} : \hat{\nabla} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{S} &= (Q^{ijmn} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \mathbf{k}_m \mathbf{k}_n : v_{l,k} \mathbf{k}^k \mathbf{k}^l) \cdot S^{sp} \mathbf{k}_s \mathbf{k}_p = Q^{ijkl} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j v_{l,k} \cdot S^{sp} \mathbf{k}_s \mathbf{k}_p = \\ &= Q^{ijkl} v_{l,k} S^{sp} \delta_{js} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_p = Q_{.s}^{i.lk} v_{l,k} S^{sp} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_p = Q_{.s}^{i.lk} v_{l,k} S^{sp} \mathbf{k}_i \delta_p^j \mathbf{k}_j = Q_{.s}^{i.lk} v_{l,k} S^{sj} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} : \hat{\nabla} \mathbf{v}) &= S^{sp} \mathbf{k}_s \mathbf{k}_p \cdot (Q^{ijmn} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j \mathbf{k}_m \mathbf{k}_n : v_{l,k} \mathbf{k}^k \mathbf{k}^l) = S^{sp} \mathbf{k}_s \mathbf{k}_p \cdot Q^{ijkl} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j v_{l,k} = \\ &= Q^{ijkl} S^{sp} v_{l,k} \mathbf{k}_s \delta_{pi} \mathbf{k}_j = Q_p^{jlk} S^{sp} v_{l,k} \mathbf{k}_s \mathbf{k}_j = Q_p^{jlk} S^{sp} v_{l,k} \delta_s^i \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = Q_p^{jlk} S^{ip} v_{l,k} \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j, \end{aligned} \quad (3.43)$$

Представим обобщенное решение (3.33) в компонентной форме (в базисе единой лабораторной декартовой ортогональной системы координат) с учетом соотношений (3.34)-(3.43):

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{3} Z v_{,k}^k \delta^{ij} + \mu (v^{j,i} + v^{i,j}) \hat{\gamma}_s - \frac{2}{9} \mu v_{,k}^k \hat{\gamma}_s \delta^{ij} - \frac{1}{3} v_{,k}^k \hat{\Sigma}^{ij} \right] \right] d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (v_l^i \hat{S}^{lj} - v_l^j \hat{S}^{lj} - \hat{S}^{ik} v_k^j + \hat{S}^{ik} v_{,k}^j) - v_l^i \hat{\Sigma}^{lj} + v_{,k}^k \hat{\Sigma}^{ij} \right] \right] d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \hat{Q}_{.s}^{i.lk} v_{l,k} \hat{S}^{sj} - \hat{Q}_p^{jlk} \hat{S}^{ip} v_{l,k} \right] \right] d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_{cm}} \hat{h}_i \left[ -\hat{T}^i v_{,k}^k + v_{l,k} n^k n^l \hat{T}^i \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \hat{h}_i \left[ \hat{T}^i \right] d\Gamma_{cm}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

При выводе соотношения (3.44) использовалась компонентная запись в декартовой ортогональной системе координат, в которой ко- и контравариантные

компоненты неразличимы. Общий вид обобщенного решения (3.44) в компонентной форме (в базисе единой лабораторной декартовой ортогональной системы координат) имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{3} Z v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{j,i} + v_{i,j}) \hat{\gamma}_s - \frac{2}{9} \mu v_{k,k} \hat{\gamma}_s \delta_{ij} - \frac{1}{3} v_{k,k} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (v_{i,l} \hat{S}_{lj} - v_{l,i} \hat{S}_{lj} - \hat{S}_{ik} v_{k,j} + \hat{S}_{ik} v_{j,k}) - v_{i,l} \hat{\Sigma}_{lj} + v_{k,k} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \hat{Q}_{islk} \hat{S}_{sj} v_{l,k} - \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} v_{l,k} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{cm}} \hat{h}_i \left[ -\hat{T}_i v_{k,k} + v_{l,k} n_k n_l \hat{T}_i \right] d\Gamma_{cm} = \int_{\Gamma_{cm}} \hat{h}_i \left[ \hat{T}_i \right] d\Gamma_{cm}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Полученное обобщенное решение в общем виде (соотношение (3.45)) может быть использовано для решения задачи деформирования двухфазной среды легких при различных типах граничных условий. В рассматриваемой задаче (соотношения (2.62)-(2.83)) отсутствуют участки границы со статическими ГУ, в связи с чем в соотношении (3.45) члены, содержащие поверхностные интегралы по  $\Gamma_{cm}$  удаляются из рассмотрения. Итоговый вид обобщенного решения имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{3} Z v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{j,i} + v_{i,j}) \hat{\gamma}_s - \frac{2}{9} \mu v_{k,k} \hat{\gamma}_s \delta_{ij} - \frac{1}{3} v_{k,k} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (v_{i,l} \hat{S}_{lj} - v_{l,i} \hat{S}_{lj} - \hat{S}_{ik} v_{k,j} + \hat{S}_{ik} v_{j,k}) - v_{i,l} \hat{\Sigma}_{lj} + v_{k,k} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} h_{j,i} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \hat{Q}_{islk} \hat{S}_{sj} v_{l,k} - \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} v_{l,k} \right] \right] d\Omega = 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

### 3.2 Конечно-элементное представление обобщенного решения для двухфазной деформируемой пористой среды

Рассматриваемая область представляется совокупностью  $M$  конечных элементов (КЭ). Запишем соотношения метода конечных элементов (МКЭ) для типичного элемента с номером  $m$  ( $m = \overline{1, M}$ ) [19]. Компоненты вектора скорости перемещений в элементе выражаются через компоненты узловых скоростей перемещений с использованием функций формы:

$$\hat{v}_i^{(m)}(\mathbf{r}) = N_{i\beta}^{(m)j}(\mathbf{r})\hat{v}_j^{(m)\beta}, \quad (3.47)$$

где  $\hat{v}_i^{(m)}(\mathbf{r})$  – компоненты вектора скорости перемещений в элементе  $m$ ;  $\hat{v}_j^{(m)\beta}$  – компоненты вектора скорости перемещения узловых точек рассматриваемого элемента  $m$ ;  $\beta$  – индекс узловой точки (здесь и далее греческими буквами обозначаются номера узлов);  $N_{i\beta}^{(m)j}(\mathbf{r})$  – функция формы. Функция формы удовлетворяет свойствам: 1)  $N_{i\alpha}^{(m)j}(\mathbf{r}_\beta) = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ; 2)  $N_{i\beta}^{(m)j}(\mathbf{r}_\beta) = \delta_i^j$ .

Компоненты градиента вектора скорости перемещений можно представить в виде:

$$v_{j,i}^{(m)} = \frac{\partial \hat{v}_j^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial x^i} = B_{ji\beta}^{(m)l}(\mathbf{r})\hat{v}_l^{(m)\beta}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad (3.48)$$

где  $B_{ji\beta}^{(m)l}(\mathbf{r}) = \frac{\partial N_{j\beta}^{(m)l}(\mathbf{r})}{\partial x^i}$  – производные функции формы.

Следуя методу Галеркина, взвешивающие функции выбираем совпадающими с функциями, аппроксимирующими решение:

$$\hat{h}_i^{(m)}(\mathbf{r}) = N_{i\beta}^{(m)j}(\mathbf{r})\hat{h}_j^{(m)\beta}, \quad (3.49)$$

где  $\hat{h}_j^{(m)\beta}$  – компоненты вектора узловых значений взвешивающих функций рассматриваемого элемента  $m$ . Градиент вектор-значной функции  $\mathbf{h}$  имеет вид:

$$h_{j,i}^{(m)}(\mathbf{r}) = \frac{\partial \hat{h}_j^{(m)}(\mathbf{r})}{\partial x^i} = B_{ji\beta}^{(m)l}(\mathbf{r})\hat{h}_l^{(m)\beta}. \quad (3.50)$$

Кинематические граничные условия принимаются выполняющимися точно, поэтому узловые значения взвешивающих функций  $\hat{h}_j^{(m)\beta}$ , соответствующие узлам границы  $\Gamma_L$ , принимаем равными нулю. При этом необходимо отметить, что решение определяется в пространствах Соболева, где две функции считаются совпадающим, даже если на множестве меры нуль они могут как угодно отличаться. Здесь используются функции, определенные в трехмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ , мера любой части поверхности (в том числе – поверхности исследуемой области) в  $\mathbb{R}^3$  всегда равна нулю. Поэтому о нулевых взвешивающих функциях на частях границы, где заданы кинематические условия, можно говорить только в смысле так называемых следов (т.е. гладких продолжений функций из объема).

Используем соотношения (3.47)-(3.50), соотношение (3.46) в компонентах в базисе декартовой ортогональной системе координат примет вид:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} B_{ji\alpha}^{(m)r} \hat{h}_r^{(m)\alpha} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{3} Z \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \mu \hat{\gamma}_s (B_{ji\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + B_{ij\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} - \frac{1}{3} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} B_{ji\alpha}^{(m)r} \hat{h}_r^{(m)\alpha} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \frac{1}{2} (B_{il\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{S}_{lj} - B_{li\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{S}_{lj} - \hat{S}_{ik} B_{kj\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \hat{S}_{ik} B_{jk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{il\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{kj} + B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{ij} \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} B_{ji\alpha}^{(m)r} \hat{h}_r^{(m)\alpha} \left[ \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ \hat{Q}_{islk} \hat{S}_{sj} B_{lk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} - \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} B_{lk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \right] \right] d\Omega = 0.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Используем предположение о независимости взвешивающих функций, вследствие чего их совокупность можно рассматривать как функциональный базис счетного подпространства пространства мощности континуум. По сути дела, обобщенное решение дает наилучшее приближение искомого решения, которое определяется ортогональностью невязки подпространству, на котором

ищется приближенное решение. В силу этого можно последовательно принимать значение первого (второго и т.д.) значений вектора узловых значений равным 1, а всех остальных – нулю, получим систему разрешающих алгебраических уравнений. Функции формы  $(N_{i\beta}^{(m)j}, B_{j\beta}^{(m)l}(\mathbf{r}))$  определены локально, в подобластях, занимаемых соответствующими конечными элементами, поэтому интеграл по объему всего тела можно представить суммой интегралов по этим подобластям – КЭ  $(\Omega^{(m)})$ . Для всего ансамбля конечных элементов, аппроксимирующей исследуемую область, получаем:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} B_{j\alpha}^{(m)r} \left[ \frac{1}{3} Z \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \mu \hat{\gamma}_s (B_{j\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + B_{ij\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} - \frac{1}{3} B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{ij} \right] d\Omega^{(m)} \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} B_{j\alpha}^{(m)r} \left[ \frac{1}{2} (B_{i\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{S}_{lj} - B_{li\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{S}_{lj} - \hat{S}_{ik} B_{kj\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \hat{S}_{ik} B_{jk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{i\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{lj} + B_{kk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \hat{\Sigma}_{ij} \right] d\Omega^{(m)} \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} B_{j\alpha}^{(m)r} \left[ \hat{Q}_{islk} \hat{S}_{sj} B_{lk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} - \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} B_{lk\beta}^{(m)q} \hat{v}_q^{(m)\beta} \right] d\Omega^{(m)} \right\} = 0. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

В соотношении (3.52) члены с одинаковыми глобальными номерами узлов и координат в соотношении (3.52) суммируются.

Внесем производные функции формы  $B_{j\alpha}^{(m)r}$ , расположенные слева в первых трех слагаемых левой части соотношения (3.52), в скобки; вынесем  $\hat{v}_q^{(m)\beta}$  за скобки; избавимся от дельты Кронекера

$$(B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{3} Z \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} = \frac{1}{3} Z B_{jj\alpha}^{(m)r} B_{kk\beta}^{(m)q}, B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s \delta_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} = B_{jj\alpha}^{(m)r} \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s B_{kk\beta}^{(m)q}). \quad \text{Итоговый вид}$$

разрешающего соотношения МКЭ принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{3} Z B_{kk\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \mu \hat{\gamma}_s B_{j\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \mu \hat{\gamma}_s B_{ij\beta}^{(m)q} - \right. \right. \\
& \left. \left. - B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{2}{9} \mu \hat{\gamma}_s B_{kk\beta}^{(m)q} + B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{2}{3} \hat{\Sigma}_{ij} B_{kk\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \\
& + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} B_{ik\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{kj} B_{ki\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{ik} B_{kj\beta}^{(m)q} + \right. \right. \\
& \left. \left. + B_{j\alpha}^{(m)r} \frac{1}{2} \hat{S}_{ik} B_{jk\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{\Sigma}_{kj} B_{ik\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} + \\
& + \left\{ \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} \frac{\hat{\rho}}{\rho} \left[ B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{Q}_{iplk} \hat{S}_{pj} B_{lk\beta}^{(m)q} - B_{j\alpha}^{(m)r} \hat{Q}_{pjlk} \hat{S}_{ip} B_{lk\beta}^{(m)q} \right] d\Omega^{(m)} \right\} \hat{v}_q^{(m)\beta} = 0. \quad (3.53)
\end{aligned}$$

Применение МКЭ приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида  $[K]\{v\}=\{F\}$  (где  $[K]$  – глобальная матрица жесткости,  $\{v\}$  – вектор-столбец искомых узловых значений компонент скорости перемещений,  $\{F\}$  – вектор-столбец правых частей (скоростей изменения действующих сил)). СЛАУ состоит из  $3R$  линейризованных уравнений ( $R$  – число узлов, в которых необходимо определить 3 компоненты вектора скорости перемещений). Глобальная матрица жесткости  $[K]$  строится из набора локальных матриц жесткости для отдельных элементов. Размерность глобальной матрицы жесткости  $3R \times 3R$ .

В разрешающем соотношении (3.53) все члены, формирующие матрицы жесткости, имеют общий вид: с левой стороны находится множитель функция формы  $B_{j\alpha}^{(m)r}$ , с правой стороны –  $B_{j\beta}^{(m)q}$ . По индексам  $\alpha, r$  (номер узла и координаты соответственно) определяются номера уравнений в СЛАУ (строк в глобальной матрице жесткости); по индексам  $\beta, q$  – номера столбцов. От матрицы узловых компонент (с двумя индексами  $\beta, q$  (где  $\beta$  – номер узла,  $q$  – номер координаты) выполним переход к сквозной нумерации переменных (компонент вектор-столбца, принадлежащего множеству  $R^{3M}$ ) с номерами  $p(\beta, q)=3\beta-3+q$ . При данной нумерации переменные, например, в первом узле ( $\beta=1$ ) по

направлениям  $x_1, x_2, x_3$  будут иметь номера 1, 2, 3; переменные во втором узле ( $\beta=2$ ) – 4, 5, 6 и т.д. Аналогично от  $\alpha, r$  перейдем к глобальной нумерации  $g(\alpha, r)$ .

Индексы  $g, p$  определяют месторасположение (строки и столбцы соответственно) подматриц (блоков)  $k_{gp}^{(m)}$  в глобальной матрице жесткости. Из набора локальных матриц жесткости для отдельных элементов собирается (с помощью процедуры ансамблирования) глобальная матрица жесткости. При выполнении процедуры ансамблирования компоненты, соответствующие одинаковым глобальным координатам (относящиеся к одним и тем же узлам), суммируются ( $K_{gp} = \sum k_{gp}^{(m)}$ ).

Матрица жесткости является разреженной. Для решения СЛАУ с целью экономии вычислительных ресурсов необходимо использовать методы решения разреженных системы линейных алгебраических уравнений.

Разбиение области на конечные элементы выполняется с использованием существующих инженерных пакетов программ. При разбиении элементам и узлам присваиваются номера, формируются следующие списки: 1) список элементов с указанием номеров узлов, которые ему принадлежат (в правильном порядке узлов ( $IJKL$ ), нумерация узлов тетраэдрального элемента  $IJKL$  осуществляется по следующему правилу: узлы  $I, J, K$  нумеруются в направлении против часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, расположенного в узле  $L$ ) для составления локальных матрицы жесткости); 2) список узлов с указанием их координат; 3) список узлов, принадлежащих различными границам.

Рассмотрим тетраэдральный симплекс элемент, имеющий 4 узловых точки ( $\beta = I, J, K, L$  – локальные номера узлов рассматриваемого элемента). Введем множество целых чисел, обозначим его как  $\mathbb{N}^{(m)}$  – номера узлов  $m$ -го элемента,  $\mathbb{N}^{(m)} = \{I, J, K, L\}$ .

Для одного тетраэдрального элемента система линейных алгебраических уравнений содержит 12 уравнений (число узлов, умноженное на число степеней

свободы в каждом узле). Локальная матрица жесткости  $[k^{(m)}]$  для одного  $m$ -го тетраэдрального элемента имеет размерность  $12 \times 12$  и может быть представлена в виде блочной структуры (каждый блок размером  $D \times D$ ,  $D$  – размерность задачи), относится к парам узлов  $(IJKL)$  рассматриваемого элемента, включая «свой» узел):

$$[k^{(m)}]_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} [k_{II}]_{3 \times 3} & [k_{IJ}]_{3 \times 3} & [k_{IK}]_{3 \times 3} & [k_{IL}]_{3 \times 3} \\ [k_{JI}]_{3 \times 3} & [k_{JJ}]_{3 \times 3} & [k_{JK}]_{3 \times 3} & [k_{JL}]_{3 \times 3} \\ [k_{KI}]_{3 \times 3} & [k_{KJ}]_{3 \times 3} & [k_{KK}]_{3 \times 3} & [k_{KL}]_{3 \times 3} \\ [k_{LI}]_{3 \times 3} & [k_{LJ}]_{3 \times 3} & [k_{LK}]_{3 \times 3} & [k_{LL}]_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Локальная матрица жесткости определяется на основе разрешающего соотношения (3.53). Место блока в локальной матрице жесткости определяется индексами узлов (индекс  $\alpha$  определяет место блока в локальной матрице жесткости по строкам, индекс  $\beta$  – по столбцам). Например, блоку  $[k_{IJ}]$  соответствуют значения индексов:  $\alpha=I, \beta=J$ .

Место элемента в блоке определяется индексами  $r, q$ , характеризующими номер координаты по направлениям  $x_1, x_2, x_3$  (индекс  $r$  – определяет номер строки элемента в блоке, индекс  $q$  – номер столбца элемента в блоке). Например, в блоке ( $\alpha=I, \beta=J$ ) значениям индексов  $r=1, q=3$  будет соответствовать элемент, расположенный на пересечении первой строки и третьего столбца рассматриваемого блока.

В левой части разрешающего соотношения (3.53) (вида  $[K]\{v\}=\{F\}$ ) находится 14 слагаемых с общим множителем  $\hat{v}_q^{(m)\beta}$ . Каждый из элементов локальной матрицы жесткости определяется из соотношения (3.53) суммированием всех слагаемых соотношения (3.53) по индексам  $j, i, k, l, p$  (являющихся компонентами тензоров и векторов обобщенного решения задачи), где индексы  $j, i, k, l, p$  принимают значения 1, 2, 3.

В дальнейшем от локальной нумерации узлов необходимо перейти к глобальной нумерации узлов и узловых переменных, при этом блок матрицы при ансамблировании аддитивно добавляется в элемент глобальной матрицы жесткости. При этом компоненты, соответствующие одинаковым глобальным координатам (относящиеся к одним и тем же узлам), суммируются.

В процессе реализации алгоритма в начале каждого шага по времени глобальная матрица жесткости «очищается» (заполняется нулевыми значениями). Вычисленные значения локальных матриц с использованием глобальных номеров переменных суммируются в глобальную матрицу жесткости.

В результате решения СЛАУ для подзадачи деформирования двухфазной среды для каждого исследуемого момента времени определяются компоненты вектора скорости перемещения твердой фазы  $\mathbf{v}^{(n+1)}$  (равного вектору скорости перемещений двухфазной среды) во всех узлах рассматриваемой области по трем направлениям  $x_1, x_2, x_3$ . По значениям компонент векторов узловых скоростей перемещений определяются компоненты тензоров скоростей деформаций и напряжений.

### **3.3 Разрешающие соотношения для описания относительного движения воздуха за счет просачивания через двухфазную деформируемую пористую среду**

Для моделирования относительного движения воздуха в пористой среде легких будет использоваться метод конечных (контрольных) объемов (МКО) (finite volume method), который хорошо себя зарекомендовал при решении задач механики жидкости и газа [146, 178]. Метод конечных объемов, как и МКЭ, относится к континуальным численным методам, в котором выполняется условие непрерывности скоростей перемещений на границах внутренних элементов [15].

Достоинством МКО является выполнение законов сохранения как на глобальном, так и локальном уровнях [15, 81]. Локальная консервативность

означает, что для каждого контрольного объёма гарантируется соблюдение баланса полного потока, что важно при решении задач гидроаэродинамики. МКО дает возможность построения разрешающих уравнений как на структурированных, так и на неструктурированных (нерегулярных) сетках с различной формой элементов, позволяет моделировать течения в сложных геометрических формах [15, 81, 60]. Стоит отметить, что МКО широко используется в современных вычислительных гидродинамических инженерных пакетах, таких как CFX, Fluent и др.

Запишем разрешающее соотношение метода конечных объемов для задачи исследования фильтрации воздуха в пористой среде легких. В качестве контрольных объемов (КО) будут использоваться те же конечные элементы, которые применяются при решении подзадачи деформирования двухфазной среды. Давление газовой фазы, определяемое из подзадачи деформирования легких через изменение объема, «привязываются» к геометрическим центрам конечных элементов (являющихся контрольными объемами); значения вычисляемых переменных (средние значения по контрольному объему) в подзадаче фильтрации определяются в центрах контрольных объемов.

Для получения разрешающего соотношения для подзадачи исследования фильтрации воздуха в пористой среде легких соотношение для описания относительного движения газовой фазы (соотношение (2.76)) подставляются в закон сохранения массы (соотношение (2.75)) и интегрируются по контрольному объему  $\Omega^{(m)}$ , в результате получаются уравнения:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\gamma}_f \hat{\rho}_f) + \hat{\nabla} \cdot \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] d\Omega^{(m)} = 0. \quad (3.55)$$

С использованием теоремы Остроградского-Гаусса второе слагаемое интеграла преобразуется к виду:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[ \nabla \cdot \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] d\Omega^{(m)} = \int_{S^{(m)}} \left[ \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS^{(m)}, \quad (3.56)$$

где  $\Omega^{(m)}$  – контрольный объем, ограниченный поверхностью  $S^{(m)}$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Разрешающее соотношение метода конечных объемов для подзадачи фильтрации примет вид:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\gamma}_f \hat{\rho}_f) \right] d\Omega^{(m)} + \int_{S^{(m)}} \left[ \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS^{(m)} = 0. \quad (3.57)$$

Для численной реализации разрешающего соотношения (3.57) используется аппроксимация искомых переменных по времени и пространству.

Пористость среды (доля газовой фазы в двухфазной среде) определяется из решения подзадачи деформирования легких, полагается постоянной на временном шаге, что позволяет вынести ее из-под знака производной по времени в первом интеграле соотношения (3.57)  $(\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\gamma}_f \hat{\rho}_f) = \hat{\gamma}_f \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\rho}_f))$ .

Разностный аналог первой производной по времени имеет вид:

$$\gamma_f \frac{\partial}{\partial t} (\rho_f) = \gamma_f \frac{\rho_f^{(n)} - \rho_f^{(n-1)}}{\Delta t}, \quad (3.58)$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени,  $(n)$  – индекс момента времени  $t_n$ .

Первый интеграл соотношения (3.57) примет вид:

$$\int_{\Omega^{(m)}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_f \rho_f) \right] d\Omega^{(m)} = \gamma_f \frac{\rho_f^{(n)} - \rho_f^{(n-1)}}{\Delta t} V^{(n-1)}. \quad (3.59)$$

Во втором слагаемом соотношения (3.57) представим интеграл по поверхности контрольного объема суммой интегралов по граням:

$$\begin{aligned} \int_S \left[ \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \hat{\nabla}(p_f) \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS &= \sum_{(a)} \int_{S_{(a)}} \left[ \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot (\hat{\nabla}(p_f))_{(a)} \right) \right] \cdot \mathbf{n} dS_{(a)} = \\ &= \sum_{(a)} \left[ \left( -\hat{\rho}_f \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot (\hat{\nabla}(p_f))_{(a)} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)} S_{(a)} \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

где  $(\hat{\nabla}(p_f))_{(a)}$  – градиент давления между контрольными объемами с общей  $a$ -ой гранью,  $\mathbf{n}_{(a)}$  – единичный вектор внешней нормали к  $a$ -ой грани контрольного объема.

Вектор градиента давления через  $a$ -ую грань определим через величину давления в центрах соседних элементов. Введем обозначения: рассматриваемый элемент обозначим индексом  $(c)$  с центром в точке  $C$ , соседний элемент –  $(a)$  с центром в точке  $A$ . Вектор градиента определим как:

$$(\hat{\nabla}(p_f))_{(a)} = \mathbf{e}_{(c)(a)} \frac{\partial p_{f(c)(a)}}{\partial x} = \frac{\mathbf{e}_{CA(a)} p_{fA(a)} - p_{fC(c)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}| |\mathbf{e}_{CA(a)}|}, \quad (3.61)$$

где  $c$  – индекс текущего контрольного объема (КО);  $a$  – индекс соседнего КО (с центром в точке  $A$  и общей  $a$ -ой гранью);  $\mathbf{e}_{(c)(a)}$  – единичный вектор направления градиента, сонаправленный с вектором от центра текущего элемента  $c$ -го КО к центру соседнего  $a$ -го КО ( $\mathbf{e}_{(c)(a)} = \frac{\mathbf{e}_{CA(a)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}|}$ );  $|\mathbf{e}_{CA(a)}|$  – длина вектора  $\mathbf{e}_{CA(a)}$

(расстояние между центрами соседних контрольных объемов).

Подставим (3.59), (3.60) в (3.57):

$$\gamma_f^{(n-1)} \frac{\rho_f^{(n)} - \rho_f^{(n-1)}}{\Delta t} V^{(n-1)} + \sum_{(a)} \left[ \left( -\rho_f^{(n-1)} \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \frac{p_{fA(a)}^{(n-1)} - p_{fC(c)}^{(n-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \frac{\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)} S_{(a)}^{(n-1)} \right] = 0. \quad (3.62)$$

Из соотношения (3.62) запишем выражение для определения плотности воздуха в контрольном объеме:

$$\rho_f^{(n)} = \sum_{(a)} \left[ \left( -\rho_f^{(n-1)} \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \frac{p_{fA(a)}^{(n-1)} - p_{fC(c)}^{(n-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \frac{\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)} S_{(a)}^{(n-1)} \right] \frac{\Delta t}{\gamma_f^{(n-1)} V^{(n-1)}} + \rho_f^{(n-1)}. \quad (3.63)$$

С использованием соотношения (3.63) определяется движение (поступление и отток) газовой фазы в двухфазной пористой среде легких (из системы бронхов), а также распространения воздуха в пористой среде.

Переменные, входящие в разрешающее соотношение для фильтрации (соотношение (3.63)), зависят от решения задачи деформирования двухфазной среды легких. В результате деформирования изменяются координаты узлов, объемы элемента ( $V$ ), площади граней ( $S$ ), нормали к граням ( $\mathbf{n}$ ), координаты центров элементов и расстояния между ними. В зависимости от изменения объема изменяется пористость (доля газовой фазы), давление газовой фазы в элементе. Давление воздушной фазы зависит от двух составляющих: от изменения объема в процессе деформирования (определяемое из задачи деформирования) и за счет фильтрации (поток воздуха за счет фильтрации). Результаты, получаемые из задачи фильтрации, в свою очередь оказывают влияние на задачу деформирования: давление газовой фазы, которое зависит от фильтрации, входит в соотношение для скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких (соотношения (2.68)).

Кроме того, на основе оценки массовых расходов, проходящих через грани элементов, расположенных на поверхностях выходов из системы бронхов/входов в легкие, определяются граничные условия для подмодели движения воздуха в воздухопроводящих путях.

## **4 Алгоритмы численной реализации модели для описания течения воздуха в воздухоносных путях и деформируемых легких человека в процессе дыхания**

В целом описанная выше математическая модель ДС, состоящая из подмоделей для описания течения в ВП и деформируемых легких, является существенно нелинейной, поэтому для исследования течения воздуха в элементах ДС применяются численные подходы с использованием пошаговой (по времени) процедуры. Исследование течения воздуха выполняется с учетом геометрии исследуемых участков ДС, восстановленной на основе томографических снимков. В данной главе описаны алгоритмы численной реализации решения задачи течения воздуха в ВП и деформируемых легких с учетом связи между подмоделями, алгоритм восстановления трехмерной геометрии ВП и легких человека, а также закон движения стенок (использующегося в качестве кинематических ГУ для подмодели легких).

### **4.1 Общий алгоритм решения задачи**

В целом математическая модель ДС человека, состоящая из подмоделей ВП и легких взаимосвязанных между собой, является существенно нелинейной, что обуславливает необходимость применения пошаговой процедуры при решении задачи. При реализации вычислительной процедуры решения задачи течения воздуха в ВП и деформируемых легких человека подмодели используются последовательно (рисунок 4.1). На первом этапе с использованием кинематических граничных условий (закон движения стенок, подробно описан в разделе 4.3) и граничных условий на границах  $\Gamma_{ВП/Л}$  (полагаются неизменными в процессе всего дыхательного цикла) выполняется решение связанной задачи фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде легких (алгоритм решения детально описан в разделе 4.2). Гипотеза о равенстве давления атмосферному на границах  $\Gamma_{ВП/Л}$  принимается в силу малой вязкости воздуха (для идеального газа

давление во всех точках сообщающихся каналов равно). В процессе выполнения первого этапа из подмодели легких определяются массовые потоки воздуха на границе ВП и легких. На втором этапе с использованием определенных массовых расходов и параметров атмосферного воздуха (атмосферное давление и дисперсный состав частиц, присутствующих в атмосферном воздухе) моделируется течение многофазной смеси воздуха и пылевых частиц, а также оседание частиц в ВП человека.

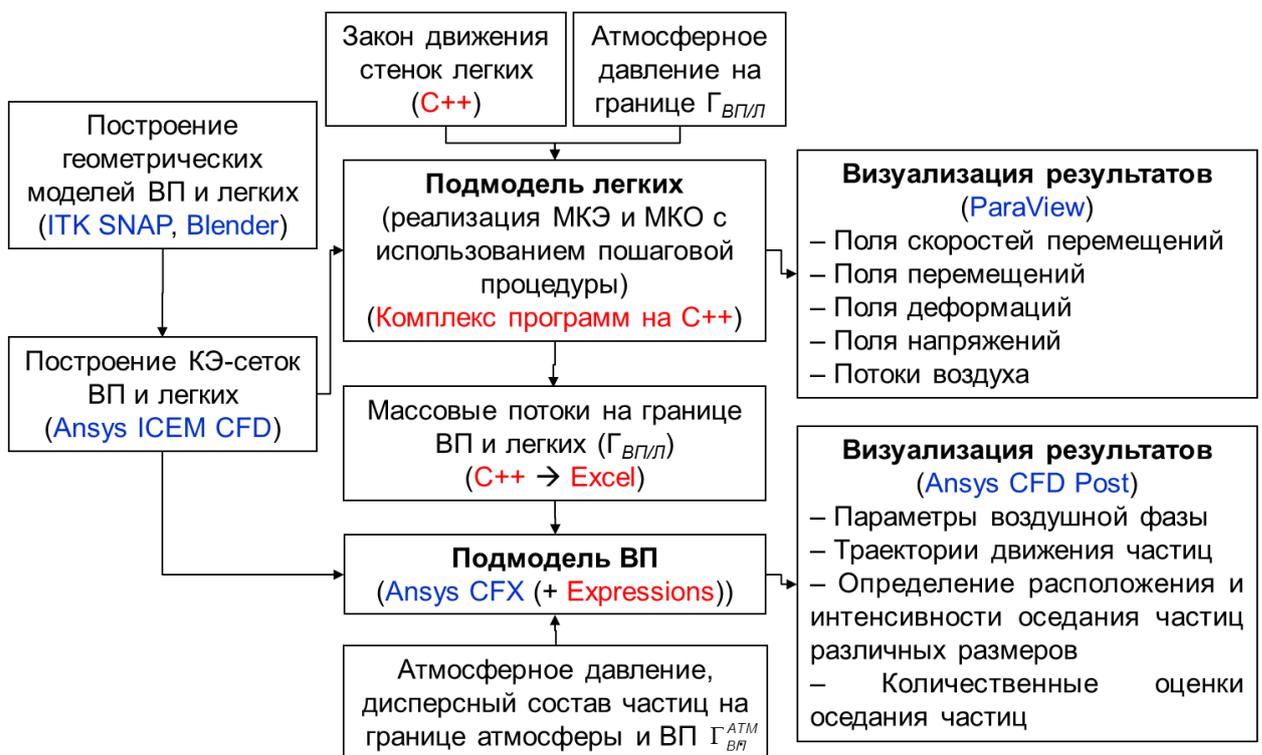


Рисунок 4.1 – Общий алгоритм решения задачи

В результате численного решения связанной задачи течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде легких выполняется определение пространственного распределения параметров легочной ткани и воздушной фазы в разные моменты одного дыхательного цикла (вдоха/выдоха), в том числе – поля скоростей перемещений, перемещений, деформаций, напряжений, потоков воздуха. В результате численной реализации подмодели течения воздуха в ВП легких выполняется определение скоростей потоков несущей фазы (воздуха) в

ВП, траекторий движения частиц в ВП, количественные оценки оседания частиц в различных участках ВП. Детальное описание реализации этапов, указанных на рисунке 4.1, приведено в последующих разделах.

#### **4.2 Алгоритм решения задачи фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде легких**

Решение нестационарной нелинейной задачи фильтрации воздуха в упруго-деформируемой насыщенной пористой среде легких, описываемой системой уравнений (2.62)-(2.83), выполняется с использованием пошаговой процедуры, согласно которой весь интервал нагружения представляется совокупностью шагов по времени. Для реализации связанной задачи деформирования пористой среды и фильтрации воздуха в ней возможны два варианта построения алгоритма: либо объединить подзадачи деформации и фильтрации в одну систему уравнений [120, 149], которую решать на каждом временном шаге, либо на каждом временном шаге последовательно решать каждую из подзадач [202, 203, 222, 153]. В настоящей работе выбран второй вариант: сначала решается подзадача деформирования двухфазной среды в скоростях, при этом характеристики газовой фазы принимаются постоянными и известными на начало текущего шага по времени; затем решается подзадача фильтрации.

Для решения задачи исследования деформирования пористой среды легких предлагается использовать метод конечных элементов с применением полученного разрешающего соотношения МКЭ (соотношение (3.53)). В соответствии с процедурой МКЭ рассматриваемая область в отсчетной конфигурации аппроксимируется дискретной конечно-элементной сеткой. Подзадача фильтрации воздуха в пористой среде легких решается с помощью методов контрольных объемов, для чего используются полученные соотношения МКО (соотношение (3.57), (3.63)).

При этом подзадачи деформирования двухфазной пористой среды легких и фильтрации воздуха в пористой среде взаимосвязаны между собой. Поля напряжений и перемещений, установленные из решения подзадачи деформирования, используются при решении подзадачи просачивания. Давление воздушной фазы зависит от двух составляющих: от изменения объема в процессе деформирования (определяемое из решения подзадачи деформирования) и за счет изменения плотности воздушной фазы (изменение давления прямо пропорционально изменению плотности (соотношение (2.77))), определяемому из решения подзадачи фильтрации. Давление газовой фазы, переопределяемое при решении подзадачи фильтрации, необходимо при решении подзадачи деформирования пористой среды (входит в соотношение для скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких (2.68), учитывающее взаимодействие газа и легочной ткани). В процессе решения выполняется обмен данными между подзадачами.

Введем обозначения. На текущем ( $n$ )-ом шаге по времени рассматривается решение на интервале  $[t_{n-1}, t_n]$ . Для всех переменных также будем использовать индекс ( $n$ ) для их значений в момент времени  $t_n$ . Решение задачи в скоростях ведется на срезе по времени  $t_{n-1}$  с использованием граничных условий (в скоростях) для этого же момента времени и значений переменных с конца предыдущего ( $n-1$ )-го шага (момента  $t_{n-1}$ ). По определенным на момент  $t_{n-1}$  скоростям изменения искомым параметрам интегрированием определяются значения параметров на момент  $t_n$ , которые в дальнейшем используются на следующем временном шаге.

Процессы деформации среды и фильтрации воздуха в пористой среде различаются по интенсивности и скорости распространения в пространстве. Как показали результаты предварительных расчетов, для решения подзадачи просачивания требуется использовать меньшие шаги по времени (дополнительный цикл по времени), чем для подзадачи деформирования. Использование более мелких шагов при решении подзадачи фильтрации

позволяет избежать скачков давления газовой фазы в элементах, связанных с изменением объема, повысить устойчивость и сходимость решения (что особенно заметно при использовании мелкой конечно-элементной сетки). При этом для решения подзадачи фильтрации используется переменный шаг по времени, зависящий от величины перепада давления газовой фазы. При достижении при решении подзадачи фильтрации момента времени, соответствующему концу шага, используемого при решении подзадачи деформации, цикл решения подзадачи фильтрации заканчивается.

Общий алгоритм решения задачи фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде легких представляет собой последовательное выполнение трех основных этапов (рисунок 4.2).

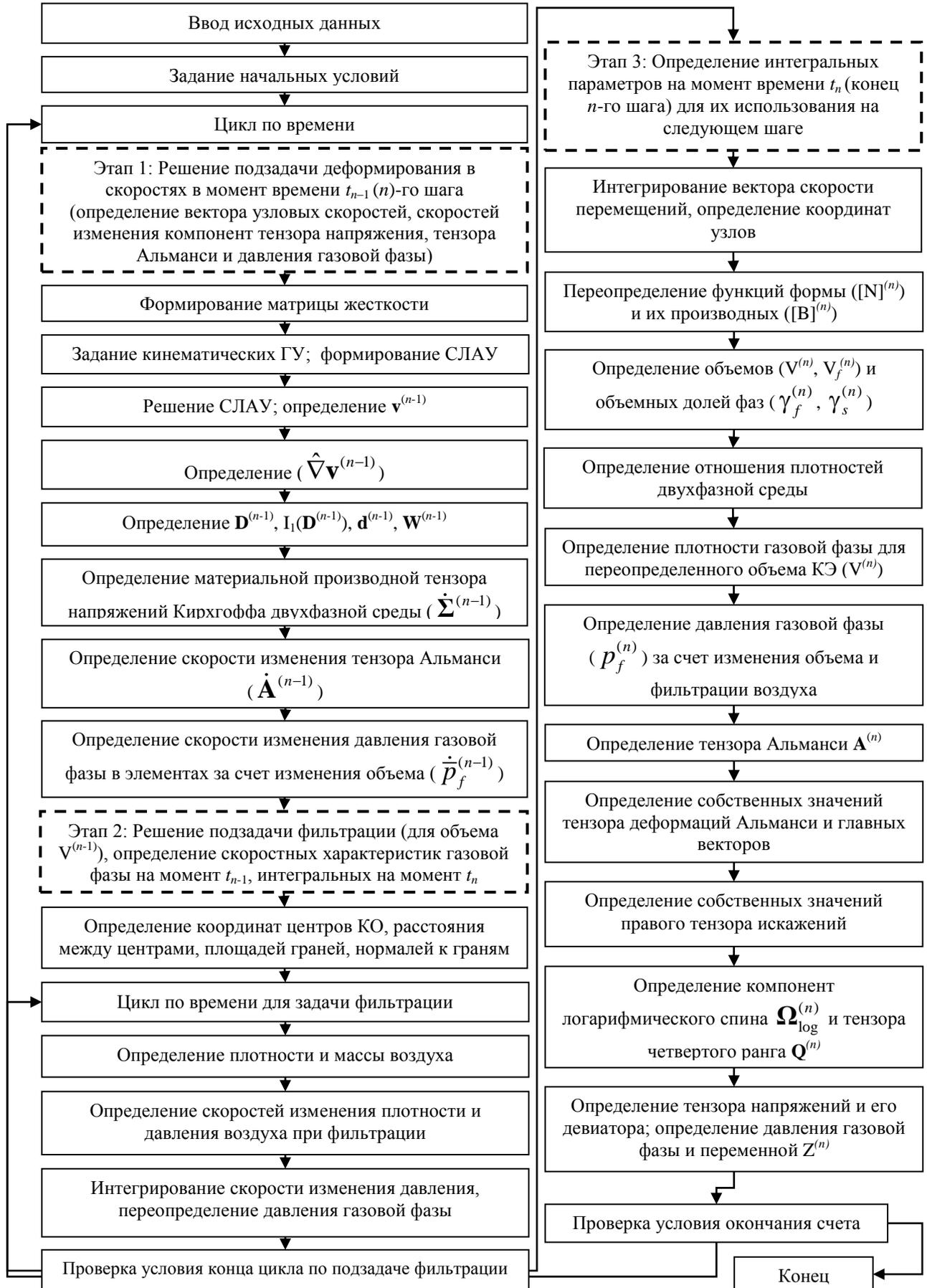


Рисунок 4.2 – Схема алгоритма реализации подмодели легких

Исходными данными для решения задачи фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде легких на начальный момент времени являются значения констант (упругие параметры легочной ткани (являются постоянными), проницаемость, давление и плотность газовой фазы, доля твердой фазы). Значения параметров приведены в таблице 5.1 раздела 5.1.

Кроме того, исходной информацией являются кинематические граничные условия, содержащие закон движения стенок на каждом временном шаге дыхательного цикла (приведен в разделе 4.3). Ниже при детальном описании алгоритма символы «^» и «o» над переменными, характеризующие отнесение переменных к текущей и отсчетной конфигурации соответственно при указании обозначений моментов времени опущены.

Перед началом расчетов выполняется задание начальных условий.

С использованием координат узлов и списка элементов определяется объем двухфазной среды  $V^{(0)}$  (где  $V$  – объем элемента, определяемый через координаты узлов). Для каждого элемента выполняется определение функций формы и их производных  $[B]^{(0)}$ .

Легочная ткань по разным оценкам занимает от 12,6% до 19% объема легких; доля воздуха в легких – от 81% до 87,4% [225, 130, 95, 150]. При расчетах в настоящей работе начальное значение объемной доли твердой фазы полагается равным 0,15 ( $\gamma_s^{(0)}$ ), газовой фазы (она же пористость) – 0,85 ( $\gamma_f^{(0)}$ ). На основе объемных долей фаз выполняется определение объемов твердой и газовой фазы ( $V_s^{(0)} = \gamma_s^{(0)}V^{(0)}$ ,  $V_f^{(0)} = \gamma_f^{(0)}V^{(0)}$ ). Объем твердой фазы (легочной ткани) меняется несущественно, в настоящей работе он полагается постоянным [124]. В дальнейшем информация об объеме твердой фазы в отсчетной конфигурации хранится и используется на всех временных шагах. Перемножая объем и плотность газовой фазы, определяется масса газовой фазы в элементе в начальный момент времени:  $m_f^{(0)} = \rho_f^{(0)}V_f^{(0)}$ .

В начальный момент времени (момент перехода от выдоха к вдоху), когда давление газовой фазы в легких равно давлению на входе и равно атмосферному, легочная ткань находится в естественном ненапряженном состоянии; компоненты шаровой и девиаторной части ( $\mathbf{S}$ ) тензора напряжений твердой фазы равны нулю. Тензор напряжений двухфазной среды определяется суммой шаровой составляющей и девиаторной, умноженной на долю твердой фазы. Девиаторная часть тензора напряжений, характеризующая изменение формы и зависящая от напряженного состояния легочной ткани, в отчетной конфигурации полагается равной нулевому тензору. Взвешенный тензор напряжения Кирхгоффа двухфазной среды в начальный момент времени определяется за счет шаровой части, основной вклад в которую вносит давление газа, находящегося в легких:

$$\Sigma^{(0)} = \Sigma_{cp}^{(0)} \mathbf{I}. \quad (4.1)$$

Соотношение для определения среднего напряжения тензора Коши было получено из решения вспомогательной задачи (приложение А, [216]) и имеет вид:

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{(A\hat{V}_f + B\hat{V})} [AB[\hat{V} - \hat{V}_f] \left(1 - \frac{\sqrt[3]{V_o^{(0)}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}\right) - C\hat{V}_f p_f]. \quad (4.2)$$

где  $A = (2\mu + 3\alpha)$ ,  $B = 4\mu$ ,  $C = (6\mu + 3\alpha)$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  – параметры Ламе твердой фазы

$$\left( \alpha = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right).$$

Отношение объемов в отчетной конфигурации равно 1 ( $\frac{\sqrt[3]{V_o^{(0)}}}{\sqrt[3]{\hat{V}^{(0)}}} = 1$ ), из чего

следует, что  $\left(1 - \frac{\sqrt[3]{V_o^{(0)}}}{\sqrt[3]{\hat{V}^{(0)}}}\right) = 0$  и соответственно член  $AB[\hat{V} - \hat{V}_f] \left(1 - \frac{\sqrt[3]{V_o^{(0)}}}{\sqrt[3]{\hat{V}^{(0)}}}\right) = 0$ .

Соотношение (4.2) примет вид:

$$\sigma_{cp}^{(0)} = -\frac{C\hat{V}_f^{(0)} p_f^{(0)}}{(A\hat{V}_f^{(0)} + B\hat{V}_f^{(0)})}. \quad (4.3)$$

Разделив числитель и знаменатель соотношения (4.3) на  $\hat{V}_f^{(0)}$ , выражение для среднего напряжения тензора Коши двухфазной среды в начальный момент времени примет вид:

$$\sigma_{cp}^{(0)} = -\frac{C\hat{V}_f^{(0)}p_f^{(0)}}{(A\hat{V}_f^{(0)} + B\hat{V})} = -\frac{C\frac{\hat{V}_f^{(0)}}{\hat{V}_f^{(0)}}p_f^{(0)}}{(A\frac{\hat{V}_f^{(0)}}{\hat{V}_f^{(0)}} + B\frac{\hat{V}_f^{(0)}}{\hat{V}_f^{(0)}})} = -\frac{Cp_f^{(0)}}{(A + B\frac{\hat{V}}{\hat{V}_f^{(0)}})} = -\frac{Cp_f^{(0)}}{(A + B\frac{1}{\gamma_f^{(0)}})}, \quad (4.4)$$

где  $\gamma_f^{(0)}$  – доля газовой фазы в начальный момент времени (она же пористость среды в отсчетной конфигурации).

Средние напряжения взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа и тензора напряжений Коши связаны через отношение плотностей в отсчетной и текущей конфигурациях ( $\Sigma_{cp} = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}}\sigma_{cp}$ ). В начальный момент времени  $\overset{\circ}{\rho} = \hat{\rho}^{(0)}$ ; среднее напряжение взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа равно среднему напряжению тензора Коши ( $\Sigma_{cp}^{(0)} = \sigma_{cp}^{(0)}$ ); отношение плотностей в разрешающем соотношении МКЭ (соотношение (3.53)) равно единице.

Начальное значение  $Z^{(0)}$  определяются соотношением (3.31) по заданным параметрам упругости легочной ткани, пористости материала, при давлении газовой фазы, равном атмосферному ( $p_f^{(0)} = p^{atm}$ ). В начальном недеформированном состоянии компоненты тензора деформации Альманси ( $\mathbf{A}^{(0)}$ ) равны нулю, собственные (главные) значения тензоров искажений, характеризующие отношение длин материальных отрезков в актуальной и отсчетной конфигурациях, равны 1. Компоненты тензора спина, а также компоненты тензора четвертого ранга  $\mathbf{Q}$  (определяемого соотношением (2.40)), при совпадении главных значений меры  $\mathbf{V}$  устанавливаются с раскрытием неопределенностей (соотношения (2.28)-(2.32)) и являются нулевыми.

Рассмотрим детально реализацию алгоритма на произвольном  $(n)$ -ом шаге по времени. Полагаем, что все параметры  $(Z, \Sigma, \mathbf{S}, \mathbf{Q}, [B])$ , объемы КЭ (двухфазной среды), объемы и объемные доли фаз) на момент начала данного шага  $t_{n-1}$  (конца предыдущего  $(n-1)$ -го шага) определены (при рассмотрении первого временного шага – из начальных условий).

1) На первом этапе алгоритма выполняется решение подзадачи деформирования 2-хфазного континуума в скоростях на момент времени  $t_{n-1}$  начала  $(n)$ -го шага. Результатом выполнения этапа являются определенные вектор-столбец узловых скоростей  $(\mathbf{v}^{(n-1)})$ , градиент вектора скорости перемещений 2-хфазной среды  $\hat{\nabla} \mathbf{v}^{(n-1)}$ , тензор деформации скорости  $\mathbf{D}^{(n-1)}$ , его первый инвариант  $(I_1(\mathbf{D}^{(n-1)}))$  и девиатор  $\mathbf{d}^{(n-1)}$ , тензор вихря  $\mathbf{W}^{(n-1)}$ , скорость изменения напряжения двухфазной среды  $(\dot{\Sigma}^{(n-1)})$ , скорость изменения тензора деформации Альманси  $\dot{\mathbf{A}}^{(n-1)}$  и скорость изменения давления газовой фазы за счет изменения объема пористой среды  $(\dot{p}_f^{(n-1)})$ .

На основе разрешающего соотношения МКЭ (соотношение (3.53)) с использованием значений переменных  $(Z, \Sigma, \mathbf{S}, \mathbf{Q}, [B])$  и кинематических ГУ на начало текущего  $(n)$ -ого шага (для среза времени  $t_{n-1}$ ) формируется матрица жесткости и вектор правой части.

При формировании матрицы жесткости обычно используют два варианта задания кинематических граничных условий. В первом варианте соответствующие члены матрицы жесткости умножаются на известные узловые скорости и переносятся в правую часть (переопределяется вектор узловых сил), после чего строки и столбцы из матрицы жесткости, соответствующие известным скоростям перемещений, удаляются. При этом число уравнений будет равно утроенному числу узлов минус количество компонент узловых перемещений, заданных на границе. Для реализации указанного способа необходимо удалять соответствующие строки и столбцы системы линейной алгебраических уравнений

(СЛАУ), в связи с чем возникают дополнительные трудности при программной реализации.

Будем использовать второй вариант задания кинематических условий: для узловой переменной, для которой задано значение компоненты кинематического ГУ (компонента скорости перемещения), диагональный член заменяется единицей, недиагональные члены – нулями, а в векторе правых частей соответствующий член заменяется на заданную узловую скорость перемещения, после чего решается полная система уравнений. Число уравнений при использовании МКЭ в объемной постановке равно утроенному числу узлов. В полученном решении скорость в узлах, принадлежащих границе, является с высокой точностью соответствующей (практически равной) заданным граничным условиям.

В результате формируется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида  $[K]\{v\}=\{F\}$ . СЛАУ состоит из  $3R$  линейаризованных уравнений ( $R$  – число узлов, для каждого из которых необходимо определить 3 компоненты вектора скорости перемещений).

Получаемая матрица жесткости является разреженной. Для решения СЛАУ с целью экономии вычислительных ресурсов необходимо использовать методы решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений.

Разработанный алгоритм позволяет использовать любой метод решения СЛАУ. Тестирование алгоритмов выполнялось как с помощью прямых, так и с помощью итерационных методов решения (с использования метода LU-разложения на нижнюю (L) и верхнюю (U) треугольные матрицы, метода сопряженных градиентов, метода бисопряженных градиентов). Вопрос выбора метода решения СЛАУ зависит от результатов анализа устойчивости и сходимости решения, размеров конечно-элементной сетки, затрачиваемых временных ресурсов. Предварительный анализ показал, что задача обладает существенной вычислительной сложностью, для решения рекомендуется использовать технологию параллельных вычислений. Выбор метода решения

СЛАУ зависит также от выбора того, с использованием каких элементов ЭВМ решается задача (процессор (CPU) или видеокарта (GPU)). При реализации алгоритма в виде программы для решения СЛАУ в финальном варианте использовался метод бисопряженных градиентов для разреженных матриц с помощью технологий распараллеливания на многоядерном процессоре.

В результате решения СЛАУ для подзадачи деформирования 2-хфазного континуума в скоростях на первом этапе алгоритма определяется вектор среднemasсовой скорости двухфазной среды  $\mathbf{v}^{(n-1)}$  (который в силу малости массы воздуха с высокой степенью точности примерно равен вектору скорости частиц твердой фазы; при этом малым является и вклад от скорости просачивания воздуха) во всех узлах рассматриваемой области по трем компонентам (по трем направлениям  $x_1, x_2, x_3$ ).

На основе найденных компонент вектора скорости перемещений двухфазной среды  $\mathbf{v}^{(n-1)}$  и производных функций формы  $[\mathbf{B}]^{(n-1)}$  выполняется определение компонент градиента вектора скорости перемещение 2-хфазной среды  $\hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)}$ . С использованием последнего в дальнейшем по соотношению (2.65)

$(\mathbf{D}^{(n-1)} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)} + \mathbf{v}^{(n-1)}\hat{\nabla}))$  для каждого элемента определяются компоненты

тензора деформации скорости  $\mathbf{D}^{(n-1)}$ , его первый инвариант  $(I_1(\mathbf{D}^{(n-1)}))$  и

компоненты его девиатора  $\mathbf{d}^{(n-1)}$  ( $\mathbf{d}^{(n-1)} = \mathbf{D}^{(n-1)} - \frac{1}{3}I_1(\mathbf{D}^{(n-1)})\mathbf{I}$ ); по соотношению

(2.66) определяется тензор вихря  $\mathbf{W}^{(n-1)}$  ( $\mathbf{W}^{(n-1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{(n-1)}\hat{\nabla} - \hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)})$ ).

Подставляя соотношение для скорости изменения среднего напряжения (3.30) в соотношение (2.63), получим соотношение для определения материальной производной тензора напряжений Кирхгоффа вида:

$$\dot{\Sigma}^{(n-1)} = I_1(\mathbf{D}^{(n-1)})Z^{(n-1)}\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}^{(n-1)}\hat{\gamma}_s^{(n-1)} + \mathbf{\Omega}_{\log}^{(n-1)} \cdot \mathbf{S}^{(n-1)} - \mathbf{S}^{(n-1)} \cdot \mathbf{\Omega}_{\log}^{(n-1)}. \quad (4.5)$$

Подставляя в соотношение (4.5) переменные с конца предыдущего  $(n-1)$ -го шага по времени  $(Z^{(n-1)}, \hat{\gamma}_s^{(n-1)}, \mathbf{\Omega}_{\log}^{(n-1)}, \mathbf{S}^{(n-1)})$ , а также вычисленные первый инвариант тензора деформации скорости  $I_1(\mathbf{D}^{(n-1)})$  и  $\mathbf{d}^{(n-1)}$  определяется  $\dot{\Sigma}^{(n-1)}$ .

На основе вычисленного градиента вектора скоростей перемещения  $\hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)}$  и значения тензора деформации Альманси с конца предыдущего  $(n-1)$ -го шага по времени  $\mathbf{A}^{(n-1)}$  по соотношению (2.73) определяется скорость изменения тензора Альманси:

$$\dot{\mathbf{A}}^{(n-1)} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^{T(n-1)}) - (\hat{\nabla}\mathbf{v}^{(n-1)} \cdot \mathbf{A}^{(n-1)} + \mathbf{A}^{(n-1)} \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v}^{T(n-1)}). \quad (4.6)$$

В изменении давления воздуха в легких можно выделить две составляющие: первая – изменение давления за счет изменения объема легких в процессе деформирования, вторая – изменение давления воздуха за счет перетекания воздуха между участками легких и ВП. В алгоритме решения связанной задачи деформирования пористой среды легких и фильтрации воздуха через нее решаются последовательно. Скорость изменения давления воздуха за счет изменения объема (обозначаемая как  $\dot{p}_f$ ) определяется на первом этапе реализации алгоритма по вычисленному первому инварианту тензора деформации скорости. Для установления связи  $\dot{p}_f$  со скоростью изменения объема используются следующие рассуждения.

На каждом малом интервале времени массу газа, присутствующего в альвеолах, можно считать постоянной; при изотермических условиях  $p_f \hat{V}_f = const$  (или  $p_f \hat{\rho}_f^{-1} = const$ ). С использованием закона Бойля-Мариотта изменение давления воздуха можно определять как функцию от изменения объема (или изменения плотности) газовой фазы:

$$\frac{\dot{p}_f}{p_f} = -\frac{\dot{\hat{V}}_f}{\hat{V}_f}, \text{ или } \frac{\dot{p}_f}{p_f} = \frac{\dot{\hat{\rho}}_f}{\hat{\rho}_f}. \quad (4.7)$$

Из соотношения (2.45) определяется  $I_1(\mathbf{D}) = \frac{d\hat{V}}{d\hat{V}}$ . Объем твердой фазы полагается постоянным, изменение объема 2-хфазного континуума обусловлено изменением объема воздушной фазы:

$$I_1(\mathbf{D}) = \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \approx \frac{\dot{\hat{V}}_f}{\hat{V}_f}. \quad (4.8)$$

Из соотношения (4.8) скорость изменения объема воздуха вычисляется как:

$$\frac{\dot{\hat{V}}_f}{\hat{V}_f} = I_1(\mathbf{D}) \frac{\hat{V}}{\hat{V}_f} = \frac{I_1(\mathbf{D})}{\hat{\gamma}_f}. \quad (4.9)$$

На основе соотношений (4.7) и (4.9) скорость изменения давления воздуха, обусловленного изменением объема ( $\dot{\hat{p}}_f$ ), можно определить как:

$$\frac{\dot{\hat{p}}_f}{p_f} = -\frac{I_1(\mathbf{D})}{\hat{\gamma}_f}. \quad (4.10)$$

По вычисленному первому инварианту тензора деформации скорости, значению давления газовой фазы и доли газовой фазы определяется скорость изменения давления газовой фазы за счет изменения объема:

$$\dot{\hat{p}}_f^{(n-1)} = -\frac{I_1(\mathbf{D}^{(n-1)})}{\hat{\gamma}_f^{(n-1)}} p_f^{(n-1)}. \quad (4.11)$$

2) На втором этапе алгоритма выполняется решение подзадачи фильтрации (для объема  $V^{(n-1)}$ ), определение скоростных характеристик изменения параметров газовой фазы на момент  $t_{n-1}$ , их интегрирование и определение параметров на момент  $t_n$ . Исходной информацией для данного этапа являются определенные на конец предыдущего  $(n-1)$ -го шага координаты узлов, давление воздушной фазы в элементах ( $p_f^{(n-1)}$ ), плотность ( $\rho_f^{(n-1)}$ ), пористость среды ( $\gamma_f^{(n-1)}$ ) и объем двухфазной среды ( $V^{(n-1)}$ ). В области входа в легкие задаются силовые граничные условия: давление воздушной фазы равно атмосферному, касательные компоненты тензора напряжений являются нулевыми.

Временной интервал  $[t_{n-1}, t_n]$  ( $(n)$ -ый шаг по времени), равный одному шагу по времени при решении подзадачи деформирования, разбивается на  $K$  временных шагов по фильтрации ( $K_n \geq 1$ ). Для обозначения временного шага для решения подзадачи фильтрации будем использовать индекс  $k$ , который изменяется от 1 до  $K$  ( $k = \overline{1..K}$ ), где  $k=1$  соответствует момент  $t_{n-1}$ ,  $k=K - t_K = t_n$ .  $\Delta t^{(k)}$  –  $k$ -ый временной шаг (переменный) при решении задачи фильтрации,  $\sum_{k=1}^K \Delta t^{(k)} = t_n - t_{n-1}$ .

На момент времени  $t_{n-1}$  (перед началом цикла по времени для подзадачи фильтрации) на основе координат узлов вычисляются координаты центров КО; выполняется определение векторов  $\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}$ , соединяющих центры КО, а также их длин  $|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|$  (расстояние между центрами КО). На основе операции векторного произведения выполняется определение площадей граней КО ( $S_{(a)}^{(n-1)}$ ) и векторов, перпендикулярных к граням (вектор нормали  $\mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)}$ ). В дальнейшем конфигурация и вычисленные параметры считаются неизменными в течение всех  $K$  шагов по фильтрации (на интервале  $[t_{n-1}, t_n]$ ).

Далее начинается цикл решения подзадачи фильтрации, в процессе которого с использованием пошаговой процедуры последовательно выполняются вычисления с использованием соотношений (4.12)-(4.16). Указанные ниже вычисления производятся для каждого элемента (или КО). Указанные соотношения относятся к одному ( $n$ )-ому шагу подзадачи деформации (индекс  $n$  в них опущен).

С использованием соотношения (3.63) на основе начальных и ГУ для воздушной фазы выполняется определение плотности газовой фазы на  $k$ -ом шаге в КО:

$$\rho_f^{(k)} = \sum_{(a)} \left[ \left( -\rho_f^{(k-1)} \frac{\mathbf{k}(\hat{\mathbf{H}})}{\mu_f} \cdot \frac{p_{fA(a)}^{(k-1)} - p_{fC(a)}^{(k-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \frac{\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}}{|\mathbf{e}_{CA(a)}^{(n-1)}|} \right) \cdot \mathbf{n}_{(a)}^{(n-1)} S_{(a)}^{(n-1)} \right] \frac{\Delta t^{(k)}}{\gamma_f^{(n-1)} V^{(n-1)}} + \rho_f^{(k-1)}. \quad (4.12)$$

Тетраэдральный элемент имеет четыре грани, через которые в элемент может поступать воздух. При этом через грани КО, являющихся стенками легких, движение воздуха не происходит, таким способом учитывается условие непроницаемости воздуха через стенки легких (на границе  $\Gamma_{II}$ ). Значение индекса  $k$ , равное нулю, соответствует параметрам на начало шага (момент  $t_{n-1}$ ).

С использованием вычисленных плотности воздуха и объема КО рассчитывается масса газа в каждом КО:

$$m_f^{(k)} = V_f^{(n-1)} \rho_f^{(k)}. \quad (4.13)$$

Производная плотности воздуха вычисляется как конечная разность:

$$\dot{\rho}_f^{(k-1)} = \frac{\rho_f^{(k)} - \rho_f^{(k-1)}}{\Delta t^{(k)}}. \quad (4.14)$$

На основе соотношения (2.54) выполняется определение скорости изменения давления газовой фазы в КО:

$$\dot{\tilde{p}}_f^{(k-1)} = \frac{\dot{\rho}_f^{(k-1)}}{M_f} R \theta_f, \quad (4.15)$$

где  $\dot{\tilde{p}}_f$  – скорость изменения давления газовой фазы за счет фильтрации воздуха.

Скорость движения газовой фазы определяется по соотношению (2.76); поток (массовый расход) (P) газовой фазы вычисляется как произведение плотности, скорости и площади общей грани между соседними элементами.

Интегрируя скорости изменения давления воздуха за счет фильтрации, переопределяются значения давления газовой фазы в контрольных объемах на конец текущего шага решения подзадачи фильтрации:

$$\tilde{p}_f^{(k)} = \tilde{p}_f^{(k-1)} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\tilde{p}}_f^{(k-1)} d\xi. \quad (4.16)$$

где  $\tilde{p}_f$  – давление газовой фазы, пересчитанное с учетом вклада фильтрационной составляющей.

На первый временной шаг по фильтрации (при  $k=1$ ) давление газовой фазы соответствует давлению с конца предыдущего/начало текущего шага ( $\tilde{p}_f^{(k-1)} = \tilde{p}_f^{(0)} = p_f^{(n-1)}$ ).

В результате выполнения этапа (окончания пошаговой процедуры для фильтрации ( $t_k=t_n$ )) определяются скорость изменения плотности ( $\dot{\rho}_f^{(n-1)}$ ), скорость изменения давления газовой фазы за счет фильтрации воздуха ( $\dot{p}_f^{(n-1)}$ ), плотность ( $\rho_f^{(n)}$ ), масса ( $m_f^{(n)}$ ) газовой фазы, давление газовой фазы с учетом вклада фильтрационной составляющей ( $\tilde{p}_f^{(n)}$ ) на конец текущего шага решения подзадачи фильтрации, скорость газовой фазы ( $v_f^{(n-1)}$ ) и поток (массовый расход) ( $P_f^{(n-1)}$ ).

3) На третьем этапе реализации алгоритма выполняется определение интегральных параметров на момент времени  $t_n$  (конец  $n$ -го шага) для их использования на следующем шаге. На основе рассчитанного вектора скорости перемещений выполняется вычисление приращения перемещений за временной шаг ( $\mathbf{u}^{(n)}=\mathbf{v}^{(n)}\Delta t$ ) и координат узлов ( $\mathbf{x}^{(n)}=\mathbf{x}^{(n-1)}+\mathbf{v}^{(n)}\Delta t$ ). Далее с использованием переопределенных координат выполняется пересчет производных функций формы  $[V]^{(n)}$  и определяется объем двухфазной среды  $V^{(n)}$ .

По рассчитанному объему двухфазной среды выполняется определение объемной доли твердой фазы ( $\gamma_s^{(n)}$ ) по соотношению:

$$\gamma_s^{(n)} = \frac{V_s^{(0)}}{V^{(n)}}; \quad (4.17)$$

вычисление объемной доли газовой фазы выполняется по соотношению:

$$\gamma_f^{(n)} = 1 - \gamma_s^{(n)}; \quad (4.18)$$

определение объема газовой фазы производится по соотношению:

$$V_f^{(n)} = \gamma_f^{(n)}V^{(n)}. \quad (4.19)$$

Пересчет отношения плотностей двухфазной среды в текущей и отсчетной конфигурациях  $\left(\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)$  в каждом элементе (при пренебрежении изменением массой воздуха на малом временном интервале), используемое в разрешающем соотношении МКЭ, выполняется по соотношению:

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho} = \frac{V^{\circ}}{\hat{V}}, \quad \frac{\rho^{(n)}}{\rho^{(0)}} = \frac{V^{(0)}}{V^{(n)}}. \quad (4.20)$$

После переопределения объемов выполняется переопределение плотности газовой фазы в каждом КО:

$$\rho_f^{(n)} = \frac{m_f^{(n)}}{V_f^{(n)}}. \quad (4.21)$$

С помощью операции интегрирования скорости изменения давления газовой фазы за счет изменения объема  $(\dot{p}_f^{(n-1)})$ , прибавляя к давлению газовой фазы, пересчитанному с учетом вклада фильтрационной составляющей  $(\tilde{p}_f^{(n)})$ , выполняется переопределение значения давления в КО по соотношению:

$$p_f^{(n)} = \tilde{p}_f^{(n)} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \dot{p}_f^{(n-1)} d\xi. \quad (4.22)$$

Интегрируя скорость изменения тензора деформации Альманси и суммируя приращения (покомпонентно в базисе ЛСК) с тензором Альманси с конца предыдущего (начало текущего шага по времени) определяем тензор деформации

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n-1)} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \dot{\mathbf{A}}^{(n)} d\xi.$$

Для тензора деформаций Альманси решается задача на нахождение собственных значений (соотношение (2.11)): выполняется нахождение собственных значений тензора Альманси  $A_i$  на момент времени  $t_n$  и соответствующие им главные векторы  $\mathbf{p}_i$ ,  $A_i \in (-\infty, 1/2)$ . Собственные значения

нумеруются в порядке убывания ( $1-e$  – максимальное алгебраическое); нумерация векторов привязана к нумерации собственных значений.

Тензор логарифмических деформаций можно определить через тензор Альманси по соотношению:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(1-2A_i) \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^3 \ln(1-2A_i)^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{p}}^i \hat{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i(\hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{p}}_i). \quad (4.23)$$

Собственные значения правого тензора искажения  $\lambda_i$  могут быть определены через собственные значения тензора Альманси по соотношению (2.10):

$$\lambda_i = (1-2A_i)^{-\frac{1}{2}}, \quad A_i \in (-\infty, \frac{1}{2}), \lambda_i > 0. \quad (4.24)$$

Нумерация собственных значений тензоров искажения соответствует нумерации собственных значений тензора Альманси.

После определения главных векторов  $\hat{\mathbf{p}}_i$  выполняется определение компонент матрицы косинусов углов между базисными векторами  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{p}_j$  (соотношение (2.17)).

По определенным собственным значениям тензоров искажения и компонентам матрицы косинусов определяются компоненты тензора  $\mathbf{Q}^{(n)}$  (по соотношению (2.40)); с использованием тензора деформации скорости, тензора вихря, относительных удлинений на основе соотношения (2.70) вычисляются компоненты логарифмического спина  $\mathbf{\Omega}_{\log}^{(n)}$ .

С использованием соотношения (3.31) выполняется определение переменной  $Z^{(n)}$ , учитывающей взаимодействие газа и легочной ткани:

$$\begin{aligned} Z^{(n)} = & \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A \hat{\gamma}_f^{(n)} + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f^{(n)}) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}) - Cp_f^{(n)} (\hat{\gamma}_f^{(n)} + 1)] - \\ & - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A \hat{\gamma}_f^{(n)} + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f^{(n)}) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}) - C \hat{\gamma}_f^{(n)} p_f^{(n)}] + \left( \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} \right)^2 [A \hat{\gamma}_f^{(n)} + B]^{-1} Cp_f^{(n)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа ( $\Sigma^{(n)}$ ) переопределяется интегрированием:

$$\Sigma^{(n)} = \Sigma^{(n-1)} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \dot{\Sigma}^{(n-1)} d\xi. \quad (4.26)$$

Девиатор взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа  $S^{(n)}$  определяется по соотношению:

$$S^{(n)} = \Sigma^{(n)} - \frac{1}{3} I_1(\Sigma^{(n)}) \mathbf{I}; \quad (4.27)$$

Далее осуществляется переход на следующий временной шаг.

### **4.3 Алгоритм построения трехмерной геометрии воздухопроводящих путей и легких человека и закон изменения формы легких**

Исследование процесса течения воздуха в ВП и легких человека выполняется численно на основе трехмерной геометрии рассматриваемых участков ДС, восстановленной на основе данных компьютерной томографии (КТ). Рассматривая область ВП включает в себя носовую полость, глотку (включающую в себя носовую, ротовую и гортанную части), гортань, трахею и 5 генераций бронхов (в англоязычной литературе обозначаются как G0-G5).

При построении геометрии ВП опирались на открытые источники информации, медицинские справочники и консультации со специалистами (практикующими врачами). Итоговая трехмерная геометрия среднестатистического взрослого человека, не имеющего патологий органов дыхания, была получена на основе объединения геометрии трех областей: 1) носовой полости, 2) глотки и гортани, 3) трахеи и 5 генераций бронхов. Обработка и объединение геометрий была выполнена в программном продукте Blender.

Для построения геометрии носовой полости использовалась поверхностная сетка усредненной геометрии правой части носовой полости (в формате stl),

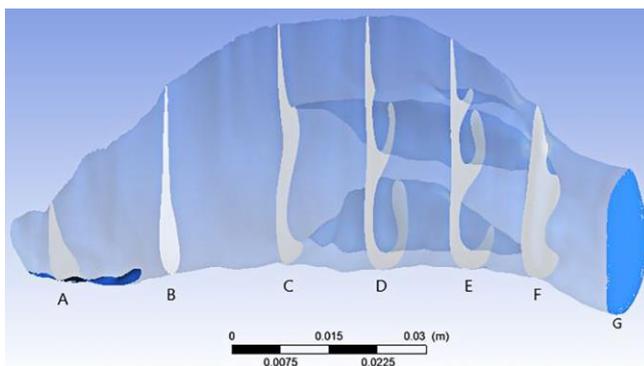
полученная коллективом ученых из Канады на основе набора из 60 томографических снимков носовой полости (30 правых и 30 зеркально отображенных левых частей носовой полости) 30 здоровых взрослых людей, не имеющих анатомических аномалий [170]. Синим цветом на рисунке 4.3а слева отображена область входа в ВП (ноздря, граница  $\Gamma_{ВП}^{АТМ}$  (граница ВП с окружающей средой)). Внутренняя область правой (и левой) частей носовой полости сначала разделяется на три канала – носовых хода (верхний, средний и нижний), которые затем объединяются в общий канал. Выходом из носовой полости является хоана (сечений G на рисунке 4.3а справа). Усредненная геометрия правой части носовой полости (рисунок 4.3а) и ее зеркальное отображение относительно носовой перегородки были плавно соединены с глоткой.

Трехмерная геометрия глотки и гортани были построены на основе опубликованных в медицинском атласе снимков компьютерной томографии [38] (рисунок 4.3б). Данный участок ВП моделируется изогнутым каналом с переменными поперечными сечениями в форме эллипса (выделен желтой штриховой линией на рисунке 4.3б). При построении данного участка ВП размеры канала масштабировались для согласования с размерами расположенного выше участка тракта (носовой полости) и нижележащего участка (трахеи). Подобный подход был использован в работе [109], посвященной созданию идеализированной геометрии носоглотки пациентов, у которых отсутствует информация об анатомии носоглотки, для численного моделирования течения воздуха, а также в работах [245; 154] при моделировании глотки и гортани. В работе [109] показано, что результаты по скорости воздушного потока, тепловым потокам для созданной идеализированной геометрии носоглотки, построенной на основе набора эллипсов в поперечном сечении, хорошо согласуются с результатами, полученными для персонализированной геометрии 10 пациентов.

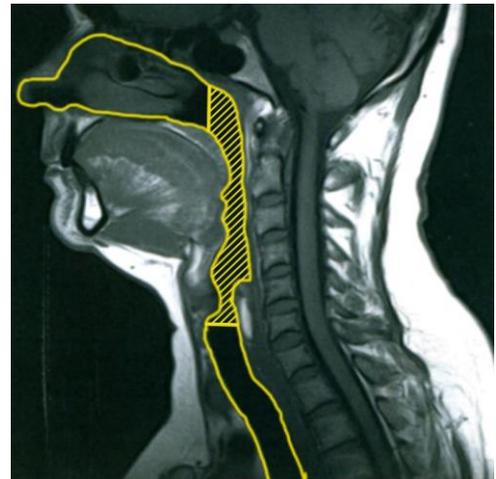
Трехмерная геометрия трахеи и пяти генераций ВП, полученная на основе КТ снимков, была взята в виде стереолитографического файла (с форматом stl) с

сайта института The Pennsylvania State University (PennState) (<https://www.engr.psu.edu/msmlung/#>) (рисунок 4.4а). В процессе обработки было выполнено сглаживание шероховатости исходной поверхности и выполнено ее объединение с построенной геометрией гортани.

Полученная итоговая трехмерная геометрия ВП представлена на рисунке 4.4б. Форма и размеры представленной геометрии соответствует физиологическим нормам среднестатистического взрослого человека [58; 56]. На основе полученной геометрии выполнялось построение объемной конечно-элементной сетки.



а)



б)

Рисунок 4.3 – Усредненная трехмерная геометрия правой части носовой полости человека [170] (а); томографический снимок верхних дыхательных путей (в саггитальной плоскости) [38] (б)

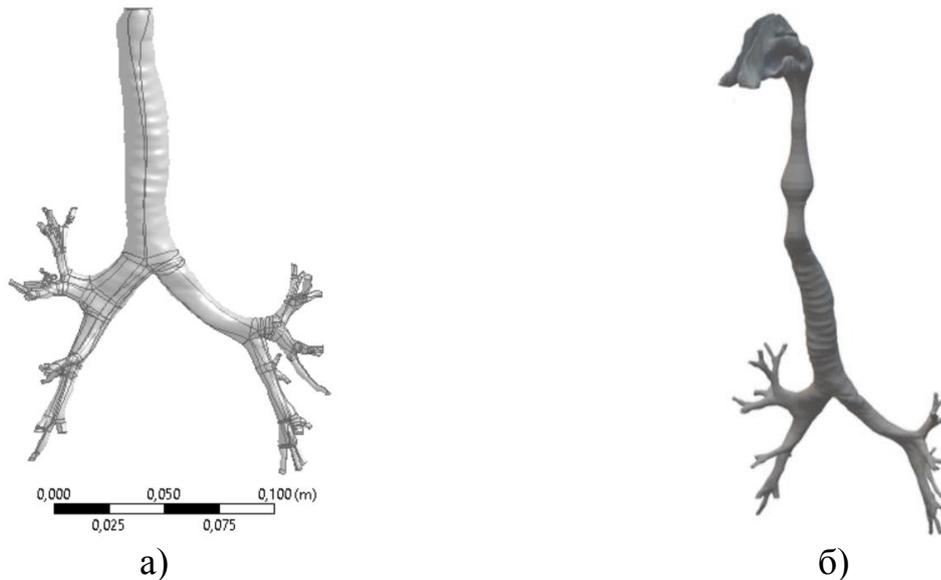


Рисунок 4.4 – Трехмерная геометрия воздухопроводящих путей от трахеи до пятой генерации бронхов (G0-G5) в аксонометрии (вид спереди) (а) [220]; итоговая построенная трехмерная геометрия участка воздухопроводящих путей от носовой полости до пятой генерации бронхов (G0-G5) (б)

Восстановление трехмерной геометрии легких выполнялось на основе данных КТ [82]. Медицинские КТ изображения легких были взяты из открытой базы данных I-ELCAP («International Early Lung Cancer Action Program»)[220]. Обработка исходного набора двумерных КТ изображений легких в различных плоскостях (в формате DICOM («Digital Imaging and Communications in Medicine» с расширением «.dcm»)), реализация процедуры сегментации и построение 3D формы было выполнено с использованием программного приложения с открытым доступом ITK-SNAP [240]. Снимки легких в аксиальной, корональной и сагиттальной плоскостях приведены на рисунках 4.5а-4.5в. На рисунке 4.5г изображена 3D геометрия легких, полученная в результате выполнения сегментации.

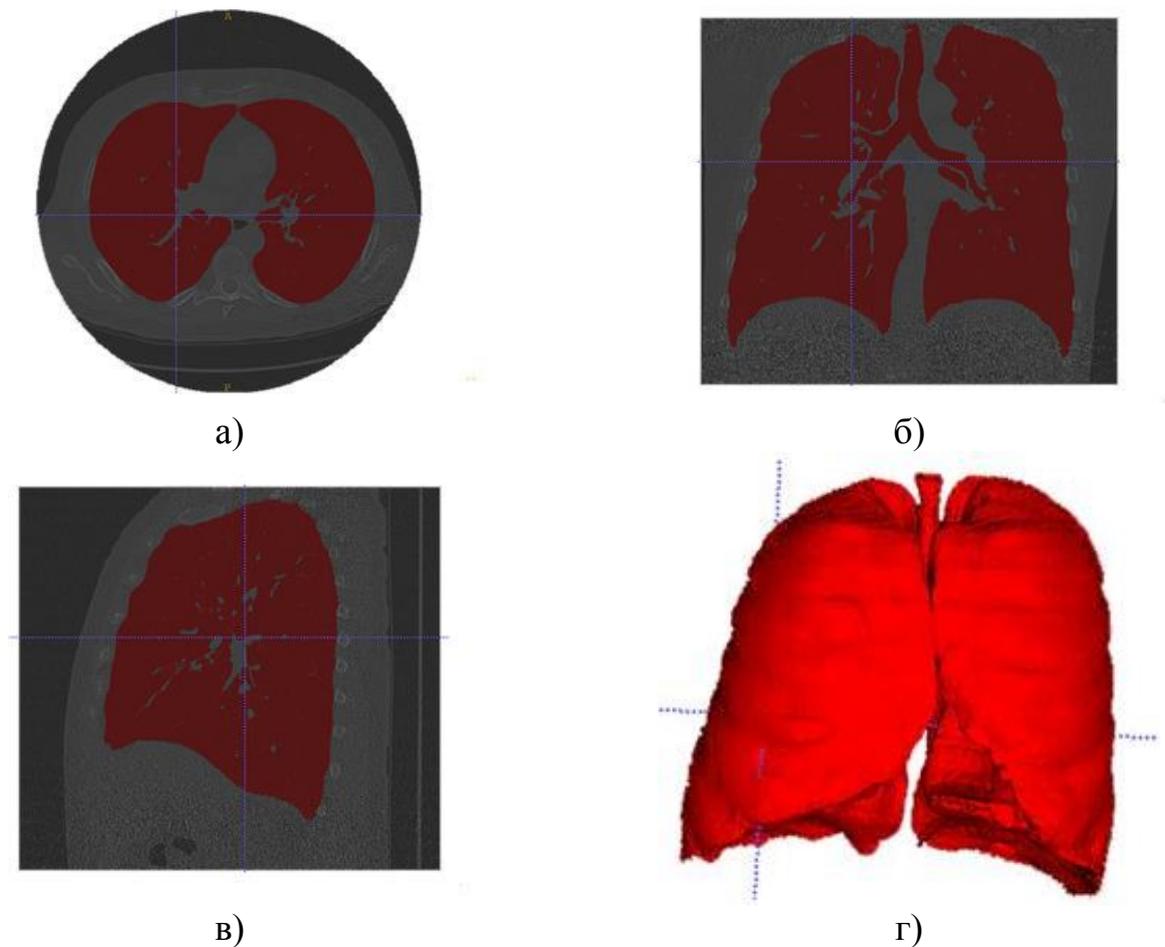


Рисунок 4.5 – Изображение легких: в аксиальной плоскости (а); в коронарной плоскости (б); в сагиттальной плоскости (в); трехмерное изображение сегментированных легких (вид спереди) (г)

Поверхностная сетка полученной геометрии была экспортирована в виде стереолитографического файла (с расширением «.stl») и в дальнейшем обработана с использованием графического редактора Blender. В ходе обработки геометрии из внутренней области легких были исключены внутрилегочные сегменты ВП и проведено сглаживание поверхности легких. Трехмерная геометрия легких до и после обработки сглаживанием представлена на рисунках 4.6а, 4.6б.

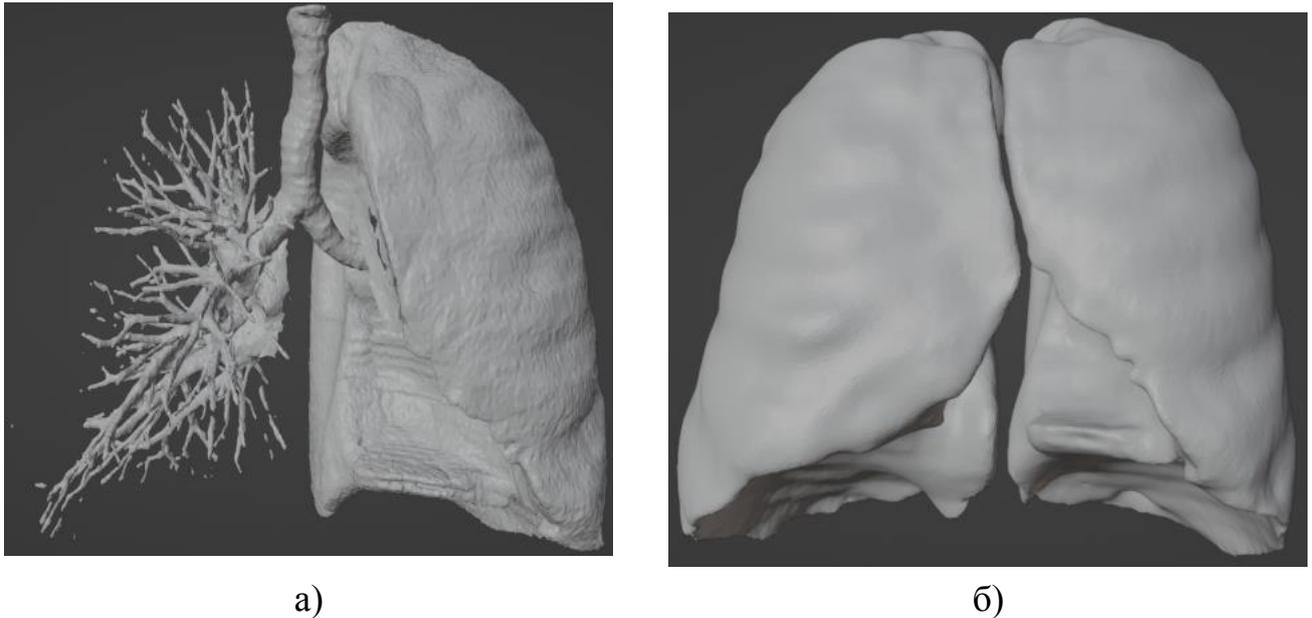


Рисунок 4.6 – Восстановленная трехмерная форма легких: до обработки (а), после обработки сглаживанием (б)

Далее было выполнено объединение восстановленной трехмерной геометрии легких (рисунок 4.6б) и ВП (рисунок 4.4б). Итоговая полученная геометрия дыхательной системы, состоящая из ВП и легких, представлена выше на рисунке 2.1 в разделе 2.1. С помощью пересечения геометрии ВП и легких были определены области внутрилегочных участков бронхов; в дальнейшем данные области были исключены из внутренней области геометрии легких (для моделирования относительного течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде легких).

С использованием поверхностной сетки легких с помощью инженерного программного продукта Ansys (модуль ICEM CFD) выполнялось построение объемной конечно-элементной сетки. На рисунках 4.7а и 4.7б представлены построенная объемная конечно-элементная сетка ВП и легких человека, используемые при расчетах течения воздуха и оседания частиц в ВП (с помощью инженерного пакета) и фильтрации воздуха в деформируемых легких (с использованием разработанного комплекса программ). Конечно-элементная сетка

для исследования течения воздуха в ВП содержит 4,93 млн элементов, легких – 37 тыс. элементов.

Каждый конечный элемент сплошной двухфазной среды легких соответствует выбранному представительному объему и содержит достаточное для статистического описания число «носителей» рассматриваемых механизмов процесса ( $10^3$ – $10^5$  альвеол). Использование более мелкой сетки при исследовании течения воздуха в ВП обусловлено их более сложной, протяженной, разветвленной геометрией с множеством изгибов и различными сечениями каналов, необходимостью детального описания течения воздуха (многофазной смеси газа и пылевых частиц) в сложной системе каналов ВП реальной формы и решения задачи по оценке оседания пылевых частиц в ВП (решение которой, как показал анализ, существенно зависит от количества элементов в сетке). Следует отметить, что в схожих исследованиях, рассматривающих течение многофазной смеси воздуха и оседание частиц в аналогичном участке ВП (при стационарном режиме дыхания), использовалась сетка, состоящая из 3,87 млн. элементов [190] и 4,2 млн. элементов [188].

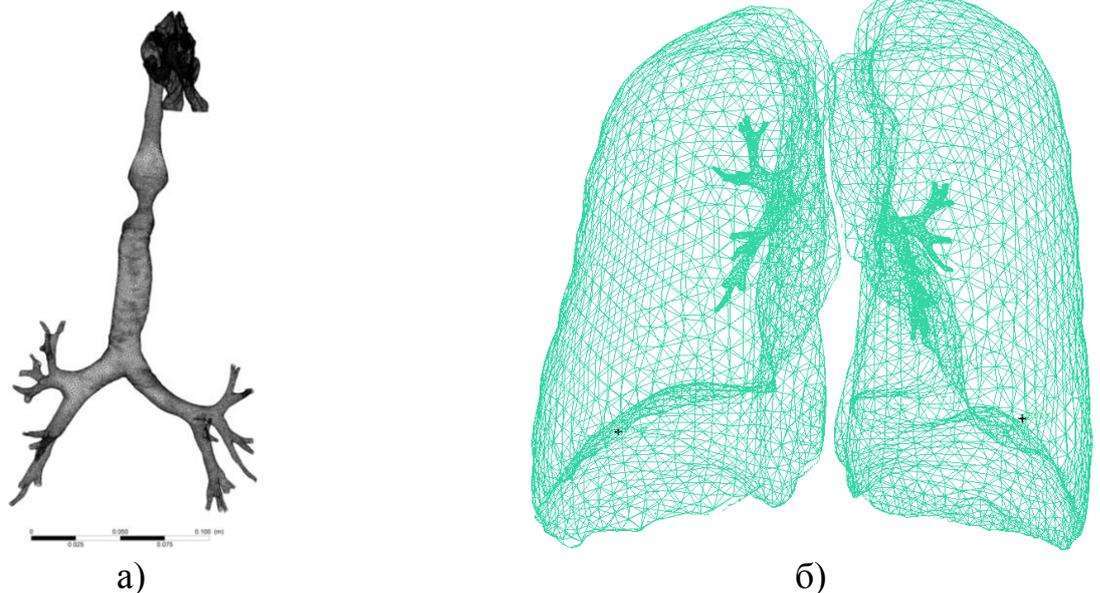


Рисунок 4.7 – Объемная конечно-элементная сетка: воздухоносных путей (а); легких человека (б)

В разрабатываемой модели на стенках легких (граница  $\Gamma_L$ ) предполагается использовать ГУ кинематического типа (закон движения стенок легких в скоростях перемещений). В изменении формы можно выделить две основные составляющие (два механизма) – грудное дыхание за счет расширения/сжатия грудной клетки и диафрагмальное (брюшное) дыхание за счет движения диафрагмы. При этом наибольшие градиенты перемещений наблюдаются в направлении движения диафрагмы, функционирование которой обеспечивает 2/3 вентиляции воздуха в легких [22, 40].

Наиболее детальное физиологическое персонализированное описание изменения конфигурации легких может быть получено на основе 4D-КТ ( $4D=3D+t$ ) – тип компьютерной томографии, сохраняющей информацию о трехмерной конфигурации легких в различные моменты дыхательного цикла [229, 126, 227, 113]. К сожалению, исходные данные 4D-КТ для процесса дыхательного цикла не удалось обнаружить в открытом доступе. Для моделирования движения стенок легких использовались граничные условия, обеспечивающие физиологические интегральные характеристики при спокойном дыхании – «экскурсию» грудной клетки (разницу между показателями окружности грудной клетки на вдохе и выдохе), смещение купола диафрагмы в процессе дыхания, изменение объема воздуха в процессе дыхания, полученные на основе обзора результатов медицинских исследований.

В качестве исходного состояния (момент времени  $t=0$  с) (принимая гипотезу о пренебрежении инерцией потока газа в начальный момент времени) рассматривается момент «конец выдоха – переход к вдоху», когда течение воздуха останавливается перед сменой направления движения, давление воздуха во всей области легких однородно и равно атмосферному. Стенки легких двигаются в  $(Ox_1x_2)$  и  $(Ox_1x_3)$  плоскостях (рисунок 4.8а) во время дыхания. В процессе спокойного дыхания экскурсия грудной клетки равна 2-3 см [55], при максимальном вдохе и выдохе – 6-8 см [33], 7-8,5 см [55]. При этом в зависимости

от координаты ( $x_3$ ) смещение в плоскости  $Ox_1x_2$  не равномерно. В области вершины легкого наблюдается наименьшее изменение формы, по мере приближения к основанию легкого амплитуда движения увеличивается. Так, изменение окружности (экскурсия) грудной клетки в районе подмышечной впадины составляет в среднем примерно 3,52 см у мужчин, у женщин – около 3,19 см, в области 3-4 межреберного пространства – 4,02 см у мужчин и 3,71 см у женщин, на уровне мечевидного отростка (нижнего края грудины) – 4,52 см у мужчин, 4,12 см у женщин [159]. Величина окружности грудной клетки различается для людей разного возраста, конституции и пола человека. У мужчин возраста 18 лет она находится в диапазоне  $90,20 \pm 5,24$ , для возраста 26-30 лет –  $92,24 \pm 4,94$  см; у женщин возраста 18 лет равна примерно  $84,08 \pm 4,38$  см, в возрасте 26-30 лет –  $85,32 \pm 4,72$  см [49]. С учетом указанных данных «степень расширения грудной клетки» (а также легких) в процессе дыхательного цикла находится в диапазоне 2-4,5% от исходного состояния.

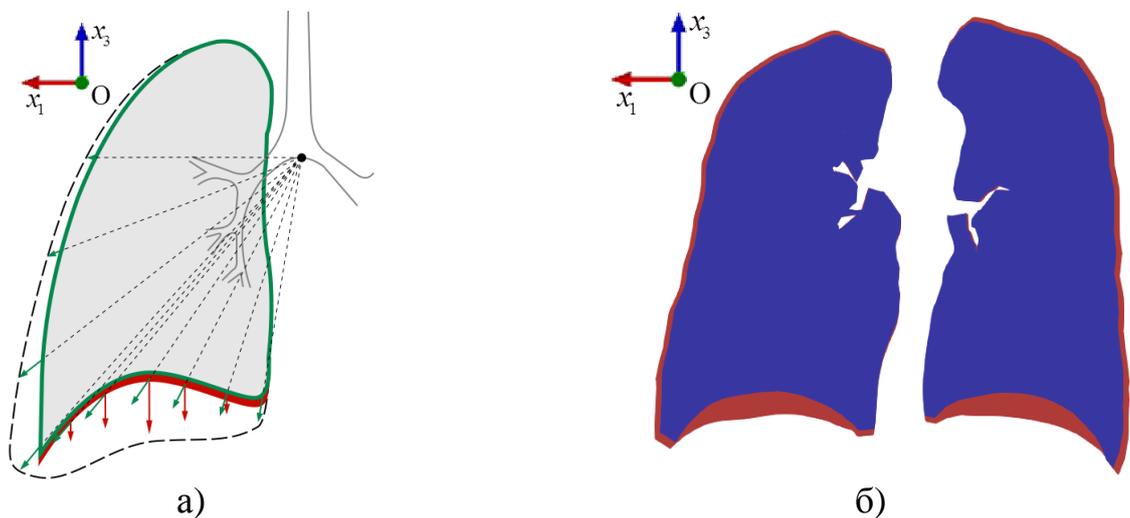


Рисунок 4.8 – Схематичное изменение границ легких во время дыхательного цикла (форма на выдохе отмечена сплошной линией; на вдохе – штриховой линией), а также схема приложения ГУ (зеленым цветом обозначена вся граница легких, на которой задаются кинематические ГУ, красным цветом – граница легких, соприкасающаяся с диафрагмой) (а); используемая геометрия легких при

заданных ГУ в момент максимального вдоха (красный цвет) и в исходном положении (синий цвет) в плоскости  $Ox_1x_3$  (б)

Нижние границы (основания) легких, граничащие с диафрагмой, выгнуты и имеют куполообразную форму. Во время вдоха диафрагма (а также примыкающие к ней основания легких) опускается; при этом вершина купола перемещается на наибольшее расстояние, границы, принадлежащие одновременно и основанию, и боковым стенкам легких, смещаются на меньшее расстояние. При этом граница основания левого легкого смещается на большее расстояние, чем правого. В момент времени, соответствующий концу вдоха, основания легких становятся более плоскими.

Купол диафрагмы в процессе спокойного дыхания смещается на 10 мм [79], 5-20 мм [29]. В работах [121-123, 179], в которых рассматриваются процессы в деформируемых легких, в качестве ГУ был взят синусоидальный закон перемещения точек диафрагмы, величина наибольшего перемещение основания легких достигала 15 мм [121-123]. В исследовании [228] максимальное перемещение точек основания левого легкого достигало  $16,5 \pm 4,5$  мм, правого легкого –  $12,7 \pm 6,1$  мм.

Таким образом, в качестве кинематических ГУ на стенках легких (граница  $\Gamma_L$ ) задавались законы изменения скорости движения узлов сетки, включающие в себя две составляющие, описывающие грудное и диафрагмальное дыхание. Схема приложения ГУ представлена на рисунке 4.8а. Для всей границы легких (обозначена зеленым цветом на рисунке 4.8а) задаются скорости перемещений вдоль линии, соединяющей узел границы и «центр» легких (в роли которого выбирается точка, расположенная на равном удалении от места входа главных бронхов в легкие). При этом чем больше расстояние узла, расположенного на стенке, до «центра», тем выше величина его скорости перемещения в процессе дыхательного цикла. Коэффициент, характеризующий скорость перемещения

границ легких от начального положения, определяется на основе оценки «степени расширения грудной клетки» (а также легких).

Для описания более выраженного и неоднородного перемещения узлов, лежащих на границе основания легкого (соприкасающихся с диафрагмой, обозначены красным цветом на рисунке 4.8а), во время дыхательного цикла вводится дополнительное условие на перемещение по координате ( $x_3$ ). Перемещение узлов, принадлежащих нижней границе (основанию) легкого, неравномерно и зависит от удаленности от вершины купола. Используется периодический (синусоидальных) закон движения стенок; период дыхания  $t^*$  при спокойном дыхании принимается равным 4 с [79]. Начальным исходным состоянием выбран момент «конец выдоха – переход к вдоху».

Кинематические ГУ для узлов, лежащих на боковой поверхности легких, представим в виде:

$$\hat{\mathbf{v}}_s = \frac{2\pi}{t^*} \left( \frac{\delta|\mathbf{l}|}{2} \right) \mathbf{l}_n \sin \left( \frac{2\pi}{t^*} t \right), \quad (4.28)$$

где  $\hat{\mathbf{v}}_s$  – вектор скорости узлов, лежащих на поверхности легких;  $\mathbf{l}$  – вектор, соединяющий «центр» и точку поверхности легких в начальный момент времени;  $\mathbf{l}_n = \mathbf{l}/|\mathbf{l}|$  – нормированный вектор;  $|\mathbf{l}|$  – длина вектора;  $\delta$  – отношение максимального смещения (в направлении  $\mathbf{l}_n$ ) точки на поверхности от начальной точки к  $|\mathbf{l}|$ ;  $\delta|\mathbf{l}|$  – максимальное смещение точки поверхности легких от начальной точки в процессе дыхания;  $t^*$  – период дыхания;  $\frac{2\pi}{t^*}$  – циклическая частота.

Кинематические ГУ в скоростях для точек, лежащих на нижней границе (основании) легких, принимаются в виде:

$$\hat{\mathbf{v}}_d = \hat{\mathbf{v}}_s + \hat{\mathbf{v}}_d^*, \quad (4.29)$$

где  $\hat{\mathbf{v}}_d^*$  – слагаемое, описывающее неравномерное смещение точек, лежащих в основании легких, по координате  $x_3$ , м/с.

Вектор  $\hat{v}_d^*$  описывает скорость движения точек основания легких по координате  $x_3$  ( $v_{d1}^* = v_{d2}^* = 0$ ), -компонента скорости точек основания легких вдоль оси  $Ox_3$  (используя отдельные законы для каждого легкого) определяется соотношением:

$$v_{d3}^* = \left\{ \frac{-(d - \max(d))^2 + (\max(d))^2}{(\max(d))^2} \right\} \left[ -C \frac{\pi}{t^*} \right] \sin \left( \frac{2\pi t}{t^*} \right), \quad (4.30)$$

где  $C$  – смещение купола основания легкого (без учета смещения по координате  $x_3$  за счет первого слагаемого правой части соотношения (4.29)) за 2 с ( $t^*/2$ ), м (при расчетах в качестве  $C$  для левого легкого используется величина  $C_L$ , для правого –  $C_R$ );  $d$  – расстояние от точки, принадлежащей основанию легкого, до ближайшей точки, лежащей на «контуре» основания легких (точки, принадлежащие одновременно и основанию, и боковым стенкам легких) в начальный момент времени.

Максимальная удаленность от «контура» основания легкого ( $\max(d)$ ) соответствует точке, являющейся вершиной купола диафрагмы (основания легкого). По соотношению (4.30) при  $d=\max(d)$  скорость максимальна, при заданной скорости за 2 секунды вдоха вершина купола диафрагмы смещается на  $C$  м. Вертикальная компонента скоростей точек, принадлежащих «контуру» основания легкого ( $d=0$ ), за счет второго слагаемого в (4.29) согласно соотношению (4.30) равна нулю; скорость смещения точек «контура» основания легкого определяется только за счет первого слагаемого соотношения (4.29).

По результатам проведенного аналитического обзора, а также выполненных предварительных численных экспериментов были определены значения констант, используемых при задании кинематических ГУ (входящих в соотношения (4.28)-(4.30)):  $\delta=0,0191$ ,  $C_L=0,013$  м,  $C_R=0,012$  м. На рисунке 4.8б изображены проекции легких для двух моментов времени при заданных ГУ. Исходное положение обозначено синим цветом, момент максимального растяжения ( $t=2$  с) при заданных ГУ обозначен красным цветом.

## **5 Анализ результатов численного исследования течения воздуха в воздухоносных путях и легких человека в процессе дыхания**

Исследование процесса течения воздуха в ВП и легких человека выполняется численно на основе трехмерной геометрии рассматриваемых участков ДС, восстановленной на основе данных компьютерной томографии (КТ). Разрабатываемая математическая модель отвечает современным тенденциям перехода к персонализированной медицине [46], позволяет получать характеристики течения в ВП и легких конкретного индивида; при этом предложенные подходы и алгоритмы могут быть использованы при исследовании движения воздуха в каналах и через упруго-деформируемую насыщенную пористую среду любой формы, в том числе – в рассматриваемых элементах ДС в норме и при патологии, а также в различных условиях внешнесредовых воздействий. Технология восстановления трехмерной геометрии областей моделирования и построения объемной конечно-элементной сетки представлена в разделе 4.3, задание ГУ (закона движения стенок) – в разделе 4.4. Результаты численного исследования процесса течения воздуха в легких представлены в разделе 5.1, в ВП – в разделе 5.2.

### **5.1. Результаты численного исследования течения воздуха в деформируемых легких**

Описанный выше в разделе 4.2 алгоритм был реализован в разработанном комплексе программ [86, 78] на языке программирования C++. Задача обладает существенной вычислительной сложностью, для решения применялась технология параллельных вычислений и использовались многопроцессорные системы. Разработанный программный комплекс использует библиотеки Eigen с открытым исходным кодом, для распараллеливания использовались директивы стандарта «Open Multi-Processing» (OpenMP). Численные эксперименты были

выполнены с использованием 12-ядерного процессора с тактовой частотой 3,3 ГГц, что позволило сократить время расчетов по сравнению с использованием одного ядра процессора примерно в 10 раз.

Для исследования течения воздуха в деформируемой пористой среде легких применялись значения параметров легочной ткани и воздушной фазы, приведенные в таблице 5.1.

Таблица 5.1. Значение констант

Параметр	Значение
Молярная масса воздуха ( $\text{кг}\cdot\text{моль}^{-1}$ )	$28,96\cdot 10^{-3}$
Температура газовой фазы (К)	309,75
Универсальная газовая постоянная ( $\text{м}^2\cdot\text{кг}^{-2}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{К}^{-1}\cdot\text{моль}^{-1}$ )	8,3144
Динамическая вязкость воздуха (Па·с)	$18,6\cdot 10^{-6}$
Плотность воздуха в начальный момент времени в легких, а также плотность воздуха, поступающего в легкие (при температуре 30 °С) ( $\text{кг}\cdot\text{м}^{-3}$ )	1,165
Проницаемость ( $\text{м}^2$ )	$1,58\cdot 10^{-9}$ [122]
Модуль Юнга легочной ткани (Па)	10 000 [179]
Коэффициент Пуассона легочной ткани	0.4 [162]

Представление результатов задачи фильтрации воздуха в деформируемых легких, рассчитанных с использованием разработанного комплекса программ, производилось с помощью открытого графического кросс-платформенного пакета для интерактивной визуализации ParaView.

Рассматривается периодический (синусоидальный) закон движения стенок легких с периодом дыхания (продолжительностью дыхательного цикла), равным 4 секундам, учитывающий грудное и диафрагмальное дыхание, описываемый соотношениями (4.28)-(4.30). В интервал времени  $(0;2)$  с происходит фаза вдоха, момент времени  $t=2$  с соответствует наибольшему растяжению (максимальному вдоху), в интервале времени  $(2;4)$  с происходит выдох, момент времени  $t=4$  с

соответствует завершению дыхательного цикла, легкие при этом возвращаются к исходному состоянию.

В рассматриваемом сценарии за один вдох в легкие поступает 0,79 л воздуха; изменение окружности грудной клетки составляет 1,9% от начального состояния; наибольшее смещение оснований легких по координате  $x_3$  достигает 0,0155 м для левого легкого и 0,0146 м для правого. Указанные физиологические характеристики соответствуют нормальным физиологическим показателям здорового взрослого человека при спокойном дыхании.

На рисунках 5.1а, 5.1б представлены вектора скорости движения точек твердой фазы в моменты времени  $t=1$  с и  $t=3$  с, соответствующие серединам фазы вдоха и выдоха соответственно (в аксонометрии).

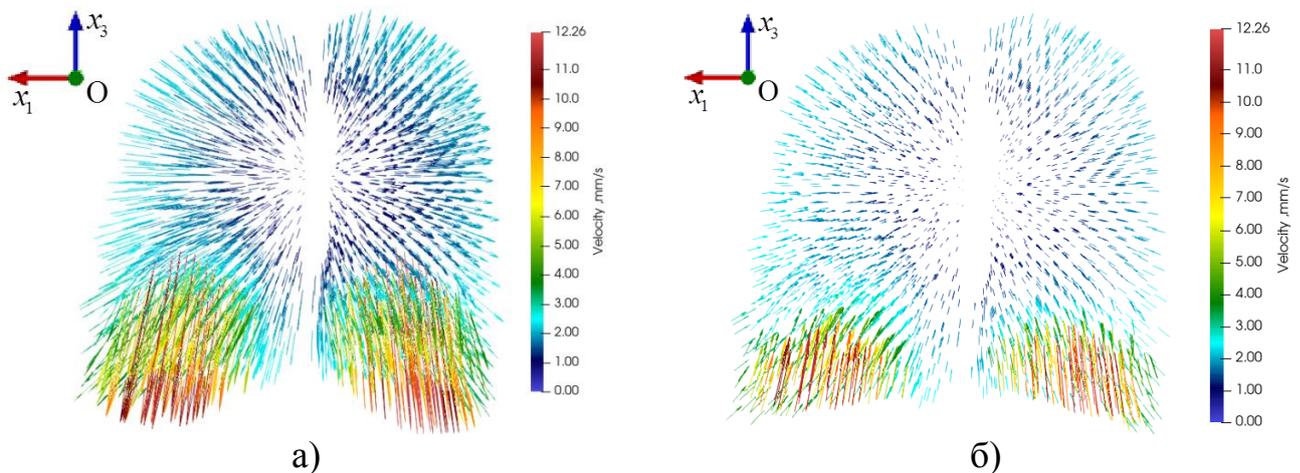


Рисунок 5.1 – Вектора скорости движения точек твердой фазы легких (вид спереди): а) момент середины вдоха ( $t=1$  с); б) момент середины выдоха ( $t=3$  с)

Наибольшие значения скорости движения точек твердой фазы наблюдаются в области оснований легких, которые соприкасаются с диафрагмой, и достигают 12,26 мм/с. На рисунках 5.2а и 5.2б приведены величины перемещений точек легких в момент времени  $t=2$ , соответствующий наибольшему растяжению (наибольшему объему) легких.

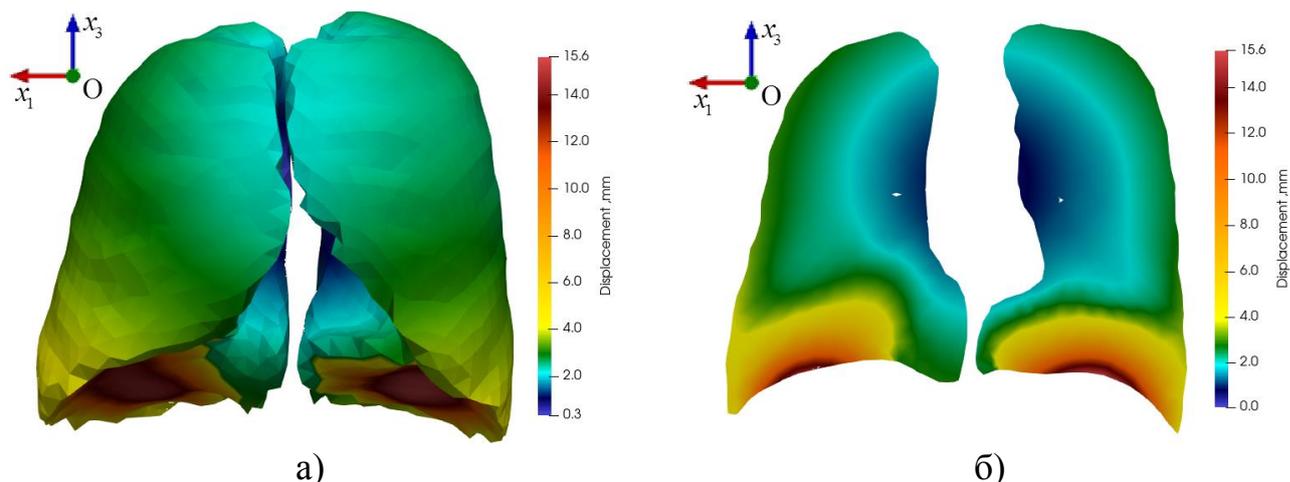
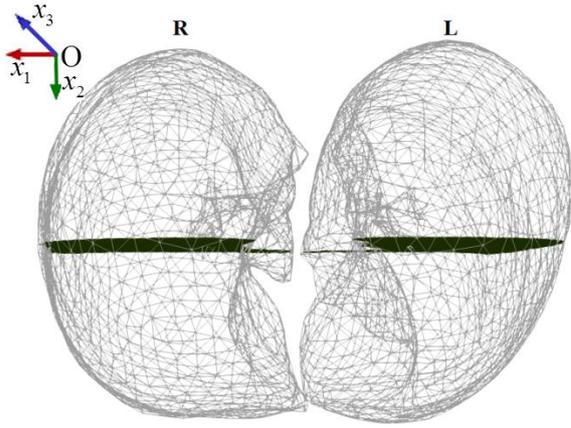


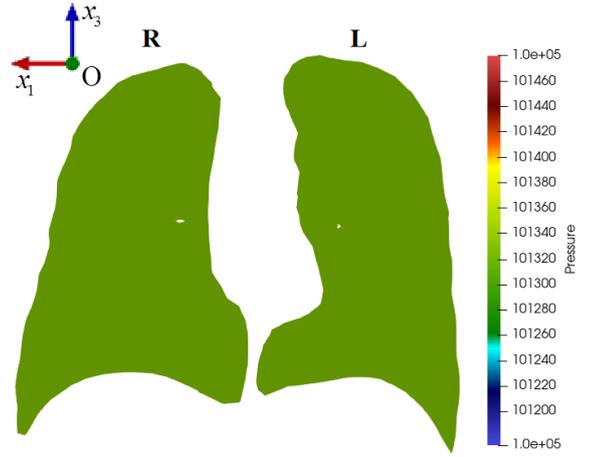
Рисунок 5.2 – Перемещение точек двухфазной среды легких в момент времени  $t=2$  с, соответствующий максимальному вдоху (вид спереди): в аксонометрии (а); в фронтальной плоскости (отмеченной на рисунке 5.3а) (б)

Наименьшие перемещения точек двухфазной среды в процессе дыхания, так же, как и скорости, наблюдаются в областях входа главных бронхов в легкие (имеющие название «корень легкого»). По мере удаления от «корня легкого» и приближения к стенкам величина перемещений точек легких увеличивается. Наибольшие перемещения точек легких наблюдаются у точек основания легких, примыкающих в вершине купола диафрагмы, и достигают 15,5 мм (для левого легкого) в момент наибольшего растяжения.

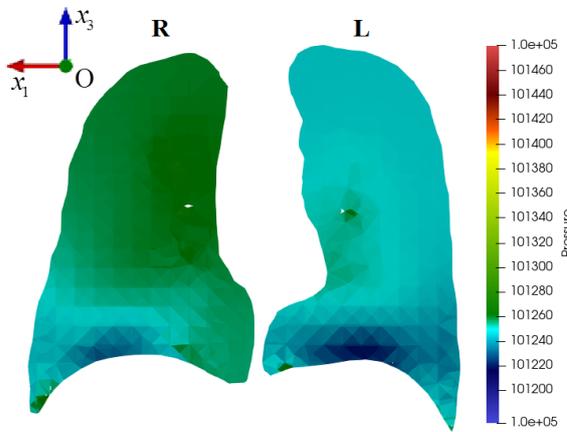
Неравномерное изменение объема двухфазной пористой среды легких приводит к неравномерному изменению давления воздуха в области легких. На рисунках 5.3б-5.3к приведено поле давления воздуха в различные моменты четырехсекундного дыхательного цикла (с шагом 0,5 с) в сечении легкого плоскостью, параллельной фронтальной, изображенной на рисунке 5.3а (вид сверху). Давление, соответствующее фазе вдоха, представлено на рисунках 5.3б-5.3е, выдоху – 5.3е-5.3к.



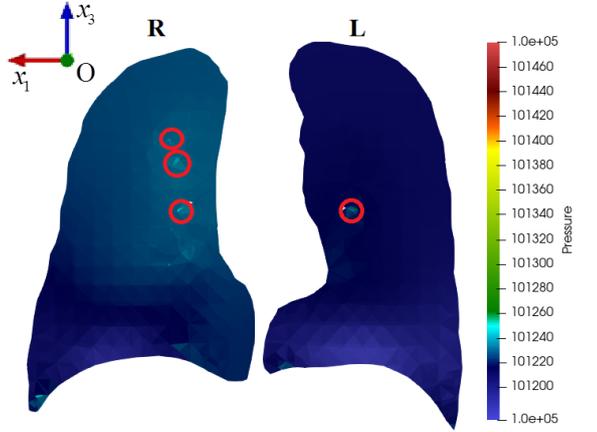
a)



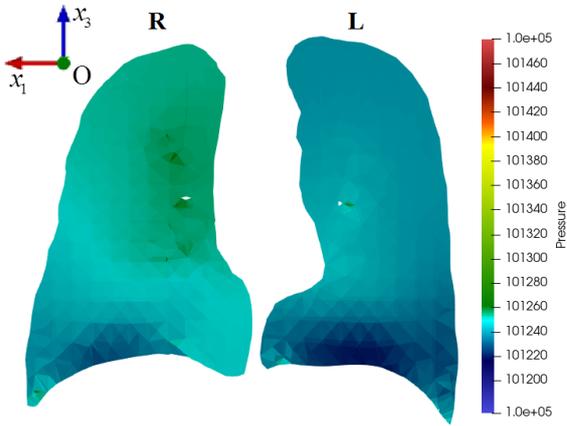
б)



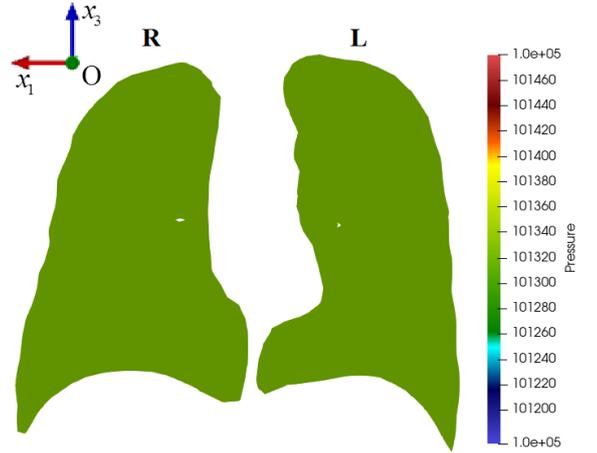
в)



г)



д)



е)

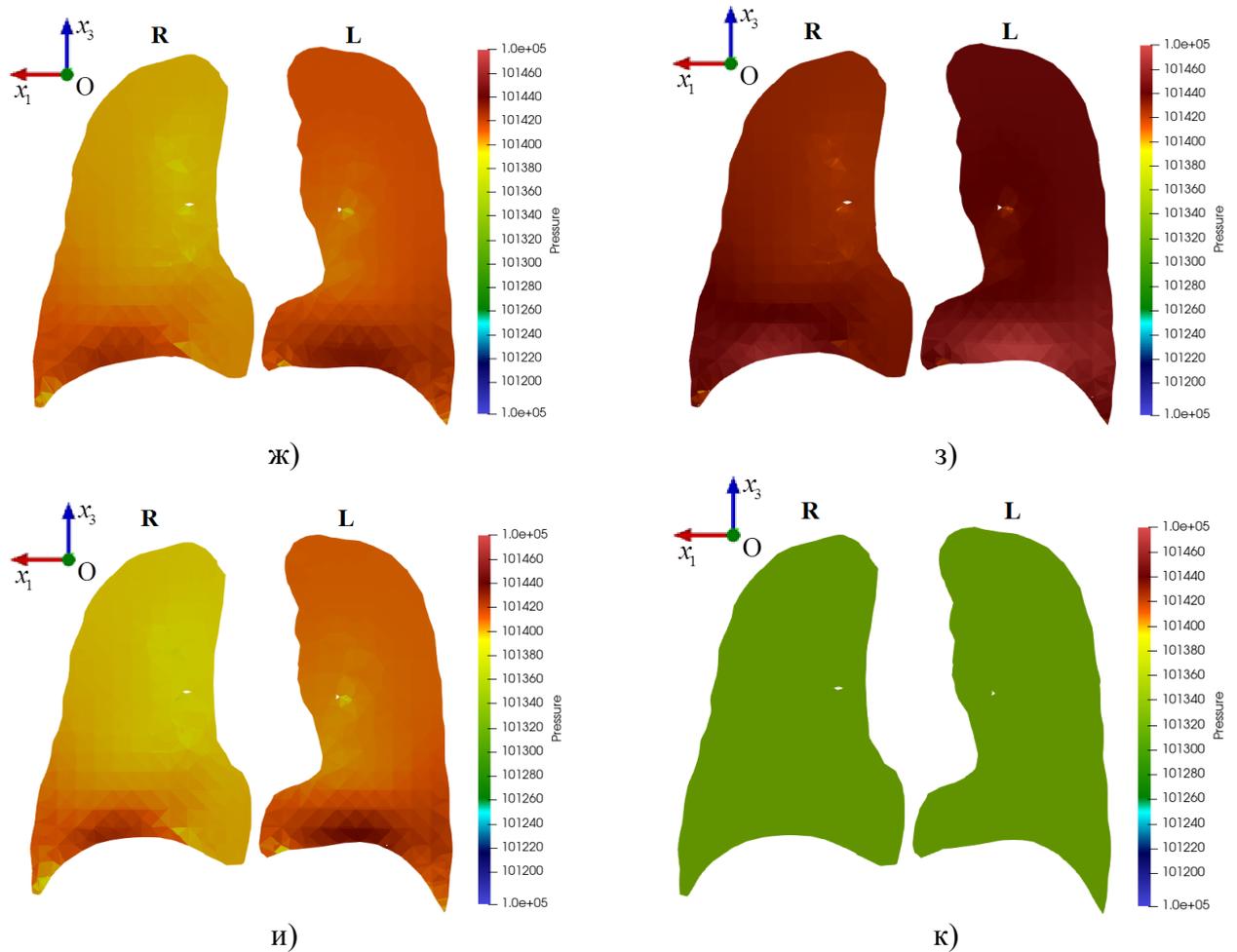


Рисунок 5.3 – Трехмерная геометрия легких с указанием сечения, в котором представлены результаты расчета поля давления газовой фазы (а); поле давления газовой фазы в легких человека в различные моменты дыхания (вид спереди; буквой R обозначено правое легкое, буквой L – левое): 0 с (б); 0,5 с (в); 1 с (г); 1,5 с (д); 2 с (е); 2,5 с (ж); 3 с (з); 3,5 с (и); 4 с (к)

Зеленый цвет на рисунках соответствует атмосферному давлению воздуха. В исходном состоянии (момент начала вдоха) движение воздуха в легких отсутствует, давление во всей области легких однородно и равно атмосферному (рисунок 5.3б). Внутренняя область легких представляет собой пористую среду, характеристикой которой является проницаемость – способность среды пропускать газ (жидкость). Из-за наличия проницаемости воздух в легких при изменении объема распространяется с задержкой, соответственно, давление в пористой среде легких изменяется неравномерно. Области легких, находящиеся в

непосредственной близости к выходам из ВП (границам  $\Gamma_{ВП/Л}$ ), (выделены красными кругами на рисунке 5.3г) в процессе всего дыхательного цикла имеют давление, близкое к атмосферному.

В процессе вдоха за счет движения стенок объем легких увеличивается, одновременно с этим давления воздуха уменьшается и становится ниже атмосферного (на рисунках 5.3в-5.3д обозначено цветами от зеленого до темно-синего). При этом нижние области легких, расположенные над диафрагмой, подвергаются наибольшим градиентам перемещения, изменениям объема и, соответственно, в них наблюдаются наименьшие значения давления. Воздух из областей с высоким давлением (от входов в легкие из ВП ( $\Gamma_{ВП/Л}$ )) во время вдоха распространяется в области с низким давлением. В начале вдоха стенки легких двигаются с более высокой скоростью, к концу вдоха движение стенок замедляется, в момент времени  $t=2$  с стенки останавливаются (легкие достигают наибольшего объема); поступающий воздух при этом распределяется по легким, давление воздуха при этом выравнивается (рисунок 5.3е).

Далее начинается выдох, в процессе которого стенки легких двигаются в обратном направлении к исходному состоянию, при этом объем легких уменьшается, а давление воздуха в них увеличивается (рисунки 5.3е-5.3к). Наибольшие перемещения наблюдаются в нижней части легких (за счет движения диафрагмы), соответственно, давление воздуха в данных областях наибольшее (обозначено оттенками цветов от желтого до красного на рисунках 5.3ж-5.3и). При уменьшении объема легких давление в них становится выше, чем в ВП, и воздух выходит из легких через границы ВП и легких ( $\Gamma_{ВП/Л}$ ). К концу выдоха скорость движения стенок замедляется и в момент времени  $t=4$  с стенки останавливаются, давление в легких выравнивается и становится близким к атмосферному (рисунок 5.3к), воздух также прекращает движение; при этом форма легких возвращается в исходное состояние.

В ходе решения задачи исследования течения воздуха в пористой среде легких человека определяются законы изменения массовых расходов воздуха в сечениях выходов из системы бронхов (на границе  $\Gamma_{ВП/Л}$ ) в течение дыхательного цикла, которые используются в качестве граничных условий для подмодели течения воздуха в проводящей зоне (рисунок 5.4а). При этом информация о составе вдыхаемого воздуха для подмодели легких определяется из подмодели ВП. Всего в рассматриваемой геометрии присутствует 31 вход (14 входов в левом легком и 17 в правом), на рисунке 5.4а оттенками синего цвета приведены графики изменения массовых потоков воздуха через каждый из 31 вход в легкие в процессе рассмотренного спокойного режима дыхания. Массовые потоки через входы в легкие описываются синусоидальными законами с различной амплитудой. Отличия между потоками воздуха через сечения входов (рисунок 5.4а) обусловлены различиями в градиентах давления и разной величиной площади входов (которая варьируется от  $1.31 \cdot 10^{-6}$  до  $1.16 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ).

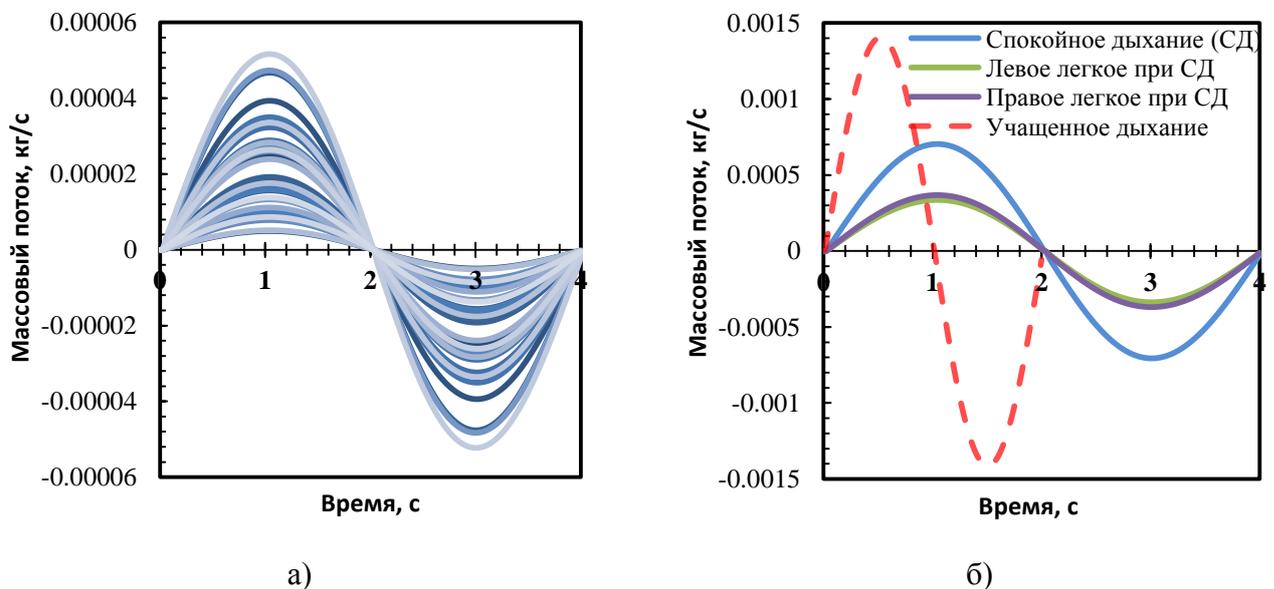


Рисунок 5.4 – Массовый поток воздуха через выходы из системы бронхов/входы в легкие в процессе спокойного дыхания (а), суммарный массовый поток через входы двух легких (синий цвет линии), отдельно для левого (зеленый цвет) и правого (фиолетовый цвет) легкого, а также суммарный массовый поток через

входы в двух легких при учащенном дыхании (красная пунктирная линия) (б)

Синим цветом на рисунке 5.4б приведено изменение суммарного массового потока (через 31 вход в легкие) в процессе спокойного дыхательного цикла, зеленым цветом — суммарный массовый поток через входы левого легкого, фиолетовым – через входы в правом легком. Массовые потоки воздуха в левом и правом легком примерно одинаковы (рисунок 5.4б). Средний суммарный расход воздуха в процессе вдоха (за 2 с) при спокойном дыхании составляет  $4.43 \cdot 10^{-4}$  кг/с, что соответствует (при плотности воздуха равной  $1.165 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ) 0.38 л/с. За две секунды вдоха в легкие человека поступает 0.76 л, что соответствует известным физиологическим данным.

В качестве еще одного сценария было рассмотрено «учащенное» дыхание (в граничных условиях, описываемых соотношениями (4.28)-(4.30), рассматривался период дыхания  $t^*$ , равный 2 секундам, при неизменных остальных параметрах). Суммарный массовый поток для учащенного дыхания представлен красной пунктирной линией на рисунке 5.4б. Средний суммарный расход в процессе вдоха (за 1 с) при «учащенном» дыхании составляет  $8.82 \cdot 10^{-4}$  кг/с; за одну секунду вдоха при данном режиме дыхания в легкие поступает или 0.757 л воздуха. Таким образом, предложенная математическая модель может быть использована для описания течения воздуха в легких при различных режимах дыхания.

## **5.2. Результаты численного исследования течения воздуха в воздухоносных путях человека**

### *Исследование потоков воздуха*

Численная реализация подмодели для описания течения воздуха в ВП выполнена с использованием программного продукта Ansys CFX. Исследование нестационарного течения воздуха (многофазной смеси газов и пылевых частиц) в

ВП выполнялось при граничных условиях на границе  $\Gamma_{ВП/Л}$ , полученных из подмодели течения воздуха в легких (рисунок 5.4а). На рисунках 5.5а-5.5в представлены линии тока скорости воздуха в ВП (от носовой полости до 5-й генерации бронхов) в процессе вдоха (в моменты времени  $t=0,5$  с,  $t=1$  с,  $t=1,5$  с с начала дыхательного цикла), на рисунках 5.6а-5.6в – в процессе выдоха (в моменты времени  $t=2,5$  с,  $t=3$  с,  $t=3,5$  с).

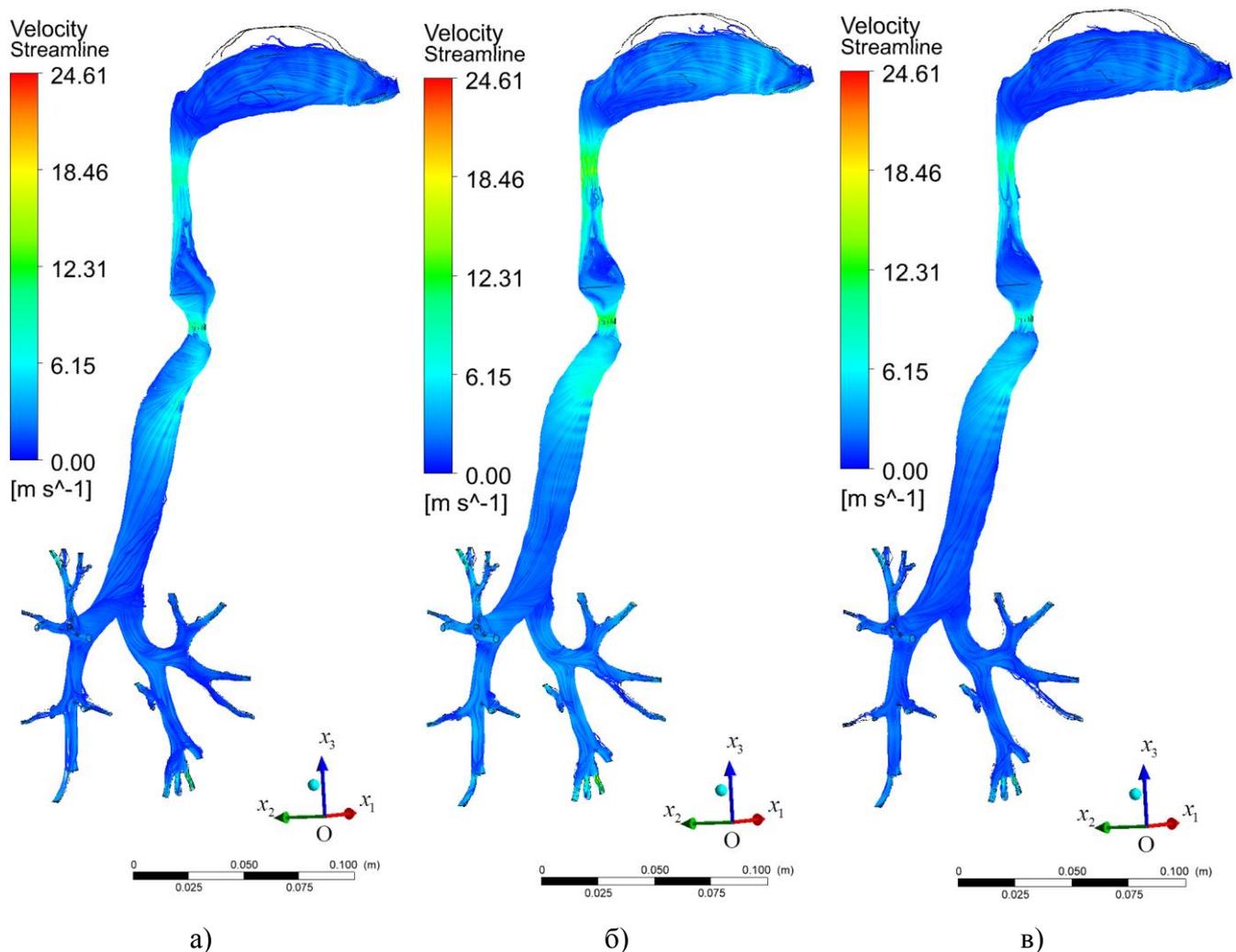


Рисунок 5.5 – Линии тока скорости частиц воздуха в воздухоносных путях во время вдоха в момент времени:  $t = 0,5$  с (а);  $t = 1$  с (б);  $t = 1,5$  с (в)

Наибольшие скорости воздушного потока в процессе вдоха наблюдаются в участке ротоглотки и гортани (голосовой щели), что обусловлено сужением

каналов в данных участках тракта. Максимальные значения скорости потока воздуха отмечаются в момент времени  $t=1$  с с начала дыхания (момент середины вдоха); это обусловлено тем, что в данный момент времени согласно заданным ГУ наблюдаются наибольшие массовые расходы воздуха на границах  $\Gamma_{ВП/Л}$ . Так, в данный момент времени скорость частиц воздуха в глотке и в районе голосовой щели составляют порядка 12 м/с, в трахее – 3-6 м/с, в нижележащих генерациях бронхов скорость течения воздуха уменьшается.

В носовой полости и гортаноглотке определяются завихрения потоков воздуха, что обусловлено сложной анатомической структурой. После прохождения гортани в начальном участке трахеи наблюдаются более высокие значения струи (около передней стенки трахеи) и турбулентные эффекты от гортанной струи в виде завихрений, что согласуется с [166, 118, 112]. В нижележащих генерациях ВП скорости течения воздуха более низкие, воздушный поток более спокойный, незначительные завихрения наблюдаются в местах ветвления бронхов, что согласуется с данными, приведенными в [118]. Скорость и траектории потока воздуха влияют на поведение несомой фазы (частиц, присутствующих во вдыхаемом воздухе), и, соответственно, оказывают влияние на количество частиц, оседающих в ВП и достигающих легких человека.

В процессе выдоха так же, как и в процессе вдоха, наибольшие скорости потока воздуха возникают в местах сужения ВП (в районе голосовой щели и в глотки) (рис. 5.7а-5.7в) и достигают наивысших значений в момент середины выдоха ( $t=3$  с с начала дыхательного цикла (рис. 5.7б), когда наблюдаются наибольшие массовые расходы воздуха на границах  $\Gamma_{ВП/Л}$  (согласно заданным ГУ). Во время выдоха в носоглотке и носовой полости наблюдается возникновение завихрений потоков воздуха.

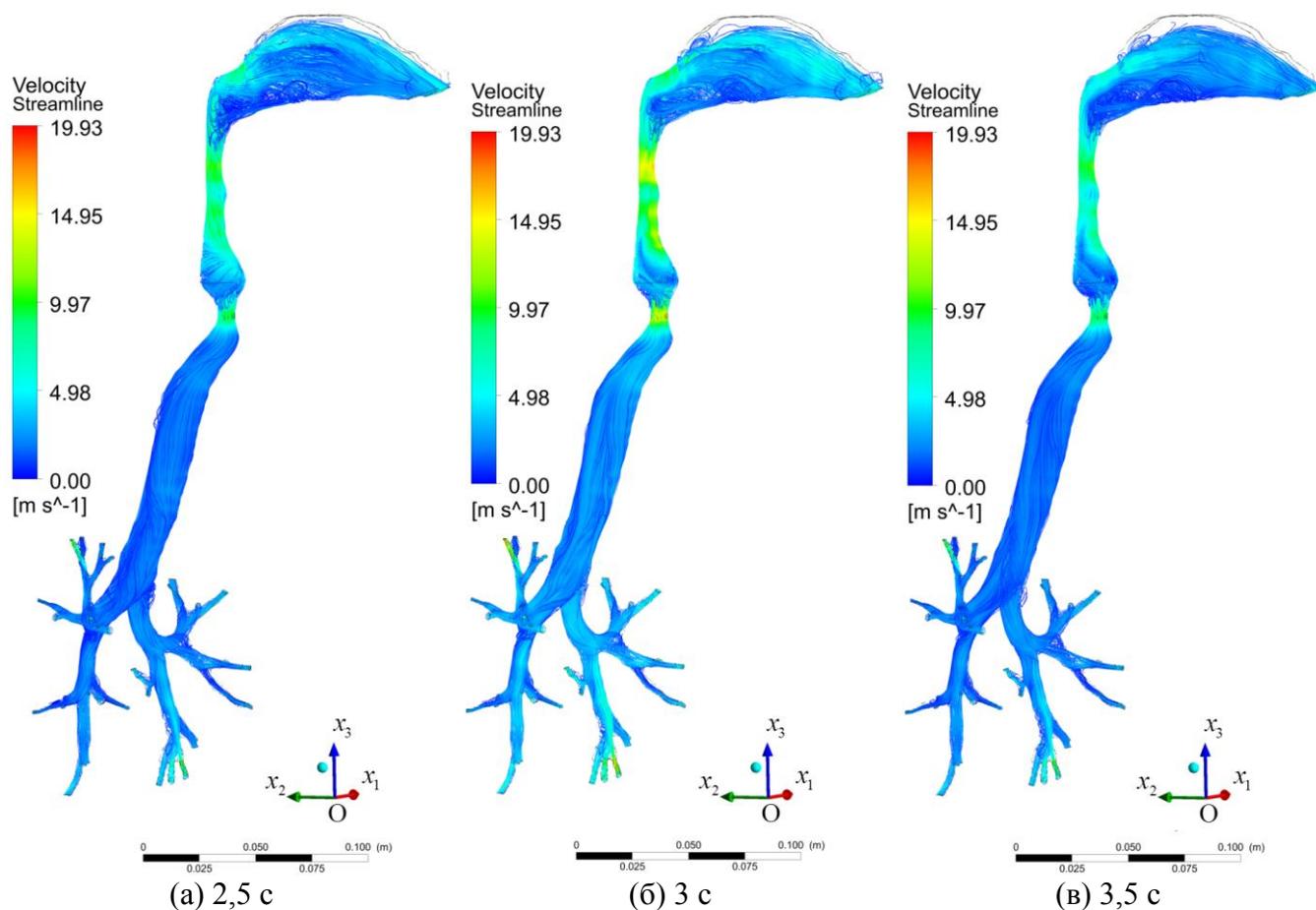


Рисунок 5.6 – Линии тока скорости воздуха в воздухоносных путях во время выдоха в момент времени:  $t = 2,5$  с (а);  $t = 3$  с (б);  $t = 3,5$  с (в)

### *Оценки оседания частиц в воздухоносных путях*

С использованием разработанной модели выполнено численное исследование движения и оседания в ВП человека пылевых частиц различного размера и плотности, присутствующих в атмосферном воздухе. Исследовался реальный состав пылевых частиц, присутствующих в атмосферном воздухе крупного промышленного центра Сибири в двух зонах в холодный (февраль) и теплый (май) периоды года, полученный на основе проведения натурного эксперимента (подробно описан в [18]). Качество атмосферного воздуха в 1 и 2 зонах не соответствовало гигиеническим нормативам (наблюдалось превышение предельно-допустимых концентраций (ПДК)) по взвешенным веществам,

частицам PM10, PM2,5, соединениям металлов и др. (до 3,29 ПДК<sub>мр</sub>, 3,2 ПДК<sub>сс</sub>, 2,91 ПДК<sub>сг</sub>) и формировало повышенные коэффициенты опасности (hazard quotient (HQ)) по марганцу, меди, никелю и их соединениям, фторидам неорганическим, взвешенным веществам (до 5,48 HQ<sub>ас</sub>, 3,42 HQ<sub>сч</sub>), индексы опасности (hazard index (HI)) органам дыхания и другим системам (до 5,48 HI<sub>ас</sub>, 8,59 HI<sub>сч</sub>).

Дисперсный и компонентный состав частиц, присутствующих в атмосферном (вдыхаемом) воздухе, а также осевших в различных участках дыхательных путей человека, был исследован с использованием электронной микроскопии смывов, мазков, биосубстратов. На рисунках 5.7а и 5.7б представлена структура дисперсного состава частиц, присутствующих в атмосферном воздухе в зоне превалирующего влияния крупного металлургического предприятия (зона 1) и крупного объекта теплоэнергетики (зона 2).

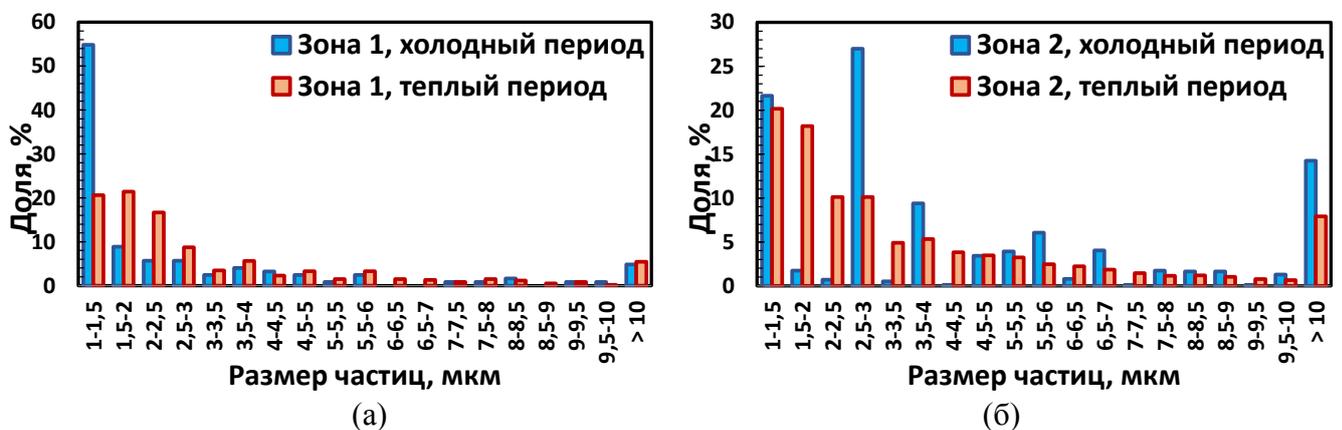


Рисунок 5.7 – Структура дисперсного состава частиц, присутствующих в атмосферном (вдыхаемом) воздухе в зоне натурального эксперимента: в зоне 1 (превалирующее влияние крупного металлургического предприятия) (а); в зоне 2 (превалирующее действие крупной ТЭЦ) (б)

Представленные диаграммы структуры дисперсного состава пылевых частиц во вдыхаемом воздухе отражают как особенности пылевого загрязнения

атмосферного воздуха в каждой зоне, так и общие черты и закономерности. В структуре твердых частиц во вдыхаемом воздухе соотношение фракций соответствует экспоненциальному распределению с выраженным смещением в сторону мелких фракций (до 2,5 мкм). Так, например, в зоне № 1 (рис. 5.7а) в холодный период года доля частиц PM<sub>2,5</sub> (диаметром менее 2,5 мкм) составила 69,4%, из них 54,8% соответствовали размеру менее 1,5 мкм. Схожая картина наблюдалась и в зоне 2. Кроме того, в зоне № 1 смещение доли пылевых частиц в структуре в сторону мелких фракций более выражено в холодный период года: фракции пылевых частиц размером менее 2,5 мкм составили 69,4%, в летний период – 58,6%; в зоне № 2 – наоборот, в теплый период – PM<sub>2,5</sub> 48,5%, в холодный период – 24,1%. При этом во второй зоне доля частиц диаметром более 10 мкм выше, чем в зоне 1. В холодный период года в зоне 2 доля частиц диаметром более 10 мкм составляет 14,2%, в теплый период – 7,9%, в зоне 1 в холодный период присутствовало 4,8% частиц диаметром более 10 мкм, в холодный – 5,4%.

С использованием разработанной модели было выполнено исследование движения и оседания в ВП частиц различным диаметром (от 0,5 мкм до 20 мкм) и плотности (1000 кг/м<sup>3</sup>, 2000 кг/м<sup>3</sup>, 2700 кг/м<sup>3</sup> и 4000 кг/м<sup>3</sup>) во время вдоха. Количественная оценка оседания частиц в ВП выполнялась с использованием показателя «Доля осевших частиц», который определялся как отношение частиц, осевших на стенках ВП, к общему количеству вошедших в ВП частиц (выраженном в процентах). На рисунке 5.8 и в таблице 5.2 приведены количественные оценки доли осевших частиц во время вдоха в зависимости от диаметра и плотности.

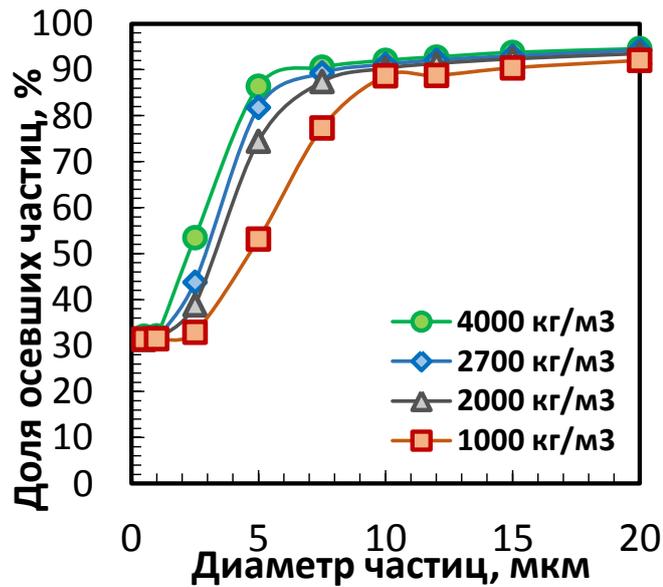


Рисунок 5.8 – Доля осевших в ВП частиц в зависимости от диаметра и плотности

Результаты численных расчетов течения воздуха, содержащего взвешенные частицы различных концентраций, показали, что доля оседающих в дыхательных путях частиц (определенного размера) постоянна и не зависит от входной концентрации; при этом концентрация влияет на общее количество частиц, попадающих в организм человека, и, соответственно, на возможность вызывать заболевания органов дыхания.

График функции доли осевших частиц в зависимости от диаметра частиц имеет вид S-образной (сигмоидной) функции (рисунок 5.8). Крупные частицы (более 10 мкм), имеющие большую массу, почти полностью оседают в ВП. По мере уменьшения размера и массы доля оседающих в ВП частиц уменьшается и соответственно увеличивается доля частиц, достигающих более мелких воздухоносных путей и легких человека.

Плотность материала пылевых частиц влияет на их поведение в потоке воздуха и оседание в ВП. Частицы, имеющие более высокую плотность, обладают большей массой и, соответственно, эффективнее оседают в ВП. Это обусловлено инерционным механизмом оседания – при резкой смене направления потока

несущей фазы «тяжелые» частицы продолжают по инерции двигаться в прежнем направлении, ударяются о поверхность слизистой и оседают на ней.

Плотность материала оказывает более выраженное влияние на частицы микроразмерного диапазона (2,5-7,5 мкм) (рисунок 5.8, таблица 5.2). Так, среди частиц диаметром 2,5 мкм плотностью 1000 кг/м<sup>3</sup> оседает 32,93% частиц, плотностью 4000 кг/м<sup>3</sup> – 53,5% частиц; среди частиц диаметром 5 мкм оседает 53,12% частиц плотностью 1000 кг/м<sup>3</sup> и 86,41% плотностью 4000 кг/м<sup>3</sup>. На оседание частиц диаметром 1 мкм и менее плотность оказывает незначительное влияние, доля осевших на стенках ВП частиц данного размера составляет примерно постоянную величину – 31,5-32% от всех вошедших в ВП частиц.

Таблица 5.2 – Количественные оценки оседания пылевых частиц разного дисперсного состава в ВП человека

Диаметр частиц, мкм	Доля осевших частиц, %			
	1000 кг/м <sup>3</sup>	2000 кг/м <sup>3</sup>	2700 кг/м <sup>3</sup>	4000 кг/м <sup>3</sup>
0.5	31.39	31.33	31.58	32.00
1	31.47	31.57	31.79	32.11
2.5	32.93	38.87	43.80	53.50
5	53.12	74.44	81.78	86.41
7.5	77.31	87.38	89.25	90.53
10	88.64	90.28	91.17	92.03
12	88.75	91.34	92.08	92.77
15	90.40	92.36	93.01	93.76
20	92.02	93.51	94.26	94.58

Действующие гигиенические нормативы (ГН) в РФ направлены на контроль концентрации общего количества взвешенных частиц, отдельно частиц диаметром 10 мкм и 2.5 мкм в атмосферном воздухе и не учитывают материал и плотность взвешенных частиц. Численные результаты, фиксирующие различия в доле оседающих в воздухоносных путях частиц в зависимости от плотности, могут являться основанием постановки вопроса о необходимости пересмотра существующих ГН; ГН должны оперировать не только размерами и концентрациями, но и плотностью взвешенных частиц.

В результате выполненного численного моделирования были получены траектории движения в ВП частиц различных размеров, на рисунках 5.9а-5.9в приведены траектории для частиц алюминия (плотностью  $2700 \text{ кг/м}^3$ ) диаметром 10 мкм, 2,5 мкм и 1 мкм.

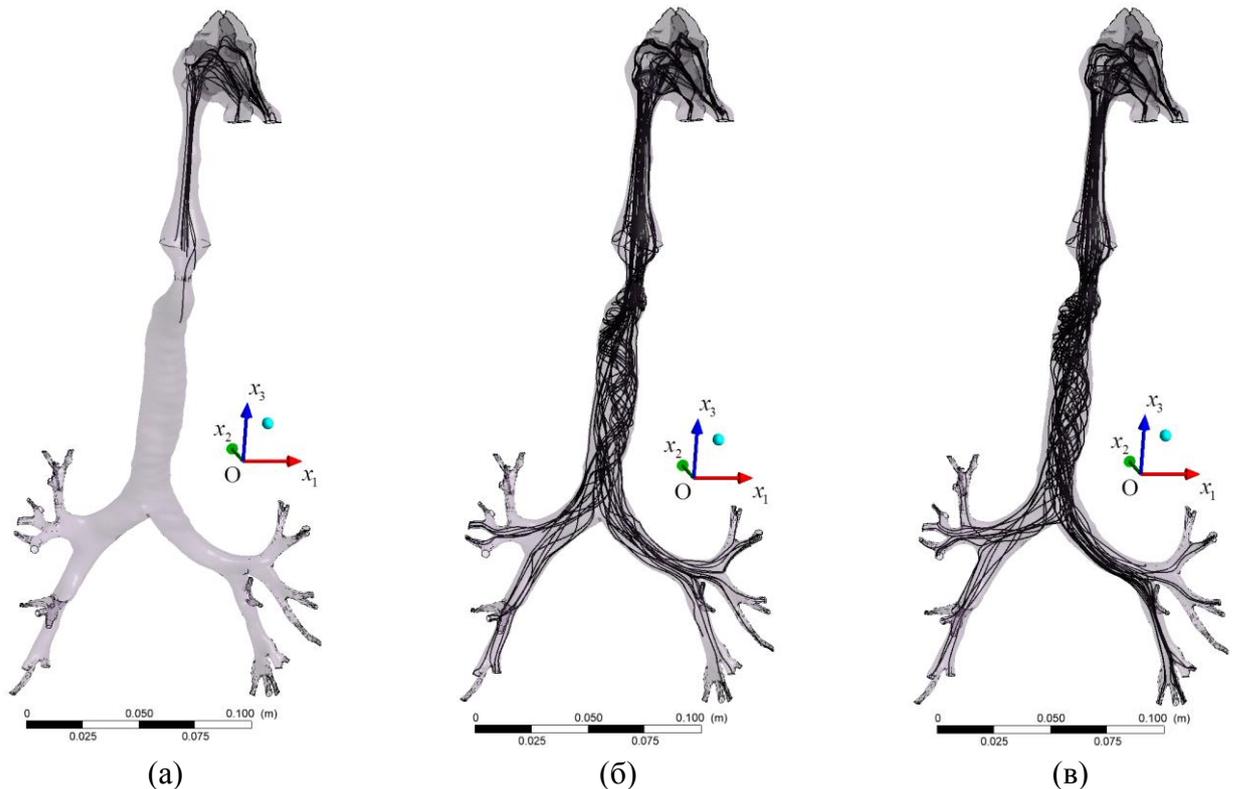


Рисунок 5.9 – Траектории движения в ВП твердых частиц плотностью  $2700 \text{ кг/м}^3$  диаметром: 10 мкм (а); 2,5 мкм (б); 1 мкм (в)

Крупные частицы (диаметром 10 мкм) оседают преимущественно в начальных участках ВП (носовой полости, глотке и гортани) (рисунок 5.9а). Частицы микро-размера способны проникать в нижележащие ВП – трахею и бронхи; частицы данного размера оседают в гортани, местах ветвления бронхов (рисунок 5.9б). Чем меньше размер частиц, тем большее их количество способно проникать в нижние участки ВП (рисунок 5.9в). Так, траектории движения в ВП частиц диаметром 1 мкм (при одинаковом количестве частиц, входящих в область ВП из атмосферного воздуха через границу  $\Gamma_{ВП}^{ATM}$ ) в большем количестве

присутствуют в трахее и нижележащих бронхах (рисунок 5.9б) по сравнению с траекториями движения частиц диаметром 2,5 мкм (Рисунок 5.9б). Частицы диаметром 1 мкм и меньше ведут себя схожим образом и имеют схожие траектории движения – двигаются с потоком несущей фазы вдоль линий тока воздуха; среди частиц данных размеров наибольшая доля частиц способных достигать легких человека.

Стоит отметить, что согласно результатам численного моделирования частицы во время вдоха преимущественно попадают в средние и нижние отделы бронхов и легких соответственно. Попадая в легкие, пылевые частицы способны оседать, накапливаться в них и приводить к заболеваниям, в том числе – к пневмокониозам, силикозам. Полученные результаты моделирования согласуются с медицинским фактом, что патологические изменения в легких при возникновении силикоза начинают проявляться в средних и нижних отделах [2, 3].

Полученные результаты качественно согласуются с результатами выполненного с помощью электронной микроскопии натурального эксперимента по исследованию закономерностей распределения пылевых частиц атмосферного воздуха в ВП человека, находящегося в рассматриваемых зонах 1 и 2 [18]. Исходили из предположения, что образцы смывов из носовых ходов характеризуют оседание частиц в начальном участке ВП – носовой полости; образцы мазков со слизистой оболочки носоглотки – оседание в более глубоком участке ВП – глотке; исследование мокроты при откашливании без стимуляции и со стимуляцией – оседание в средних и нижних отделах ВП соответственно. На рисунках 5.10 приведены осредненные структуры дисперсного состава частиц, осевших в различных участках ВП.

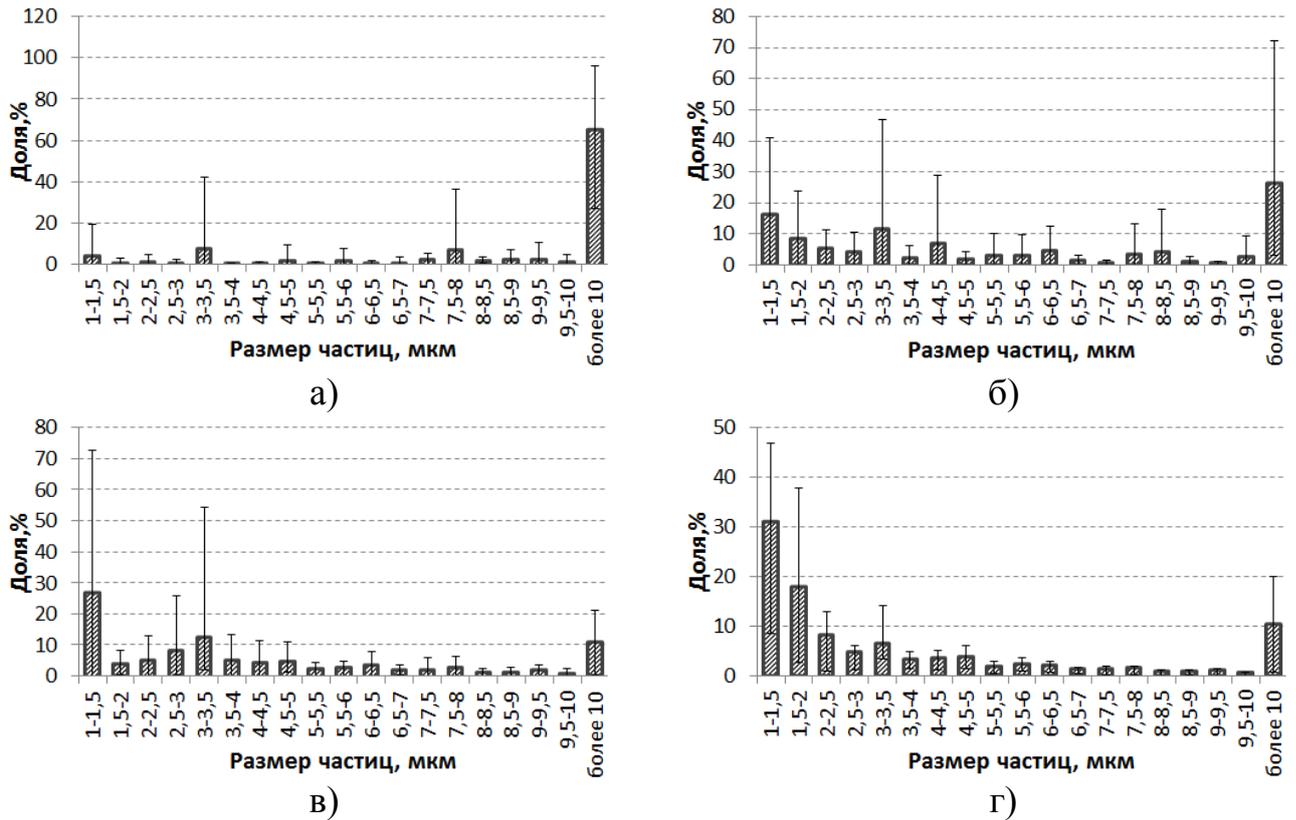


Рисунок 5.10 – Структура дисперсного состава частиц, осевших в различных участках дыхательного тракта: в носовой полости (а); в носоглотке (б); в средних отделах бронхов (в); в нижних отделах бронхов (г)

В начальном участке ВП (носовой полости) в результате эксперимента были обнаружены преимущественно крупные частицы пыли (более 10 мкм в диаметре), доля которых в среднем составила 65,6% частиц от общего количества. Доля частиц диаметром менее 1,5 мкм в данном участке тракта наименьшая и составляет в среднем 3,77% (рисунок 5.10а). По мере продвижения по ВП доля присутствующих крупных частиц снижается, доля мелких частиц соответственно увеличивается. Так, в носоглотке доля частиц диаметром более 10 мкм в среднем составляет 25,9% (доля частиц менее 1,5 мкм – 15,7%) (рисунок 5.10б). В средних и нижних участках бронхов доля частиц диаметром более 10 мкм составляет 10,9% и 10,2% соответственно, частиц менее 1,5 мкм – 26,6% и 30,97% соответственно (рисунки 5.10в, 5.10г). В образцах мокроты, полученной при откашливании со стимуляцией, характеризующей оседание в нижних

дыхательных путях (рис. 5.10г), доля частиц диаметром менее 2,5 мкм составила 56,8%. Таким образом, результаты численных экспериментов качественно хорошо согласуются с результатами натурного эксперимента.

## Заключение

Основные результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. На основе проведенного аналитического обзора подходов к моделированию биомеханики дыхания, были выявлены основные тенденции в области моделирования дыхательной системы, отмечены недостатки существующих моделей для исследования течения воздуха в воздухоносных путях (ВП) и легких человека и намечены пути их устранения при разработке комплексной математической модели, описывающей нестационарное течение воздуха от носовой полости до легких. Для устранения проблем с построением сложной структуры мелких дыхательных путей вплоть до альвеол и экономии вычислительных ресурсов при моделировании легких предложено использовать модель пористого тела. В модели учитывается геометрическая нелинейность задачи, взаимодействие воздуха в легких и легочной ткани. При моделировании течения воздуха в ВП учитывается многофазность, нестационарность, турбулентность процесса, оседание в ВП частиц (различного дисперсного состава и плотности), присутствующих в атмосферном воздухе крупного промышленного центра Сибири.

2. Предложена новая математическая модель для описания течения воздуха в дыхательной системе, состоящая из двух взаимосвязанных через граничные условия подмоделей: 1) подмодели для исследования течения воздуха в ВП и 2) подмодели для описания течения воздуха в легких, которые представлены упруго-деформируемой насыщенной пористой средой.

3. Получены разрешающие соотношения метода конечных элементов для моделирования деформирования пористой среды легких и метода конечных (контрольных) объемов для описания фильтрации воздуха в деформируемой пористой среде.

4. Разработаны алгоритмы и комплекс программ для численного решения нелинейной связанной задачи исследования течения воздуха в ВП и упруго-деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека.

5. Выполнена идентификация параметров модели; получены, описаны и проанализированы результаты численного исследования течения воздуха для трехмерной геометрии ВП и легких человека. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с опубликованными расчетными данными других исследователей и результатами проведенного натурного эксперимента.

6. Модель может быть использована для описания процесса дыхания в норме и при патологии, для выявления пространственного распределения зон локализации риска развития морфологических нарушений и прогнозирования риска развития профессиональной бронхолегочной патологии. Модель может быть полезной при разработке средств индивидуальной защиты органов дыхания работников, обосновании гигиенических нормативов, исследовании доставки ингаляционных лекарственных препаратов, для анализа движения новообразований при лучевой терапии, а также для исследования процессов при искусственной вентиляции легких человека.

**Вывод соотношения для связи скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких со скоростью изменения объема двухфазной среды легких**

*Аналитическое решение вспомогательной задачи для представительного объема двухфазной среды*

Рассмотрим представительный объем двухфазной пористой среды в форме однородной изотропной упругой замкнутой сферической оболочки, заполненной воздухом, которая подвергается всестороннему внешнему сжатию (или расширению). Масса оболочки равна массе твердотельного каркаса, объем внутренности сферы в отсчетной конфигурации равен суммарному объему альвеол и каналов в естественной конфигурации представительного объема. Внутренний радиус сферической оболочки равен  $r^{in}$ , внешний —  $r^{out}$ , толщина стенки соответственно равна  $r^{out} - r^{in}$ . Сжатие сферической оболочки происходит при постоянной температуре газа (процесс изотермический). Давление газа внутри сферы в начальный момент времени равно  $p$ . Среднее напряжение (гидростатическое напряжение) ( $\sigma_{cp}$ ) для двухфазной среды будем определять как радиальную компоненту напряжения на внешней поверхности сферы ( $\sigma_{rr} |_{r=r^{out}}$ ).

В общем случае при больших градиентах перемещений задача является нелинейной за счет нелинейных определяющих и кинематических соотношений. Для определения связи скорости изменения среднего напряжения со скоростью изменения объема используется гипотеза о возможности использования решения геометрически линейной задачи с заменой первого инварианта тензора малых деформаций как меры изменения объема на меру, выражаемую первым инвариантом тензора логарифмической деформации.

Система уравнений для описания деформирования твердой фазы включает:  
кинематические соотношения:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (\text{A.1})$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор малых деформаций,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещения;  
уравнения равновесия:

$$\hat{\nabla} \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (\text{A.2})$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши;  
упругий закон для изотропного материала:

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha I_1(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{A.3})$$

где  $I_1(\cdot)$  – первый инвариант,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\alpha$ ,  $\mu$  – параметры Ляме.

На внешней поверхности (при  $r = r^{out}$ ) задаются граничные условия кинематического типа:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_{\Gamma}. \quad (\text{A.4})$$

На внутренней поверхности (при  $r = r^{in}$ ) задаются статические граничные условия:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p \Big|_{r=r^{in}}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (\text{A.5})$$

где  $p \Big|_{r=r^{in}}$  – давление газа.

Система уравнений (A.1)-(A.5) решается в сферических координатах.  
Компоненты тензора деформации в сферических координатах имеют вид:

$$\mathbf{u} = (u_r, u_{\varphi}, u_{\theta}), \quad (\text{A.6})$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r}, \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{u_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{r} \right). \quad (\text{A.12})$$

Уравнения равновесия в сферических координатах имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\sigma_{\theta r} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \varphi}{r} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) \operatorname{ctg} \varphi + 3\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Так как рассматриваем всестороннее сжатие шара (изотропного тела), то задача является сферически симметричной, а следовательно – одномерной. В сферической системе координат:  $u_r = u(r)$ ,  $u_\theta = u_\varphi = 0$ .

Из условий симметрии  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$ .

В силу сферической симметрии задачи  $\sigma = \sigma(r)$ ,  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . Остаются три ненулевые компоненты тензора деформации  $(\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r})$  и

единственное уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Из симметрии задачи:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Тензор напряжений Коши имеет три ненулевые компоненты, запишем компоненты тензора напряжений как функцию перемещений:

$$\sigma_{rr} = 2\mu\varepsilon_{rr} + \alpha[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}] = 2\mu \frac{du_r}{dr} + \alpha \left[ \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_r}{r} \right] = (2\mu + \alpha) \frac{du_r}{dr} + 2\alpha \frac{u_r}{r}, \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \alpha[\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\theta\theta}] = 2\mu\frac{u_r}{r} + \alpha\left[\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_r}{r}\right] = 2(\mu + \alpha)\frac{u_r}{r} + \alpha\frac{du_r}{dr}. \quad (\text{A.19})$$

Подставим напряжения, выраженные через перемещения, в уравнение равновесия (A.16), получим:

$$\frac{d}{dr}\left[(2\mu + \alpha)\frac{du_r}{dr} + 2\alpha\frac{u_r}{r}\right] + \frac{2((2\mu + \alpha)\frac{du_r}{dr} + 2\lambda\frac{u_r}{r} - (2(\mu + \alpha)\frac{u_r}{r} + \alpha\frac{du_r}{dr}))}{r} = 0. \quad (\text{A.20})$$

В соотношении (A.20) раскроем производную первого слагаемого и раскроем скобки во втором слагаемом, получим:

$$\left[(2\mu + \alpha)\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{2\alpha u_r}{r}\right)\right] + \frac{2}{r}\left(2\mu\frac{du_r}{dr} + \alpha\frac{du_r}{dr} + 2\alpha\frac{u_r}{r} - 2\mu\frac{u_r}{r} - 2\alpha\frac{u_r}{r} - \alpha\frac{du_r}{dr}\right) = 0. \quad (\text{A.21})$$

В соотношении (A.21) раскроем скобки, соберем подобные слагаемые, получим:

$$(2\mu + \alpha)\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2(\alpha + 2\mu)}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2(\alpha + 2\mu)u_r}{r^2} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Разделим обе части уравнения (A.22) на  $(\alpha + 2\mu)$ :

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2u_r}{r^2} = 0. \quad (\text{A.23})$$

Соотношение (A.23) можно свести к виду:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u_r)\right] = 0. \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2u_r)\right] &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{d}{dr}(r^2u_r) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[\frac{d}{dr}(r^2u_r)\right] = \\ &= \left(\frac{-2}{r^3}\right)(2r^2u_r + r^2\frac{du_r}{dr}) + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[2ru_r + r^2\frac{du_r}{dr}] = \\ &= -\frac{4u_r}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} + \frac{1}{r^2}\left[(2u_r + 2r\frac{du_r}{dr}) + (2r\frac{du_r}{dr} + r^2\frac{d^2u_r}{dr^2})\right] = \\ &= -\frac{4u_r}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} + \frac{2u_r}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} + \frac{d^2u_r}{dr^2} = \frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2u_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Решение дифференциального уравнения (A.24) имеет вид:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2}, \quad (\text{A.26})$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные константы.

Подставляя (A.26) в соотношения (A.18) и (A.19) получим соотношения для определения ненулевых компонент тензора напряжения Коши:

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \alpha) \frac{du_r}{dr} + 2\alpha \frac{u_r}{r} = (2\mu + \alpha) \left( C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} \right) + 2\alpha \left( C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) = (2\mu + 3\alpha) C_1 - \frac{4\mu}{r^3} C_2, \quad (\text{A.27})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = 2(\mu + \alpha) \frac{u_r}{r} + \alpha \frac{du_r}{dr} = 2(\mu + \alpha) \left( C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right) + \alpha \left( C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} \right) = (2\mu + 3\alpha) C_1 + \frac{2\mu}{r^3} C_2. \quad (\text{A.28})$$

Запишем граничные условия в компонентах. На внутренней поверхности (при  $r = r^{in}$ )  $\sigma_{rr}|_{r=r^{in}} = -p|_{r=r^{in}}$ ; на внешней поверхности (при  $r = r^{out}$ )  $u_r|_{r=r^{out}} = 0$ . Подставляя граничные условия в соотношения (A.26), (A.27) получим систему уравнений для определения констант  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} (2\mu + 3\alpha) C_1 - \frac{4\mu}{(r^{in})^3} C_2 = -p|_{r=r^{in}}, \\ r^{out} C_1 + \frac{C_2}{(r^{out})^2} = u_r|_{r=r^{out}} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

Решение системы неоднородных линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{4\mu u_r|_{r=r^{out}} (r^{out})^2 - p|_{r=r^{in}} (r^{in})^3}{(2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu (r^{out})^3}, \\ C_2 = \frac{(u_r|_{r=r^{out}} (2\mu + 3\alpha) + r^{out} p|_{r=r^{in}}) (r^{in})^3 (r^{out})^2}{(2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu (r^{out})^3}. \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Подставим константы  $C_1$  и  $C_2$  (соотношение (A.30)) в соотношения (A.27) и (A.28), определим ненулевые компоненты тензора напряжений Коши:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= (2\mu + 3\alpha)C_1 - \frac{4\mu}{r^3}C_2 = \\ &= \frac{4\mu(2\mu + 3\alpha)[(r^{out})^2 r^3 - (r^{in})^3 (r^{out})^2]u_r \Big|_{r=r^{out}} - [(2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 r^3 + 4\mu(r^{in})^3 (r^{out})^3]p \Big|_{r=r^{in}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)r^3}.\end{aligned}\quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} &= (2\mu + 3\alpha)C_1 + \frac{2\mu}{r^3}C_2 = \\ &= \frac{((2\mu + 3\alpha)4\mu(r^{out})^2 r^3 + 2\mu(2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 (r^{out})^2)u_r \Big|_{r=r^{out}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)r^3} + \\ &+ \frac{(-(2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 r^3 + 2\mu(r^{in})^3 (r^{out})^3)p \Big|_{r=r^{in}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)r^3}.\end{aligned}\quad (\text{A.32})$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений Коши на внешней поверхности шара (при  $r = r^{out}$ ) имеют вид:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=r^{out}} = \frac{4\mu(2\mu + 3\alpha)[(r^{out})^3 - (r^{in})^3]u_r \Big|_{r=r^{out}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)(r^{out})} - \frac{(6\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 p \Big|_{r=r^{in}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)}.\quad (\text{A.33})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu(2\mu + 3\alpha)(2(r^{out})^3 + (r^{in})^3)u_r \Big|_{r=r^{out}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)(r^{out})} + \frac{3\alpha(r^{in})^3 p \Big|_{r=r^{in}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)}.\quad (\text{A.34})$$

Среднее напряжение Коши (гидростатическое напряжение) для двухфазной среды равно радиальной компоненте напряжения на внешней поверхности сферы [216]:

$$\sigma_{cp} = \sigma_{rr} \Big|_{r=r^{out}} = \frac{4\mu(2\mu + 3\alpha)[(r^{out})^3 - (r^{in})^3]u_r \Big|_{r=r^{out}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)(r^{out})} - \frac{(6\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 p \Big|_{r=r^{in}}}{((2\mu + 3\alpha)(r^{in})^3 + 4\mu(r^{out})^3)},\quad (\text{A.35})$$

где  $\sigma_{cp}$  – среднее напряжение Коши двухфазной среды, равное давлению всестороннего растяжения – сжатия.

***Оценка возможности использования аналитического решения  
вспомогательной задачи для геометрически нелинейного случая***

Оценка возможности использования аналитического решения вспомогательной задачи (соотношения (A.35)) для умеренно больших изменений объема, характерных для процесса дыхания, выполнялась с помощью численного решения аналогичной задачи (соотношения (A.1)-(A.5)) в геометрически нелинейной постановке. Задача о всестороннем сжатии сферы является сферически симметричной, напряженно-деформированное состояние в каждый момент деформирования на любой поверхности  $r=\text{const}$  совпадает; при численном моделировании рассматривается 1/8 часть сферической оболочки.

Для описания нелинейного поведения однородного изотропного материала используется гиперупругий неогуковский закон. Рассматривается геометрически нелинейная задача, в качестве меры деформации используется мера Генки. Гиперупругий неогуковский закон с использованием меры Генки для изотропного упругого тела эквивалентен гипоупругому закону с использованием логарифмической производной взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа и тензора деформации скорости (в качестве меры скорости деформации).

Перемещения отсчитываются от отсчетной естественной конфигурации. В случае давления на внутренней поверхности оболочки, отличного от нулевого, рассматриваемую конфигурацию нельзя считать естественной, напряжение на внешней оболочке будет отличаться от тривиального. Полагается, что оболочка находится в ненапряженном состоянии при одинаковом давлении внутри и на внешней поверхности, равном атмосферному, от которого и будет отсчитываться изменение давления, обуславливающее отличное от тривиального напряженное и деформированное состояние оболочки. От этого же состояния будет рассматриваться изменение напряженно-деформированного состояния. Весь процесс нагружения разбивается на совокупность  $K$  временных шагов. Давление на внутренней стенке сферической оболочки на  $k$ -ом временном шаге, определяется по соотношению:

$$p_{t_k} \Big|_{r=r^{in}} = \left( p_{t_k}^{air} \Big|_{r=r^{in}} - p^{Atm} \right), \quad (\text{A.36})$$

где  $p^{Atm}$  – атмосферное давление;  $p_{t_k}^{air} \Big|_{r=r^{in}}$  – давление газа, изменяющееся в процессе деформации в зависимости от изменения объема по закону Бойля-Мариотта.

В идеальном газе при изотермическом процессе произведение давления и объема газовой фазы постоянно ( $p_{t_k}^{air} V_{t_k}^f = const$ ). Давление газа  $p_{t_k}^{air} \Big|_{r=r^{in}}$  на  $k$ -ом временном шаге определяется как функция от объема, который определяется через внутренний радиус ( $V^f = \frac{4}{3} \pi (r^{in})^3$ ):

$$p_{t_k}^{air} \Big|_{r=r^{in}} = p_{t_0}^{air} \frac{V_{t_0}^f}{V_{t_k}^f} = p_{t_0}^{air} \left[ \frac{r_{t_0}^{in}}{r_{t_k}^{in}} \right]^3, \quad (A.37)$$

где индекс  $t_0$  характеризует начальный момент времени,  $t_k$  –  $k$ -ый временной шаг,  $V^f$  – внутренний объем сферической оболочки. В начальный момент времени давление газа внутри сферы равно атмосферному ( $p_{t_0}^{air} = p^{Atm}$ ), естественная отсчетная конфигурация определяется соответствующей геометрии сферической оболочки при задании на внутренней и внешней поверхностях оболочки атмосферного давления.

На каждом временном шаге выполнялись расчеты с использованием полученного аналитического решения вспомогательной задачи по соотношению (A.33). Перемещение на каждом временном шаге известно из граничных условий; внешний радиус определялся через величину внешнего радиуса на предыдущем временном шаге и приращению перемещения по соотношению:

$$r_{t_k}^{out} = r_{t_{k-1}}^{out} + \Delta u_{t_k} \Big|_{r=r^{out}}, \quad (A.38)$$

где  $\Delta u_{t_k} \Big|_{r=r^{out}}$  – приращение перемещения на внешней поверхности сферической оболочки на  $k$ -ом шаге по времени.

Внутренний радиус определяется как разность внешнего радиуса и толщины оболочки:  $r_{(t)}^{in} = r_{(t)}^{out} - m$ , где  $m$  – толщина оболочки. При этом в общем

случае в процессе сжатия/расширения сферы толщина оболочки может изменяться. Предварительная оценка изменения толщины оболочки (численным расчетом) в процессе деформирования показала, что изменение составляет менее 1%, в связи с чем толщину сферической оболочки в процессе деформирования считали неизменной.

Давление газа на внутренней поверхности сферы определялось по соотношению (А.37) как функция от давления газа в начальный момент времени и внутреннего радиуса сферы.

Численное решение геометрически нелинейной задачи было получено с использованием программного продукта ANSYS Mechanical APDL (ANSYS Parametric Design Language). В результате численного решения была получена радиальная компонента тензора напряжений Коши в узлах сетки на внешней поверхности сферической оболочки в процессе пошагового нагружения (на различных шагах по времени). Сравнение аналитического и численного решений (радиальных компонент напряжений) выполнялось на каждом временном шаге для нескольких сценариев всестороннего сжатия и расширения сферы при реальных параметрах легочной ткани (модуль Юнга взят равным 60 кПа, коэффициент Пуассона взят равным 0,45) [94]. Относительная погрешность численного и аналитического решений на каждом временном шаге определялась по соотношению:

$$\delta_{t_k} = \frac{|\sigma_{rr,t_k}^{An} - \sigma_{rr,t_k}^{Num}|}{\sigma_{rr,t_k}^{Num}} \cdot 100\% , \quad (\text{A.39})$$

где  $\sigma_{rr}^{An}$  – величина напряжения, полученная аналитически;  $\sigma_{rr}^{Num}$  – величина напряжения, полученная численно;  $\delta$  – относительная погрешность, %.

Определены также средняя и максимальная относительные погрешности по соотношениям:

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{t_k=1}^K \delta_{t_k}}{K} , \quad (\text{A.40})$$

$$\delta^{\max} = \max(\delta_{t_k}), \quad (\text{A.41})$$

где  $\bar{\delta}$  – средняя относительная погрешность,  $\delta^{\max}$  – максимальная относительная погрешность,  $K$  – количество временных шагов.

Сравнение аналитического и численного решений было выполнено для двух сценариев. Первый сценарий подразумевал уменьшение внутреннего объема за счет всестороннего сжатия на 52,95%; второй сценарий соответствовал увеличению объема за счет всестороннего расширения на 58,79%. Результаты сопоставления решений приведены в таблице 1. Для сравнения в процессе спокойного вдоха объем легких человека изменяется примерно на 14,5%, во время максимально глубокого вдоха – около 57%.

Таблица А.1 – результаты сравнения аналитического и численного решения

Сценарий	Изменение внутреннего объема, %	Средняя относительная погрешность по временным шагам, %	Максимальная относительная погрешность, %
1	-52,95%	1,46%	3,22%
2	58,79%	1,04%	1,84%

В обоих рассматриваемых сценариях средняя погрешность между аналитическим и численным решениями составила менее 1,5 %. На рисунках А.1 и А.5 приведены значения радиального напряжения на внешней поверхности сферы в зависимости от изменения объема для линейной и нелинейной постановок для первого и второго сценария соответственно, а также изменение погрешности численного и аналитического решений.

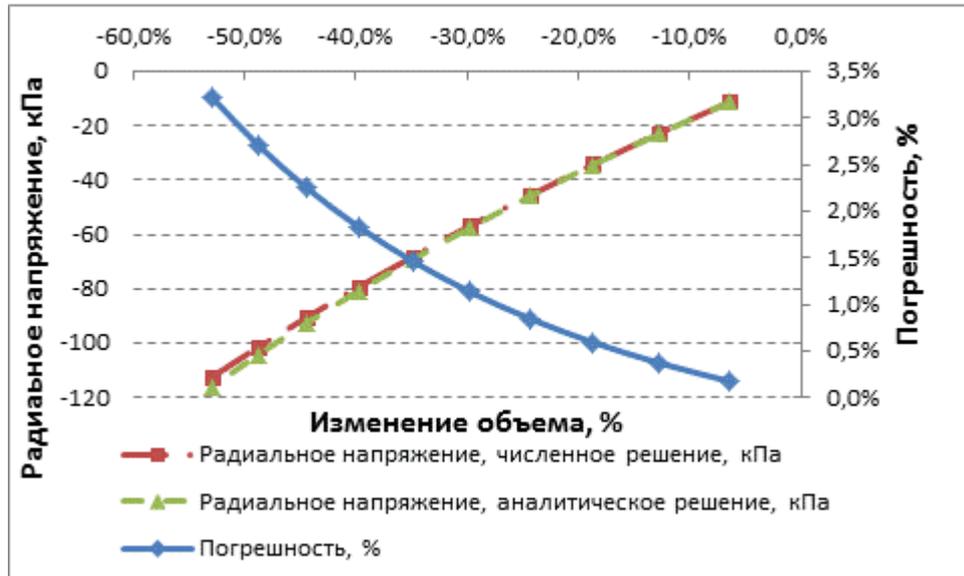


Рисунок А.1 – Зависимости радиальной компоненты тензора напряжения Коши на внешней поверхности сферы и различия нелинейного численного и линейного аналитического решений от относительного изменения объема для первого сценария

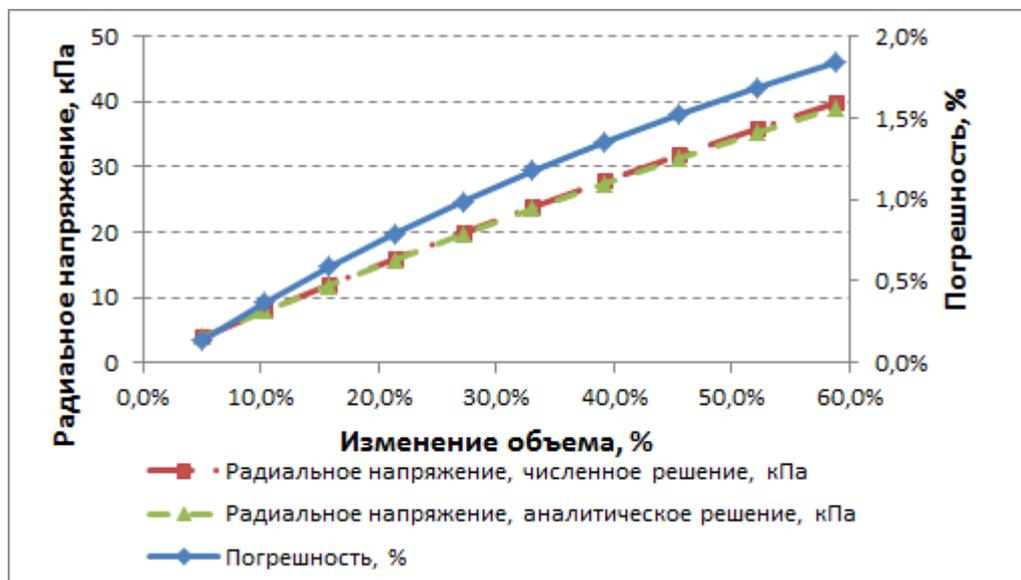


Рисунок А.2 – Зависимости радиальной компоненты тензора напряжения Коши на внешней поверхности сферы и различия нелинейного численного и линейного аналитического решений от относительного изменения объема для второго сценария

Различие нелинейного численного и линейного аналитического решений с ростом относительного изменения объема (в результате всестороннего сжатия сферы на 52,95%) постепенно увеличивается и достигает максимального значения 3,22%. Во втором сценарии максимальная погрешность составила 1,84%. Основываясь на полученных результатах можно отметить, что полученное аналитическое решение геометрически линейной задачи находится в удовлетворительном соответствии с результатами решения в нелинейной постановке как при спокойном, так и при глубоком дыхании, что свидетельствует о возможности использования первого при построении рассматриваемой подмодели [218].

***Установление соотношения для связи скорости изменения среднего напряжения двухфазной среды легких со скоростью изменения объема двухфазной среды***

Соотношение между скоростью изменения среднего напряжения  $\dot{\Sigma}_{cp}$  и скоростью изменения объема  $I_1(\mathbf{D})$  двухфазной среды легких, учитывающее взаимодействие между легочной тканью и воздухом, содержащимся в легких, устанавливается на основе соотношения (A.35). В полученном аналитическом способе из решения вспомогательной задачи соотношении (A.35) фигурируют внутренний и внешний радиусы сферической оболочки, перемещения и давление. При работе с двухфазной средой перейдем от размеров (радиусов) к объемам сферы и газа.

Объем газа, содержащегося в сфере, соответствует объему газообразной фазы ( $\hat{V}_f$ ) и определяется по формуле  $\hat{V}_f = \frac{4}{3}\pi(r^{in})^3$ . Выразим внутренний радиус сферической оболочки через объем газовой фазы:

$$r^{in} = \sqrt[3]{\frac{3\hat{V}_f}{4\pi}}. \quad (\text{A.42})$$

Объем среды  $\hat{V}$  в целом, состоящей из двух фаз, определяется по формуле  $\hat{V} = \frac{4}{3}\pi(r^{out})^3$ . Выразим внешний радиус через объем среды, состоящей из двух фаз:

$$r^{out} = \sqrt[3]{\frac{3\hat{V}}{4\pi}}. \quad (\text{A.43})$$

Перемещение на внешней поверхности сферической оболочки  $u_r|_{r=r^{out}}$  определим через разность внешних радиусов в текущей и отсчетной конфигурациях:

$$u_r|_{r=r^{out}} = \hat{r}^{out} - r^{out} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\hat{V}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\hat{V}^o}. \quad (\text{A.44})$$

Подставляя соотношения (A.42), (A.43), (A.44), давление газовой фазы  $p_f$  вместо  $p|_{r=r^{in}}$  в (A.35), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{cp} &= \frac{4\mu(2\mu + 3\alpha)\left[\frac{3\hat{V}}{4\pi} - \frac{3\hat{V}_f}{4\pi}\right]\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\hat{V}} - \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}\hat{V}^o}\right) - (6\mu + 3\alpha)\frac{3\hat{V}_f}{4\pi}p_f}{\left((2\mu + 3\alpha)\frac{3\hat{V}_f}{4\pi} + 4\mu\frac{3\hat{V}}{4\pi}\right)\sqrt[3]{\frac{3\hat{V}}{4\pi}} - \left((2\mu + 3\alpha)\frac{3\hat{V}_f}{4\pi} + 4\mu\frac{3\hat{V}}{4\pi}\right)} = \\ &= \frac{4\mu(2\mu + 3\alpha)[\hat{V} - \hat{V}_f](\sqrt[3]{\hat{V}} - \sqrt[3]{\hat{V}^o})}{((2\mu + 3\alpha)\hat{V}_f + 4\mu\hat{V})\sqrt[3]{\hat{V}}} - \frac{(6\mu + 3\alpha)\hat{V}_f p_f}{((2\mu + 3\alpha)\hat{V}_f + 4\mu\hat{V})} = \\ &= \frac{1}{((2\mu + 3\alpha)\hat{V}_f + 4\mu\hat{V})} \left[ 4\mu(2\mu + 3\alpha)[\hat{V} - \hat{V}_f] \left(1 - \frac{\sqrt[3]{\hat{V}^o}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}\right) - (6\mu + 3\alpha)\hat{V}_f p_f \right] = \\ &= \frac{1}{(A\hat{V}_f + B\hat{V})} \left[ AB[\hat{V} - \hat{V}_f] \left(1 - \frac{\sqrt[3]{\hat{V}^o}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}\right) - C\hat{V}_f p_f \right], \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

где  $\overset{\circ}{V}$  – объем двухфазной среды в отсчетной конфигурации,  $\hat{V}$  – текущий объем двухфазной среды;  $\hat{V}_f$  – объем газовой фазы,  $A = (2\mu + 3\alpha)$ ,  $B = 4\mu$ ,  $C = (6\mu + 3\alpha)$ .

Для определения скорости изменения среднего напряжения продифференцируем соотношение (A.45), получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{cp} &= \{ [A\hat{V}_f + 4\mu\hat{V}]^{-1} [AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f] \}' = \\
&= [(A\hat{V}_f + B\hat{V})^{-1}]' [AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f] + \\
&+ [A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-1} [AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f]' = \\
&= -[A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-2} [A\hat{V}_f + B\hat{V}]' [AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f] + \\
&+ [A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-1} [AB(\hat{V} - \hat{V}_f)' (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) + \\
&+ AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \overset{\circ}{V}^{\frac{1}{3}} \hat{V}^{-\frac{1}{3}})' - C\hat{V}_f \dot{p}_f - C\hat{V}_f \dot{p}_f] = \\
&= -[A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-2} [A\hat{V}_f + B\hat{V}]' [AB(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f] + \\
&+ [A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-1} [BA(\hat{V} - \hat{V}_f) (1 - \frac{\sqrt[3]{\overset{\circ}{V}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) + AB(\hat{V} - \hat{V}_f) \frac{1}{3} \overset{\circ}{V}^{\frac{1}{3}} \hat{V}^{-\frac{4}{3}} \dot{\hat{V}} - C\hat{V}_f \dot{p}_f - C\hat{V}_f \dot{p}_f].
\end{aligned} \tag{A.46}$$

где  $\dot{\sigma}_{cp}$  – изменение среднего напряжения Коши двухфазной среды.

При пренебрежении изменением объема твердой фазы скорость изменения объема двухфазной среды  $\dot{\hat{V}}$  равна скорости изменения объема газовой фазы  $\dot{\hat{V}}_f$ . В этом случае в соотношении (A.46) член, содержащий множитель  $(\hat{V} - \hat{V}_f)$  обращается в нуль. Соотношение (A.46) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{cp} = & -[A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-2}[A + B]\dot{\hat{V}}[AB(\hat{V} - \hat{V}_f)(1 - \frac{\sqrt[3]{\hat{V}^{\circ}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\hat{V}_f p_f] + \\ & + [A\hat{V}_f + B\hat{V}]^{-1}[AB(\hat{V} - \hat{V}_f)\frac{1}{3}\hat{V}^{\frac{1}{3}}\hat{V}^{-\frac{4}{3}}\dot{\hat{V}} - C\dot{\hat{V}}p_f - C\hat{V}_f\dot{p}_f]. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Преобразуем соотношение (A.47):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{cp} = & -[A\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B]^{-2}[A + B]\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}[AB(1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}})(1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}^{\circ}}{\hat{V}}}) - C\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}p_f] + \\ & + [A\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B]^{-1}[AB(1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}})\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\hat{V}^{\circ}}{\hat{V}}}\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} - C\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}p_f - C\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}\dot{p}_f], \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

где  $\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}$  – объемная доля газовой фазы,  $\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}$  – относительная скорость изменения объема двухфазной среды.

В соотношении (A.48) откроем скобки, сгруппируем члены при множителе  $\frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}$ , тогда уравнение для определения связи скорости изменения среднего напряжения Коши двухфазной среды со скоростью изменения объема, давления газа в легких примет вид [216]:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{cp} = & \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}}\{[A\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B]^{-1}[AB(1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}})\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\hat{V}^{\circ}}{\hat{V}}} - Cp_f] - \\ & - [A\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B]^{-2}[A + B][AB(1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}})(1 - \frac{\sqrt[3]{\hat{V}^{\circ}}}{\sqrt[3]{\hat{V}}}) - C\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}p_f]\} - [A\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B]^{-1}C\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}\dot{p}_f. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Скорость изменения среднего напряжения двухфазной среды для взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа и тензора напряжений Коши связана соотношением:

$$\dot{\Sigma}_{cp} = [(\frac{\rho}{\hat{\rho}})\sigma_{cp}]'. \quad (\text{A.50})$$

Сформулируем основные гипотезы в рассматриваемой подзадаче: масса твердой фазы в отсчетной и актуальной конфигурациях постоянна ( $\overset{\circ}{m}^s = \hat{m}^s$ );

масса воздуха, содержащегося в легких, много меньше массы легочной ткани, массой воздуха по сравнению с массой твердой фазы в ПО можно пренебречь ( $\hat{m}^s + \hat{m}^f \approx \hat{m}^s$ ,  $\overset{\circ}{m}^s + \overset{\circ}{m}^f \approx \overset{\circ}{m}^s$ ). С использованием определения плотности ( $\rho = \frac{m}{V}$ ) и приведенных выше гипотез получим соотношение, связывающее отношение плотностей и отношение объемов:

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} = \frac{\overset{\circ}{m}}{\overset{\circ}{V}} \bigg/ \frac{\hat{m}}{\hat{V}} = \frac{\overset{\circ}{m}^s + \overset{\circ}{m}^f}{\overset{\circ}{V}} \bigg/ \frac{\hat{m}^s + \hat{m}^f}{\hat{V}} \approx \frac{\overset{\circ}{m}^s}{\overset{\circ}{V}} \bigg/ \frac{\hat{m}^s}{\hat{V}} = \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}}. \quad (\text{A.51})$$

Подставим соотношение (A.51) в (A.50), получим:

$$\dot{\Sigma}_{cp} = \left[ \begin{pmatrix} \overset{\circ}{\rho} \\ \hat{\rho} \end{pmatrix} \sigma_{cp} \right]' = \left[ \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \overset{\circ}{V} \end{pmatrix} \sigma_{cp} \right]' = \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \overset{\circ}{V} \end{pmatrix}' \sigma_{cp} + \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \overset{\circ}{V} \end{pmatrix} \dot{\sigma}_{cp} = \frac{\dot{\hat{V}}}{\overset{\circ}{V}} \sigma_{cp} + \begin{pmatrix} \hat{V} \\ \overset{\circ}{V} \end{pmatrix} \dot{\sigma}_{cp}. \quad (\text{A.52})$$

Подставив (A.49) в (A.52), соотношение для скорости изменения среднего напряжения примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \sigma_{cp} + \left(\frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}}\right) \dot{\sigma}_{cp} = \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \sigma_{cp} + \left(\frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}}\right) \left[\frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \left\{ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} - Cp_f \right] - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-2} [A+B] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} p_f \right] \right\} - \right. \\
&\quad \left. - \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \dot{p}_f \right] = \\
&= \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \sigma_{cp} + \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \left\{ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} - Cp_f \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-2} [A+B] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} p_f \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \dot{p}_f = \\
&= \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \left\{ \sigma_{cp} + \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} - Cp_f \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-2} [A+B] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\overset{\circ}{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} p_f \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\overset{\circ}{V}} \dot{p}_f.
\end{aligned}$$

(A.53)

Подставим (A.45) в (A.53), приведем подобные слагаемые, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \left\{ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} p_f \right] + \right. \\
&+ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} - C p_f \right] - \\
&- \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-2} \left[ A + B \right] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} p_f \right] \} - \\
&- \frac{\hat{V}}{\hat{V}} \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \dot{p}_f = \\
&= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \left\{ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C p_f \left( \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + 1 \right) \right] - \right. \\
&- \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-2} \left[ A + B \right] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} p_f \right] \} - \\
&- \frac{\hat{V}}{\hat{V}} \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \dot{p}_f.
\end{aligned} \tag{A.54}$$

Выпишем итоговый вид соотношения (A.54):

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \left\{ \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C p_f \left( \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + 1 \right) \right] - \right. \\
&- \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-2} \left[ A + B \right] \left[ AB \left( 1 - \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} p_f \right] \} - \frac{\hat{V}}{\hat{V}} \left[ A \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} + B \right]^{-1} C \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}} \dot{p}_f.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

В соотношении (A.55) заменим  $\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}$  на объемную долю газовой фазы:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \left\{ \left[ A \hat{\gamma}_f + B \right]^{-1} \left[ AB \left( 1 - \hat{\gamma}_f \right) \left( 1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C p_f \left( \hat{\gamma}_f + 1 \right) \right] - \right. \\
&- \left[ A \hat{\gamma}_f + B \right]^{-2} \left[ A + B \right] \left[ AB \left( 1 - \hat{\gamma}_f \right) \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}} \right) - C \hat{\gamma}_f p_f \right] \} - \frac{\hat{V}}{\hat{V}} \left[ A \hat{\gamma}_f + B \right]^{-1} C \hat{\gamma}_f \dot{p}_f,
\end{aligned} \tag{A.56}$$

где  $\hat{\gamma}_f$  – объемная доля газовой фазы ( $\hat{\gamma}_f = \frac{\hat{V}_f}{\hat{V}}$ ).

Произведение давления и объема газовой фазы постоянно, продифференцируем соотношение  $p_f V_f = const$ , получим:

$$\dot{p}_f V_f + p_f \dot{V}_f = 0. \quad (\text{A.57})$$

Выразим изменение давления газовой фазы через изменение объема газовой фазы:

$$\dot{p}_f = -\frac{\dot{V}_f}{\hat{V}_f} p_f. \quad (\text{A.58})$$

Подставим соотношение (A.58) в (A.56), получим [67]:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{cp} = & \frac{\dot{V}}{\hat{V}} \{ [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f (\hat{\gamma}_f + 1)] - \\ & - [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] \} + \frac{\dot{V}_f}{\hat{V}} \frac{\hat{V}}{\hat{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

При пренебрежении изменением плотности твердого тела, скорость изменения объема твердой фазы близка к нулю, скорость изменения объема двухфазной среды  $\dot{\hat{V}}$  равна скорости изменения объема газовой фазы  $\dot{V}_f$ .

Соотношение (A.59) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{cp} = & \frac{\dot{V}}{\hat{V}} \{ [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f (\hat{\gamma}_f + 1)] - \\ & - [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] \} + \frac{\dot{V}}{\hat{V}} \frac{\hat{V}}{\hat{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f = \\ = & \frac{\dot{V}}{\hat{V}} \{ [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f (\hat{\gamma}_f + 1)] - \\ & - [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) (1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \frac{\dot{V}}{\hat{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

В соотношении для скорости изменения среднего напряжения выделим скорость изменения объема двухфазной среды, для этого домножим числитель и знаменатель (A.60) на  $\hat{V}$ , получим:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \frac{\hat{V}}{\hat{V}} \{ [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \\
&- [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B][AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \} = \\
&= \frac{\dot{\hat{V}}}{\hat{V}} \left\{ \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\
&\left. - \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B][AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \left( \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \right)^2 [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\}.
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Учитывая, что относительная скорость изменения объема двухфазной среды легких определяется как первый инвариант тензора деформации скорости ( $\frac{d\hat{V}}{d\hat{V}} = I_1(\dot{\hat{\mathbf{H}}}) = I_1(\dot{\hat{\mathbf{H}}}^{\Omega_{\log}}) = I_1(\mathbf{D})$ ), скорость изменения напряжения двухфазной среды примет вид:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_{cp} &= I_1(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\
&\left. - \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B][AB(1 - \hat{\gamma}_f)(1 - \sqrt[3]{\frac{\overset{\circ}{V}}{\hat{V}}}) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \left( \frac{\hat{V}}{\overset{\circ}{V}} \right)^2 [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\}.
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Подставляя (A.51) в соотношение (A.62), получим соотношение для связи скорости изменения среднего напряжения Кирхгоффа двухфазной среды легких со скоростью относительного изменения объема двухфазной среды легких, полученное из решения вспомогательной задачи, используемое в итоговой постановке задачи:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{cp} = I_1(\mathbf{D}) \left\{ \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} [AB(1 - \hat{\gamma}_f) \left(1 - \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}\right) - Cp_f(\hat{\gamma}_f + 1)] - \right. \\ \left. - \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}} [A\hat{\gamma}_f + B]^{-2} [A + B] [AB(1 - \hat{\gamma}_f) \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\hat{\rho}}{\overset{\circ}{\rho}}}\right) - C\hat{\gamma}_f p_f] + \left(\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\hat{\rho}}\right)^2 [A\hat{\gamma}_f + B]^{-1} Cp_f \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

где  $A = (2\mu + 3\alpha)$ ,  $B = 4\mu$ ,  $C = (6\mu + 3\alpha)$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$  – параметры Ламе твердой фазы

$$\left( \alpha = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \right).$$

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2021610660

**«Программный модуль для определения напряженного состояния на внешней поверхности однородной изотропной упругой тонкостенной сферической оболочки, заполненной воздухом, подвергаемой равномерному всестороннему сжатию (или растяжению)»**

Правообладатель: *см. на обороте*Автор: *Цинкер Михаил Юрьевич (RU)*

Заявка № 2020667715

Дата поступления 28 декабря 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 18 января 2021 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Иблиев

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации базы данных

№ 2023624733

## База данных конечно-элементных сеток органов и систем человеческого организма

Правообладатель: *Федеральное бюджетное учреждение науки «Федеральный научный центр медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения» Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека (ФБУН «ФНЦ медико-профилактических технологий управления рисками здоровью населения») (RU)*

Авторы: *Цинкер Михаил Юрьевич (RU), Кучуков Артур Ильдарович (RU), Нурисламов Владислав Владимирович (RU)*

Заявка № 2023624159

Дата поступления 22 ноября 2023 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре баз данных 19 декабря 2023 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат: 429b6a0e3853164bf96f83b73b4aa7  
Владислав **Зубов** Юрий Сергеевич  
Действителен с 19.12.2023 по 02.08.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024667751

**Программный комплекс для численной реализации  
связанной задачи течения воздуха в упругого-  
деформируемой насыщенной пористой среде,  
аппроксимирующей легкие человека**

Правообладатель: *Федеральное бюджетное учреждение науки  
«Федеральный научный центр медико-профилактических  
технологий управления рисками здоровью населения»  
Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав  
потребителей и благополучия человека (RU)*

Авторы: *Цинкер Михаил Юрьевич (RU), Нурисламов Владислав  
Владимирович (RU)*

Заявка № 2024666380

Дата поступления 15 июля 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 29 июля 2024 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ  
Сертификат 429b680fe7853164baf96f83b73b4aa7  
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 18.02.2023 по 02.08.2024

Ю.С. Зубов

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024682468

**Программный комплекс для численной реализации  
математической модели течения воздуха в  
деформируемых легких человека**

Правообладатель: *Федеральное бюджетное учреждение науки  
«Федеральный научный центр медико-профилактических  
технологий управления рисками здоровью населения»  
Федеральной службы по надзору в сфере защиты прав  
потребителей и благополучия человека (RU)*

Авторы: *Трусов Петр Валентинович (RU), Зайцева Нина  
Владимировна (RU), Цинкер Михаил Юрьевич (RU), Нурисламов  
Владислав Владимирович (RU)*

Заявка № 2024681135

Дата поступления 12 сентября 2024 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 24 сентября 2024 г.



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

документ подписан электронной подписью  
Сертификат 0492e761a6300c15424d670bca2026  
Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**  
Действителен с 03.07.2024 по 03.10.2025

Ю.С. Зубов

## Список литературы

1. Анализ риска здоровью в стратегии государственного социально-экономического развития: монография: в 2 т. / Г.Г. Онищенко, Н.В. Зайцева, А.Ю. Попова [и др.]; под общ. ред. Г.Г. Онищенко, Н.В. Зайцевой. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.; Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – Т. 1. – 580 с.
2. Артемова Л.В., Баскова Н.В., Бурмистрова Т.Б., Бурякина Е.А. [и др.]. Федеральные клинические рекомендации по диагностике, лечению и профилактике пневмокониозов / под ред. Н.Ф. Измерова. – М., 2014. – 46 с.
3. Артемова Л.В., Баскова Н.В., Бурмистрова Т.Б., Бурякина Е.А. [и др.] Федеральные клинические рекомендации по диагностике, лечению и профилактике пневмокониозов // Медицина труда и промышленная экология. – 2016. – № 1. – С. 36–49.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: «Недра», 1972. – 288 с.
5. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
7. Вейбель Э.Р. Морфометрия легких человека. – М.: Медицина, 1970. – 175 с.
8. Власова Е.М., Воробьева А.А., Пономарева Т.А. Особенности формирования кардиореспираторной патологии у работников титаномагниевого производств // Медицина труда и промышленная экология. – 2017. – № 9. – С. 38.
9. Власова Е.М., Устинова О.Ю., Носов А.Е., Загороднов С.Ю. Особенности заболеваний органов дыхания у плавильщиков титановых сплавов в условиях сочетанного воздействия мелкодисперсной пыли и соединений хлора // Гигиена и санитария. – 2019. – Т. 98, № 2. – С. 153–158.

10. Воронин А.А., Лукьянов Г.Н., Неронов Р.В. Моделирование воздушного потока в каналах нерегулярной формы // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. № 3 (85). – С. 113–118.
11. Голдбергер Э.Л., Ригни Д.Р., Уэст Б.Дж. Хаос и фракталы в физиологии человека // В мире науки. – 1990. – № 4. – С. 25–32.
12. Голов А.В., Симаков С.С. Математическая модель регуляции легочной вентиляции при гипоксии и гиперкапнии // Компьютерные исследования и моделирование. – 2017. – Т. 2(9). – С.297–310. DOI: 10.20537/2076-7633-2017-9-2-297-310
13. Гребенев А.Л. Пропедевтика внутренних болезней. – М.: Медицина, 2001. – 592 с. ISBN 5-225-04704-1
14. Данилов И.П., Захаренко В.В., Олещенко А.М., Шавлова О.П. [и др.] Профессиональная заболеваемость работников алюминиевой промышленности – возможные пути решения проблемы // Бюлл. ВСНЦ СО РАМН. – 2010. – Т. 4 (74). – С. 17–21.
15. Журавков М.А. Современные численные методы в механике: курс лекций. – Минск: БГУ, 2022. – 132 с.
16. Зайцева Н.В., Землянова М.А., Степанков М.С. [и др.] Особенности бионакопления и токсического действия наночастиц оксида меди (II) при многократной ингаляционной экспозиции // Гигиена и Санитария. – 2021. – Т. 100, № 10. – С. 1139–1144. DOI: 10.47470/0016-9900-2021-100-10-1139-1144
17. Зайцева Н.В., Землянова М.А., Степанков М.С., Игнатова А.М. Исследование и оценка токсичности наночастиц оксида кальция при однократной ингаляционной экспозиции // Российские нанотехнологии. – 2019. – Т. 14, № 9-10. – С. 94–100. DOI: 10.21517/1992-7223-2019-9-10-94-100

18. Зайцева Н.В., Кирьянов Д.А., Клейн С.В., Цинкер М.Ю., Андришунас А.М. Распределение твердых частиц микроразмерного диапазона в дыхательных путях человека: натурный эксперимент // Гигиена и санитария. – 2023. – Т. 102, № 5. – С. 412–420. DOI: 10.47470/0016-9900-2023-102-5-412-420
19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: пер. с англ. / под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 541 с. DOI: 10.18720/SPBPU/2/ek21-22
20. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
21. Кацнельсон Б.А., Алексеева О.Г., Привалова Л.И., Ползик Е.В. Пневмокониозы: патогенез и биологическая профилактика. – Екатеринбург: УрО РАН, 1995 – 325 с.
22. Клаучек С.В., Лифанова Е.В. Физиология дыхания: Методическое пособие. – Волгоград: Волгоградский Государственный Медицинский Университет, 2005. – 88 с.
23. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. – 262 с.
24. Кукес В.Г., Маринин В.Ф., Реуцкий И.А., Сивков С.И. Врачебные методы диагностики (осмотр, пальпация, перкуссия, аускультация): учебное пособие. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2006. – 720 с.
25. Лаушкина Л.А., Солохина Г.Э., Черкасова М.В. Практический курс физики. Молекулярная физика и термодинамика / под ред. проф. Г.Г. Спирина. – М.: ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008 – 156 с.
26. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наукова думка, 1987. – 232 с.
27. Лейбензон Л.С. Движение жидкостей и газов в пористой среде. – М.-Л.: ОГИЗ, ГОСТЕХИЗДАТ, 1947. – 244 с.
28. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации: учебное пособие. 2-е изд. – Москва: МАКС Пресс, 2017. – 88 с.

29. Линденбратен Л.Д. Лучевая диагностика поражений диафрагмы (краткий очерк) // Радиология и практика. – 2001. – № 2. – С. 6–21.
30. Лукьянов Г.Н., Воронин А.А., Рассадина А.А. Моделирование конвективных потоков в каналах нерегулярной формы на примере полости носа и околоносовых пазух человека // Журнал технической физики. – 2017. – Т. 87, № 3. – С. 462–467.
31. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
32. Любимов Г.А. Модели легких человека и исследование с их помощью механики дыхания // Труды математического института им В.А. Стеклова. – 1998. – Т. 223. – С. 196–206.
33. Маев И.В., Шестаков В.А., Ляхова Т.М., Бусарова Г.А., Пономаренко В.Б., Гончаренко А.Ю., Лебедева Е.Г. Пропедевтика внутренних болезней. В 2 т. : учеб. для студ. учреждений высш. проф. образования / под ред. И.В. Маева, В.А. Шестакова. 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – Т. 1. – 352 с.
34. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
35. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 535 с.
36. Медведев А.Е., Голышева П.С. Моделирование движения воздуха в легких человека при дыхании. Динамика осаждения капель жидкости при применении аэрозольных форм лекарственных средств // Математическая биология и биоинформатика. – 2021. – Т. 16, № 2. – С. 422–438. DOI: 10.17537/2021.16.422
37. Медведев А.Е., Фомин В.М., Гафурова П.С. Трехмерная модель бронхиального дерева человека – моделирование течения воздуха в норме и при патологии // Прикладная механика и техническая физика. – 2020. – Т. 61, № 1. – С. 3–16. DOI: 10.15372/PMTF20200101

38. Мёллер Т.Б., Райф Э. Атлас секционной анатомии человека на примере КТ- и МРТ-срезов: в 3 т. / Т.Б. Мёллер, Э. Райф; пер. с англ.; под общ. ред. проф. Г.Е. Труфанова. – М.: МЕДпресс-информ, 2008. Т. 1: голова и шея. 2008. – 272 с.
39. Митрофанова Ю.А., Загитов Р.А., Трусов П.В. Настройка математической модели для описания горения газообразного топлива с учетом уточнения геометрии расчетной области // Вычислительная механика сплошных сред. – 2020. – Т. 13, № 1. – С. 60–72.
40. Михайлова Н.Л., Генинг Т.П., Долгова Д.Р. Физиология дыхания: Методическое пособие для преподавателей и самостоятельной работы студентов. – Ульяновск, 2015. – 69 с.
41. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1972. – 467 с.
42. Мудрый И.В., Короленко Т.К. Тяжёлые металлы в окружающей среде и их влияние на организм // Врачебное дело. – 2002. – № 5/6. – С. 6–9.
43. Неттер Ф. Атлас анатомии человека / Ф. Неттер; пер. с англ. под ред. Л.П. Колесникова. – 6-е изд. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2018. – 624 с.
44. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 464 с.
45. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
46. О Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации: Указ Президента Российской Федерации № 642 от 1 декабря 2016 г. – М.: Кремль, 2016. – 25 с.
47. Одэн Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
48. Онищенко Г.Г., Зайцева Н.В., Землянова М.А. Гигиеническая индикация последствий для здоровья при внешнесредовой экспозиции химических

- факторов / под ред. Г.Г. Онищенко. – Пермь: Книжный формат, 2011. – 532 с.
- 49.Паспорт. Самоконтроль уровня здоровья (физическое состояние, психологическое состояние, отношение к своему здоровью): пособие для студентов 1-4 курсов [Электронный ресурс]. – Саратов: СГМУ. – 48 с. – URL:  
[https://www.nsmu.ru/socium/student\\_government/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%2016.pdf](https://www.nsmu.ru/socium/student_government/%D0%9F%D1%80%D0%B8%D0%BB%D0%BE%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5%2016.pdf) (дата обращения: 12.06.2023).
- 50.Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
- 51.Прагер В. Введение в механику сплошных сред. – М.: Изд-во иностр. Лит., 1963. – 312 с.
- 52.Профессиональные заболевания органов дыхания: национальное руководство / под ред. Н.Ф. Измерова, А.Г. Чучалина. – М.: ГЭОТАР-Медиа, 2015. – 792 с.
- 53.Ракитский В.Н., Авалиани С.Л., Новиков С.М., Шашина Т.А., Додина Н.С., Кислицин В.А. Анализ риска здоровью при воздействии атмосферных загрязнений как составная часть стратегии уменьшения глобальной эпидемии неинфекционных заболеваний // Анализ риска здоровью. – 2019. – № 4. – С. 30–36. DOI: 10.21668/health.risk/2019.4.03
- 54.Рахманин Ю.А., Новиков С.М., Авалиани С.Л., Сеницына О.О., Шашина Т.А. Современные проблемы оценки риска воздействия факторов окружающей среды на здоровье населения и пути ее совершенствования // Анализ риска здоровью. – 2015. – № 2. – С. 4–14. DOI: 10.21668/health.risk/2015.2.01
- 55.Романьков Л.В. Тезисы лекций по пропедевтике внутренних болезней: учеб.-метод. пособие для студентов 3 курса факультета подготовки специалистов для зарубежных стран. – Гомель: УО «Гомельский

- государственный медицинский университет», 2008. – 172 с. ISBN 978-985-506-176-3
56. Сапин М.Р., Никитюк Д.Б., Ревазов В.С. Анатомия человека. В двух томах. Т.1. – 5-е издание, перераб. и доп. – М.: Медицина, 2001. – 640 с.
57. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.: Физматгиз, 1962. – 282 с.
58. Синельников Р.Д., Синельников Я.Р. Атлас анатомии человека. – 2-е издание в 4 томах. – М.: Медицина, 1996. – Т. 2. – 264 с.
59. Сираев Р.Р. Фильтрация жидкости в пористой среде Форцгеймера с пространственно неоднородными пористостью и проницаемостью // Вычислительная механика сплошных сред. – 2019. – Т. 12, № 3. – С. 281–292. DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.3.24
60. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно технические ведомости СПбГТУ. – 2004. – № 2. – С. 70–81.
61. Таран А.А., Бирюкова Н.В. Влияние экологии на здоровье человека в XXI веке // Актуальные вопросы современной науки и образования. – Пенза, 2021. – С. 258–264.
62. Тишин А.И., Эгембердиев Т.М. Фрактальность человека // Фракталы и циклы развития систем. – 2001. – С. 67–71.
63. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
64. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
65. Трусов П.В., Зайцева Н.В., Кирьянов Д.А., Камалтдинов М.Р., Цинкер М.Ю., Чигвинцев В.М., Ланин Д.В. Математическая модель эволюции функциональных нарушений в организме человека с учетом внешнесредовых факторов // Математическая биология и биоинформатика. – 2012. – № 2. – С. 589–610.

- 66.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю. Моделирование процесса дыхания человека: концептуальная и математическая постановки // Математическая биология и биоинформатика. – 2016. – Т. 11, № 1. – С.64–80. DOI: 10.17537/2016.11.64
- 67.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю. О моделировании течения воздуха в легких человека: конститутивные соотношения для описания деформирования пористой среды // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. – № 4. – С. 165–174. DOI: 10.15593/perm.mech/2020.4.14
- 68.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Бабушкина А.В. Моделирование течения запыленного воздуха в респираторном тракте // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 301–314. DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2018.3.03
- 69.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Кучуков А.И. Численное исследование нестационарного течения запыленного воздуха и оседания пылевых частиц различных размеров в нижних дыхательных путях человека // Математическая биология и биоинформатика. – 2023. – Т. 18, № 2. – С. 347–366. DOI: 10.17537/2023.18.347
- 70.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Некрасова А.В. Математическая модель течения воздуха с твердыми частицами в носовой полости человека // Математическая биология и биоинформатика. – 2021. – Т. 16, № 2. – С. 349–366. DOI: 10.17537/2021.16.349
- 71.Трусов П.В., Кондратьев Н.С., Швейкин А.И. О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – № 3. – С. 182–200. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.13
- 72.Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2019. – 605 с.

- 73.Трусов П.В., Швейкин А.И. О разложении движения и определяющих соотношениях в геометрически нелинейной упруговязкопластичности кристаллитов // Физическая мезомеханика. – 2016. – № 3. – С. 25–38.
- 74.Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория пластичности. – Пермь: Изд-во ПНИПУ. – 2011. – 419 с.
- 75.Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиции многоуровневого моделирования // Физическая мезомеханика. – 2016. – № 2. – С. 47–65.
- 76.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Нурисламов В.В. Моделирование течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека: структура модели, ее основные уравнения и разрешающие соотношения // Вычислительная механика сплошных сред. – 2024. – Т.17, №2. – С.219-231. DOI:10.7242/1999-6691/2024.17.2.20
- 77.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Нурисламов В.В. Моделирование течения воздуха в упруго-деформируемой пористой среде, аппроксимирующей легкие человека: алгоритм реализации и анализ результатов применения модели // Вычислительная механика сплошных сред. – 2024. – Т.17, № 3. – С.329–346. DOI:10.7242/1999-6691/2024.17.3.28
- 78.Трусов П.В., Зайцева Н.В., Цинкер М.Ю., Нурисламов В.В. Программный комплекс для численной реализации математической модели течения воздуха в деформируемых легких человека: Свидетельство о государственной регистрации программ ЭВМ № 2024682468 от 24.09.2024
- 79.Уэст Дж. Физиология дыхания. Основы. – М.: Мир, 1988. – 196 с.
- 80.Фатхутдинова Л.М., Тафеева Е.А., Тимербулатова Г.А., Залялов Р.Р. Риски здоровью населения от загрязнения атмосферного воздуха

- мелкодисперсными взвешенными частицами // Казанский медицинский журнал. – 2021. – Т. 102, № 6. – С. 862–876. DOI: 10.17816/KMJ2021-862
- 81.Фирсов Д.К. Метод контрольного объёма на неструктурированной сетке в вычислительной механике: учебное пособие. – Томск, 2007. – 72 с.
- 82.Цинкер М.Ю. Восстановление трехмерной геометрии легких человека на основе данных компьютерной томографии для задач оценки рисков здоровью человека // Фундаментальные и прикладные аспекты анализа риска здоровью населения: Материалы всероссийской научно-практической интернет-конференции молодых ученых и специалистов Роспотребнадзора с международным участием / под редакцией А.Ю. Поповой, Н.В. Зайцевой. – Пермь, 2021. – С. 372–375.
- 83.Цинкер М.Ю. Программный модуль для определения напряженного состояния на внешней поверхности однородной изотропной упругой тонкостенной сферической оболочки заполненной воздухом, подвергаемой равномерному всестороннему сжатию (или растяжению): Свидетельство о государственной регистрации программ ЭВМ №2021610660 от 18.01.2021.
- 84.Цинкер М.Ю. Трехмерное моделирование дыхательной системы человека для задач оценки рисков здоровью при ингаляционной экспозиции химических веществ // Гигиена и санитария. – 2016. – Т. 95, № 1. – С. 90-93. DOI: 10.18821/0016-9900-2016-95-1-90-93
- 85.Цинкер М.Ю., Кучуков А.И., Нурисламов В.В. База данных конечно-элементных сеток органов и систем человеческого организма: Свидетельство о государственной регистрации базы данных №2023624733 от 19.12.2023.
- 86.Цинкер М.Ю., Нурисламов В.В. Программный комплекс для численной реализации связанной задачи течения воздуха в упругого-деформируемой насыщенной пористой среде, аппроксимирующей легкие человека: Свидетельства о государственной регистрации программ ЭВМ №2024667751 от 29.07.2024

- 87.Шешенин С.В., Артамонова Н.Б. Моделирование нелинейной консолидации пористых сред // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 1. – С.167–176. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.1.13
- 88.Шкляр Б.С. Диагностика внутренних болезней. – Киев: Высшая школа, 1972. – 516 с.
- 89.Adamkiewicz G., Liddie J., Gaffin J.M. The Respiratory Risks of Ambient/Outdoor Air Pollution // Clin Chest Med. – 2020. – Vol. 41, № 4. – P. 809–824. DOI: 10.1016/j.ccm.2020.08.013
- 90.Al-Mayah A., Moseley J., Brock K.K. Contact surface and material nonlinearity modeling of human lungs // Phys. Med. Biol. – 2008. – Vol. 53 (1). – P. 305–317 DOI: 10.1088/0031-9155/53/1/022
91. Al-Mayah A., Moseley J., Velec M., Brock K. Effect of heterogeneous material of the lung on deformable image registration // Proc. SPIE Medical Imaging 2009: Visualization, Image-Guided Procedures, and Modeling, Proc. SPIE, 72610V. DOI: 10.1117/12.813828
- 92.Al-Mayah A., Moseley J., Velec M., Brock K.K. Sliding characteristic and material compressibility of human lung: parametric study and verification // Med. Phys. – 2009. – Vol. 36 (10). – P. 4625–4633. DOI: 10.1118/1.3218761
- 93.Al-Mayah A., Moseley J., Velec M., Brock K. Toward efficient biomechanical-based deformable image registration of lungs for image-guided radiotherapy // Phys. Med. Biol. – 2011. – Vol. 56 (15). – P. 4701–4713. DOI: 10.1088/0031-9155/56/15/005
- 94.Amelon R. Development and characterization of a finite element model of lung motion: Theses of dissertation – University of Iowa, 2012. – 127 p. DOI: 10.17077/etd.73m1nhim
- 95.Armstrong J.D., Gluck E.H., Crapo R.O., Jones H.A., Hughes J.M. Lung tissue volume estimated by simultaneous radiographic and helium dilution methods // Thorax – 1982. – Vol. 37. – P. 676–679. DOI: 10.1136/thx.37.9.676

96. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. Finite element implementation of a geometrically and physically nonlinear consolidation model // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. – 2023. – Vol. 35, № 4. – P.1291–1308. DOI: 10.1007/s00161-022-01124-5
97. Atluri S.N. On Some New General and Complementary Energy Theorems for the Rate Problems in Finite Strain, classical Elastoplasticity // *Journal of Structural Mechanics: An International Journal* – 1980. – Vol. 8, № 1. – P. 61–92. DOI: 10.1080/03601218008907353
98. Avilés-Rojas N., Hurtado D.E. Whole-lung finite-element models for mechanical ventilation and respiratory research applications // *Front. Physiol.* – 2022. – Vol. 13. – P. 984286. DOI: 10.3389/fphys.2022.984286
99. Ball C.G., Uddin M., Pollard A. Mean flow structures inside the human upper airway // *Flow Turbul. Combust.* – 2008. – Vol. 81. – P. 155–188. DOI: 10.1007/s10494-007-9113-3
100. Bates J.H.T., Rossi A., Milic-Emili J. Analysis of the behavior of the respiratory system with constant inspiratory flow // *J Appl Physiol* . – 1985. – Vol. 58. – P. 1840–1848.
101. Bates J.H.T. *Lung Mechanics – An Inverse Modeling Approach*. – Cambridge University Press, 2009. DOI: 10.1017/CBO9780511627156
102. Ben-Tal A. Simplified models for gas exchange in the human lungs // *Journal of Theoretical Biology*. – 2006. – Vol. 238. – P. 474–495. DOI:10.1016/j.jtbi.2005.06.005
103. Benallal H., Beck K.C., Johnson B.D., Busso T. Evaluation of cardiac output from a tidally ventilated homogeneous lung model // *Eur. J. Appl. Physiol.* – 2005. – Vol. 95. – P. 153–162. DOI: 10.1007/s00421-005-1376-6
104. Berger L., Bordas R., Burrowes K., Grau V., Tavener S., Kay D. A poroelastic model coupled to a fluid network with applications in lung modeling // *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* – 2016. – Vol. 32. – P. e02731. DOI: 10.1002/cnm.2731

105. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // *Journal of Applied Physics*. – 1941. – Vol.12. № 2. – P.155–164.
106. Biot M.A. General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material // *J. Appl. Mech.* – 1956. – Vol.23. – P. 91–96.
107. Biot M.A., Temple G. Theory of Finite Deformations of Porous Solids // *Indiana University Mathematics Journal*. – 1972. – Vol. 21(7). – P. 597–620.
108. Blank F., Stumbles P.A., Seydoux E. [et al.] Size-dependent uptake of particles by pulmonary antigen-presenting cell populations and trafficking to regional lymph nodes // *American Journal of Respiratory Cell and Molecular Biology*. – 2013. – Vol. 49, № 1. – P. 67–77. DOI: 10.1165/rcmb.2012-0387OC
109. Borojeni A.A.T., Frank-Ito D.O., Kimbell J.S., Rhee J.S., Garcia G.J.M. Creation of an idealized nasopharynx geometry for accurate computational fluid dynamics simulations of nasal airflow in patient-specific models lacking the nasopharynx anatomy // *Int J Numer Method Biomed Eng.* – 2017. – Vol. 33, № 5. – P. 10. DOI: 10.1002/cnm.2825
110. Bradshaw K., Warfield-McAlpine P., Vahaji S., Emmerling J., Salati H., Sacks R., Fletcher D.F., Singh N., Inthavong K. New insights into the breathing physiology from transient respiratory nasal simulation // *Physics of Fluids*. – 2022. – Vol. 34, № 11. – P. 115103. DOI: 10.1063/5.0112223
111. Brunekreef B., Holgate S.T. Air pollution and health // *Lancet*. – 2002. – Vol. 360. – P. 1233–1242.
112. Calmet H., Gambaruto A.M., Bates A.J., Vazquez M., Houzeaux G., Doorly D.J. Large-scale CFD simulations of the transitional and turbulent regime for the large human airways during rapid inhalation // *Comput. Biol. Med.* – 2016. – Vol. 69. – P. 166–180. DOI:10.1016/j.combiomed.2015.12.003
113. Chen D., Xie H., Gu L., Liu J., Tian L. Generation of a local lung respiratory motion model using a weighted sparse algorithm and motion prior-based registration // *Computers in Biology and Medicine*. – 2020. – Vol. 123. – P. 103913. DOI: 10.1016/j.combiomed.2020.103913

114. Cheng Y.S., Zhou Y., Chen B.T. Particle deposition in a cast of human oral airways // *Aerosol Science & Technology*. – 1999. – Vol.31. – P. 286–300. DOI: 10.1080/027868299304165
115. Choi J. Multiscale numerical analysis of airflow in CT-based subject specific breathing human lungs: PhD Dissertation. – Iowa: University of Iowa, 2011. – 259 p.
116. Choi H.S., Ashitate Y., Lee J.H. [et al.]. Rapid translocation of nanoparticles from the lung airspaces to the body // *Nature Biotechnology*. – 2010. – Vol. 28, № 12. – P. 1300–1304. DOI: 10.1038/nbt.1696
117. Chuang C.C., Mutuku J.K., Chueh C.C., Selvarajoo A., Chen W.H. Fine Particulate Matter Deposition in 3D Out-of-Plane Bifurcation Lung Airway // *Aerosol Air Qual. Res.* – 2023. – Vol. 23. – P. 220392. DOI: 10.4209/aaqr.220392
118. Comerford A., Gravemeier V., Wall W.A. An algebraic variational multiscale-multigrid method for large eddy simulation of turbulent pulsatile flows in complex geometries with detailed insight into pulmonary airway flow, *Internat // J. Numer. Methods Fluids*. – 2013. – Vol. 71. – P. 1207–1225. DOI:10.1002/fld.3704
119. Cotter B.A., Rivlin R.S. Tensors associated with time-dependent stress // *Quart. Appl. Math.* – 1955. – Vol. 13, № 2. – P. 177–188.
120. Dean R.H., Gai X., Stone C.M., Minkoff S.E. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics // *SPE Journal*. – 2006. – Vol. 11, № 1. – P. 132–140. DOI: 10.2118/79709-PA
121. DeGroot C.T. Numerical Modelling of Transport in Complex Porous Media: Metal Foams to the Human Lung [Электронный ресурс] // *Electronic Thesis and Dissertation Repository*. – 2012. – URL: <https://ir.lib.uwo.ca/etd/655> (дата обращения: 03.10.2020).
122. DeGroot C.T., Straatman A.G. A conjugate fluid-porous approach for simulating airflow in realistic geometric representations of the human respiratory

- system // *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2016. – Vol.138, № 3. – P. 4032113. DOI: 10.1115/1.4032113
123. DeGroot C.T., Straatman A.G. Towards a porous media model of the human lung // *4th International Conference on Porous Media and its Applications in Science: AIP Conference Proceedings* 1453. – 2012. – P. 69–74. DOI: 10.1063/1.4711155
124. Denison D.M., Morgan M.D., Millar A.B. Estimation of regional gas and tissue volumes of the lung in supine man using computed tomography // *Thorax*. – 1986. – Vol. 41(8). – P. 620–628. DOI:10.1136/thx.41.8.620
125. Dienes J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // *Acta mech.*, 1979. – Vol. 32, № 2. – P. 217–232. DOI: 10.1007/BF01379008
126. Ehrhardt J., Werner R., Schmidt-Richberg A., Handels H. Statistical Modeling of 4D Respiratory Lung Motion Using Diffeomorphic Image Registration // *IEEE transactions on medical imaging*. – 2011. – Vol. 30 (2). DOI: 10.1109/TMI.2010.207629
127. Elad D., Naftali S., Rosenfeld M., Wolf M. Physical stresses at the air-wall interface of the human nasal cavity during breathing // *J. Appl. Physiol.* – 2006. – Vol. 100. – P. 1003–1010.
128. Ertbruggen C.V., Hirsch C., Paiva M. Anatomically based three-dimensional model of airways to simulate flow and particle transport using computational fluid dynamics // *Journal of Applied Physiology*. – 2004. – Vol. 98. – P. 970–980. DOI:10.1152/jappphysiol.00795.2004
129. Furuyama A., Kanno S., Kobayashi T., Hirano S. Extrapulmonary translocation of intratracheally instilled fine and ultrafine particles via direct and alveolar macrophage-associated routes // *Archives of Toxicology*. – 2009. – Vol. 83. – P. 429–437. DOI: 10.1007/s00204-008-0371-1
130. Gehr P., Bachofen M., Weibel E.R. The normal human lung: ultrastructure and morphometric estimation of diffusion capacity // *Respiration Physiology*. – 1978. – Vol. 32. – P. 121–140. DOI:10.1016/0034-5687(78)90104-4

131. Gemci T., Ponyavin V., Chen Y., Chen H., Collins R. Computational model of airflow in upper 17 generations of human respiratory tract // *J. Biomech.* – 2008. – Vol. 41. – P. 2047–2054.
132. Giroux M. Patient-specific biomechanical model of the respiratory system for radiation therapy. *Modeling and Simulation [Электронный ресурс]*. – Université de Lyon, 2018. – 119 p. – URL: <https://hal.science/tel-01963904v2> (дата обращения: 12.06.2023).
133. Ghadiali S.N., Gaver D.P. Biomechanics of liquid-epithelium interactions in pulmonary airways // *Respir. Physiol. Neurobiol.* – 2008. – Vol. 163. – P. 232–243.
134. Ghafarian P., Jamaati H., Hashemian S.M. A review on human respiratory modeling // *Tanaffos.* – 2016. – Vol. 15. – P. 61–69.
135. Grzywa-Celińska A., Krusiński A., Milanowski J. 'Smoging kills' - Effects of air pollution on human respiratory system // *Ann. Agric. Environ. Med.* – 2020. – Vol. 27, № 1. – P. 1–5. DOI: 10.26444/aaem/110477
136. Hencky H. Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen // *Zeitschrift für technische Physik.* – 1928. – № 6. – P. 215–220.
137. Hickling K.G. The pressure-volume curve is greatly modified by recruitment – A mathematical model of ARDS lungs, *Am J. Respir. Crit. Care Med.* – 1998. – Vol.158. – P. 194–202.
138. Hopkins L.E., Patchin E.S., Chiu P.-L. [et al.]. Nose-to-brain transport of aerosolised quantum dots following acute exposure // *Nanotoxicology.* – 2014. – Vol. 8, № 8. – P. 885–893. DOI: 10.3109/17435390.2013.842267
139. Horsfield K., Dart G., Olson D.E., Filley G.F., Cumming G. Models of the human bronchial tree // *J. Appl. Physiol.* – 1971. – Vol. 31. – P. 207–217. DOI: 10.1152/jappl1971.31.2.207
140. Huang J., Zhang L. Numerical simulation of micro-particle deposition in a realistic human upper respiratory tract model during transient breathing cycle //

- Particuology. – 2011. – Vol. 9, № 4. – P. 424–431. DOI: 10.1016/j.partic.2011.02.004
141. Husain M., Wu D., Saber A.T. [et al.]. Intratracheally instilled titanium dioxide nanoparticles translocate to heart and liver and activate complement cascade in the heart of C57BL/6 mice // *Nanotoxicology*. – 2015. – Vol. 9, № 8. – P. 1013–1022. DOI: 10.3109/17435390.2014.996192
142. Ilegbusi O.J., Li Z., Seyfi B., Min Y., Meeks S., Kupelian P., Santhanam A.P., Modeling Airflow Using Subject-Specific 4DCT-Based Deformable Volumetric Lung Models // *J. Biomed. Imaging*. – 2012. – Vol. 2012. – P. 350853. DOI: 10.1155/2012/350853
143. Ilegbusi O. J., Seyfi B., Neylon J., Santhanam A.P. Analytic Intermodel Consistent Modeling of Volumetric Human Lung Dynamics // *Journal of Biomechanical Engineering*. – 2015. – Vol. 137. – P. 101005-1–101005-9. DOI: 10.1115/1.4031349
144. Ismail M., Comerford A., Wall W.A. Coupled and reduced dimensional modeling of respiratory mechanics during spontaneous breathing // *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* – 2013. – Vol. 29 (11). – P. 1285–1305. DOI:10.1002/cnm.2577
145. Jahani N., Choi X.S., Choi J., Iyer K., Hoffman E.A., Lin C.-L. Assessment of regional ventilation and deformation using 4D-CT imaging for healthy human lungs during tidal breathing // *J. Appl. Physiol.* – 2015. – Vol. 119. – P. 1064–1074.
146. Jasak H. Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows: Thesis submitted for the Degree of Doctor of Philosophy of the University of London and Diploma of Imperial College. – London: Department of Mechanical Engineering Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1996. – 396 p.

147. Jaumann G. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differential-gesetze // Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. Ila. – 1911. – B. 120. – P. 385–530.
148. Jayaraju S.T., Brouns M., Lacor C., Belkassam B., Verbanck S. Large eddy and detached eddy simulations of fluid flow and particle deposition in a human mouth–throat // J. Aerosol Sci. – 2008. – Vol. 39. – P. 862–875. DOI:10.1016/j.jaerosci.2008.06.002
149. Jeannin L., Mainguy M., Masson R., Vidal-Gilbert S. Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations // International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. – 2006. – Vol. 31, №10. – P. 1163–1181. DOI: 10.1002/nag.576
150. Kamschulte M., Schneider C.R., Litzbauer H.D., Tscholl D., Schneider C., Zeiner C., Krombach G.A., Ritman E.L., Bohle R.M., Langheinrich A.C. Quantitative 3D micro-CT imaging of human lung tissue // Fortschr Röntgenstr. – 2013. – Vol. 185. – P. 869–876. DOI: 10.1055/s-0033-1350105
151. Katz I., Pichelin M., Montesantos S., Murdock A., Fromont S., Venegas J., Caillibotte G. The influence of lung volume during imaging on CFD within realistic airway models // Aerosol science and technology. – 2017. – Vol. 51, № 2. – P. 214–223. DOI: 10.1080/02786826.2016.1254721
152. Kiasadegh M., Emdad H., Ahmadi G., Abouali O. Transient numerical simulation of airflow and fibrous particles in a human upper airway model // Journal of Aerosol Science. – 2019. – Vol. 140. – P. 105480. DOI: 10.1016/j.jaerosci.2019.105480
153. Kim J., Tchelepi H.A., Juanes R. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics // SPE Journal. – 2011. – Vol. 16. – P. 249–262. DOI: 10.2118/119084-PA
154. Kleinstreuer C., Zhang Z. Laminar-to-turbulent fluid-particle flows in a human airway model // International Journal of Multiphase Flow. – 2003. – Vol. 29, № 2. – P. 271–289. DOI: 10.1016/S0301-9322(02)00131-3

155. Kleinstreuer C., Zhanga Z., Lia Z., Roberts W.L., Rojasc C. A new methodology for targeting drug-aerosols in the human respiratory system // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. – 2008. – Vol. 51. – P. 5578–5589.
156. Kowalczyk P. Mechanical model of lung parenchyma as a two-phase porous medium // *Transp. Porous Media*. – 1993. – Vol. 11. – P. 281–295. DOI:10.1007/bf00614816
157. Kreyling W.G. Discovery of unique and ENM – specific pathophysiologic pathways: Comparison of the translocation of inhaled iridium nanoparticles from nasal epithelium versus alveolar epithelium towards the brain of rats // *Toxicology and Applied Pharmacology*. – 2016. – Vol. 299. – P. 41–46. DOI: 10.1016/j.taap.2016.02.004
158. Kreyling W.G., Semmler M., Erbe F. [et al.]. Translocation of ultrafine insoluble iridium particles from lung epithelium to extrapulmonary organs is size dependent but very low // *Journal of Toxicology and Environmental Health – Part A*. – 2002. – Vol. 65, № 20. – P. 1513–1530. DOI: 10.1080/00984100290071649
159. Kushwaha N., Kalpesh S. , Parmar L.D.. A study of chest expansion measurement in healthy adults with two different instructions // *International Journal of Scientific Research*. – 2018. – Vol. 7, № 8. – P. 42–44.
160. Kuwahara F., Sano Y., Liu J., Nakayama A. A Porous Media Approach for Bifurcating Flow and Mass Transfer in a Human Lung // *J. Heat Transfer*. – 2009. – Vol. 131, № 10. DOI: 10.1115/1.3180699
161. Ladjal H., Skendraoui N., Giroux M., Touileb Y., Azencot J., Shariat B., Ladjal H., Beuve M., Giraud P. Physiological and biomechanical model of patient specific lung motion based on 4D CT images // In 2015 8th Biomedical Engineering Int. Conf. (BMEiCON), Pattaya, Thailand, 25–27 November. – 2015. – P. 1–5. DOI: 10.1109/BMEiCON.2015.7399567

162. Lai-Fook S.J., Hyatt R.E. Effects of age on elastic moduli of human lungs // *J Appl Physiol.* – 2000. – Vol. 89, № 1. – P. 163–168. DOI: 10.1152/jappl.2000.89.1.163
163. Lambert A.R. Regional deposition of particles in an image-based airway model: CFD simulation and left-right lung ventilation asymmetry. – Iowa: University of Iowa, 2010. – 68 p.
164. Lambert A.R., O’Shaughnessy P., Tawhai M.H., Hoffman E.A., Lin C.-L. Regional deposition of particles in an image-based airway model: large-eddy simulation and left-right lung ventilation asymmetry // *Aerosol Sci Technol.* – 2011. – Vol. 45, № 1. – P. 11–25. DOI: 10.1080/02786826.2010.517578
165. Li D., Li Y., Li G. [et al.]. Fluorescent reconstitution on deposition of PM2.5 in lung and extrapulmonary organs // *Proceedings of the National Academy of Sciences.* – 2019. – V. 116, № 7. – P. 2488-2493. Doi: 10.1073/pnas.1818134116
166. Lin C.L., Tawhai M.H., McLennan G., Hoffman E.A. Characteristics of the turbulent laryngeal jet and its effect on airflow in the human intra-thoracic airways // *Respir. Physiol. Neurobiol.* – 2007. – Vol. 157. – P. 295–309.
167. Lin C. L., Tawhai M., McLennan G., Hoff man E. Computational fluid dynamics: multiscale simulation of gas fl ow in subject-specifi c models of the human lung // *IEEE Engineering in Medicine and Biology.* – 2009. – Vol. 28 (3). –P.25–33.
168. Lin J., Fan J.R., Zheng Y.Q., Hu G.L., Pan D. Numerical simulation of inhaled aerosol particle deposition within 3D realistic human upper respiratory tract // *AIP Conference Proceedings.* – 2010. – Vol. 1207, № 1. – P. 992–997. DOI: 10.1063/1.3366500
169. Liu X., Sui B., Sun J. Blood-brain barrier dysfunction induced by silica NPs in vitro and in vivo: Involvement of oxidative stress and Rho-kinase/JNK signaling pathways // *Biomaterials.* – 2017. – Vol. 121. – P. 64–82. DOI: 10.1016/j.biomaterials.2017.01.006

170. Liu Y., Johnson M.R., Matida E.A., Kherani S., Marsan J. Creation of a standardized geometry of the human nasal cavity // *J Appl Physiol.* – 2009. – Vol. 106. – P. 784–795.
171. Longest P.W., Oldham M.J. Mutual enhancements of CFD modeling and experimental data: A case study of one micrometer particle deposition in a branching airway model // *Inhalation Toxicology.* – 2006. – Vol. 18(10). – P. 761–772.
172. Luo H.Y., Liu Y. Modeling the bifurcating flow in a CT-scanned human lung airway // *Journal of Biomechanics.* – 2008. – Vol. 41, № 12. – P. 2681–2688. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2008.06.018
173. Maji K.J., Dikshit A.K., Arora M., Deshpande A. Estimating premature mortality attributable to PM<sub>2.5</sub> exposure and benefit of air pollution control policies in China for 2020 // *Sci Total Environ.* – 2018. – Vol. 612. – P. 683–693. DOI:10.1016/j.scitotenv.2017.08.254
174. Martin S., Maury B. Modeling of the oxygen transfer in the respiratory process // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, EDP Sciences.* – 2013. – Vol. 47 (4). – P. 935–960. DOI:10.1051/m2an/2012052
175. Maury B. *The Respiratory System in Equations. Modeling, Simulation and Applications.* – Springer Science & Business Media, 2013. – 278 p.
176. Mercer R.R., Scabilloni J.F., Hubbs A.F. [et al.] Extrapulmonary transport of MWCNT following inhalation exposure // *Particle and Fibre Toxicology.* – 2013. – Vol. 10. DOI: 10.1186/1743-8977-10-38
177. Meyers A., Xiao H., Bruhns O. Elastic stress ratchetting and corotational stress rates // *Technische mechanik.* – 2003. – Vol. 23. – P. 92–102.
178. Moraes A., Lage P., Cunha G., da Silva L.F.L.R. Analysis of the non-orthogonality correction of finite volume discretization on unstructured meshes // *Proceedings of the 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM).* – Brazil, 2013. – P. 3519–3530.

179. Nakao M., Kawashima A., Kokubo M., Minato K. Simulating lung tumor motion for dynamic tumor-tracking irradiation // IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record, 2007. – P. 4549–4551. DOI: 10.1109/NSSMIC.2007.4437123
180. Naseri A., Shaghaghian S., Abouali O., Ahmadi G. Numerical investigation of transient transport and deposition of microparticles under unsteady inspiratory flow in human upper airways // Respir Physiol Neurobiol. – 2017. – Vol. 244. – P. 56–72. DOI: 10.1016/j.resp.2017.06.005
181. Neale K.W. On the application of a variational principle for large-displacement elastic-plastic problems // In: Var meth. Solids: Proc. IUTAM symp., Evanston (III.), 1978. – Oxford etc., 1980. – P. 374–377. DOI: 10.1016/B978-0-08-024728-1.50066-5
182. Nunes H., Schubel K., Piver D., Magois E., Feuillet S., Uzunhan Y., Carton Z., Tazi A., Levy P., Brillet P.-Y. [et al.]. Nonspecific interstitial pneumonia: survival is influenced by the underlying cause // Eur Respir J. – 2015. – Vol. 45 (3). – P. 746–755.
183. Oertel H. Prandtl-Essentials of Fluid Mechanics (Applied Mathematical Sciences, 158), third ed. – Springer, 2010. – 785 p.
184. Oldroyd J.G. On the formulation of rheological equations of state // Proc. Roy. Soc. London A. – 1950. – Vol. 200. – P. 523–541.
185. Ou C., Hang J., Deng Q. Particle Deposition in Human Lung Airways: Effects of Airflow, Particle Size, and Mechanisms // Aerosol and Air Quality Research. – 2020. – Vol. 20. – P. 2846–2858. DOI: 10.4209/aaqr.2020.02.0067
186. Qi S., Zhang B., Teng Y., Li J., Yue Y., Kang Y., Qian W. Transient dynamics simulation of airflow in a CT-scanned human airway tree: More or fewer terminal bronchi? // Comput. Math.Methods Med. – 2017. – Vol. 2017. – P. 1969023. DOI: 10.1155/2017/1969023

187. Patte C., Genet M., Chapelle D. A quasi-static poromechanical model of the lungs // *Biomech. Model. Mechanobiol.* – 2022. – Vol. 21. – P. 527–551. DOI: 10.1007/s10237-021-01547-0
188. Rahimi-Gorji M., Gorji T.B., Gorji-Bandpy M. Details of regional particle deposition and airflow structures in a realistic model of human tracheobronchial airways: two-phase flow simulation // *Computers in Biology and Medicine.* – 2016. – Vol. 74. – P. 1–17. DOI: 10.1016/j.compbimed.2016.04.017
189. Rahimi-Gorji M., Pourmehran O., Gorji-Bandpy M., Gorji T.B. CFD simulation of airflow behavior and particle transport and deposition in different breathing conditions through the realistic model of human airways // *Journal of Molecular Liquids.* – 2015. – Vol. 209. – P. 121–133. DOI: 10.1016/j.molliq.2015.05.031
190. Rahman Md.M., Zhao M., Islam M. S., Dong K., Saha S.C. Numerical study of nano and micro pollutant particle transport and deposition in realistic human lung airways // *Powder Technology.* – 2022. – Vol. 402. – P. 117364. DOI: 10.1016/j.powtec.2022.117364
191. Rahman Md.M., Zhao M., Islam M.S., Dong K., Saha S.C. Nanoparticle transport and deposition in a heterogeneous human lung airway tree: An efficient one path model for CFD simulations // *European Journal of Pharmaceutical Sciences.* – 2022. – Vol. 177. – P.106279. DOI: 10.1016/j.ejps.2022.106279
192. Rattanapinyopituk K., Shimada A., Morita T. [et al.] Ultrastructural changes in the air–blood barrier in mice after intratracheal instillations of Asian sand dust and gold nanoparticles // *Experimental and Toxicologic Pathology.* – 2013. – Vol. 65, № 7-8. – P. 1043–1051. DOI: 10.1016/j.etp.2013.03.003
193. Reis A.H., Miguel A.F., Aydin M. Constructal theory of flow architecture of the lungs // *Journal of Medical Physics.* – 2004. – Vol. 31. – P. 1135–1140. DOI: 10.1118/1.1705443
194. Rogovoy A.A. Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations // *Continuum Mechanics and*

- Thermodynamics. – 2012. – Vol. 24. – P. 81–114. DOI: 10.1007/s00161-011-0220-y
195. Rostami A.A. Computational modeling of aerosol deposition in respiratory tract: a review // *Inhal.Toxicol.* – 2009. – Vol. 21. – P. 262–290.
196. Roth C.J., Ismail M., Yoshihara L., Wall W.A. A comprehensive computational human lung model incorporating inter-acinar dependencies: application to spontaneous breathing and mechanical ventilation // *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* – 2017. – Vol. 33. – P. e02787. DOI:10.1002/cnm.2787
197. Sadauskas E., Jacobsen N.R., Danscher G. et al. Biodistribution of gold nanoparticles in mouse lung following intratracheal instillation // *Chemistry Central Journal.* – 2009. – Vol. 3. – P. 16. DOI: 10.1186/1752-153X-3-16
198. Saghaian S.E., Azimian A.R., Jalilvand R., Dadkhah S., Saghaian S.M. Computational analysis of airflow and particle deposition fraction in the upper part of the human respiratory system // *Biology, Engineering and Medicine.* – 2018. – Vol. 3 (6). – P. 6–9. DOI: 10.15761/BEM.1000155
199. Saksono P.H., Nithiarasu P., Sazonov I., Yeo S.Y. Computational flow studies in a subject-specific human upper airway using a one-equation turbulence model. Influence of the nasal cavity // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 2011. – Vol. 87. – P. 96–114.
200. Sandhu R.S., Pister K.S. Variational methods in continuum mechanics // In: *Var. meth. Eng. Southampton.* – 1973. – Vol. 1. – P. 1/13–1/25.
201. Schiller L., Naumann A. Über die grundlegenden Berechnungen bei der Schwerkraft aufbereitung // *Z Verein Deutsch Ing.* – 1933. – Vol. 77. – P. 318–320.
202. Settari A., Mourits F.M. A coupled reservoir and geomechanical simulation system // *SPE Journal.* – 1998. – Vol. 3, № 3. – P. 219–226. <https://doi.org/10.2118/50939-PA>

203. Settari A., Walters D.A. Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction // *SPE Journal*. – 2001. – Vol. 6, № 3. – P. 334–342. DOI: 10.2118/74142-PA
204. Seyfi B. Inverse-Consistent Determination of Young's Modulus of Human Lung // *Electronic Theses and Dissertations [Электронный ресурс]*. – 2015. – 5149. – URL: <http://stars.library.ucf.edu/etd/5149> (дата обращения: 12.06.2023).
205. Seyfi B., Santhanam A.P., Ilegbusi O.J. A Biomechanical Model of Human Lung Deformation Utilizing Patient-Specific Elastic Property. *Journal of Cancer Therapy*. – 2016. – Vol. 7(06). – P. 402–415. DOI: 10.4236/jct.2016.76043
206. Smith B.J., Bates J.H.T. Assessing the progression of ventilator-induced lung injury in mice // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* – 2013. – Vol. 60. – P. 3449–3457. DOI: 10.1109/TBME.2013.2267151
207. Tawhai M.H., Hunter P., Tschirren J., Reinhardt J., McLennan G., Hoffman E.A. 2004 CT-based geometry analysis and finite element models of the human and ovine bronchial tree // *J. Appl. Physiol.* – 2004. – Vol. 97. – P. 2310 – 2321. DOI:10.1152/jappphysiol.00520.2004
208. Tawhai M.H., Nash M.P., Lin C.-L., Hoffman E.A. Supine and prone differences in regional lung density and pleural pressure gradients in the human lung with constant shape // *J. Appl. Physiol.* – 2009. – Vol. 107. – P. 912 – 920. DOI: 10.1152/jappphysiol.00324.2009
209. Tawhai M.H., Pullan A.H., Hunter P.J. Generation of an anatomically based three-dimensional model of the conducting airways // *Ann. Biomed. Eng.* – 2000. – Vol. 28. – P. 793–802. DOI: 10.1114/1.1289457
210. Toxicological profile for Aluminum [Электронный ресурс]. – Atlanta, GA: U.S. Department of Health and Human Services, Public Health Service. – 2008. – URL: <https://www.atsdr.cdc.gov/toxprofiles/tp22.pdf> (дата обращения: 12.01.2023).

211. Toxicological profile for Silica [Электронный ресурс]. – Atlanta, GA: U.S. Department of Health and Human Services, Public Health Service. – 2019. – URL: <https://www.atsdr.cdc.gov/ToxProfiles/tp211.pdf> (дата обращения: 10.01.2023).
212. The Link Between Aluminum Exposure And Alzheimer’s Disease Can No Longer Be Ignored // DailyHealthPost. – 2020. – URL: <https://dailyhealthpost.com/study-links-alzheimers-to-aluminum-exposure/> (дата обращения: 12.01.2023).
213. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. – Berlin: Springer, 1965. – 602 p.
214. Trusov P.V., Tsinker M.Yu. Generalized solution for the boundary value problem of airflow in a deformable porous medium approximating human lungs // AIP Conference Proceedings: 30 Russian Conference on Mathematical Modelling in Natural Sciences, 2023. – Vol. 2627 – P. 050012. DOI: 10.1063/5.0117384
215. Trusov P.V., Tsinker M.Yu., Zaitseva N.V., Nurislamov V.V., Svintsova P.D., Kuchukov A.I. Assessing spatial distribution of sites with a risk of developing bronchopulmonary pathology based on mathematical modeling of air-dust flows in the human airways and lungs // Health Risk Analysis. – 2024. – № 2. – P. 141–152. DOI:10.21668/health.risk/2024.2.13.eng
216. Trusov P.V., Zaitseva N.V., Tsinker M.Y. A mathematical model of the human respiratory system considering environmental influence // AIP Conference Proceedings: 28th Russian Conference on Mathematical Modelling in Natural Sciences, RuMoNaS, 2020. – Vol. 2216. – P. 060007. DOI: 10.1063/5.0003562. EDN: ZUSNBM.
217. Trusov P.V., Zaitseva N.V., Tsinker M.Yu., Nekrasova A.V. Study of dusty airflow and deposition of solid dust particles in human nasal cavity // AIP Conference Proceedings: 30 Russian Conference on Mathematical Modelling in Natural Sciences. – Perm, 2023. – Vol. 2627. – P. 060004. DOI: 10.1063/5.0117385

218. Trusov P.V., Zaitseva N.V., Tsinker M.Yu. On the formulation of the constitutive relations of a two-phase elastic-deformable saturated porous biological material // AIP Conference Proceedings: 29th Russian Conference on Mathematical Modeling in Natural Sciences, 2021. – Vol. 2371. – P. 060005. DOI: 10.1063/5.0059556
219. Venegas J.G., Harris R.S., Simon B.A. A comprehensive equation for the pulmonary pressure-volume curve // J. Appl. Physiol. – 1998. – Vol. 84. – P. 389–395.
220. VIA/I-ELCAP Public Access Research Database [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.via.cornell.edu/databases/lungdb.html> (дата обращения: 10.01.2023).
221. Wall W.A., Rabczuk T. Fluid structure interaction in lower airways of CT-based lung geometries // Int. J. Num. Methods in fluids. – 2008. – Vol. 57. – P. 653–675.
222. Wheeler M.F., Gai X. Iteratively coupled mixed and Galerkin finite element methods for poro-elasticity // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2007. – Vol. 23, № 4. – P. 785–797. DOI: 10.1002/num.20258
223. Wei T., Chen C., Yang Y., Li L., Wang J., Ye M., Kan H., Yang D., Song Y., Cai J., Hou D. Associations between short-term exposure to ambient air pollution and lung function in adults // J Expo Sci Environ Epidemiol. – 2023. DOI: 10.1038/s41370-023-00550-0
224. Weibel E.R., Gomez D.M. Architecture of the human lung. Use of quantitative methods establishes fundamental relations between size and number of lung structures // Science. – 1962. – Vol. 137 (3550). – P. 577–585. DOI:10.1126/science.137.3530.577
225. Weibel E.R. Morphometry of the Human Lung. Springer Verlag and Academic Press. – New York, 1963. DOI: 10.1007/978-3-642-87553-3
226. Weibel E.R. What makes a good lung? // Swiss Med Wkly. – 2009. – Vol. 139 (27–28). – P. 375–386. DOI: 10.4414/SMW.2009.12270

227. Werner R. Biophysical Modeling of Respiratory Organ Motion // 4D Modeling and Estimation of Respiratory Motion for Radiation Therapy / in J. Ehrhardt, C. Loren eds.– Springer Berlin, Heidelberg, 2013. – 341 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36441-9
228. Werner R., Ehrhardt J., Schmidt R., Handels H. Modeling Respiratory Lung Motion – a Biophysical Approach using Finite Element Methods // Proceedings: Physiology, Function, and Structure from Medical Images. – 2008. – 69160N. DOI: 10.1117/12.769155
229. Werner R., Ehrhardt J., Schmidt R., Handels H. Patient-specific finite element modeling of respiratory lung motion using 4D CT image data // Med Phys. – 2009. – Vol. 36 (5). – P. 1500–1511. DOI: 10.1118/1.3101820
230. West G.B., Brown J.H., Enquist B.J. The Fourth Dimension of Life: Fractal Geometry and Allometric Scaling of Organisms // Science. – 1999. – Vol. 283, № 4. – P. 1677–1679.
231. WHO global air quality guidelines: Particulate matter (PM<sub>2.5</sub> and PM<sub>10</sub>), ozone, nitrogen dioxide, sulfur dioxide and carbon monoxide. – Geneva: World Health Organization, 2021. PMID: 34662007.
232. Wilcox D.C. Reassessment of the Scale-Determining Equation for Advanced Turbulence Models // AIAAJOURNAL. – 1988. – Vol. 26, № 11. – P. 1299–1309. DOI: 10.2514/3.10041
233. Xi J., Longest P.W., Martonen T.B. Effects of the laryngeal jet on nano- and microparticle transport and deposition in an approximate model of the upper tracheobronchial airways // J. Appl. Physiol. – 2008. – Vol. 104. – P. 1761–1777. DOI: 10.1152/jappphysiol.01233.2007
234. Xia G., Tawhai M.H., Hoffman E.A., Lin C.-L. Airway wall stiffening increases peak wall shear stress: A fluid–structure interaction study in rigid and compliant airways // Ann. Biomed. Eng. – 2010. – Vol. 38. – P. 1836–1853.

235. Xiao H., Bruhns O.T. A. Meyers Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate // *Journal of Elasticity*. – 1997. – Vol. 47. – P. 51–68. DOI: 10.1023/A:1007356925912
236. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate // *ActaMechanica*. – 1997. – Vol. 124. – P. 89–105. DOI: 10.1007/BF01213020
237. Xing Y.-F., Xu Y.-H., Shi M.-H., Lian Y.-X. The impact of PM2.5 on the human respiratory system // *Journal of Thoracic Disease*. – 2016. – Vol. 8, № 1. – P. E69–E74. DOI:10.3978/j.issn.2072-1439.2016.01.19
238. Yin P., Brauer M., Cohen A.J., Wang H., Li J., Burnett R.T., Stanaway J.D., Causey K., Larson S., Godwin W., Frostad J., Marks A., Wang L., Zhou M., Murray C.J.L. The effect of air pollution on deaths, disease burden, and life expectancy across China and its provinces, 1990-2017: an analysis for the Global Burden of Disease Study 2017 // *Lancet Planet Health*. – 2020. – Vol. 4, № 9. – P. e386–e398. DOI:10.1016/S2542-5196(20)30161-3
239. Yin Y., Choi J., Hoffman E., Tawhai M., Lin C. Simulation of pulmonary air flow with a subject-specific boundary condition // *Journal of Biomechanics*. – 2010. – Vol. 43 (11). – P. 2159–2163. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2010.03.048
240. Yushkevich P.A., Piven J., Hazlett H. C., Smith R. G., Ho S., Gee J.C., Gerig G. User-Guided 3D Active Contour Segmentation of Anatomical Structures: Significantly Improved Efficiency and Reliability // *Neuroimage*. – 2006. – Vol. 31. – P. 1116–1128. DOI: 10.1016/j.neuroimage.2006.01.015
241. Zamankhan P., Ahmadi G., Wang Z., Hopke P.K., Cheng Y-S., Su W.S., D. Leonard Airflow and Deposition of Nano-Particles in a Human Nasal Cavity // *Aerosol Science and Technology*. – 2006. – Vol. 40. – P. 463–476. DOI: 10.1080/02786820600660903
242. Zaremba S. Sur une forme perfectionnée de la théorie de la relaxation // *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*. – 1903. – P. 595–614.

243. Zhang Z., Kleinstreuer C., Donohue J.F., Kim C.S. Comparison of micro- and nano-size particle depositions in a human upper airway model // *Journal of Aerosol Science*. – 2005. – Vol. 36, № 2. – P. 211–233. DOI: 10.1016/j.jaerosci.2004.08.006
244. Zhang Z., Kleinstreuer C., Kim C.S. Airflow and nanoparticle deposition in a 16-generation tracheobronchial airway model // *Ann. Biomed. Eng.* – 2008. – Vol. 36. – P. 2095–2110.
245. Zhang Z., Kleinstreuer C., Kim C.S. Micro-particle transport and deposition in a human oral airway model // *Aerosol Science*. – 2002. – Vol. 33, № 12. – P. 1635–1652. DOI:10.1016/S0021-8502(02)00122-2