

РОМАНОВ Кирилл Андреевич

**МНОГОУРОВНЕВЫЕ КОНСТИТУТИВНЫЕ МОДЕЛИ НЕУПРУГОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ С ОПИСАНИЕМ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ
ЗЕРЕННОЙ СТРУКТУРЫ**

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пермь 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

Научный руководитель:	Швейкин Алексей Игоревич, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	Шутов Алексей Валерьевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики композитов Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук», г. Новосибирск Мышлявцева Марта Доржукаевна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Высшая математика» Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Омский государственный технический университет», г. Омск
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук», г. Томск

Защита диссертации состоится «09» декабря 2025 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д ПНИПУ.01.19, созданного на базе ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», по адресу: 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, ауд. 423б.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (<http://pstu.ru>).

Автореферат разослан «___» _____ 2025 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Д ПНИПУ.01.19,
кандидат физико-математических наук, доцент

Е.Л. Кротова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Сегодня математическое моделирование является важнейшей составляющей проектирования технологических процессов. При этом в связи с развитием вычислительной техники появляется возможность предлагать лучшие варианты их реализации на основе детализированных моделей материалов. Работа посвящена развитию аппарата многоуровневых конститутивных моделей (КМ) металлов и сплавов, позволяющих совершенствовать процессы изготовления промышленных деталей и конструкций методами обработки металлов давлением (ОМД), такими как прокатка, ковка, объемная и листовая штамповка, прессование и волочение, а также методами так называемой интенсивной пластической деформации (ИПД). Последние, к примеру – равноканальное угловое прессование (РКУП), кручение под высоким давлением, многонаправленная штамповка, обкатка роликами, ориентированы только на значительное улучшение свойств материала без существенного изменения формы заготовки.

При гомологических температурах существенно ниже 0.5 (в частности, при комнатной температуре) доминирующим механизмом изменения зеренной структуры при ОМД и ИПД является фрагментация (измельчение). Последнее вызвано взаимодействием дислокаций друг с другом и формированием внутри крупных зерен множества блоков ячеек с постепенной их эволюцией в процессе деформирования сначала в субзеренную, а затем в новую мелкозернистую структуру за счет разворотов частей зерна друг относительно друга. В ходе фрагментации уменьшение зерен на мезоуровне приводит к улучшению эксплуатационных физико-механических характеристик готового изделия на макроуровне. В материалах с мелким зерном повышается прочность, твердость, улучшаются усталостные свойства, электропроводность, магнитные свойства и другие. Изделия из материалов с мелким размером зерна при низких скоростях деформации и повышенных температурах способны деформироваться в режиме сверхпластичности. Углубленное понимание реализующихся на мезоуровне механизмов деформирования в ходе фрагментации и управление ими с целью получения изделий с требуемыми эксплуатационными характеристиками является актуальной задачей для совершенствования технологических процессов обработки металлов. Предметом исследования в работе являются технологические процессы обработки металлов при низких гомологических температурах, в ходе которых реализуется процесс фрагментации зеренной структуры. Объектом исследования являются поликристаллические металлы с границей ориентированной кубической (ГЦК) решеткой.

На сегодняшний день в литературе представлено множество экспериментальных работ, исследующих процесс измельчения зеренной структуры. Существенный вклад в описание процесса измельчения с экспериментальной точки зрения внесли работы Р.З. Валиева, Р.О. Кайбышева, Э.В. Козлова, Н.А. Коневой, В.Е. Панина, В.В. Рыбина, С.Y.J. Barlow, В. Bay, Y. Estrin, N. Hansen, D. Kuhlmann-Wilsdorf, Н. Mughrabi, T.Sakai и других. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что процесс измельчения существенно зависит от типа решетки. Для металлов и сплавов с ОЦК- и ГПУ-решетками активным механиз-

мом деформирования, реализующим процесс измельчения, наряду с внутризеренным дислокационным скольжением является двойникование. Для ГЦК-металлов реализация процесса измельчения зависит от величины энергии дефекта упаковки. Для металлов с высокой и средней энергией дефекта упаковки процесс измельчения реализуется за счет эволюции блочно-ячеистой структуры, а для материалов с низкой энергией дефекта упаковки дополнительным механизмом деформирования аналогично ОЦК- и ГПУ-металлам выступает двойникование.

Традиционно в России и мире в целом для проектирования (совершенствования существующих и создания новых) технологических процессов ОМД и ИПД используются макрофеноменологические конститутивные модели материала, явным образом не содержащие описания сложной изменяющейся структуры материала. Зачастую это приводит к необходимости проведения избыточного числа дорогостоящих экспериментов (при низкой вероятности получения необходимого результата). Очевидно, что для процессов ОМД и ИПД в связи с упомянутой выше реализацией в материалах сложного сценария эволюции внутренней структуры, необходимо создавать модели материалов, учитывающие эти изменения структуры.

Развитие средств вычислительной техники в последние десятилетия позволяет создавать все более углубленные математические модели различных систем. В частности, развиваются многоуровневые конститутивные модели материалов – система определяющих соотношений (физических уравнений поведения материала), явно включающая уравнения для описания изменения структуры материала и действия механизмов деформирования. Существенный вклад в развитие аппарата многоуровневого моделирования в РФ внесли работы А.Е. Волкова, В.А. Лихачева, В.Г. Малинина, механиков томской научной школы В.Е. Панина (Р.Р. Балохов, П.В. Макаров, А.В. Панин, С.В. Панин, В.А. Романова, А.Ю. Смолин, И.Ю. Смолин и другие), В.В. Рыбина, уральской школы механиков, основанной С.Д. Волковым (Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов, В.Э. Вильдеман и др.), А.С. Семенова и других. Стоит отметить, что формулировки многоуровневых моделей металлов и сплавов, как правило, базируются на физических соотношениях для описания процессов на мезоуровне (в ряде работ – с привлечением микро- и атомарного уровней). Значительный вклад в развитие таких соотношений внесен в работах А.В. Вахрушева, М.Д. Кривилева, А.М. Кривцова, М.Д. Мышлявцевой, С.Г. Псахье и др.

Аппарат многоуровневых конститутивных моделей интенсивно развивается в ПНИПУ на кафедре «Математическое моделирование систем и процессов» под общим руководством П.В. Трусова. К настоящему моменту в коллективе разработан общий подход к построению многоуровневых конститутивных моделей для описания деформирования поликристаллических металлов и сплавов с использованием физически обоснованной формулировки геометрически нелинейных определяющих соотношений, в которых в качестве основных механизмов деформирования учитываются внутризеренное дислокационное скольжение (включая различные механизмы упрочнения), ротации кристаллических решеток, двойникование. Предложены варианты модели для описания зернограничного скольже-

ния, динамической рекристаллизации, деформирования сплавов в режиме сверхпластичности и переходов к нему. Разработаны алгоритмы реализации перечисленных моделей при решении краевых задач с помощью метода конечных элементов. Более подробно с основными результатами по развитию методологии многоуровневого моделирования можно ознакомиться в объемной монографии П.В. Трусова, А.И. Швейкина (2019 г.) и научных статьях коллектива.

В соответствии с приведенной выше аргументацией важным направлением развития аппарата многоуровневых конститутивных моделей является разработка и интеграция в них корректных соотношений для учета различных механизмов деформирования, в частности, фрагментации. При этом при построении многоуровневых КМ целесообразно использовать положения физически-ориентированных моделей фрагментации (Е.А. Ржавцев, М.Ю. Гуткин, А.В. Шутов, Y. Beygelzimer, S.C. Cao, Y. Estrin, J. Majta, H. Petryk, S. Stupkiewicz, L.S. Toth, A.P. Zhilyaev и другие). К настоящему моменту предложены построенные в такой логике многоуровневые конститутивные модели с включенным описанием фрагментации, например, в работах Т.С. Орловой, А.А. Назарова, Н.А. Еникеева, К. Frydrych, K. Kowalczyk-Gajewska, A.H. Kobaissy, O. Rezvanian, M. Seefeldt и других. Однако в ходе аналитического обзора литературы не удалось найти исследований, в которых процесс фрагментации моделируется в рамках многоуровневого подхода с комплексным учетом изменения всех ключевых характеристик структуры материала – размеров зерен, субзерен, их разориентации и эволюции плотностей дислокаций в них; исследователи дают упрощенное модельное описание реальной сложной физики процесса. Между тем для современного цифрового проектирования процессов термомеханической обработки металлов и сплавов (в частности, для создания функциональных материалов и изделий) остро требуются большая глубина детализации модельного описания – в связи с реализацией сложных сценариев трансформации внутренней структуры материала, сменой сценариев при изменении воздействий. Сказанное обуславливает высокую степень актуальности тематики диссертационной работы и ее значительную научную новизну.

Цель работы – создание многоуровневой статистической конститутивной модели для описания изменения напряженно-деформированного состояния и процесса фрагментации зеренной структуры металлов в ходе процессов обработки давлением при низких гомологических температурах. Указанная модель должна с детальностью, достаточной для углубленного моделирования технологических процессов обработки металлов, описывать физические процессы измельчения зерен при деформировании (изменения плотностей статистически накопленных и геометрически необходимых дислокаций, значений среднего размера фрагментов и зерен, углов разориентации фрагментов), обладая при этом вычислительной эффективностью, позволяющей за приемлемое время моделировать поведение материала при реализации процессов ОМД и ИПД.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **основные задачи**:

1. Провести аналитический обзор экспериментальных и теоретических исследований процесса измельчения зеренной структуры для систематизации данных о физических особенностях изменения структуры, основных механизмах фрагментации и установления актуальных направлений для развития существующих математических моделей.
2. Проверить адекватность базовой двухуровневой статистической конститутивной модели путем сопоставления с экспериментальными данными, а также провести анализ устойчивости к возмущениям различной природы и оценку применимости для описания нагружений с резко изменяющейся траекторией деформации.
3. Интегрировать в базовую двухуровневую статистическую конститутивную модель известную подмодель ЕТМВ для приближенного описания процесса измельчения, провести её модификацию для более адекватного описания фрагментации.
4. На базе континуальной дислокационной динамики разработать собственную модификацию модели фрагментации для комплексного и корректного учета всех значимых механизмов деформирования, реализующихся в процессе измельчения. Интегрировать разработанную модель фрагментации в структуру базовой двухуровневой статистической конститутивной модели.
5. Разработать алгоритмы численной реализации сформулированных согласно п. 3 и п. 4 моделей, создать программы для ЭВМ.
6. Реализовать процедуры идентификации и верификации созданных моделей для простых и сложных нагружений, в ходе которых провести анализ изменения напряженно-деформированного состояния и структуры материала.

Методология и методы исследования. Методологической базой диссертации являются работы отечественных и зарубежных исследователей в области математического моделирования сложных систем, нелинейной механики и физики деформируемого твердого тела. Информационную основу составляют статьи в периодических изданиях и научных сборниках, монографии и справочная литература по исследуемой тематике.

В работе используются методы многоуровневого подхода к построению математических моделей поведения материалов: декомпозиция, введение внутренних переменных для описания элементов структуры и механизмов деформирования, формулировка соотношений для их кинетики на базе физики твердого тела и термодинамики, синтезирование. Алгоритмы реализации моделей построены на базе численных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений, решения систем нелинейных алгебраических уравнений, численных методов оптимизации.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Для базовой двухуровневой статистической конститутивной модели проведен анализ устойчивости к возмущениям начальных условий,

- воздействий и параметрам оператора. С её применением адекватно описаны сложные нагружения с изломом траектории деформации.
2. В базовую двухуровневую статистическую конститутивную модель впервые интегрирована известная подмодель для приближенного описания процесса измельчения; проведена её модификация.
 3. Предложена новая многоуровневая статистическая конститутивная модель для описания изменения напряженно-деформированного состояния и фрагментации зеренной структуры ГЦК-металлов при низких гомологических температурах. В модели учитываются дислокационные процессы внутри фрагментов и в их границе, развороты фрагментов, эволюция средних размеров фрагментов и зерен.
 4. Сформулированы алгоритмы реализации разработанных моделей с использованием эффективных численных методов. Написаны программы для ЭВМ, реализующие созданные модели с использованием предложенных алгоритмов.
 5. Получены и проанализированы новые результаты моделирования деформирования материалов при обработке давлением с детализированным описанием действующих при фрагментации зерен механизмов деформирования.

Содержание приведенных выше п. 2 и п. 3 составляет основную **теоретическую значимость** работы.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования созданных моделей и комплекса программ для описания технологических процессов ОМД и ИПД промышленных металлов, что позволит за счет анализа структуры и реализации механизмов деформирования разрабатывать рекомендации по их совершенствованию. Получены два свидетельства о регистрации программы для ЭВМ № 2024668653 от 09 августа 2024 г. [8] и № 2024691996 от 25 декабря 2024 г. [9].

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Базовая двухуровневая статистическая конститутивная модель является устойчивой к возмущениям входных данных и параметров оператора, адекватно описывает нагружения с изломом траектории деформации.
2. Создана новая статистическая конститутивная модель на основе базовой двухуровневой с интегрированной модификацией известной подмодели фрагментации, которая позволяет приближенно описать процесс измельчения.
3. Создана новая многоуровневая статистическая конститутивная модель с подмоделью фрагментации, в которой вводится совокупность соотношений для учета эволюции плотностей статистически накопленных и геометрически необходимых дислокаций, размера и угла разориентации фрагментов, размера зерна. Модель позволяет углубленно описать процесс измельчения зерен ГЦК металла при низких гомологических температурах.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается удовлетворительным соответствием результатов численного моделирования данным натурных экспериментов для простых и сложных нагружений, в том числе – по характеристикам микроструктуры материала (текстурам, плотностям дислокаций, углам разориентации фрагментов и средним размерам ячеек, фрагментов, зерен), результатами численной оценки устойчивости и сходимости модели.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на конференциях: XXX–XXXIII Всероссийских школах-конференциях «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, ПНИПУ, 2021–2024); XV–XVIII международной конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (Екатеринбург, 2021–2024); конференции «Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций» (Пермь, 2022); XXIII и XXIV Зимних школах по механике сплошных сред (Пермь, 2023, 2025); международных конференциях «Физическая мезомеханика. Материалы с многоуровневой иерархически организованной структурой и интеллектуальные производственные технологии» (Томск, 2023, 2024); X всероссийской конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2025). Работа полностью докладывалась и обсуждалась на семинарах кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (руководитель – д.ф.-м.н., проф. П.В. Трусов), Института механики сплошных сред УрО РАН (руководитель – академик РАН, д.т.н., проф. В.П. Матвеев), кафедры экспериментальной механики и конструкционного материаловедения ПНИПУ (руководитель – д.ф.-м.н., проф. В.Э. Вильдеман).

Публикации. Результаты исследования по теме диссертации изложены в 26 научных работах, в том числе 7 статей в ведущих журналах, из которых 5 публикаций – в изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Web of Science и/или Scopus, 2 статьи в ведущих рецензируемых изданиях из перечня ВАК; получены 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены при личном участии автора (совместно с научным руководителем): постановка задачи, построение математических моделей и разработка алгоритмов их численной реализации; вычислительные эксперименты и анализ полученных результатов выполнены автором лично.

Связь исследований с научными программами. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в лаборатории многоуровневого моделирования конструкционных и функциональных материалов, проекты № FSNM-2021-0012, № FSNM-2024-0002.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, списка сокращений и основных обозначений, 4 глав, заключения, списка использованной литературы. Работа изложена на 160 страницах, содержит 27 рисунков, 8 таблиц. Список литературы включает 237 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование актуальности исследуемой тематики и характеристику степени её разработанности в науке на текущий момент. Сформулированы цель и задачи диссертационной работы; приведены научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методологические аспекты и методы исследования, положения, выносимые на защиту; указана информация о степени достоверности и апробации результатов. Представлено краткое содержание диссертации по главам.

Первая глава посвящена аналитическому обзору публикаций.

В п. 1.1 приведены результаты обзора экспериментальных исследований процесса фрагментации для различных материалов и условий нагружений, в ходе которого проведен анализ особенностей эволюции структуры материала и реализации механизмов деформирования в исследуемом процессе.

В п. 1.2 рассмотрены существующие модели для описания фрагментации, которые можно разделить на классы: макрофеноменологические, континуальные и многоуровневые физически-ориентированные модели. Обосновано, что в связи со значительным изменением внутренней структуры в ходе процесса измельчения для его описания целесообразно использовать последний тип моделей.

На основе результатов обзора установлено актуальное направление развития моделирования процесса фрагментации зеренной структуры. В п. 1.3 концептуально описана иерархия моделей для движения по данному направлению. Приведено описание структур моделей фрагментации, позволяющих пошагово подойти к построению целевой модели на основе дислокационного описания, интегрируемой в двухуровневую конститутивную модель. Первой рассмотренной моделью является наиболее детализированная (но ресурсоемкая) прямая модель, второй – менее детализированная (но численно эффективная) модель (модификация модели ETMB (Y. Estrin, L.S. Toth, A. Molinari, Y. Brechet)). Приведено обоснование необходимости построения новой физически детальной и вычислительно эффективной многоуровневой конститутивной модели для комплексного описания измельчения.

Во **второй главе** приводится описание базовой двухуровневой статистической конститутивной модели.

В п. 2.1 содержатся положения концептуальной постановки: принимаемые гипотезы, требования и ограничения модели. Приводится структура модели, содержащая описание определяющих соотношений, эволюционных и замыкающих уравнений.

В п. 2.2 представлена математическая постановка задачи описания неупругого деформирования представительного объема поликристаллических металлов, включающая соотношения мезоуровня и начальные условия. Кратко описан алгоритм численной реализации модели.

При использовании аппарата многоуровневого моделирования описание деформирования материала происходит на нескольких структурно-масштабных уровнях. В базовой двухуровневой статистической КМ рассматривается поведение представительного объема (ПО) материала на макроуровне, который содер-

жит достаточное для осреднения количество кристаллитов (элементов мезоуровня). На макроуровне напряжения в ПО равны среднему значению напряжений в отдельных кристаллитах. Для определения эволюции напряженно-деформированного состояния (НДС) и внутренней структуры в отдельном кристаллите необходимо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве основного механизма неупругого деформирования рассматривается внутризеренное дислокационное скольжение и учитываются вызванные им повороты решетки. Для связи переменных на макро- и мезоуровне используется расширенная гипотеза Фойгта, в которой градиент скорости перемещений для каждого отдельного кристаллита совпадает с градиентом скорости перемещений для всего ПО. Структура базовой двухуровневой статистической КМ для отдельного кристаллита детально описана в главе 2 диссертации. Приведем здесь некоторые значимые соотношения модели.

Ключевым уравнением для определения НДС кристаллита является закон Гука в скоростной релаксационной форме [2–7]:

$$\mathbf{k}^{cor} \equiv \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{\Pi}_{(cor)} : \mathbf{z}_e, \quad (1)$$

где $\mathbf{k} = \overset{0}{\rho} / \overset{0}{\hat{\rho}} \boldsymbol{\sigma}$ – взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа мезоуровня, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений Коши мезоуровня, ρ , $\hat{\rho}$ – плотность материала кристаллита в отсчетной (разгруженной) и актуальной конфигурациях, верхний индекс *cor* обозначает независимость от выбора системы отсчета (коротационную) производную, $\mathbf{\Pi}_{(cor)}$ – тензор упругих свойств кристаллита, его компоненты постоянны в жесткой подвижной системе координат, вращающейся со спином $\boldsymbol{\omega}$ и определяющей квазитвердое движение (коротационную производную),

$\mathbf{z}_e = \mathbf{I} - \boldsymbol{\omega} - \mathbf{z}_{in}$, $\mathbf{z}_{in} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ – меры скорости упругой и неупругой

составляющей деформации соответственно, $\mathbf{I} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T$ – транспонированный градиент скорости перемещений мезоуровня, $\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{n}^{(k)}$ – единичные векторы направления скольжения и нормали к плоскости скольжения (в актуальной конфигурации) краевых дислокаций для системы скольжения k , K – число кристаллографических систем скольжения, $\dot{\gamma}^{(k)}$ – скорость сдвига по системе скольжения k . В КМ для вычисления скорости пластических сдвигов используется соотношение на основе уравнения Хатчинсона [2–6]

$\dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0^{(k)} \left(\tau^{(k)} / \tau_c^{(k)} \right)^m H \left(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)} \right)$, $k = \overline{1, K}$, где $\dot{\gamma}_0^{(k)}$ – скорость сдвига по системе скольжения k при достижении касательным напряжением критического напряжения, $\tau^{(k)}$, $\tau_c^{(k)}$ – касательное и критическое касательное напряжение на системе скольжения k , m – показатель скоростной чувствительности материала по моде скольжения дислокаций, $H(\cdot)$ – функция Хэвисайда. Соотношения для определения критических касательных напряжений (закона упрочнения) конкретизируются ниже в рамках описания подмоделей фрагментации. Для

описания ротации решеток кристаллитов использовалась модель стесненного поворота Тейлора с соотношением для спина подвижной системы координат [2–6]

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}^T) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} (\mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} - \mathbf{n}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)}).$$

В п. 2.3 проанализированы полученные результаты оценки устойчивости модели к возмущениям различной природы.

Для проверки корректности базовой КМ использовалась методика оценки устойчивости при возмущениях начальных условий, воздействий и параметров оператора, которая детально описана в [1]. В рамках указанной процедуры оценки устойчивости конститутивных моделей рассматриваются базовые решения – решения без возмущений, по отношению к которым исследуется устойчивость, и решения с возмущениями начальных условий, воздействий и параметрическими возмущениями оператора. Для проверки выполнения условий устойчивости необходимо вычислить относительные нормы отклонения отклика Δ_Y , воздействий Δ_X , начальных условий Δ_{Y_0} и параметров оператора Δ_A , которые равны отношению нормы разности соответствующих величин при базовом и возмущенном расчетах к норме величины при базовом расчете. На рисунке 1 приведены результаты зависимости относительного отклонения отклика Δ_Y от относительного отклонения воздействий Δ_X и относительного отклонения вектора параметров оператора Δ_A для ГПУ металлов при совместном возмущении компонент транспонированного градиента скорости макроуровня $\mathbf{L}$ и критических напряжений сдвигов $\tau_c^{(k)}$ на всем интервале времени деформирования $t \in [0; T]$ при сложном нагружении по траектории деформации средней кривизны [5].

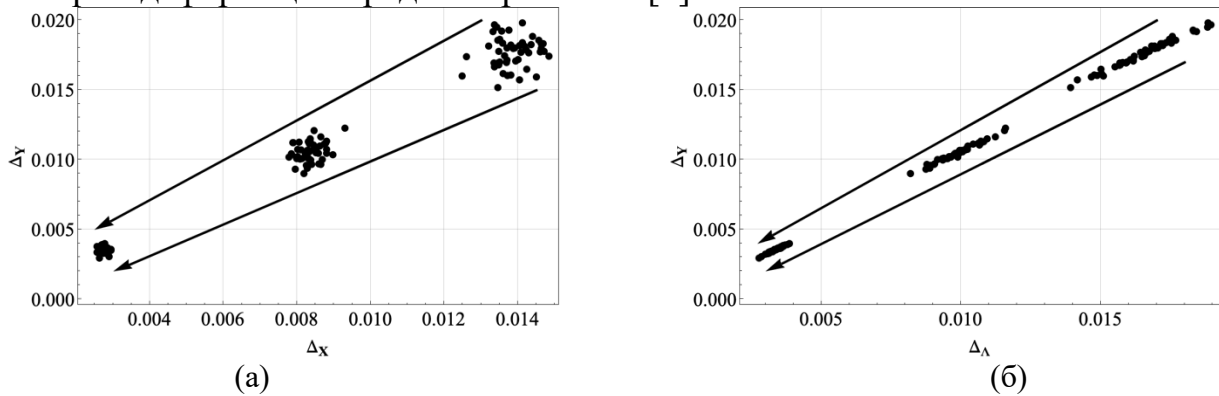


Рисунок 1. Зависимость Δ_Y от (а) Δ_X , (б) Δ_A для эксперимента с совместным возмущением компонент $\mathbf{L}$ и критических напряжений сдвигов последовательными всплесками на всем интервале времени $t \in [0; T]$ при сложном нагружении по траектории деформации средней кривизны

По результатам рисунка 1 видно, что при уменьшении Δ_X и Δ_A уменьшается и Δ_Y , что, согласно введенному определению, свидетельствует об устойчивости базовой КМ. Аналогичные результаты получены для металлов с ГЦК решеткой [2].

В п. 2.4 приведены результаты анализа по применению базовой конститутивной модели для описания нагружений с изломом траектории деформирования.

Для проверки способности базовой КМ описывать нагружения с изломом траектории деформации были реализованы вычислительные эксперименты с изменением траектории нагружения в процессе деформирования с учетом и без учета разгрузки, детально описанные в работе [3]. Для описания возникающих в ходе подобного рода нагружений эффектов использовалась постановка КМ с анизотропным законом упрочнения, в котором учитывалось латентное упрочнение на неактивных системах скольжения за счет движения дислокаций по активным системам. Для сравнения аналогичные нагружения с изломом траектории деформации моделировались с применением изотропного упрочнения. На рисунке 2 приведены результаты по моделированию нагружений с переходом от растяжения к прокатке и наоборот с учетом разгрузки. Полученные данные соответствуют экспериментальным результатам по выходу напряжений после смены нагружения.

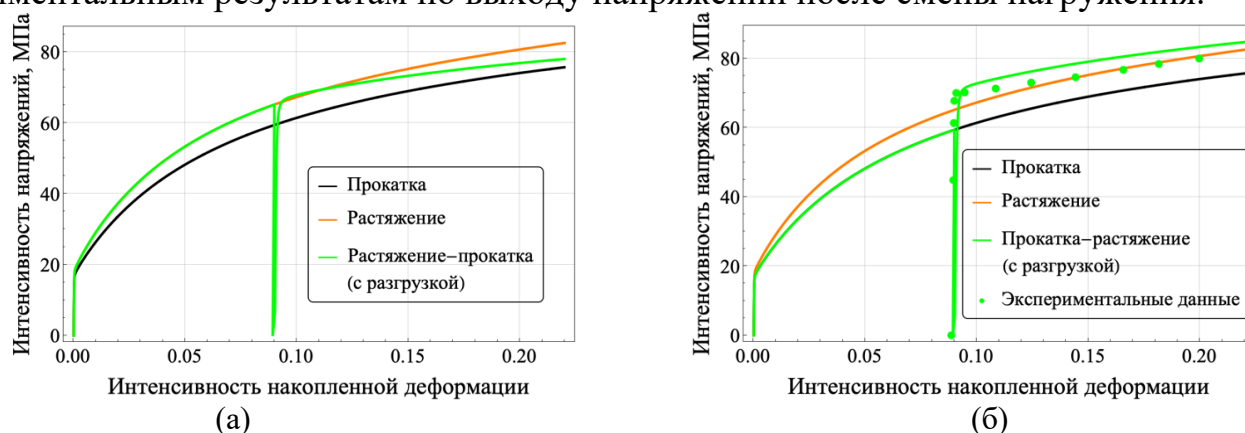


Рисунок 2. Зависимости интенсивности напряжений от интенсивности накопленных деформаций для программ нагружений (а) растяжение–прокатка и (б) прокатка–растяжение при анизотропном законе упрочнения с разгрузкой и экспериментальные данные при растяжении после предварительной прокатки

В **третьей главе** содержится описание соотношений подмодели ЕТМВ для приближенного учета реализующихся в ходе фрагментации изменений структуры. Предложены модификации базовых соотношений для более адекватного описания процесса измельчения в ходе ИПД. Приведены результаты применения модели и их анализ для различных технологических процессов. При этом в ходе обзора литературы не было найдено работ с совместным применением многоуровневых статистических КМ и модели ЕТМВ, что свидетельствует о новизне представленной в диссертации постановки КМ с интегрированной модификацией модели ЕТМВ и полученных с её помощью результатов.

В п. 3.1 приводится структура базовой модели ЕТМВ для описания измельчения зерен и её модификация с использованием известных из литературы соотношений.

В качестве закона упрочнения использовалось соотношение, в котором критические касательные напряжения сдвига представляются суммой слагаемых, отражающих влияние различного рода препятствий на скольжение дислокаций [4]:

$$\tau_c^{(k)} = \tau_{c0}^{(k)} + \tau_{cMHP}^{(k)} + \tau_{cBH}^{(k)}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (1)$$

$$\tau_{cMHP}^{(k)} = k_{MHP} / l, \quad k_{MHP} = \alpha_{MHP} K_r G b, \quad (2)$$

$$\tau_{cBH}^{(k)} = \sum_{i=1}^K \Omega^{(ki)} \alpha_{BH} G b \sqrt{\rho^{(i)}}, \quad (3)$$

где $\tau_{c0}^{(k)}$ – начальное критическое напряжение для системы скольжения k , $(2)_2$ – модифицированное соотношение Холла–Петча, l – средний размер ячейки (определяется с помощью модели ЕТМВ), α_{MHP} – константа, K_r – в исходной модели ЕТМВ константа, в модифицированной зависит от деформаций, G – модуль сдвига, b – модуль вектора Бюргерса, $(2)_3$ – соотношение, аналогичное предложенному Бейли и Хиршем, учитывающее взаимодействие дислокаций, $\Omega^{(ki)}$ – компоненты матрицы взаимодействия дислокаций на системе скольжения с номером k с дислокациями на системе скольжения с номером i (принимают значения 1 для компланарных систем скольжения и q_{lat} для некомпланарных систем скольжения), α_{BH} – параметр Бейли–Хирша, $\rho^{(i)}$ – плотность дислокаций на системе скольжения с номером i . В работе принимается, что плотность дислокаций на всех системах скольжения одинакова $\rho^{(i)} = \rho / (K / 2)$, где суммарная плотность дислокаций ρ определяется с помощью модели ЕТМВ.

В рамках модели ЕТМВ рассматривается эффективная ячейка, которая вводится для описания поведения ячеек в конкретном зерне «в среднем». В модели ячейка представляется составной двухфазной структурой, состоящей из внутренностей и стенок. Внутренность ячейки – область с меньшей локальной плотностью дислокаций, чем стенка. Форма ячейки полагается кубической со стороной куба l – средний размер ячейки. Краткое описание алгоритма применения модели ЕТМВ в рамках базовой КМ выглядит следующим образом. Подробно структура модели ЕТМВ представлена в главе 3 диссертационной работы.

Для плотностей дислокаций в стенках ρ_w и внутренностях ρ_c ячейки отдельно записываются эволюционные соотношения [4]:

$$\dot{\rho}_c = (\dot{\rho}_c)_{FR}^+ + (\dot{\rho}_c)_w^- + (\dot{\rho}_c)_{cs}^-, \quad (3)$$

$$\dot{\rho}_w = (\dot{\rho}_w)_{dep}^+ + (\dot{\rho}_w)_{FR}^+ + (\dot{\rho}_w)_{cs}^-, \quad (4)$$

где $(\dot{\rho}_c)_{FR}^+$, $(\dot{\rho}_w)_{FR}^+$ характеризуют повышение плотности дислокаций за счет генерации их источниками Франка-Рида, $(\dot{\rho}_c)_w^-$, $(\dot{\rho}_w)_{dep}^+$ характеризуют уменьшение плотности дислокаций во внутренностях и увеличение плотности дислокаций в стенках из-за перехода некоторой доли дислокаций из внутренностей в стенки, $(\dot{\rho}_c)_{cs}^-$, $(\dot{\rho}_w)_{cs}^-$ характеризуют понижение плотности дислокаций во внутренностях и стенках за счет аннигиляции. При вычислении слагаемых (3), (4) принимается, что все ячейки идентичны и отклик может быть охарактеризован значением интегральной оценки скорости сдвига $\dot{\gamma}_r$. Эта скорость полагается одинаковой для стенок и внутренностей ячеек и вычисляется на основе скоростей сдвигов по си-

стемам скольжения, полученных из двухуровневой КМ. Проинтегрировав соотношения (3) и (4), по правилу смесей получаем общую плотность дислокаций ρ , с помощью которой определяется средний размер ячейки по феноменологическому соотношению [4] $l = K_r / \sqrt{\rho}$, где K_r – параметр пропорциональности.

Во множестве работ других исследователей базовые соотношения модели ЕТМВ применяются для описания процесса фрагментации и получаемые ими результаты удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным при рассматриваемых частных условиях. Однако для физически более точного учета реализующихся в процессе измельчения механизмов деформирования, чтобы описывать отклик материала в более широких диапазонах воздействий, их необходимо модифицировать. В работе интегрированы следующие приведенные в литературе модификации модели ЕТМВ: уточняются слагаемые для описания процесса аннигиляции в стенках $(\dot{\rho}_w)_{cs}^-$ и внутренностях $(\dot{\rho}_c)_{cs}^-$ ячеек; параметр K_r принимается зависимым от накопленной деформации.

В п. 3.2 приведены полученные с помощью КМ с модифицированной подмоделью ЕТМВ результаты расчета четырех проходов равноканального углового прессования меди по маршруту Вс (с поворотами заготовки между проходами на 90° по часовой стрелке вокруг продольной оси образца) при комнатной температуре.

На рисунке 3 приведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных по плотностям дислокаций во внутренностях и среднему размеру ячеек в поликристалле. Полученные результаты удовлетворительно соответствуют экспериментальным зависимостям.

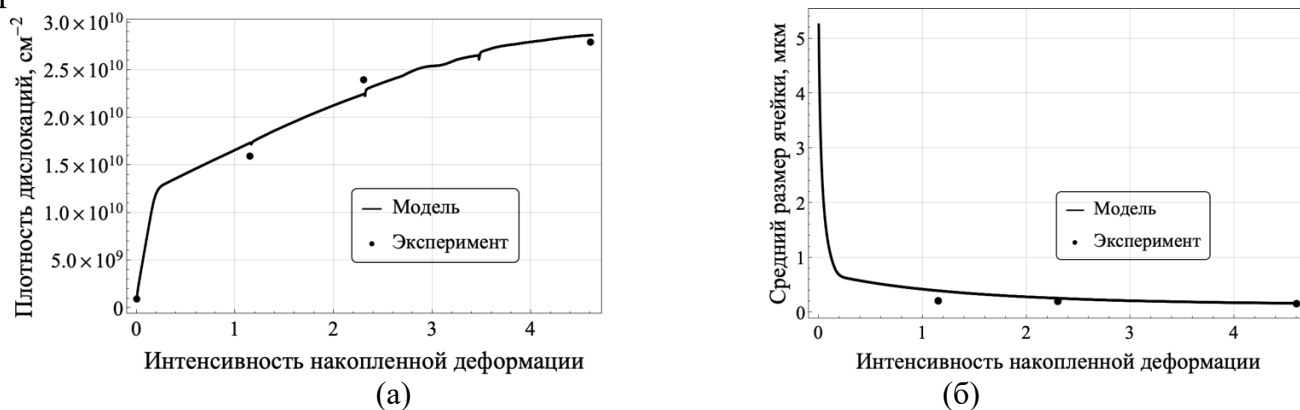


Рисунок 3. Зависимости (а) плотности дислокаций во внутренностях ячеек, (б) среднего размера ячеек от интенсивности накопленных деформаций при четырех проходах РКУП, получаемые в модельных расчетах, и экспериментальные данные

В п. 3.3 приведен анализ результатов моделирования холодной гибки листа стали 08X18H10 (близкий зарубежный аналог AISI 304), полученных с использованием коммерческого пакета конечно-элементного анализа и разработанной двухуровневой статистической КМ с модифицированной подмоделью ЕТМВ для описания измельчения зерен. Для имитации процесса гибки при комнатной температуре в пакете была создана модель установки, которая состоит из листа металла и обрабатывающих валов. Разработанная модель материала применена для

уточненного исследования изменения НДС для пяти выбранных материальных точек из объема исследуемой заготовки в виде изогнутой пластины, полученной в результате двух последовательных проходов холодной гибки [6]. При этом в ходе моделирования необходимо было выработать рекомендации по улучшению физико-механических свойств (в частности, повышению предела текучести) изогнутой пластины после двух проходов холодной гибки. Для этого были проведены расчеты для двух режимов анализируемого процесса, отличия между которыми заключались в скорости движения верхнего ролика вдоль оси ОУ (первый режим – 0.014 м/с, второй режим – 0.012 м/с) и коэффициенте трения (первый режим – 0.3, второй режим – 0.4). При этом конечные формы изделий, получаемые при двух указанных режимах, являются близкими. На основе полученных результатов был выбран первый режим холодной гибки, так как в нем при используемых параметрах процесса получается более высокий предел текучести.

В четвертой главе приводится дислокационная модель (ДМ) фрагментации на базе континуальной дислокационной динамики для углубленного описания процесса измельчения. ДМ сформулирована на основе детального анализа физических представлений о процессе фрагментации и ранее разработанной модификации модели ЕТМВ для приближенного описания измельчения.

В п. 4.1 подробно описана структура ДМ, в которой комплексно учитываются изменение плотности статистически накопленных и геометрически необходимых дислокаций, размера и угла разориентации фрагментов, размера зерна. В диссертационной работе впервые представлена единая постановка с учетом известных из различных литературных источников соотношений для описания эволюции указанных характеристик внутренней структуры.

В рамках КМ для описания внутризеренного дислокационного скольжения записываются уравнения для вычисления скорости сдвигов по системам скольжения (уравнение Орована) [7]. В качестве эволюционного уравнения для критических напряжений сдвига (закона упрочнения) используется соотношение с учетом влияния на упрочнение материала различных механизмов [7]:

$$\tau_c^{(k)} = \tau_{c0}^{(k)} + \tau_{cHPf}^{(k)} + \tau_{cHPg}^{(k)} + \tau_{cBH}^{(k)}, \quad (1)$$

$$\tau_{cHPf}^{(k)} = k_{HPf} / \sqrt{d_f}, \quad \tau_{cHPg}^{(k)} = k_{HPg} / \sqrt{d_g}, \quad (2) \quad (5)$$

$$\tau_{cBH}^{(k)} = \alpha_{BH} Gb \sum_{s=1}^K \Omega^{(ks)} \sqrt{\rho_{SSD}^{(s)}}, \quad (3)$$

где $(5)_2$ – соотношения Холла–Петча, учитывающие влияние на упрочнение границ фрагментов и зерен соответственно, k_{HPf} , k_{HPg} – константы, $(5)_3$ – соотношение, аналогичное предложенному Бейли и Хиршем, учитывающее взаимодействие дислокаций. Размер фрагмента d_f , средний размер зерна d_g , плотность статистически накопленных дислокаций $\rho_{SSD}^{(s)}$ вычисляются с помощью описанной ниже подмодели фрагментации.

Для описания ротации подвижной системы координат используется модель решеточного поворота [7] $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} \times (\mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3) : \mathbf{l}_e$, где $\mathbf{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{k}_i$, $i = \overline{1,3}$ – базис подвижной системы координат.

В рамках ДМ каждому зерну приписывается эффективный (средний) фрагмент, описываемый плотностью статистически накопленных дислокаций (СНД) $\rho_{SSD}^{(i)}$, плотностью геометрически необходимых дислокаций (ГНД) $\rho_{GND}^{(i)}$, размером $d_f^{(i)}$ и углом разориентации $\theta^{(i)}$, $i = \overline{1, N_g}$, N_g – число зерен в представительном объеме; указанные параметры эффективного фрагмента соответствуют осредненным параметрам по всем реальным фрагментам в зерне. Под термином «фрагмент» понимается часть материала, отделенная от других фрагментов малоугловыми геометрически необходимыми границами, то есть при моделировании процесса фрагментации в зависимости от стадии деформирования фрагменту соответствует либо блок ячеек, либо субзерно. В рамках всего ПО вводятся удельные (на единицу объема) площади границ фрагментов S_f и границ зерен S_g .

Статистически накопленными дислокациями являются дислокации внутри фрагмента, в частности дислокации, формирующие ячейки. Заметим, что в работе не рассматривается явное разделение дислокаций на краевые и винтовые, предполагая наличие дислокаций обоих типов в общей плотности СНД. Тогда плотность СНД в эффективном фрагменте делится на интегральную плотность подвижных дислокаций и неподвижных $\rho_{SSD}^{(k)} = \rho_m^{(k)} + \rho_{im}^{(k)}$, $k = \overline{1, K}$. Под подвижными дислокациями в контексте предлагаемой КМ–ДМ будем понимать такие, которые при приложении касательных напряжений, равных критическим, будут перемещаться.

В эволюционных уравнениях для плотности подвижных и неподвижных дислокаций учитываются процессы генерации дислокаций, перехода дислокаций из подвижных в неподвижные и ГНД, обратный переход неподвижных дислокаций и ГНД в подвижные, аннигиляция подвижных дислокаций с подвижными, неподвижными и ГНД, переползание подвижных дислокаций и переход неподвижных дислокаций в ГНД. В уравнении для эволюции плотности ГНД учитываются описанные выше соответствующие слагаемые. Отметим, что в предложенных соотношениях более детально учитываются происходящие при деформировании дислокационные процессы на системах скольжения в отличие от модели ЕТМВ, где аналогичные процессы учитываются интегрально. Указанные выше дислокационные реакции сформулированы на основе соотношений континуальной дислокационной динамики и подробно описаны в главе 4 диссертационной работы.

В кинетических уравнениях для плотностей дислокаций используется средняя длина свободного пробега дислокаций по системам скольжения $d^{(k)}$, которая вычисляется как среднее гармоническое [7]:

$$\frac{2}{d^{(k)}} = \frac{1}{d_\rho^{(k)}} + \frac{1}{d_g}, \quad k = \overline{1, K}, \quad d_\rho^{(k)} = \frac{K_f}{\sqrt{\sum_{s=1}^K \Omega^{(ks)} (\rho_{SSD}^{(s)} + \rho_{GND}^{(s)})}}, \quad (6)$$

где $d_{\rho}^{(k)}$ – оценка средней длины свободного пробега по системе скольжения на основе плотности дислокаций в зерне, d_g – оценка средней длины свободного пробега на основе среднего размера зерна в ПО, K_f – константа.

Размер эффективного фрагмента в зерне определяется как среднее значение $d_{\rho}^{(k)}$ по всем системам скольжения [7]:

$$d_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K d_{\rho}^{(k)}. \quad (7)$$

Далее по найденным размерам эффективных фрагментов аналогично модифицированной модели ЕТМВ вычисляется средний размер фрагментов в поликристалле. Отметим, что при больших деформациях он будет сопоставим со средним размером зерна.

В ДМ моделирование разориентации фрагментов в зерне описывается с использованием доли ГНД, составляющих границы фрагментов, и для среднего угла разориентации θ в рамках зерна записывается соотношение [7]:

$$\dot{\theta} = \beta \frac{b}{2} (\rho_{GND})^{-1/2} \dot{\rho}_{GND}, \quad (8)$$

где $\rho_{GND} = \sum_{k=1}^K \rho_{GND}^{(k)}$ – суммарное значение плотности ГНД на системах скольжения в рамках эффективного фрагмента, β – коэффициент.

По вычисленным в соотношениях (7), (8) для отдельных эффективных фрагментов характеристикам далее определяются величины для всего поликристалла в целом. Заметим, что в уравнениях ниже используются величины, полученные объемным осреднением по всем составляющим ПО зернам.

Для описания процесса фрагментации вводится удельная к объему всего поликристалла площадь границ фрагментов S_f . В работе учитывается изменение S_f за счет двух механизмов. Первый механизм описывает формирование границ фрагментов, в рамках которого происходит увеличение удельной площади при перестройке дислокационной структуры в ходе деформирования. Второй механизм учитывает уменьшение удельной площади границ фрагментов при трансформации их в границы зерен в ходе разворотов. Тогда эволюционное соотношение для удельной площади границ фрагментов в ПО можно записать следующим образом [7]:

$$\dot{S}_f = \dot{S}_f^+ + \dot{S}_f^-, \quad \dot{S}_f^+ = \zeta_1 (b/\theta_0) \bar{\dot{\rho}}_{GND}, \quad \dot{S}_f^- = -\zeta_2 S_f \bar{\dot{\theta}}, \quad (9)$$

где θ_0 – угол разориентации новообразованной границы фрагмента, ζ_1 , ζ_2 – константы, описывающие долю влияния соответствующих механизмов,

$\bar{\dot{\rho}}_{GND} = \sum_{i=1}^{N_g} w^{(i)} \dot{\rho}_{GND}^{(i)}$ – средняя по объему скорость изменения суммарной плотности ГНД, $\bar{\dot{\theta}} = \sum_{i=1}^{N_g} w^{(i)} \dot{\theta}^{(i)}$ – среднее по объему значение скорости изменения угла разо-

риентации фрагментов, $w^{(i)} = \left(d_f^{(i)}\right)^3 / \sum_{j=1}^{N_g} \left(d_f^{(j)}\right)^3$ – объемная доля эффективного фрагмента i в ПО, вычисляемая по среднему размеру фрагментов в зерне (7).

Была введена величина удельной площади границ зерен S_g и сформулировано соотношение для её эволюции, которое учитывает изменение удельной площади границ зерен за счет разворотов фрагментов [7]:

$$\dot{S}_g = \eta S_g \bar{\theta}, \quad (10)$$

где η – константа.

Средний размер фрагментов $\bar{d}_f$ в поликристалле вычисляется объемным осреднением по размерам эффективных фрагментов в отдельных зернах [7]. В поликристалле $\bar{d}_f$ вводится по аналогии с модифицированной моделью ЕТМВ для описания процесса фрагментации с учетом дислокационных процессов, происходящих на уровне отдельных фрагментов в зерне. При этом в ДМ дополнительно вводится средний размер зерна в ПО, который определяется с учетом переходов фрагментов в новые зерна. Совокупность введенных соотношений позволяет более адекватно описать процесс фрагментации на начальных этапах деформирования и дает возможность корректно моделировать процессы ОМД, в том числе с применением ИПД.

Для описания эволюции среднего размера зерна в поликристалле используется стереологическое соотношение, основанное на удельной площади границ зерен в ПО [7]:

$$d_g = 2/S_g. \quad (11)$$

В п. 4.2 приведены результаты моделирования РКУП меди по маршруту В_с при комнатной температуре, полученные с использованием КМ с интегрированной дислокационной моделью для комплексного описания фрагментации.

При неупругом деформировании металлов уже на начальных этапах в них образуется характерная для проводимого процесса нагружения текстура, которая оказывает существенное влияние на дальнейший процесс деформирования и свойства материала. Прямые полюсные фигуры на рисунке 4, полученные после различного числа проходов РКУП с помощью двухуровневой статистической КМ, качественно соответствуют экспериментальным текстурам.

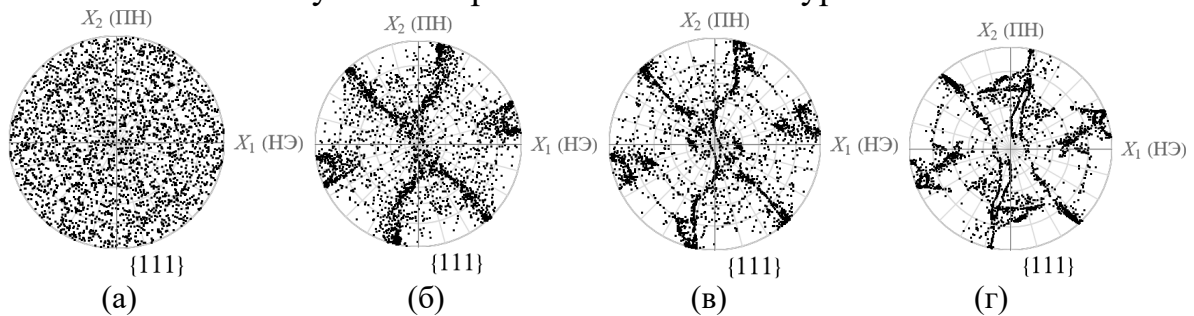


Рисунок 4. Текстуры после различного числа проходов РКУП по маршруту В_с: (а) начальная, (б) после первого прохода, (в) после второго прохода, (г) после четвертого прохода

На рисунке 5 приведена эволюция плотностей дислокаций, среднего размера фрагментов и зерна в ходе четырех проходов РКУП по маршруту В_с при комнатной температуре.

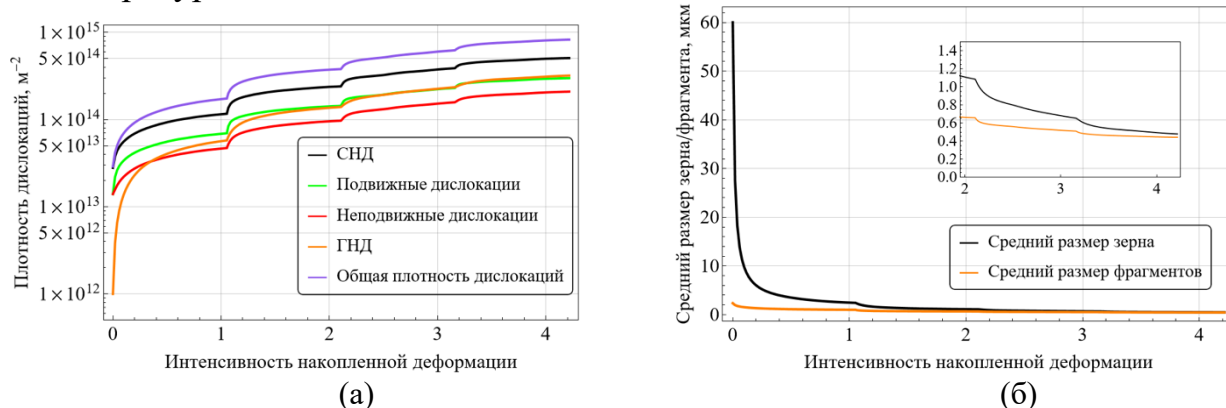


Рисунок 5. Зависимости (а) плотности дислокаций, (б) среднего размера фрагментов и среднего размера зерна от интенсивности накопленной деформации после четырех проходов РКУП по маршруту В_с

Полученные расчетные данные по характеристикам внутренней структуры (плотностям дислокаций, среднему углу разориентации и размеру фрагментов, среднему размеру зерна) находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Проведен обзор экспериментальных исследований по процессу фрагментации зеренной структуры металлов и сплавов. Выявлены ключевые физические особенности изменения внутренней структуры и механизмов деформирования в ходе рассматриваемого процесса.

2. Выполнен анализ устойчивости базовой двухуровневой статистической конститутивной модели. С её помощью описаны нагружения с изломом траектории деформирования.

3. Проведен обзор существующих моделей фрагментации и на его основе впервые в базовую двухуровневую конститутивную модель интегрирована модель измельчения ЕТМВ для приближенного описания процесса измельчения; проведена модификация её соотношений. Выявлено актуальное направление развития многоуровневых конститутивных моделей.

4. Создана новая двухуровневая статистическая конститутивная модель на базе континуальной дислокационной динамики для комплексного описания фрагментации зерен в ходе технологических процессов обработки металлов. Предложенная модель совокупно учитывает эволюцию плотностей статистически накопленных и геометрически необходимых дислокаций, значений среднего размера фрагментов и зерен, угла разориентации фрагментов.

5. Разработаны алгоритмы и программные численные реализации указанных в п. 3 и п. 4 моделей. Получены результаты моделирования простых и сложных нагружений металлов, проведен их анализ и сопоставление с

экспериментальными данными, которое свидетельствует об удовлетворительном соответствии.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Швейкин А.И., Трусов П.В., Романов К.А. Об одном подходе к численной оценке устойчивости многоуровневых конститутивных моделей материалов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 1. – С. 61–76. **(ВАК)**
2. Швейкин А.И., Трусов П.В., Романов К.А. Некоторые результаты численной оценки устойчивости двухуровневой конститутивной модели ГЦК-поликристалла // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т. 14, № 2. – С. 127–143. **(ВАК)**
3. Shveykin A., Romanov K., Trusov P. Some issues with statistical crystal plasticity models: description of the effects triggered in FCC crystals by loading with strain-path changes // Materials. – 2022. – V. 15. – 6586 (18 pages). **(Web of Science, Scopus)**
4. Romanov K., Shveykin A., Trusov P. Advanced statistical crystal plasticity model: description of copper grain structure refinement during equal channel angular pressing // Metals. – 2023. – V. 13. – 953 (19 pages). **(Web of Science, Scopus)**
5. Shveykin A., Trusov P., Romanov K. Stability of crystal plasticity constitutive models: observations in numerical studies and analytical justification // Metals. – 2024. – V. 14. – 947 (30 pages). **(Web of Science, Scopus)**
6. Romanov K.A., Shveykin A.I. Two-level statistical constitutive model with integrated ETMB model: description of grain structure refinement of AISI 304 steel in cold bending // Russian Physics Journal. – 2024. – V. 67, No. 10. – P. 1555–1561. **(Scopus)**
7. Романов К.А., Швейкин А.И. Многоуровневая статистическая конститутивная модель на базе континуальной дислокационной динамики и ее применение для комплексного описания трансформации структуры меди при равноканальном угловом прессовании // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2025. – № 4. – С. 5–23. **(ВАК, Scopus)**
8. Романов К.А., Швейкин А.И., Трусов П.В. Программная реализация модели ETMB: модуль для описания измельчения зерен в двухуровневой статистической конститутивной модели. – **Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024668653** от 9 августа 2024 г.
9. Романов К.А., Кондратьев Н.С., Швейкин А.И., Трусов П.В. Реализация многоуровневых конститутивных моделей материалов: интеграционный модуль для статистических моделей. – **Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024691996** от 25 декабря 2024 г.