Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

**Т.В. Смышляева, Н.А. Лойко,
Э.В. Плехова, А.А. Савочкина**

МАТЕМАТИКА ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета
2022

УДК 51(075.8)
М34

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор *А.Р. Абдуллаев*
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет);
канд. физ.-мат. наук, доцент *Ю.Н. Еленский*
(Пермский государственный национальный
исследовательский университет)

М34 **Математика**. Функции нескольких переменных: учеб.-метод. пособие / Т.В. Смышляева [и др.]. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 134 с.

ISBN 978-5-398-02718-1

Приведены основные формулы и определения из раздела «Математика. Функции нескольких переменных» курса высшей математики. Содержание пособия охватывает программу соответствующей части дисциплины «Математика» действующих образовательных стандартов для большинства специальностей технических вузов. Приведены примеры решения задач. Материал изложен в доступной для самостоятельного изучения студентами форме.

Предназначено для преподавателей, студентов и лиц, занимающихся самообразованием по курсу высшей математики, также будет полезно для преподавателей математики среднеспециальных учебных заведений машиностроительного, радиотехнического и экономического профилей.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-398-02718-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математического анализа во втузе нередко вызывает определенные трудности у студентов по ряду причин (недостаточный уровень подготовки в школе, нехватка времени на изучение теоретического материала по современным стандартам и т.д.). Успешность изучения всего курса в значительной мере определяется навыками, приобретенными по части «Введение в анализ». Предлагаемая книга является учебным пособием, включающим в себя следующие разделы: предел функции нескольких переменных; непрерывность функции; точки разрыва; частные производные; полный дифференциал функции нескольких переменных; скалярное поле; экстремум функции двух переменных и др..

Цель этого пособия – помочь студенту I курса в подготовке к практическим занятиям, контрольным работам, тестированию, выполнению расчетно-графических работ, зачетам и экзаменам.

Для максимальной доступности материала содержание пособия разделено на параграфы. Каждый параграф состоит из двух частей: в одной указаны основные формулы и рисунки, в другой – даются определения и замечания к ним. Такое построение пособия, как показывает практика, дает студенту широкие возможности для успешной самостоятельной работы.

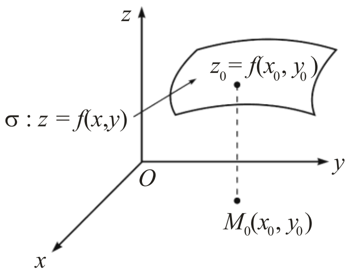
При написании пособия использовано методическое обобщение многолетнего опыта работы авторов на Механико-технологическом факультете Пермского национального исследовательского политехнического университета. По характеру компоновки материала и стилю изложения данное пособие является продолжением пособия «Математика: введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Издание предназначено для студентов I курса высших технических учебных заведений. Помимо студентов, книга может быть полезна для преподавателей математики среднеспециальных учебных заведений машиностроительного, радиотехнического и экономического профилей.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Функции нескольких переменных

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $z = f(x, y)$ (1.1)	Обозначение функции двух переменных. x, y – независимые переменные (аргументы). z – зависимая переменная (функция). **Замечание** Кроме буквы f для обозначения функции употребляются и другие буквы, например: $z = F(x, y)$, $z = \varphi(x, y)$. **Определение** Если каждой паре (x, y) двух независимых переменных из области их изменения D, соответствует определенное значение z из множества E, то говорят, что на множестве D задана функция z двух независимых переменных x и y.
2. $D(f)$ – (1.2) область определения функции $z = f(x, y)$	Совокупность пар (x, y), при которых функция $z = f(x, y)$ определена, называется **областью определения** этой функции. **Следует запомнить:** обычно областью определения функции является некоторая часть плоскости OXY.

Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
3. $E(f)$ – область (1.3) изменения (значений) функции $z = f(x, y)$	Совокупность всех значений функции z называется областью изменения функции.
4. $z_0 = f\left(x_0, y_0\right)$ или $z_0 = f\left(M_0\right)$ (1.4)	z_0 – значение функции $z = f\left(x, y\right)$ в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$.
5.  Рис. 1.1	**Следует запомнить**: графиком функции двух переменных является **поверхность** σ.
6. $u = f\left(x, y, z\right)$ (1.5)	Обозначение функции трех переменных. x, y, z – независимые переменные (аргументы). u – функция. **Определение** Если каждой тройке $\left(x, y, z\right)$ независимых переменных из области их изменения D, соответствует определенное значение u из множества E, то говорят, что на множестве D задана функция u трех независимых переменных x, y, z.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
7. $D(f)$ – область (1.6) определения функции $u = f(x, y, z)$	Совокупность троек (x, y, z), при которых функция $u = f(x, y, z)$ определена, называется **областью определения** этой функции. **Следует запомнить:** областью определения функции трех переменных является некоторая совокупность точек пространства. **Замечание 1** Функцию трех и большего количества переменных изобразить с помощью графика в пространстве невозможно. **Замечание 2** Область определения функции четырех и большего числа переменных не допускает простого геометрического истолкования.

Задачи

Найти и изобразить на чертеже область определения функций:

а) $z = \ln(xy)$;

б) $z = \arccos(x - 3)$;

в) $z = \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$.

Решение

а) Функция $z=\ln(xy)$ определена, если $xy>0$, следовательно,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ y<0\end{cases}\end{array}\right. \tag{1.7}$$

На плоскости OXY все точки, удовлетворяющие условию (1.7), лежат внутри первой и третьей четверти (рис. 1.2).

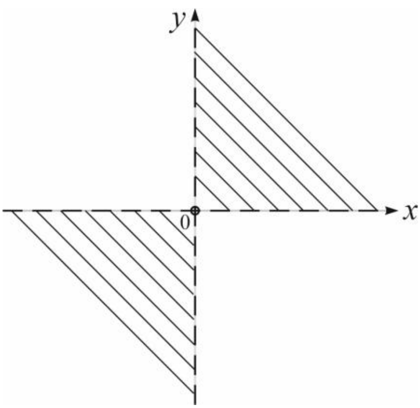


Рис. 1.2

б) Функция $z=\arccos(x-3)$ определена, если $-1\le x-3\le 1$ или $2\le x\le 4$.

Границей области определения функции являются прямые, параллельные оси OY: $x=2$, $x=4$.

Таким образом, область определения функции – полоса между этими прямыми (рис. 1.3).

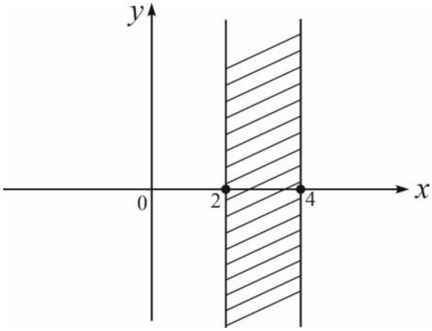


Рис. 1.3

в) Областью определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ является множество точек плоскости OXY, удовлетворяющих неравенству $25 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 25$.

С точки зрения геометрии это круг с центром в начале координат и радиусом $R = 5$, за исключением границы – окружности $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 1.4).

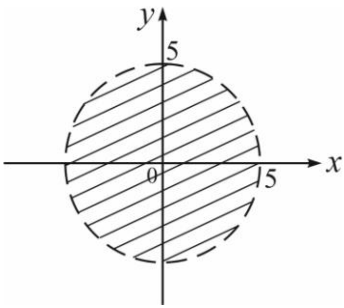


Рис. 1.4

§2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

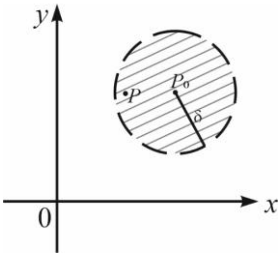
<table>
<tr><th>Основные формулы и рисунки</th><th>Определения и замечания</th></tr>
<tr><td>1.


Рис. 2.1</td><td>δ – окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ называется внутренность круга с центром в этой точке и радиусом δ.

Замечание
Любая точка $P(x, y)$, принадлежащая δ – окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$, находится от этой точки на расстоянии, меньшем δ.</td></tr>
<tr><td>2. Символическая запись предела функции двух переменных в точке:
$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$
или (2.1)

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$</td><td>$A$ – предел функции $z = f(x, y)$ при $P \to P_0$ $(x \to x_0, y \to y_0)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$
$\exists$ такая δ – окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$, что для любой точки $P(x, y)$ этой окрестности (за исключением, быть может, точки P_0) имеет место неравенство:
$\left| f(p) - A \right| < \varepsilon$ или
$\left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon$ (2.2)</td></tr>
</table>

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Замечание Из определения (2.2) следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому P стремится к P_0 (число таких направлений бесконечно).
3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$ (2.3)	Функция $z=f(x,y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0,y_0)$, если она определена в точке $M_0(x_0,y_0)$ и некоторой ее окрестности и выполняется условие (2.3). **Замечание 1** Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в этой области. **Замечание 2** Если в некоторой точке $P_0(x_0,y_0)$ не выполняется условие (2.3), то точка $P_0(x_0,y_0)$ называется точкой разрыва функции $z=f(x,y)$. **Замечание 3** Точки разрыва функции $z=f(x,y)$ могут образовывать целые линии разрыва.

Задачи

Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

б) $z=\dfrac{3}{(x+y)^3}$;

в) $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$.

Решение

а) Функция $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ определена на всей плоскости OXY, за исключением точки $P_0(0,0)$, так как в этой точке функция не определена, следовательно, $P_0(0,0)$ – точка разрыва функции.

б) Для функции $z=\dfrac{3}{(x+y)^3}$ точками разрыва являются все точки, лежащие на прямой $y=-x$. Таким образом, точки разрыва образуют линию разрыва данной функции.

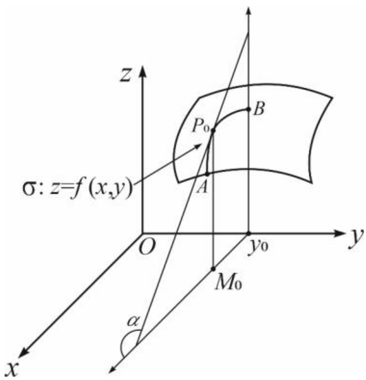
в) Функция $z=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$ определена и непрерывна всюду, кроме тех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $9-x^2-y^2=0$.

Это – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R=3$, следовательно, $x^2+y^2=9$ – линия разрыва данной функции.

§3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ (3.1)	Частное приращение функции $z = f(x,y)$ по x. **Замечание** Переменная y в данном случае остается неизменной.
$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ (3.2)	Частное приращение функции $z = f(x,y)$ по y. **Замечание** Переменная x в данном случае остается неизменной.
2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x,y)$ (3.3)	Обозначение частной производной функции $z = f(x,y)$ по x.
$\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, z'_y, $f'_y(x,y)$ (3.4)	Обозначение частной производной функции $z = f(x,y)$ по y.
3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ (3.5)	Частной производной по x от функции $z = f(x,y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю. Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}= = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y} \quad (3.6)$$	приращения $\Delta_y z$ к приращению Δy при стремлении Δy к нулю. **Следует запомнить:** при нахождении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменная y считается постоянной величиной, а при нахождении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменная x считается постоянной величиной. **Замечание 1** В отличие от обозначения **обыкновенной** производной, здесь употребляется не «прямое» d, а «круглое» ∂. **Замечание 2** Частные производные от функции $z=f\left(x,y\right)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
4.  Рис. 3.1	**Геометрический смысл** частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ от функции двух переменных: 1. Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность σ. 2. Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$ в плоскости OXY и соответствующую точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности (рис. 3.1). 3. Проведем плоскость $y = y_0$. 4. Плоская кривая AP_0B – это результат пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $y = y_0$. 5. Полученную кривую AP_0B можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x, y_0)$. 6. Согласно геометрическому смыслу производной функции одной переменной $f'_x(x, y_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной, проведенной к кривой AP_0B в точке P_0.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha$ (3.7) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = \operatorname{tg}\beta$ (3.8)	Следовательно, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha$ (3.7). В этом заключается геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. **Замечание** Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. **Следует запомнить:** значение частной производной $\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)_{M_0} = \operatorname{tg}\beta$ (3.8), где $\beta -$ угол наклона касательной, проведенной в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью $x = x_0$.
5. $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$ (3.9)	Частное приращение функции $u = f(x, y, z)$ по x. **Замечание** Переменные y, z в данном случае остаются неизменными.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$\Delta_y u = f\left(x, y+\Delta y, z\right) - f\left(x, y, z\right)$ (3.10)	Частное приращение функции $u = f\left(x, y, z\right)$ по y. **Замечание** Переменные x, z в данном случае остаются неизменными.
$\Delta_z u = f\left(x, y, z+\Delta z\right) - f\left(x, y, z\right)$ (3.11)	Частное приращение функции $u = f\left(x, y, z\right)$ по z. **Замечание** Переменные x, y в данном случае остаются неизменными.
6. $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, $f'_x\left(x, y, z\right)$ (3.12)	Обозначение частной производной от функции $u = f\left(x, y, z\right)$ по x.
$\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, u'_y, $f'_y\left(x, y, z\right)$ (3.13)	Обозначение частной производной от функции $u = f\left(x, y, z\right)$ по y.
$\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$, u'_z, $f'_z\left(x, y, z\right)$ (3.14)	Обозначение частной производной от функции $u = f\left(x, y, z\right)$ по z.
7. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x} =$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x+\Delta x, y, z\right) - f\left(x, y, z\right)}{\Delta x}$ (3.15)	**Частной производной** по x от функции $u = f\left(x, y, z\right)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_x u$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$ (3.16)	**Частной производной** по y от функции $u = f(x, y, z)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_y u$ к приращению Δy при стремлении Δy к нулю.
$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$ (3.17)	**Частной производной** по z от функции $u = f(x, y, z)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_z u$ к приращению Δz при стремлении Δz к нулю.
	Следует запомнить: при нахождении частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$, переменные y, z считаются постоянными; при нахождении частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$, переменные x, z считаются постоянными; при нахождении частной производной $\frac{\partial u}{\partial z}$, переменные x, y считаются постоянными.

Задачи

Задача 1

Найти частные производные первого порядка:

а) $z = 2x^5 - 3x^2y^4 + 8y$;

б) $z = \dfrac{y^2}{x^3}$;

в) $z = y^x$.

Решение

$$\text{а) } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \left(2x^5 - 3x^2y^4 + 8y\right)'_x = 10x^4 - 3y^4 \cdot 2x + 0 = 10x^4 - 6y^4x;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \left(2x^5 - 3x^2y^4 + 8y\right)'_y = 0 - 3x^2 \cdot 4y^3 + 8 = -12x^2y^3 + 8.$$

$$\text{б) } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \left(\frac{y^2}{x^3}\right)'_x = y^2\left(x^{-3}\right)' = -3y^2x^{-4} = -\frac{3y^2}{x^4};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \left(\frac{y^2}{x^3}\right)'_y = \frac{1}{x^3} \cdot 2y = \frac{2y}{x^3}.$$

$$\text{в) } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \left(y^x\right)'_x = y^x \ln y;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \left(y^x\right)'_y = xy^{x-1}.$$

Задача 2

Найти частные производные первого порядка:

а) $z = \left(4xy - x^2 - y^3\right)^5$;

б) $z = \sqrt[3]{e^{\frac{x}{y}}}$;

в) $z = \operatorname{arctg}^2\left(x - y\right)$.

Решение

а) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = 5\left(4xy - x^2 - y^3\right)^4 \cdot \left(4y - 2x\right) =$$

$$= 10\left(4xy - x^2 - y^3\right)^4 \cdot \left(2y - x\right);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = 5\left(4xy - x^2 - y^3\right)^4 \cdot \left(4x - 3y^2\right).$$

б) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \left(e^{\frac{x}{3y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{3y}} \cdot \frac{1}{3y} = \frac{1}{3y} \cdot e^{\frac{x}{3y}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \left(e^{\frac{x}{3y}}\right)'_x = e^{\frac{x}{3y}} \cdot \frac{x}{3} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{3y^2} e^{\frac{x}{3y}}.$$

в) $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = 2\operatorname{arctg}\left(x - y\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(x - y\right)^2};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = 2\operatorname{arctg}\left(x - y\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(x - y\right)^2} \cdot \left(-1\right).$$

Задача 3

Вычислить значение частных производных первого порядка от функции $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ в точке $A\left(2;1\right)$.

Решение

$$z = \sqrt[3]{x^3 - y^3} = \left(x^3 - y^3\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=\text{const}} = \frac{1}{3}\left(x^3 - y^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 - y^3\right)^2}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A} = \frac{4}{\sqrt[3]{\left(8 - 1\right)^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{49}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=\text{const}} = \frac{1}{3}\left(x^3 - y^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-3y^2\right) = \frac{-y^2}{\sqrt[3]{\left(x^3 - y^3\right)^2}},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = -\frac{1}{\sqrt[3]{49}}.$$

Задача 4

Найти частные производные первого порядка от функций:

а) $u = x^2 y - 4z^3 y^2 - 3xyz - 1$;

б) $u = \sqrt[x]{\dfrac{y}{z}}$.

Решение

а) $u = x^2 y - 4z^3 y^2 - 3xyz - 1$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,z=\text{const}} = y \cdot 2x - 0 - 3yz = 2xy - 3yz;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z=\text{const}} = x^2 - 4z^3 \cdot 2y - 3xz = x^2 - 8yz^3 - 3xz;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y=\text{const}} = 0 - 4y^2 \cdot 3z^2 - 3xy = -12y^2 z^2 - 3xy.$$

б) $u = \sqrt[x]{\dfrac{y}{z}} = \left(\dfrac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y,z=\text{const}} = \left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}} \ln\frac{y}{z} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x,z=\text{const}} = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}-1} \frac{1}{z};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{x,y=\text{const}} = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{x}-1} \cdot y \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

§4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$ $\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$ (4.1)	Функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные первого порядка (4.1), которые, в свою очередь, являются функциями независимых переменных x и y.
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}$ (4.2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xy}$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yx}$	**Следует запомнить:** частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Обозначение частных производных второго порядка. **Замечание** Функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные второго порядка, которые определяются по формулам (4.2).
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ – (4.3) смешанные частные производные второго порядка.	**Замечание** Смешанные частные производные второго порядка от функции $z=f(x,y)$ (4.3) отличаются между собой лишь порядком дифференцирования.

Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \qquad (4.4)$$	**Следует запомнить:** если смешанные частные производные второго порядка от функции $z = f(x, y)$ непрерывны, то они равны между собой (4.4).
4. $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = z'''_{xxx}$$ $$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = z'''_{yyy} \qquad (4.5)$$ $$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = z'''_{xxy}$$ ……………………………….. $$\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}} = z^{(n)}_{x^m y^{n-m}} \qquad (4.6)$$	**Следует запомнить:** частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка. Обозначение частных производных третьего порядка. **Замечание** Частная производная n-го порядка есть первая производная от частной производной $(n-1)$-го порядка. (4.6) – частная производная n-го порядка, причем функцию $z = f(x, y)$ сначала m раз дифференцировали по x, а потом $(n-m)$ раз по y.

Задачи

Задача 1

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = x^3 y - 4y^2 x + 5x - 3y$.

Решение

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - 4y^2 + 5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 8yx - 3.$$

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 y - 4y^2 + 5\right) = 6xy;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 8yx - 3\right) = -8x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 y - 4y^2 + 5\right) = 3x^2 - 8y.$$

Задача 2

Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

если $z = \frac{x - y}{x + y}$.

Решение

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x - y}{x + y}\right) = \frac{1\left(x + y\right) - \left(x - y\right)1}{\left(x + y\right)^2} = \frac{2y}{\left(x + y\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)=\frac{-1(x+y)-(x-y)1}{(x+y)^2}=-\frac{2x}{(x+y)^2}.$$

Дифференцируя повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{(x+y)^2}\right)=2y\cdot(-2)\cdot(x+y)^{-3}=-\frac{4y}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2x}{(x+y)^2}\right)=-2x\cdot(-2)\cdot(x+y)^{-3}=\frac{4x}{(x+y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{(x+y)^2}\right)=2\left(\frac{1\cdot(x+y)^2-y\cdot 2\cdot(x+y)}{(x+y)^4}\right)=$$

$$=2\left(\frac{x+y-2y}{(x+y)^3}\right)=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}.$$

Задача 3

Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, если $z=e^{\frac{x}{y}}$.

Решение

Найдем частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}.$$

Дифференцируем повторно по переменной *x*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)=\frac{1}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}.$$

Найдем $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}}\right) =$$

$$= -\frac{2}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y^2} \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y^3} \cdot e^{\frac{x}{y}} \left(2 + \frac{x}{y}\right).$$

Задача 4

Показать, что функция $u = x^y$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = (1 + y\ln x)\frac{\partial u}{\partial x}$.

Решение

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1}\left(y \ln x + 1\right).$$

Тогда

$$yx^{y-1}\left(y\ln x + 1\right) \equiv \left(1 + y\ln x\right) yx^{y-1}.$$

Следовательно, функция $u = x^y$ удовлетворяет данному уравнению.

§5. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-$ $-f\left(x, y\right)$ (5.1)	Полное приращение функции двух переменных $z = f\left(x, y\right)$.
2. $\Delta z = \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y +$ $+\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ (5.2)	Равенство (5.2) получено в предположении, что функция $z = f\left(x, y\right)$ имеет в точке $\left(x, y\right)$ непрерывные частные производные. **Замечание 1** От равенства (5.1) можно перейти к равенству (5.2) используя теорему Лагранжа, непрерывность частных производных и теорему о связи функции с ее пределом. **Замечание 2** Величины α_1 и α_2 стремятся к нулю, когда Δx и Δy стремятся к нулю (Δx, Δy – приращения независимых переменных).
3. $\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y$ (5.3)	Главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ (5.2).
4. dz или $df\left(x, y\right)$ (5.4)	Обозначение полного дифференциала функции $z = f(x, y)$.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$dz=\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\Delta y$ (5.5) $dz=\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}dy$ (5.6)	**Следует запомнить:** главная часть полного приращения функции $z = f(x, y)$ (5.2), линейная относительно Δx и Δy, называется **полным дифференциалом**. (5.5) – формула для нахождения полного дифференциала функции $z = f(x, y)$. **Замечание** Выражение полного дифференциала принимает вид (5.6) учитывая, что приращения независимых переменных Δx и Δy совпадают с их дифференциалами, т. е. $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$.
5. $\Delta z=dz+\gamma,$ (5.7) где $\gamma=\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$ (5.8) $\Delta z\neq dz$ (5.9)	**Следует запомнить**: если для независимых переменных x и y приращения $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, то полное приращение Δz и полный дифференциал dz функции $z=f\left(x,y\right)$ отличаются друг от друга на бесконечно малую величину (5.8).
6. $\Delta u=f\left(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z\right)-$ $-f\left(x,y,z\right)$ (5.10)	Полное приращение функции трех переменных $u=f\left(x,y,z\right)$.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
7. $\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+$ (5.11) $+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z$	Равенство (5.11) получено в предположении, что функция $u=f\left(x,y,z\right)$ имеет в точке $\left(x,y,z\right)$ непрерывные частные производные.
8. $du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$ (5.12) $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$ (5.13)	**Следует запомнить:** главная часть полного приращения функции $u=f\left(x,y,z\right)$ (5.11) линейная относительно Δx, Δy, Δz называется **полным дифференциалом**. (5.12) – формула для нахождения полного дифференциала функции $u=f\left(x,y,z\right)$. **Замечание 1** Выражение полного дифференциала принимает вид (5.13) учитывая, что $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, $\Delta z=dz$. **Замечание 2** Формулы (5.11) и (5.12) справедливы для любого количества независимых переменных.
9. $\Delta u=du+\gamma$, (5.14) где $\gamma=\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z$ (5.15) $\Delta u\neq du$ (5.16)	**Следует запомнить**: если для независимых переменных *x*, *y*, *z* приращения $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$, $\Delta z=dz$, то полное приращение Δu и полный дифференциал du функции $u=f\left(x,y,z\right)$ отличаются друг от друга на величину бесконечно малую (5.15).

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
10. $\Delta z \approx dz$ (5.17) $f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) \approx f\left(x, y\right)+$ $+\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y$ (5.18)	Применение полного дифференциала к приближенному вычислению функции основано на замене полного приращения функции $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-f\left(x, y\right)$, которое может весьма сложным образом зависеть от Δx и Δy, чрезвычайно простым выражением $\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y$. **Замечание 1** Формула (5.17) справедлива для функции любого количества переменных. **Замечание 2** С помощью полного дифференциала можно найти: приближенное значение полного приращения функции, приближенное значение функции и т. д.
11. $d\left(u+v\right)=du+dv$ $d\left(uv\right)=du\cdot v+u\cdot dv$ (5.19) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{du\cdot v-u\cdot dv}{v^2}$	**Следует запомнить:** если u, v – дифференцируемые функции нескольких переменных, то справедливы формулы (5.19).

Задачи

Задача 1

Найти полное приращение и полный дифференциал функции $z = x^2 + xy + y^2$, если x изменяется от 3 до 3,1, а y изменяется от 2 до 2,2.

Решение

Полное приращение функции $z = f(x, y)$ определяется по формуле (5.1).

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

По условию:

$$x = 3,\ y = 2,\ x + \Delta x = 3{,}1,\ y + \Delta y = 2{,}2.$$

Тогда:

$$z(3{,}1; 2{,}2) = (3{,}1)^2 + 3{,}1 \cdot 2{,}2 + (2{,}2)^2 =$$
$$= 9{,}61 + 6{,}82 + 4{,}84 = 21{,}27;$$

$$z(3; 2) = 9 + 3 \cdot 2 + 4 = 19;$$

$$\Delta z\Big|_{(3;2)} = 21{,}27 - 19 = 2{,}27.$$

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ находим по формуле (5.5):

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

Для данной задачи $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y.$$

Учитывая, что $x = 3$, $y = 2$, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6+2=8,\ \frac{\partial z}{\partial y}=3+4=7.$$

Тогда $dz=8\cdot 0{,}1+7\cdot 0{,}2=0{,}8+1{,}4=2{,}2$.

Этот пример наглядно показывает, что $\Delta z\neq dz$.

Задача 2

Найти приближенное значение полного приращения функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при перемещении точки $M(x,y,z)$ из положения $M_1(10;10;5)$ в положение $M_2(9;11;6)$.

Решение

Учитывая, что $\Delta u\approx du,$ найдем значение полного дифференциала функции u по формуле (5.12):

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot 2z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Вычислим частные производные в точке $M_1(10;10;5)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1}=\frac{10}{\sqrt{100+100+25}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1}=\frac{10}{\sqrt{100+100+25}}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1}=\frac{5}{\sqrt{100+100+25}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}.$$

$\Delta x=x_2-x_1=9-10=-1;$

$\Delta y = y_2 - y_1 = 11 - 10 = 1;$

$\Delta z = z_2 - z_1 = 6 - 5 = 1.$

Тогда

$$du = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Следовательно, $\Delta u \approx 0,33$.

Задача 3

Вычислить приближенно $\sqrt{(1,01)^3 + (1,98)^3}$.

Решение

Будем полагать, что $\sqrt{(1,01)^3 + (1,98)^3}$ есть частное значение функции $z = f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $M(1,01; 1,98)$.

На основании формулы (5.18)

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y ,$$

имеем

$x + \Delta x = 1,01$, $y + \Delta y = 1,98$.

Тогда

$x = 1$, $y = 2$.

Значения x и y выбираются так, чтобы они были вблизи точки с координатами $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ и при выбранных значениях x и y можно элементарно вычислить значение функции.

$z(1; 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3.$

$\Delta x = 1,01 - 1 = 0,01$, $\Delta y = 1,98 - 2 = -0,02.$

Найдем $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $(1; 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = \frac{3 \cdot 1^2}{2\sqrt{1^3 + 2^3}} = \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1^3 + 2^3}} = \frac{12}{6} = 2.$$

Следовательно,

$$\sqrt{(1,01)^3 + (1,98)^3} \approx 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,01 + 2 \cdot (-0,02) \approx 2,97.$$

§6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $z = f(x,y)$ (6.1) $x = x(t),\ y = y(t),$ (6.2) $z = f\left[x(t), y(t)\right]$ (6.3)	Если $z = f(x,y)$ есть дифференцируемая функция двух переменных *x* и *y*, которые в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями независимой переменной *t* (6.2), то сложная функция (6.3) есть дифференцируемая функция одной переменной *t*.
2. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ (6.4)	$\dfrac{dz}{dt}$ – полная производная функции *z* по *t*. **Следует запомнить:** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ – частные производные, так как функция $z = f(x,y)$ – функция двух переменных, а $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ – обычные производные, т.к. *x* и *y* – функции одной переменной *t*. **Замечание** В формуле (6.4) два слагаемых, так как функция $z = f(x,y)$ – функция двух переменных.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
3. $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$ (6.5), $x_1 = x_1\left(t\right),$ $x_2 = x_2\left(t\right),$ ………... (6.6) $x_n = x_n\left(t\right),$ $z = f\left[x_1\left(t\right), x_2\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right]$ (6.7)	Если $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ (6.5), которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной *t* (6.6), то сложная функция (6.7) есть дифференцируемая функция одной переменной *t*.
4. $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + ...$ $+ \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$ (6.8)	$\frac{dz}{dt}$ – полная производная функции *z* по *t*. **Замечание** Формулы (6.4) и (6.8) являются обобщением правила дифференцирования сложной функции одной переменной.
5. $z = f\left(x, y\right),\ y = y\left(x\right)$ (6.9) $z = f\left[x, y\left(x\right)\right]$ (6.10)	Если $z = f\left(x, y\right)$ есть дифференцируемая функция двух переменных, причем *x* – независимая переменная, а $y = y\left(x\right)$ есть дифференцируемая функция по *x* (6.9), то сложная функция (6.10) есть дифференцируемая функция одной переменной *x*.
6. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ (6.11)	$\frac{dz}{dx}$ – полная производная функции *z* по *x*.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Замечание В правой части равенства (6.11) мы находим частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$, так как z – функция **двух переменных** x и y. В левой части производная $\frac{dz}{dx}$ есть производная сложной функции **одной** переменной x (6.10).
7. $z = f(x,y)$, $x = x(u,v)$, (6.12) $y = y(u,v)$, $z = f\left[x(u,v), y(u,v)\right]$ (6.13)	Если $z = f(x,y)$ есть дифференцируемая функция двух переменных x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями по u и v (6.12), то сложная функция (6.13) есть дифференцируемая функция двух переменных u и v.
8. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$ (6.14) $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$ (6.15)	**Следует запомнить:** частная производная сложной функции (6.13) равна сумме произведений частных производных по промежуточным аргументам (x и y) на частные производные этих аргументов (x и y) по соответствующей независимой переменной (u или v) (6.14, 6.15). **Замечание** Правило дифференцирования сложной функции (6.13) остается справедливым для функции с любым количеством промежуточных аргументов, которые зависят от любого числа

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, (6.16) $x_1 = x_1(u_1, u_2, ..., u_n)$, $x_2 = x_2(u_1, u_2, ..., u_n)$, (6.17) …………………… $x_n = x_n(u_1, u_2, ..., u_n)$ $\frac{\partial z}{\partial u_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_1} +$ $+ ... + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_1}$ $\frac{\partial z}{\partial u_2} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} +$ $+ \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_2} + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_2}$ ………………………………(6.18) $\frac{\partial z}{\partial u_n} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_n} +$ $+ \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_n} + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial u_n}$	независимых переменных. z – функция аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$ (6.16), которые являются функциями независимых переменных $u_1, u_2, ..., u_n$ (6.17).

Задачи

Задача 1

Пусть $u = f(y, z, t)$ дифференцируемая функция переменных y,z,t, причем $y = y(x)$, $z = z(x)$, $t = t(x)$ есть дифференцируемые функции по x. Записать вид сложной функции $\boldsymbol{u}$ и найти соответствующую полную производную.

Решение

Сложная функция при указанных условиях имеет вид $u = f(y(x), z(x), t(x))$ – функция одной переменной x.

Тогда полную производную этой функции находим по формуле

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Задача 2

Найти производную сложной функции $u = \operatorname{arctg}\frac{z}{t}$, где $z = e^{3x}$, $t = \cos x$.

Решение

Здесь u – сложная функция одной независимой переменной x.

Учитывая формулу (6.4), получим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial z}$ и $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t}{t^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{t}\right)^2} \cdot \left(-\frac{z}{t^2}\right) = -\frac{z}{t^2 + z^2}.$$

Найдем производные $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = 3e^{3x},$$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x.$$

Тогда

$$\frac{du}{dx} = \frac{t}{t^2 + z^2} \cdot 3e^{3x} + \left(-\frac{z}{t^2 + z^2}\right) \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{t^2 + z^2}\left(3te^{3x} + z \cdot \sin x\right).$$

Учитывая, что функции z и t зависят от x, получим:

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x+e^{6x}}\cdot\left(3\cos x\cdot e^{3x}+e^{3x}\cdot\sin x\right)=$$

$$=\frac{e^{3x}}{\cos^2 x+e^{6x}}\cdot\left(3\cos x+\sin x\right).$$

Задача 3

Найти производную сложной функции $z=\cos^2 t^x$, где $x=\sqrt{1+t^2}$.

Решение

Учитывая, что z – сложная функция одной независимой переменной t, применим формулу (6.11):

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\cos t^x\left(-\sin t^x\right)\cdot t^x\cdot\ln t=-\sin\left(2t^x\right)\cdot t^x\cdot\ln t;$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=2\cos t^x\left(-\sin t^x\right)\cdot x\cdot t^{x-1}=-\sin\left(2t^x\right)\cdot x\cdot t^{x-1}.$$

Найдем $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\cdot 2t=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dt}=-\sin\left(2t^x\right)\cdot t^x\cdot\ln t\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}+\left(-\sin\left(2t^x\right)\right)\cdot x\cdot t^{x-1}=$$

$$=-\sin\left(2t^x\right)\cdot t^x\left(\frac{t\cdot\ln t}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{x}{t}\right)=$$

$$=-\sin\left(2t^{\sqrt{1+t^2}}\right)\cdot t^{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{t\cdot\ln t}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\right)$$

Задача 4

Найти производную сложной функции $t = \operatorname{ctg}\left(e^{x^2} - \frac{y}{x} + \sqrt[3]{z}\right)$, где $x = \sin 2z, \quad y = e^{3z}$.

Решение

Функция t – функция трех переменных x, y, z причем x и y зависят от z. Тогда сложная функция t есть функция одной переменной z.

Найдем полную производную $\frac{dt}{dz}$:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dz} + \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{1}{\sin^2\left(e^{x^2} - \frac{y}{x} + \sqrt[3]{z}\right)} \cdot \left(2xe^{x^2} + \frac{y}{x^2}\right);$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{1}{\sin^2\left(e^{x^2} - \frac{y}{x} + \sqrt[3]{z}\right)} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right);$$

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{1}{\sin^2\left(e^{x^2} - \frac{y}{x} + \sqrt[3]{z}\right)} \cdot \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}};$$

$\frac{dx}{dz} = 2\cos 2z$ и $\frac{dy}{dz} = 3e^{3z}$, получим:

$$\frac{dt}{dz}=-\frac{1}{\sin^2\left(e^{x^2}-\dfrac{y}{x}+\sqrt[3]{z}\right)}\cdot\left[\left(2xe^{x^2}+\frac{y}{x^2}\right)\cdot 2\cos 2z-\frac{1}{x}\cdot 3e^{3z}+\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}\right]=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2\left(e^{\sin^2 2z}-\dfrac{e^{3z}}{\sin 2z}+\sqrt[3]{z}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\left(2\sin 2z\cdot e^{\sin^2 2z}+\frac{e^{3z}}{\sin^2 2z}\right)\cdot 2\cos 2z-\frac{1}{\sin 2z}\cdot 3e^{3z}+\frac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}\right].$$

Задача 5

Найти производную сложной функции $y=5^{uv}$, где $u=\dfrac{x}{z^2}$, $v=e^{x+z}$.

Решение

Здесь y – сложная функция двух независимых переменных x и z. Учитывая формулы (6.14) и (6.15), получим:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=5^{uv}\cdot\ln 5\cdot v\cdot\frac{1}{z^2}+5^{uv}\cdot\ln 5\cdot u\cdot e^{x+z}=5^{uv}\cdot\ln 5\left[\frac{v}{z^2}+u\cdot e^{x+z}\right]=$$

$$=5^{\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}}\cdot\ln 5\left[\frac{e^{x+z}}{z^2}+\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}\right]=\frac{5^{\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}}\cdot\ln 5\cdot e^{x+z}}{z^2}[1+x];$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}=5^{uv}\cdot\ln 5\cdot v\cdot\left(-\frac{2x}{z^3}\right)+$$

$$+5^{uv}\cdot\ln 5\cdot u\cdot e^{x+z}=5^{uv}\cdot\ln 5\left[-\frac{2vx}{z^3}+u\cdot e^{x+z}\right]=$$

$$=5^{\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}}\cdot\ln 5\left[-\frac{2e^{x+z}x}{z^3}+\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}\right]=\frac{5^{\frac{x}{z^2}\cdot e^{x+z}}\cdot x\cdot e^{x+z}}{z^3}\ln 5[-2+z].$$

§7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
1. $F(x,y)=0$ (7.1)	Функция y от x называется неявной, если она определяется уравнением (7.1) (или уравнением, сводящимся к этому виду) не разрешенным относительно y.
2. $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$ или (7.2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$	**Следует запомнить:** если непрерывная функция y от x задана уравнением $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (7.1), при этом $F'_y(x,y) \neq 0$, то $\dfrac{dy}{dx}$ определяется по формуле (7.2).
3. $F(x,y,z)=0$ (7.3)	Уравнение (7.3) определяет z как некоторую функцию $z=\varphi(x,y)$ независимых переменных x и y.

Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
4. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ (7.4) $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_x}$ $\dfrac{\partial x}{\partial z}=-\dfrac{F'_z}{F'_x}$ (7.5)	**Следует запомнить:** если непрерывная функция z от x и y задана уравнением $F(x,y,z)=0$, где $F(x,y,z)$, F'_x, F'_y, F'_z, – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (7.3), при этом $F'_z\neq 0$, то $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ определяются по формулам (7.4). **Замечание** Если в точке M_0 производная $F'_z=0$, а, скажем $F'_x\neq 0$, то уравнение $F(x,y,z)=0$ может определять x как функцию y и z. В этом случае определим $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial x}{\partial z}$ по формулам (7.5).

Задачи

Задача 1

Найти $\dfrac{dy}{dx}$, где функция $y=y(x)$ задана уравнением $e^{xy}-3y^2-4x^3-1=0$.

Решение

Уравнение $e^{xy}-3y^2-4x^3-1=0$ определяет y как неявную функцию от x.

Для нахождения $\dfrac{dy}{dx}$ рассмотрим 2 способа.

Способ 1

Дифференцируя по x обе части равенства и учитывая, что y есть функция от x, получим:

$$e^{xy}\left(y+xy'\right)-6y\cdot y'-12x^2=0;$$

$$y\cdot e^{xy}+xy'\cdot e^{xy}-6yy'-12x^2=0;$$

$$y'=\frac{12x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}-6y}.$$

Способ 2

Обозначим левую часть данного уравнения через $F\left(x,y\right)$:

$$F\left(x,y\right)=e^{xy}-3y^2-4x^3-1.$$

Найдем частные производные $F_x'=ye^{xy}-12x^2$, $F_y'=xe^{xy}-6y$.

Учитывая формулу (7.2), получим:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\left(ye^{xy}-12x^2\right)}{xe^{xy}-6y}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{12x^2-ye^{xy}}{xe^{xy}-6y},$$

что полностью совпадает с предыдущим результатом.

Задача 2

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $3x^4-2yz^2+4xy^3-5xyz-x-2=0$.

Решение

Обозначим левую часть данного уравнения через $F\left(x,y,z\right)$.

$$F\left(x,y,z\right)=3x^4-2yz^2+4xy^3-5xyz-x-2.$$

Найдем $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 12x^3 + 4y^3 - 5yz - 1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2z^2 + 12xy^2 - 5xz;$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -4yz - 5xy.$$

Применив формулы (7.4), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{12x^3 + 4y^3 - 5yz - 1}{-4yz - 5xy}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{12x^3 + 4y^3 - 5yz - 1}{4yz + 5xy}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-2z^2 + 12xy^2 - 5xz}{-4yz - 5xy}$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2z^2 + 12xy^2 - 5xz}{4yz + 5xy}.$$

Задача 3

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M_0\left(1,1,1\right)$, если $\frac{x^2}{z} - \frac{2z^3}{y^2} + \frac{3y}{x^4} - \frac{2x}{y} = 0.$

Решение

Обозначим левую часть данного уравнения через $F\left(x, y, z\right)$:

$$F\left(x, y, z\right) = \frac{x^2}{z} - \frac{2z^3}{y^2} + \frac{3y}{x^4} - \frac{2x}{y}.$$

Найдем $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ в точке $M_0\left(1,1,1\right)$.

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{2x}{z} - \frac{12y}{x^5} - \frac{2}{y}\right)\right|_{M_0} = 2 - 12 - 2 = -12;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{4z^3}{y^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{2x}{y^2}\right)\right|_{M_0} = 4 + 3 + 2 = 9;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} = \left.\left(-\frac{x^2}{z^2} - \frac{6z^2}{y^2}\right)\right|_{M_0} = -1 - 6 = -7.$$

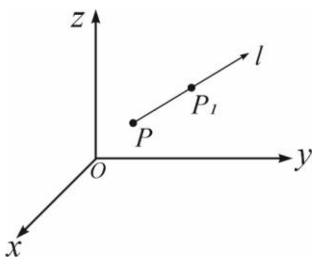
Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{-12}{-7} = -\frac{12}{7};$$

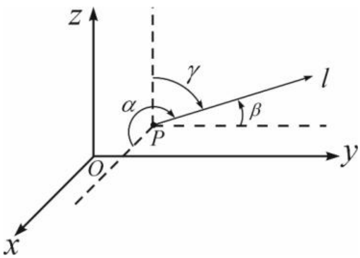
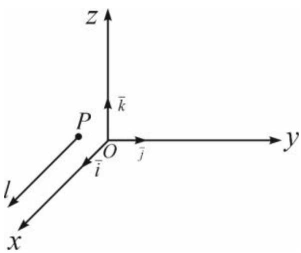
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{9}{-7} = \frac{9}{7}.$$

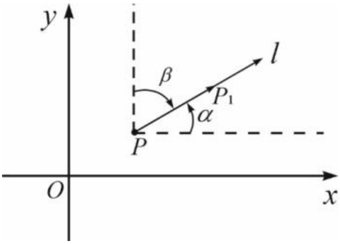
§8. СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

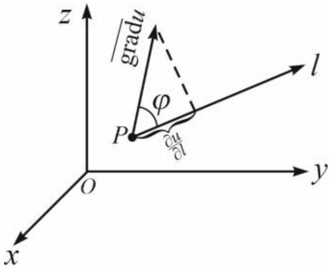
Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $u = u(P)$ (8.1)	Предположим, что в каждой точке P некоторой пространственной области D задано значение **скалярной физической** величины u. u – скалярная функция точки. **Следует запомнить:** если в области D задана скалярная функция точки $u(P)$, то в области D задано **скалярное поле**.
2. $u = u(x, y, z)$ (8.2)	Поскольку положение точки в системе координат $Oxyz$ задается тремя координатами, то скалярное поле можно рассматривать как функцию трех переменных (8.2).
3. $u(x, y, z) = C$ (8.3)	**Следует запомнить:** множество точек области D, в которых функция $u(x, y, z)$ принимает одно и то же значение C, образует некоторую поверхность, которая **называется поверхностью уровня** (8.3). **Замечание 1** Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня. **Замечание 2** Скалярные поля изображаются геометрически с помощью поверхностей уровня.

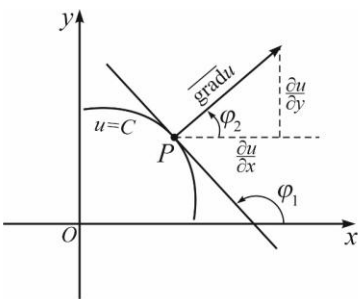
Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
4. $u=u(x,y)$ (8.4)	Если скалярное поле плоское, то функция u зависит от двух переменных: $u=u(x;y)$.
5. $u(x,y)=C$ (8.5)	Уравнение линии уровня **Следует запомнить:** плоские скалярные поля, изображаются геометрически с помощью линий уровня.
6.  Рис. 8.1	Пусть в области D задано скалярное поле, т. е. в области D задана скалярная функция точки $u=u(x,y,z)$. Рассмотрим точку $P(x,y,z)$ и луч l, выходящий из этой точки. $P_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ – другая точка этого луча (рис. 8.1).
$\Delta_l u=u(P_1)-u(P)$ (8.6) $\Delta_l u=u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-$ $-u(x,y,z)$ (8.7)	$\Delta_l u$ – приращение функции $u(x,y,z)$ в направлении l [(8.6); (8.7)].
$\Delta l=\left\vert\overline{PP_1}\right\vert$ (8.8)	Длина вектора $\overline{PP_1}$.
$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\dfrac{\Delta_l u}{\Delta l}$, (8.9)	**Производной функции** $u=u(x,y,z)$ в данном направлении l называется предел отношения приращения функции в данном направлении к длине вектора $\left\vert\overline{PP_1}\right\vert=\Delta l$, когда последняя стремится к нулю.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Замечание 1 $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ – обозначении производной в данном направлении. **Замечание 2** $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ – производная частная, так как из точки P исходит множество направлений, а выбирают одно из них.
7. $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$ (8.10) $\dfrac{\partial u}{\partial l} < 0$ (8.11)	Функция u в точке $P(x, y, z)$ по направлению l возрастает. Функция u в точке $P(x, y, z)$ по направлению l убывает. **Следует запомнить:** производная по направлению $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ характеризует **скорость изменения функции** u в этом направлении. **Замечание** **Абсолютная величина** производной $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ по направлению l определяет величину скорости, а **знак производной** – характеризует изменение функции u (возрастание или убывание).
8.	Пусть $u = u(x, y, z)$ – дифференцируемая скалярная функция точки. α, β, γ – углы, которые образует направление l с координатными осями (рис. 8.2).

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
 Рис. 8.2 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+$ (8.12) $+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$	Формула для вычисления производной по направлению (8.12).
9.  Рис. 8.3	Если направление l совпадает с ортом $\bar{i}$, то $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$, тогда согласно формуле (8.12) $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}$. **Замечание** Аналогично для ортов $\bar{j}$ и $\bar{k}$ осей Oy и Oz. **Следует запомнить:** если направление l совпадает с направлением одного из ортов $\bar{i}$, $\bar{j}$ или $\bar{k}$, то производная u по направлению l совпадает с соответствующей частной производной этой функции.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
10.  Рис. 8.4	Для плоского скалярного поля скалярная функция точки имеет вид $u = u(x, y)$.
$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$ (8.13)	Формула для вычисления производной по направлению в случае плоского скалярного поля (8.13).
$\alpha + \beta = 90$ (8.14) $\beta = 90 - \alpha$	Равенство (8.14) получено на основании рис. 8.4.
$\cos\beta = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$ (8.15)	
$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha$ (8.16)	(8.16) – формула для вычисления производной по направлению в случае плоского скалярного поля, с учётом формул (8.14) и (8.15).
11. $\overline{\text{grad}}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ или (8.17) $\overline{\text{grad}}\, u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$	**Градиентом функции** $u = u(x, y, z)$ называется **вектор**, координатами которого являются значения соответствующих частных производных в точке $P(x, y, z)$

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$\overline{\text{grad}}\,u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}$ или (8.18) $\overline{\text{grad}}\,u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$	В плоском скалярном поле $u = u(x, y)$ $\overline{\text{grad}}\,u$ определяют по формуле (8.18).
12.  Рис. 8.5 $\frac{\partial u}{\partial l} = np_l\,\overline{\text{grad}}\,u$ (8.19) или $\frac{\partial u}{\partial l} = \lvert\overline{\text{grad}}\,u\rvert\cos\varphi$ (8.20)	**Следует запомнить:** между градиентом функции $u = u(x, y, z)$ в данной точке и производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей **теоремой:** производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ по направлению l равна проекции вектора $\overline{\text{grad}}\,u$ на это направление. (8.19). φ – угол между направлением l и $\overline{\text{grad}}\,u$ (рис. 8.5). **Следует запомнить:** из формулы (8.19) следует, что производная по направлению принимает наибольшее значение, если направление l совпадает с направлением градиента. Таким образом, **направление градиента есть направление наибольшего роста** функции.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$\dfrac{\partial u}{\partial l} = \left\|\overline{\text{grad}}\, u\right\|$ (8.21) Если $l \perp \overline{\text{grad}}\, u$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l} = 0$ (8.22)	Наибольшее значение производной по направлению *l* равно модулю градиента функции *u* (8.21). **Замечание 1** Справедливость формулы (8.21) следует из равенства (8.20) при $\varphi = 0$. **Замечание 2** В направлении, противоположном градиенту функция *u* будет **убывать** с наибольшей скоростью. **Следует запомнить:** производная по направлению *l*, которое перпендикулярно $\overline{\text{grad}}\, u$, равна нулю. **Замечание 3** Утверждение (8.22), следует из формулы (8.20), если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.
13.  Рис. 8.6	В области *D* задано скалярное поле, т. е. в области *D* задана скалярная функция точки $u = u(x, y)$. $u(x, y) = C$ – уравнение линии уровня в плоскости *Oxy* (рис. 8.6).

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \qquad (8.23)$$	Производная функции $u(x,y)=C$, заданной неявно, найдена по формуле ((7.2, §7).
$$k_1=\operatorname{tg}\varphi_1 \qquad (8.24)$$ или $$k_1=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \qquad (8.25)$$	k_1 – угловой коэффициент касательной к линии уровня $u(x,y)=C$
$$k_2=\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}} \qquad (8.26)$$	k_2 – угловой коэффициент градиента.
$$k_1\cdot k_2=-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}\cdot\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial x}}=-1 \qquad (8.27)$$ $$k_1\cdot k_2=-1 \qquad (8.28)$$	Условие перпендикулярности двух прямых. **Следует запомнить:** вектор градиент **перпендикулярен** к линии уровня $u(x,y)=C$, лежащей в плоскости Oxy и проходящей через точку P (рис. 8.6). **Замечание** Вектор $\overline{\operatorname{grad}}\,u$ перпендикулярен поверхности уровня $u(x,y,z)=C$, проходящей через данную точку.

Задачи

Задача 1

Построить линии уровня для плоского скалярного поля $u = x^2 - y^2$.

Решение

Линии уровня $x^2 - y^2 = C$.

При $C > 0$ разделим все члены равенства $x^2 - y^2 = C$ на C, получим

$$\frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1 \text{ или}$$

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} = 1$$ – семейство равнобочных гипербол с вершинами в точках $\left(-\sqrt{C};0\right)$ и $\left(\sqrt{C};0\right)$, где Ox – действительная, а Oy – мнимая оси.

При $C = 1$ линия уровня – гипербола $x^2 - y^2 = 1$ с вершинами в точках $(1;0)$ и $(-1;0)$ (рис. 8.7).

При $C = 2$ линия уровня $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ – гипербола с вершинами в точках $\left(\sqrt{2};0\right)$ и $\left(-\sqrt{2};0\right)$ (рис. 8.7).

При $C < 0$ получим $-\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C} = 1$ или

$$-\frac{x^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} = 1$$ – семейство равнобочных гипербол с вершинами в точках $\left(0;-\sqrt{C}\right)$ и $\left(0;\sqrt{C}\right)$, где Oy – действительная, а Ox – мнимая оси.

При $C = -1$ линия уровня – гипербола $y^2 - x^2 = 1$ с вершинами в точках $(0;1)$ и $(0;-1)$ (рис. 8.7).

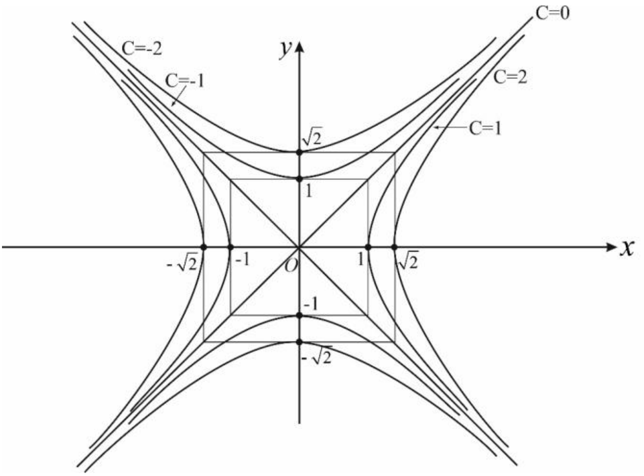


Рис. 8.7

При $C=-2$ линия уровня – гипербола $\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$ с вершинами в точках $\left(0;\sqrt{2}\right)$ и $\left(0;-\sqrt{2}\right)$ (рис. 8.7).

При $C=0$ получим $x^2-y^2=0$,

$(x-y)(x+y)=0$, тогда прямые $y=\pm x$ – асимптоты гиперболы, являются линиями уровня (рис. 8.7).

Задача 2

Найти производную функции $u=xy+yz+zx$ в точке $M(2;1;3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5;5;15)$.

Решение

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos\gamma \qquad (8.12)$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left.(y+z)\right|_{M(2;1;3)}=4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x+z\right)\Big|_{M(2;1;3)} = 5,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(y+x\right)\Big|_{M(2;1;3)} = 3.$$

Вектор $\overline{MN} = \{3;4;12\}$.

Найдем направляющие косинусы вектора $\overline{MN}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\left|\overline{MN}\right|} = \frac{3}{13};\ \cos\beta = \frac{y}{\left|\overline{MN}\right|} = \frac{4}{13};\ \cos\gamma = \frac{z}{\left|\overline{MN}\right|} = \frac{12}{13}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 4\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{4}{13} + 3\cdot\frac{12}{13} = \frac{68}{13}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, то функция u в данной точке и в данном направлении возрастает со скоростью $\frac{68}{13}$.

Задача 3

Найти производную функции $u = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1;1)$ параболы $y = x^2$ по направлению этой кривой в сторону убывания абсциссы.

Решение

Для нахождения $\frac{\partial u}{\partial l}$ используем формулу 8.16:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}\Bigg|_{M_0(1;1)} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}\bigg|_{M_0(1;1)} = \frac{1}{2}.$$

За направление l параболы $y = x^2$ в точке $M_0(1;1)$ принимаем направление касательной к параболе в этой точке.

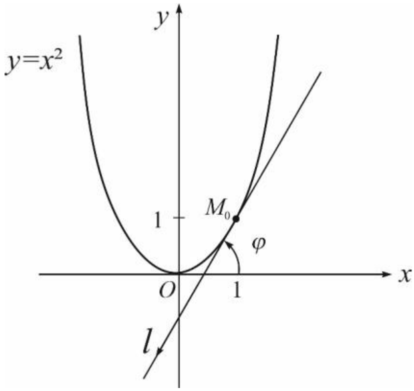


Рис. 8.8

φ – угол, который образует касательная с осью OX (рис. 8.8). Угловой коэффициент касательной

$$k = y'(x) = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$y'(x) = 2x, \quad \operatorname{tg}\varphi = y'(1) = 2.$$

$$\cos\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

В данном случае $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, так как абсцисса убывает.

Тогда $\sin\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial l}<0$, то, функция $\boldsymbol{u}$ убывает в данном направлении со скоростью $\frac{3}{2\sqrt{5}}$.

Задача 4

С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ при переходе точки $M\left(x;y;z\right)$ через точку $M\left(1;1;1\right)$? В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку $M_1\left(3;0;2\right)$, чтобы функция u убывала с наибольшей скоростью?

Решение

Направление градиента есть направление наибольшего роста функции.

$$\overline{\mathrm{grad}}\,u=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\bar{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\bar{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\bar{k}$$

Найдем частные производные:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right|_{M_0}=\frac{2}{3},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right|_{M_0}=\frac{2}{3},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right|_{M_0}=\frac{2}{3}.$$

Тогда

$$\overline{\mathrm{grad}}\,u\left(M_0\right)=\frac{2}{3}\bar{i}+\frac{2}{3}\bar{j}+\frac{2}{3}\bar{k}.$$

Наибольшая скорость возрастания функции в точке M_0 равна модулю градиента.

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left|\overline{\text{grad}}\, u\right|;$$

$$\left|\overline{\text{grad}}\, u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2};$$

$$\left|\overline{\text{grad}}\, u\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ т.е., } \frac{\partial u}{\partial l} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Найдем частные производные в точке M_1:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = \left.\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_1} = \frac{6}{13},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \left.\frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_1} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \left.\frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right|_{M_1} = \frac{4}{13}.$$

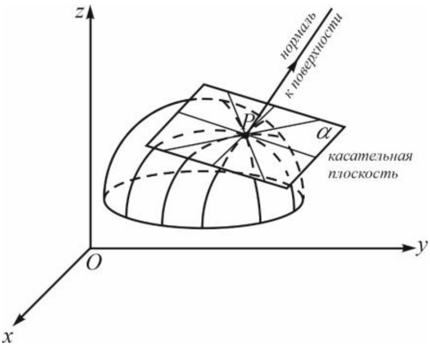
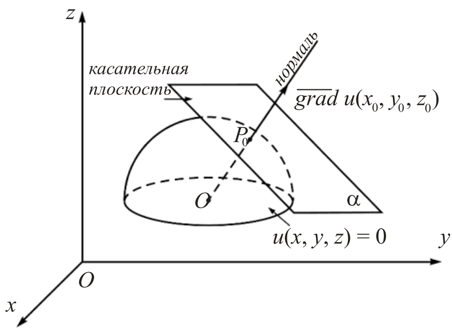
Тогда

$$\overline{\text{grad}}\, u(M_1) = \frac{6}{13}\bar{i} + \frac{4}{13}\bar{k}.$$

В этом направлении функция u возрастает с наибольшей скоростью, а по направлению противоположному $\overline{\text{grad}}\, u(M_1)$, функция убывает с наибольшей скоростью.

$$-\overline{\text{grad}}\, u(M_1) = -\frac{6}{13}\bar{i} - \frac{4}{13}\bar{k}.$$

§9. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.  Рис. 9.1	**Касательной плоскостью** α к поверхности в точке P называется плоскость, в которой лежат все касательные прямые к линиям на поверхности, проходящим через данную точку P (рис. 9.1). Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке P, называется **нормалью** к поверхности в этой точке. P – точка касания.
2.  Рис. 9.2	Пусть функция $u(x;y;z)$ – дифференцируема. Пространственное скалярное поле изображается с помощью поверхностей уровня $u(x;y;z)=C$. Одна из поверхностей уровня имеет вид $u(x;y;z)=0$ (рис. 9.2).
$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{P_0}(z-z_0)=0 \qquad (9.1)$	Уравнение касательной плоскости.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Замечание Уравнение плоскости по точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ и нормальному вектору $\overline{N}=\{A,B,C\}$ имеет вид $A(x-x_0)+B(y-y_0)+$ $+C(z-z_0)=0.$ $\overline{\text{grad}}\,u(P_0)=$ $=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{P_0}\overline{i}+\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\vert_{P_0}\overline{j}+\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right\vert_{P_0}\overline{k}$ перпендикулярен касательной плоскости, проходящей через точку $P_0(x_0;y_0;z_0)$. Тогда (9.1) уравнение касательной плоскости.
$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right\vert_{P_0}}=\frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right\vert_{P_0}}=\frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right\vert_{P_0}} \qquad (9.2)$$	Канонические уравнения прямой в пространстве $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$, где $\overline{s}=\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой. Вектор $\overline{\text{grad}}\,u(P_0)$ является направляющим вектором нормали. Тогда (9.2) уравнение нормали.

Задачи

Задача 1

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

а) $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке $P_0\left(1;-1;-1\right)$;

б) $z=x^2-y^2+3xy-4x+2y-4.$ в точке $M_0\left(-1;0;1\right)$;

в) $x^2-4x+z=0$ в точке $M_0\left(-2;1;-12\right)$.

Решение

а) Обозначим через $u\left(x;y;z\right)$ левую часть уравнения $x^2+2y^2+3z^2-6=0$ и найдем частные производные в точке P_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\Big|_{P_0}=2\,;\ \frac{\partial u}{\partial y}=4y\Big|_{P_0}=-4\,;\ \frac{\partial u}{\partial z}=6z\Big|_{P_0}=-6\,.$$

Применяя формулы (9.1) и (9.2), получим:

$2\left(x-1\right)-4\left(y+1\right)-6\left(z+1\right)=0,$

$x-1-2y-2-3z-3=0,$

$x-2y-3z-6=0$ – уравнение касательной плоскости.

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{-6}$ или

$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+1}{-3}$ – уравнение нормали.

б) В данном случае поверхность можно задать уравнением $u\left(x;y;z\right)=z-x^2+y^2-3xy+4x-2y+4=0.$

Найдем частные производные в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{M_0}=-2x-3y+4\Big|_{M_0}=2+4=6\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{M_0}=2y-3x-2\Big|_{M_0}=3-2=1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=1.$$

Подставим эти значения в уравнение касательной плоскости (9.1):

$$6(x+1)+1(y-0)+1(z-1)=0$$

или

$$6x+y+z+5=0.$$

Уравнение нормали принимает вид

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}.$$

в) $u(x;y;z)=x^2-4x+z$

Обозначим через $u(x;y;z)$ левую часть уравнения $x^2-4x+z=0$ и найдем частные производные в точке $M_0(-2;1;-12)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.(2x-4)\right|_{M_0}=-4-4=-8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=1.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$-8(x+2)+0(y-1)+1(z+12)=0$$

или

$8x-z+4=0$ – касательная плоскость проходит параллельно оси OY.

Уравнение нормали:

$$\frac{x+2}{-8}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+12}{1}.$$

Задача 2

На поверхности $S:5x^2+y^2+z^2-4=0$, найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $10x+2y+z=0$.

Решение

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $u(x;y;z)=0$ в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}(y-y_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

Найдем частные производные в точке P_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}=\left.10x\right|_{P_0}=10x_0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}=\left.2y\right|_{P_0}=2y_0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}=\left.2z\right|_{P_0}=2z_0.$$

Уравнение касательной плоскости:

$$10x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Из условия параллельности касательной плоскости и данной плоскости, следует, что

$$\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}}{10}=\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{P_0}}{2}=\frac{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{P_0}}{1},$$

или

$$\frac{10x_0}{10}=\frac{2y_0}{2}=\frac{2z_0}{1},$$

т. е. $x_0=y_0=2z_0$.

Учитывая, что уравнение поверхности имеет вид $5x^2+y^2+z^2-4=0,$ получим

$$5\cdot 4z_0^2+4z_0^2+z_0^2-4=0,$$

$$25z_0^2=4,$$

$$z_0=\pm\frac{2}{5}.$$

$M_1\left(\frac{4}{5};\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$ и $M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)$ – две искомые точки на данной поверхности, в которых касательные плоскости параллельны данной плоскости.

§10. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

<table>
<tr><th>Основные формулы и рисунки</th><th>Определения и замечания</th></tr>
<tr><td>

1.

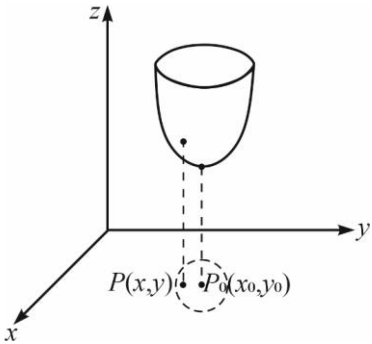


Рис. 10.1

</td><td>

Функция $z=f\left(x,y\right)$ имеет в точке $P_0\left(x_0,y_0\right)$ области D **минимум**, если существует такая окрестность точки P_0, что для всех точек $P\left(x,y\right)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f\left(P_0\right)<f\left(P\right)$ или $f\left(x_0,y_0\right)<f\left(x,y\right)$ (рис. 10.1).

</td></tr>
<tr><td>

2.

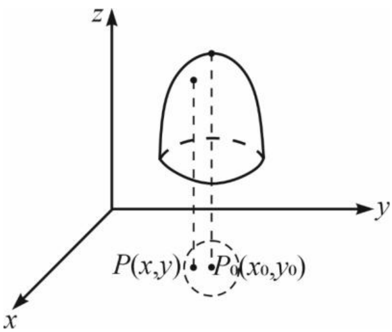


Рис. 10.2

</td><td>

Функция $z=f\left(x,y\right)$ имеет в точке $P_0\left(x_0,y_0\right)$ области D **максимум**, если существует такая окрестность точки P_0, что для всех точек $P\left(x,y\right)$ этой окрестности, отличных от P_0, выполняется неравенство $f\left(P_0\right)>f\left(P\right)$ или $f\left(x_0,y_0\right)>f\left(x,y\right)$ (рис. 10.2).

Следует запомнить:
максимум и минимум функции называются **экстремумами функции**.
Точка P_0, в которой функция имеет экстремум, называется точкой **экстремума**.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Основные формулы и рисунки</th><th>Определения и замечания</th></tr>
<tr><td>3. Если $P_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0 \qquad (10.1)$$

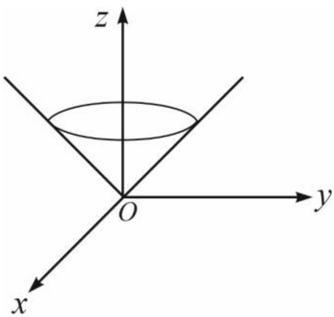


Рис. 10.3</td><td>Необходимый признак существования экстремума

Если в точке $P_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю (10.1).

Замечание 1

Функция $z = f(x, y)$ может иметь экстремум также в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует.

Тот факт, что в точке экстремума непрерывной функции одна из частных производных может не существовать, поясняет пример функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, график которой изображен на рис. 10.3.

В точке $O(0;0)$ функция имеет минимум, но в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ не существуют.</td></tr>
</table>

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Следует запомнить: точки, в которых частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ функции $z = f(x, y)$ обращаются в ноль или не существуют, называются **критическими точками** этой функции. **Замечание 2** Если $P_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x, y)$, то она является критической. Обратное утверждение неверно.
4. $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right\|_{P_0(x_0, y_0)} = A$ $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\|_{P_0(x_0, y_0)} = C$ (10.2) $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right\|_{P_0(x_0, y_0)} = B$ $\Delta = AC - B^2$ (10.3)	**Достаточное условие существования экстремума функции** $z = f(x, y)$ Пусть в некоторой области функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно и точка $P_0(x_0, y_0)$ из этой области – критическая. Введем обозначения (10.2) и (10.3).

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
	Тогда:
$\Delta > 0,\ A < 0$ (10.4)	функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ – экстремум, а именно – максимум;
$\Delta > 0,\ A > 0$ (10.5)	функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $P_0(x_0, y_0)$ – экстремум, а именно – минимум;
$\Delta < 0$ (10.6)	экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$ – отсутствует;
$\Delta = 0$ (10.7)	требуются дополнительные исследования.

Задачи

Задача 1

Исследовать на экстремум функцию $z = (x+2)^2 + 3(y-1)^2 + 1$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x+2),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6(y-1).$$

Определим критические точки – условие (10.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2(x+2)=0 \\ 6(y-1)=0. \end{cases}$$

Получим одну критическую точку $P_0(-2;1)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0.$$

Учитывая условия (10.2), имеем

$A=2,\ C=6,\ B=0.$

Тогда $\Delta = AC-B^2=12$.

Так как $\Delta>0,\ A>0$, то $P_0(-2;1)$ – точка минимума.

$$z_{\min}=f(P_0)=f(-2;1)=(-2+2)^2+3(1-1)^2+1=1.$$

Задача 2

Исследовать на экстремум функцию $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2-y^2+10x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy+2y.$$

Для определения критических точек составим систему:

$$\begin{cases} 6x^2-y^2+10x=0 \\ -2xy+2y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2-y^2+10x=0 \\ y(1-x)=0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем четыре критических точки:

$$P_1(0;0),\ P_2\left(-\frac{5}{3};0\right),\ P_3(1;4),\ P_4(1;-4).$$

Найдем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x+10,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x+2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2y.$$

Составим условие (10.3) для каждой критической точки.

Для точки $P_1(0;0)$:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_1}=10,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_1}=2,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_1}=0;$$

$\Delta=20,\ A>0$.

Следовательно, $P_1(0;0)$ – точка минимума.

$z_{\min}=z(P_1)=0$.

Для точки $P_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_2}=-10,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_2}=\frac{16}{3},\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_2}=0;$$

$\Delta=-\frac{160}{3}<0$.

В точке $P_2\left(-\frac{5}{3};0\right)$ экстремума нет.

Для точки $P_3(1;4)$:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_3}=22,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_3}=0,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_3}=-8;$$

$\Delta=-64<0$.

В точке $P_3(1;4)$ экстремума нет.

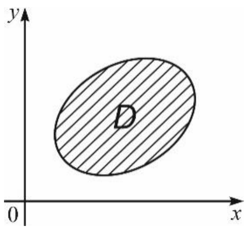
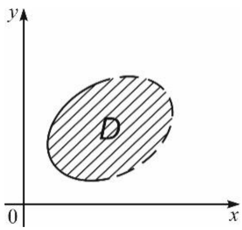
Для точки $P_4(1;-4)$:

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{P_4}=22,\ C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{P_4}=0,\ B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{P_4}=8;$$

$\Delta=-64<0$.

В точке $P_4(1;-4)$ экстремума нет.

§11. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.  Рис. 11.1  Рис. 11.2	Область D – ограниченная замкнутая (рис. 11.1). Область D – ограниченная незамкнутая (рис. 11.2).
2.	**Следует запомнить:** если функция $z = f\left(x, y\right)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D и дифференцируема внутри этой области, то она имеет в этой области наименьшее и наибольшее значения, которые достигаются либо внутри области, либо на ее границе.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
$z_{\text{наиб}} = M$ (11.1) $z_{\text{наим}} = m$ (11.2)	наибольшее значение функции наименьшее значение функции **Замечание** Если функция $z = f\left(x, y\right)$ не является непрерывной или область незамкнута, то функция может не иметь ни наибольшего ни наименьшего значения.
	Правило для нахождения $z_{\text{наиб}}$ и $z_{\text{наим}}$ непрерывной функции $z = f\left(x, y\right)$ в ограниченной замкнутой области *D*. 1. Выполнить чертеж области. 2. Найти критические точки, лежащие внутри области *D*, и вычислить значения функций в этих точках. Исследовать эти точки на экстремум не требуется. 3. Исследовать поведение функции на границе области *D*. На границе области исследование сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной. 4. Вычислить значения функции в вершинах области *D*. 5. Из всех полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Задачи

Задача 1

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 5x^2 + y^2 - 4xy - 3x$ в области $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

Решение

1. Выполним чертеж области

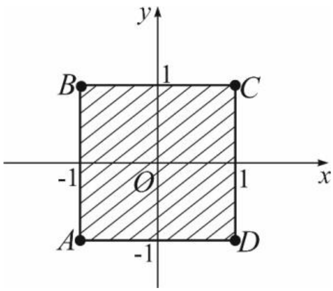


Рис. 11.3

2. Находим первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x - 4y - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 4x.$$

Решая систему, найдем критические точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} 10x - 4y - 3 = 0 \\ 2y - 4x = 0. \end{cases}$

Получим одну критическую точку $M_0\left(\dfrac{3}{2}; 3\right)$, которая области *ABCD*, не принадлежит.

3. Исследуем поведение функции на границах области.

Граница *AB*: $x = -1$, причем $-1 \le y \le 1$.

Тогда

$z = 5 + y^2 + 4y + 3$

или

$z = y^2 + 4y + 8$ (функция одной переменной).

Найдем $z' = 2y + 4$.

Критические точки: $z' = 0$.

Получим $y = -2 \notin [-1;1]$.

Граница *BC*: $y = 1$, причем $-1 \le x \le 1$.

Тогда $z = 5x^2 + 1 - 4x - 3x$ или

$z = 5x^2 - 7x + 1$.

Критические точки: $z' = 0$.

$10x - 7 = 0$, $x = \dfrac{7}{10} \in [-1;1]$.

Вычислим значение функции при $x = \dfrac{7}{10}$.

$$z = 5\left(\frac{7}{10}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{10}\right) + 1 = -1,45.$$

Граница *CD*: $x = 1$, причем $-1 \le y \le 1$.

Тогда $z = 5 + y^2 - 4y - 3$ или

$z = y^2 - 4y + 2$.

Критические точки: $z' = 0$.

$2y - 4 = 0, \ y = 2 \notin [-1;1]$.

Граница *AD*: $y = -1$, причем $-1 \le x \le 1$.

Тогда $z = 5x^2 + 1 + 4x - 3x$ или

$z = 5x^2 + x + 1$.

Критические точки: $z' = 0$.

$10x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{10} \in [-1;1]$.

Вычислим значение функции при $x = -\dfrac{1}{10}$.

$$z=5\left(-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{10}+1=0,95.$$

4. Вычислим значения функции в вершинах области:

$z(A)=z(-1;-1)=5$;

$z(B)=z(-1;1)=13$;

$z(C)=z(1;1)=-1$;

$z(D)=z(1;-1)=7$.

Сравнивая все вычисленные значения функции, заключаем:

$z_{\text{наиб}}=13$, достигается в точке $B(-1;1)$;

$z_{\text{наим}}=-1,45$, достигается на границе *BC* в точке $\left(\frac{7}{10};1\right)$.

Задача 2

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x-y-5xy$ в области, ограниченной линиями: $x=0$, $y=0$, $y-x=1$.

Решение

1. Выполним чертеж области

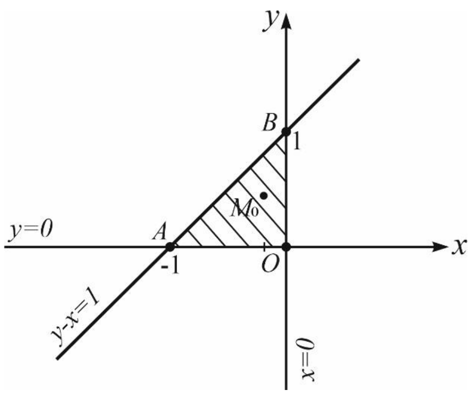


Рис. 11.4

2. Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 5y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1 - 5x$.

Решая систему, найдем критические точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} 2 - 5y = 0 \\ -1 - 5x = 0. \end{cases}$

Получим одну критическую точку $M_0\left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$, которая принадлежит построенной области.

Вычислим значение функции в этой точке.

$$z(M_0) = 2\left(-\frac{1}{5}\right) - \frac{2}{5} - 5\left(-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = -0,4.$$

3. Исследуем поведение функции на границах области.

Граница *AO*: $y = 0$, причем $-1 \le x \le 0$.

Тогда $z = 2x$.

Найдем $z' = 2$.

Критических точек нет, так как $z' \ne 0$.

Граница *OB*: $x = 0$, причем $0 \le y \le 1$.

Тогда $z = -y$.

Найдем $z' = -1$.

Критических точек нет.

Граница *AB*: $y - x = 1$.

Здесь $y = x + 1$, причем $-1 \le x \le 0$.

Тогда $z = 2x - x - 1 - 5x(x+1)$

или

$z = -5x^2 - 4x - 1$.

Найдем критические точки: $z' = 0$.

$z' = -10x - 4 = 0$

$x = -0,4 \in [-1;0]$.

Вычислим значения функции при $x = -0,4$:

$z = -5(-0,4)^2 - 4(-0,4) - 1 = -0,8 + 1,6 - 1 = -0,2$.

4. Вычислим значения функции в вершинах области:

$z(A) = z(-1;0) = -2$;

$z(B) = z(0;1) = -1$;

$z(0) = z(0;0) = 0$.

Сравнивая все вычисленные значения функции, заключаем:

$z_{\text{наиб}} = 0$, достигается в точке $O(0;0)$.

$z_{\text{наим}} = -2$, достигается в точке $A(-1;0)$.

Задача 3

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - xy - 4$ в области, ограниченной линиями: $y=0$, $y = x^2 + 5$.

Решение

1. Выполним чертеж области

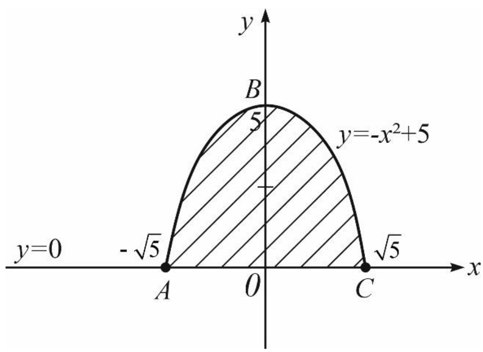


Рис. 11.5

2. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x\,.$$

Решая систему, найдем критические точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0\,. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x = 0\,. \end{cases}$

$M_0(0;0)$ – критическая точка, которая не лежит внутри построенной области.

3. Исследуем поведение функции на границах области.

Граница AC: $y=0$, причем $x \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Тогда $z = x^2 - 4$.

Найдем $z' = 2x$.

Критическая точка: $z' = 0$.

$2x = 0$, $x = 0 \in \left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$

Вычислим значение функции при $x = 0$: $z = -4$.

Граница ABC: дуга параболы $y = -x^2 + 5$, причем $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$.

Тогда $z = x^2 - x\left(-x^2 + 5\right) - 4$

или

$z = x^3 + x^2 - 5x - 4$.

Найдем $z' = 3x^2 + 2x - 5$.

Критические точки определяем из условия $z' = 0$:

$3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Следовательно,

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}\,.$$

Обе точки принадлежат промежутку $\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.

Вычислим значения функции при $x=1$ и $x=-\frac{5}{3}$.

$z(1)=1+1-5-4=-7$;

$z\left(-\frac{5}{3}\right)=\left(-\frac{5}{3}\right)^3+\left(-\frac{5}{3}\right)^2-5\left(-\frac{5}{3}\right)-4=\frac{67}{27}$.

4. Вычислим значения функции в вершинах области (в данном случае – это точки пересечения кривой с осью *OX*).

$z(A)=z\left(-\sqrt{5};0\right)=1$;

$z(C)=z\left(\sqrt{5};0\right)=1$.

Сравнивая все вычисленные значения функции, заключаем:

$z_{\text{наиб}}=\frac{67}{27}$, достигается на границе *ABC* в точке $\left(-\frac{5}{3};\frac{20}{9}\right)$.

$z_{\text{наим}}=-7$, достигается на границе *ABC* в точке $(1;4)$.

Вариант 1

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\dfrac{3\sqrt{xy}}{2x-5y}$ б) $z=\sqrt{1-\left(x^2+y\right)^2}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=e^{x-2y}$, где $x=\sin^2 t$, $y=t^3$, при $t=0$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dz}$, если $u=x\,\mathrm{ctg}\left(z^2+x\right)$, где $x=e^{\frac{1}{z}}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x\cos\left(1+y^2\right)$, где $x=u+v$, $y=u-v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $\mathrm{arctg}(x+y)=x$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $x^3+y^3+z^3-3xyz=4$, в точке $M_0(2;1;1)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\dfrac{y}{x}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2+z^2-4x+6z+8=0$ в точке $M_0\left(2;1;-1\right)$.

10. На поверхности $S\colon z=x^2+y^2$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $2x+2y-z=0$.

11. Найти градиент и производную функции $z=\ln\left(x+y\right)$ в точке $M_0\left(1;3\right)$ в направлении линии $y^2=9x$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=3x+y-xy$ в области $D\colon y=x,\ y=4,\ x=0$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = \arcsin(x - y)$, б) $z = \ln(2 - x - y) + \sqrt{x}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z = \ln(e^x + e^{-y})$, где $x = \frac{1}{t^2}$, $y = \frac{1}{t^3}$, при $t = -1$.

4. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если $y = ze^{x - z^2}$, где $z = \sqrt[3]{x}$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \cos(xy)$, где $x = u + v^2$, $y = u^2 + v$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной уравнением $\operatorname{tg} y = xy$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$, в точке $M_0(-1; 0; 1)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \ln\frac{x}{y}$ уравнению $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: z = y^2 - y - 2$ в точке $M_0\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

10. На поверхности $S: 2x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $2x - z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = 5x^2 - 3x - y - 1$ в точке $M_0(2;1)$ в направлении, идущем от точки M_0 к точке $N(5;5)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - x - 2y$ в области $D: y = x,\ y = 1,\ y = -x$.

Вариант 3

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{y^2-x^2}$ б) $z=\ln\left(1-x^2-y^2\right)+\sqrt{x-y}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\arcsin\sqrt{xy}$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=y^x$, где $x=\ln\left(t-1\right)$, $y=e^{\frac{t}{2}}$, при $t=2$.

4. Найти производную $\frac{dz}{dy}$, если $z=\ln\left(e^x+e^{-y}\right)$, где $x=\cos^2 y$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\cos y$, где $x=\frac{u}{v}$, $y=\frac{v}{u}$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $a\cos^2(x+y)=y$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $3x-2y+z=xz+5$, в точке $M_0\left(2;1;-1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\ln\left(x^2+\left(y+1\right)^2\right)$ уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2+z^2-xy+3z-7=0$ в точке $M_0\left(1;2;1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2+y^2+z^2+4x+6z-1=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $3x+y+2z=0$.

11. Найти градиент и производную функции $z=x^2+y^2$ в точке $M_0(6;-8)$ в направлении линии $y=-\frac{2}{9}x^2$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2+8y+2xy-4x$ в области $D: y=0,\ y=x+2,\ x=1,\ x=0$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(4-y^2-x^2\right)$ б) $z=\arcsin\left(x+2\right)+\sqrt{y}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\arccos\left(x-y^2\right)$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{y-2x+2}$, где $x=\sin t,\quad y=\cos t,$ при $t=\frac{\pi}{2}$.

4. Найти производную $\frac{dx}{dz}$, если $x=zy\cos\frac{z}{y}$, где $y=2^z$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\cos\left(x^2+y^2\right)$, где $x=u+v$, $y=u-v$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $e^y=x+y^2$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $e^z+x+2y+z=4$, в точке $M_0\left(1;1;0\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\ln\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2}$ уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+z^2-y-6=0$ в точке $M_0\left(1;-1;2\right)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 + 4x + z - 7 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $6x + z - 1 = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$ в точке $M_0(5;5)$ в направлении линии $y^2 = 5x$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 + y^2 - 3xy$ в области $D: y = 0,\ y = 1 - x,\ y = x + 1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{2x}-\sqrt{3y}-\sqrt{1-x-y}$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln\left(4-x^2-y^2\right)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=x^2e^{2y}$, где $x=\cos t,\ y=\sin t$, при $t=\pi$.

4. Найти производную $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^{t+1}$, где $t=\sqrt{x+2}$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=y\cos\left(x+y\right)$, где $x=-u+v$, $y=u+2v$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2+z-4=0$, в точке $M_0\left(1;1;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\frac{xy}{x+y}$ уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{y}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: z=x^2+2x+3$ в точке $M_0\left(-1;0;2\right)$.

10. На поверхности $S: 4x^2 - 25y^2 + 4z^2 + 5 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $4x - 25y + 8z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = xe^y$ в точке $M_0(1;4)$ в направлении линии $xy = 4$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в области $D: y = 0,\ y = x + 1,\ x = 3$.

Вариант 6

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$; б) $z=\sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\cos\sqrt{2x^2+y^2}$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=\ln\left(e^y+e^{-x}\right)$, где $x=\frac{1}{t^2}$, $y=t^2$, при $t=-1$.

4. Найти производную $\frac{dy}{dz}$, если $y=\left(z+2\right)^{x+1}$, где $x=e^{2z}$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\cos\frac{x}{y}$, где $x=u^2+2v$, $y=u+v^2$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $x+\sqrt{xy}+y=a$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $z^3+3xyz-3y=z$, в точке $M_0\left(1;1;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=e^{xy}$ уравнению $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2+z^2+4z-2=0$ в точке $M_0\left(2;1;-1\right)$.

10. На поверхности $S: 2x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $2x + y + z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = x^2 + y^2 + xy$ в точке $M_0(3;1)$ в направлении линии $4x - 3y - 9 = 0$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + y^2 - 6xy + 5$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ в области $D: y = 0,\ y = 1 - x,\ x = 0$.

Вариант 7

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = \arccos(x+y)$; б) $z = \dfrac{2}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \arcsin(2x^3 y)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, при $t = 1$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dx}$, если $u = (2x)^{\sqrt{z-1}}$, где $z = \ln x$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = e^{\frac{y}{2x}}$, где $x = u + 2v$, $y = 2u - v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4 - 5x^2 + 15y^2 - 100 = 0$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1{,}5$, в точке $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sin^2(x - ay)$ уравнению $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y + 14 = 0$ в точке $M_0(1; 2; 3)$.

10. На поверхности $S: 2x^2 - y^2 - z = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $4x - z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = ye^x$ в точке $M_0(2;2)$ в направлении линии $xy = 4$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в области $D: y = 0, y = 6, x = 0, x = 1$.

Вариант 8

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin(x-y)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\ln\left(3x^2y-y^2\right)$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=e^{y-x^2}$, где $x=\sin 2t$, $y=\operatorname{ctg} t$, при $t=\frac{\pi}{2}$.

4. Найти производную $\frac{dz}{dy}$, если $z=y^2e^{3x-1}$, где $x=\sin^2 y$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2e^{\frac{y}{2}}$, где $x=\sqrt{u}+v,\ \ y=\sqrt{u}-v.$

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=a$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $e^{z-1}+z=\cos x\cos y+2$, в точке $M_0\left(0;\frac{\pi}{2};1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=y\sqrt{\frac{y}{x}}$ уравнению $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: 4x^2 - 9z^2 = 36$ в точке $M_0(-3;0;0)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 - 4z^2 = 4$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $x - y + 2z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = x^3 - 2x^2 y + xy^2 + 1$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении, идущем от точки M_0 к точке $N(4;6)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x + 6y - xy - x^2 - y^2$ в области $D: y = 0,\ y = 1,\ x = 0,\ y = x - 1$.

Вариант 9

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(x^2+y^2-2x\right)$; б) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=ye^{-\left(x^3+y^3\right)}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=x^2e^{-y}$, где $x=\cos 2t$, $y=\sin 2t$, при $t=\dfrac{\pi}{2}$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dy}$, если $u=y\ln\left(y+z\right)$, где $z=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^y+y^x$, где $x=3u+3v$, $y=u-v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $y=\cos(x+y)$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2-6x=0$, в точке $M_0\left(1;2;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2-z^2+2yz+y-4=0$ в точке $M_0\left(1;1;1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2-2x+y^2-z+1=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $4x-z=0$.

11. Найти градиент и производную функции $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M_0(1;1)$ в направлении линии $x^2+y^2=2$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в области $D: x+y=3$, $y=0$, $x=0$.

Вариант 10

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{2x^2-y^2}$; б) $z=\arcsin\left(3-x^2-y^2\right)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z=\ln\left(e^{-x}+e^{2y}\right)$, где $x=\frac{6}{t^2}$, $y=\frac{3}{t}$, при $t=-1$.

4. Найти производную $\frac{dt}{dy}$, если $t=x^2e^{x+y^2}$, где $x=\ln y$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\frac{x}{y}e^y$, где $x=u-2v$, $y=u+2v$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $(x+y)^3=27(x-y)$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $xy=z^2-1$, в точке $M_0\left(0;1;-1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=e^{-\cos\left(x+\alpha y\right)}$ уравнению $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности $S: x^2+y^2-z^2-2xy+2x=z$ в точке $M_0\left(1;1;1\right)$.

10. На поверхности $S: 3x^2 - 11y^2 + 3z^2 - 13 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $6x - 11y + 6z = 0$.

11. Найти градиент и производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(6;8)$ в направлении линии $x^2 + y^2 = 100$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 5x^2 - 2xy + y^2 + 4x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 10$ в области $D: y = x^2 - 4, y = 0$.

Вариант 11

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(y^2-x^2-2y\right)$;   б) $z=\dfrac{\sqrt{y-2x^2}}{y}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\operatorname{tg}\left(x^3y^4\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=e^{y-2x-1}$, где $x=\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$, $y=-\sin 2t$, при $t=\dfrac{\pi}{2}$.

4. Найти производную $\dfrac{dx}{dy}$, если $x=\cos\left(\dfrac{z}{y^2}\right)$, где $z=e^{\sqrt{y}}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\sin\left(3x+2y\right)$, где $x=2u^2+v$, $y=u+2v^2$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $\sqrt{x^2+y^2}=a\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=2$, в точке $M_0\left(1;1;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u=e^{xy}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy\cdot e^{xy}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: 3x^2 + y^2 = 9$ в точке $M_0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\sqrt{2}; 1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 + 2z^2 - 10 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = 4t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в направлении линии $x^2 + y^2 = 2x$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy - 2x - y$ в области D: $y = x - 3$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 4$.

Вариант 12

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(9-y^2-x^2-2x\right)$; б) $z=\arcsin\left(x-2y\right)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=2xy+\operatorname{ctg}\dfrac{x}{y^2}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$, где $x=\ln t$, $y=\dfrac{1}{t^3}$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{dz}{dy}$, если $z=\operatorname{tg}\left(t^2+y^2\right)$, где $t=\dfrac{1}{y^5}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=y^2\cdot 2^x$, где $x=u^2+3v$, $y=3u+v^2$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $x^4+y^4=x^2y^2$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2+2xz=5,$ в точке $M_0\left(0;2;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: z=y^2-x^2+2xy-3y$ в точке $M_0\left(1;-1;1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 - 4z^2 - 1 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -4t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ в точке $M_0(1;-1)$ в направлении линии $y = -x$ в сторону возрастания аргумента *x*.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2y^2 + 2y\sqrt{x} + 4y + x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 0,5x^2 - xy$ в области $D: y = 8,\ y = 2x^2$.

Вариант 13

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{3-x^2-y^2-4y}$; б) $z=\ln\left(4+4x-y^2\right)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=2-\ln\left(\sqrt{x}y^2\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\arccos\left(\dfrac{2x}{y}\right)$, где $x=e^t$, $y=t^2+4$, при $t=0$.

4. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$, если $y=x^3\cdot 2^{x+z}$, $z=\sin x$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\left(x+y^2\right)2^x$, где $x=u+4v$, $y=4u+v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^2+y^2-2\operatorname{arcctg}\dfrac{y}{x}=C$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $x\cos y+y\cos z+z\cos x=\dfrac{\pi}{2}$, в точке $M_0\left(0;\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2 - y^2 = 16$ в точке $M_0(5;3;-1)$.

10. На поверхности $S: z = 2x^2 + y^2 - 2y$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = 4t, \\ y = -6t, \\ z = -t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $M_0(3;3)$ в направлении линии $xy = 9$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 6x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в области $D: y = 1 - x$, $y = 0$, $y = x + 1$.

Вариант 14

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{1-x-y}$;б) $z=\arcsin(3xy)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\cos\left(x-\sqrt{xy^3}\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{1-y}$, где $x=1-2t$, $y=\operatorname{arctg}t$, при $t=0$.

4. Найти производную $\dfrac{dt}{dy}$, если $t=\sin\dfrac{y^2}{x}$, где $x=e^{3y}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2\sin(2y+1)$, где $x=\sqrt{u}v$, $y=uv$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $y^2e^x+e^y(x+1)=x^2+y^2$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $3x^2y^2+2xyz^2-2x^3z-4y^3z=-12$, в точке $M_0(2;1;2)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u=e^{kx}\sin(ay)$ уравнению $a^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+k^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S\colon x^2-2y^2+z^2-xz-4y=1$ в точке $M_0(3;1;2)$.

10. На поверхности $S\colon x^2-7y+z^2-4=0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=6t, \\ y=7t, \\ z=6t. \end{cases}$

11. С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ при переходе точки $M\left(x;y;z\right)$ через точку $M_0\left(-1;1;-1\right)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+y^3-3xy$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^2+3y^2-1$ в области $D\colon y=\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2}$, $y=0$.

Вариант 15

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\arccos(x+2y)$; б) $z=\ln\left(9+9y-x^2\right)$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\sin\sqrt[3]{xy^2-1}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{x}{y}$, где $x=e^t$, $y=2-e^{-2t}$, при $t=0$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dt}$, если $u=\arcsin\dfrac{t}{2y}$, где $y=\sqrt{t^2+1}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=y^2\ln(x+y)$, где $x=u^2v$, $y=uv^2$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $x^3\sin y+y^2\cos x-2x-3y+1=0$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $x^2-2y^2+z^2-4x+2z+2=0$, в точке $M_0(1;1;1)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$ уравнению $\dfrac{1}{6}\left(x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-x^3+y^3=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: 4y^2-z^2+3z+4xy-xz=9$ в точке $M_0(1;-2;1)$.

10. На поверхности $S: x^2 - 4y^2 + z^2 - 4 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(1;1)$ в направлении линии $y = x$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в области $D: x + y + 1 = 0$, $y = 0$, $x = -3$.

Вариант 16

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; б) $z = \sqrt{2x+y}\ln\left(y^2 - x^2\right)$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \arccos\left(3x + 2y^2\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right)$, где $x = t^2$, $y = 4 + t$, при $t = -2$.

4. Найти производную $\dfrac{dx}{dy}$, если $x = t^2 + \cos\left(yt\right)$, где $t = 2\ln y$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = y^2 3^{xy}$, где $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y\left(x\right)$, заданной уравнением $\arcsin(x+y) = x$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z\left(x, y\right)$, заданной уравнением $x + y + z + 2 = xyz$, в точке $M_0\left(2;-1;-1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = xe^{\frac{y}{x}}$ уравнению $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2$ в точке $M_0(2;1;0)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 - z - 6 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = 4t, \\ y = 2t, \\ z = -t. \end{cases}$

11. С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ при переходе точки $M(x;y;z)$ через точку $M(-1;2;-2)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ в области $D: x - y - 1 = 0$, $y = 0$, $x = 5$.

Вариант 17

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$; б) $z = \arcsin\dfrac{y}{2x}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \log_5\left(xy^2 - 1\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = \sqrt{x + y^2 + 3}$, где $x = \ln^2 t$, $y = \dfrac{1}{t^2}$, при $t = 1$.

4. Найти производную $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \sin\left(4u^2 - x^2\right)$, где $u = \left(2x - 1\right)^3$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \dfrac{xy}{x + y}$, где $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y\left(x\right)$, заданной уравнением $a\cos^2(x^2 + y) = b$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z\left(x, y\right)$, заданной уравнением $3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xz = 4$, в точке $M_0\left(-1; -1; -1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли данная функция $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$ в точке $M_0\left(1; 2; 1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -t, \\ z = -4t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = (x+1)e^{2y}$ в точке $M_0(3;-3)$, идущей от точки M_0 к точке $N(-3;1)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$ в области $D: y = 2x$, $y = 2$, $x = 0$.

Вариант 18

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $\ln\left(x^2+y^2-2x+4y\right)$; б) $z=\arccos\dfrac{x+y}{2}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2y^3}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{y}$, где $x=e^{t-1}$, $y=\dfrac{1}{t^4}$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{dt}{dz}$, если $t=\operatorname{ctg}\left(2y^2+3z^2\right)$, где $y=e^z$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\sin\left(x^2+2y\right)$, где $x=\sqrt{u}v$, $y=uv^2$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $\sqrt{x}+\sqrt{y}=e^{x-y}$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $e^z-xyz-x+1=0$, в точке $M_0(2;1;0)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$ уравнению $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14$ в точке $M_0(3;1;-4)$.

10. На поверхности $S: x^2 + y^2 = 5z$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 6t, \\ z = -5t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(-1;-2)$ в направлении линии $y = 2x^3$ в сторону убывания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = xy(6 - x - y)$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2{,}5y^2 - 2xy - 2x$ в области $D: y = 0$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 0$.

Вариант 19

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{\dfrac{x-2y}{2x-y}}$; б) $z=\ln xy+\dfrac{1}{x-2}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=x^2y+\sin\left(2xy^2\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x}}$, где $x=1-2t$, $y=1+\operatorname{arctg}t$, при $t=0$.

4. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$, если $y=\left(3t\right)^{\cos x}$, где $t=\arcsin x$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\sin^2\left(2x-y\right)$, где $x=u^2-2v$, $y=2u+v^2$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $2x\sin y+3y\cos x=0$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y-15=0$, в точке $M_0\left(1;-1;2\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=\ln\left(x^2-y^2\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0\left(1;-1;-1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2+5y^2+z^2-10=0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=t, \\ y=-5t, \\ z=2t. \end{cases}$

11. Найти направление наибольшего возрастания функции $u=x^2y^2z$ в точке $M_0(2;-1;3)$ и скорость возрастания в этом направлении.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=xy-x^2-y^2+9$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=xy-3x-2y$ в области $D: y=x+1,\ y=0, x=0,\ x=2$.

Вариант 20

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 + 4x - 5}}$; б) $z = \ln(6 - x - y) + \dfrac{x}{y}$

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \ln\left(y^3 - 2x^2 - 3\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = y^3 e^{2x}$, где $x = \sin 3t$, $y = \cos 6t$, при $t = \dfrac{\pi}{3}$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dx}$, если $u = \operatorname{tg}^2(x + y)$, где $y = 2^{x^2}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z = x^y + y^x$, где $x = u^2 v$, $y = \dfrac{u}{v}$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной уравнением $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $x^3 - 3y^2 + z^2 - 2xy + 6x - 2y - 8z + 4 = 0$, в точке $M_0(1; -1; 2)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \sin\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right)$ уравнению $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 = 0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2 - y^2 - z^2 + xy - 4x - 9 = 0$ в точке $M_0\left(-2;1;0\right)$.

10. На поверхности $S: x^2 - y^2 + z^2 = 33$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -2t, \\ z = 5t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z = x^3 + y^3 + 9$ в точке $M_0\left(1;2\right)$ в направлении линии $y^2 = 4x$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в области $D: y = 4x^2 - 4,\ y = 0$.

Вариант 21

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(3x^2-y\right)$; б) $z=\sqrt{\dfrac{xy}{x+y}}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\operatorname{arcctg}\left(2x-y^3\right)$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\sqrt[3]{x^2+y+3}$, где $x=\sqrt{t+3}$, $y=e^{t-1}$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{dx}{dy}$, если $x=\arccos\left(2t^2+ty\right)$, где $t=e^{4y}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=2^{\frac{x}{y}}$, где $x=3u+v^2$, $y=u^2+3v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $y=x+\operatorname{arctg} y$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $5x^2+4y^2-2z^2=3y-z+15$, в точке $M_0\left(1;2;0\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11$ в точке $M_0\left(1;4;-1\right)$.

10. На поверхности $S: x^2+y^2-4x-2z+4=0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=5t, \\ y=-t, \\ z=-t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z=\sqrt{2x^2-y^2}$ в точке $M_0(-2;2)$ в направлении линии $y=-x$ в сторону возрастания аргумента x.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=x^3+8y^3+6xy+1$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=y(4-x-y)$ в области $D: y=6-x,\ y=0, x=0$.

Вариант 22

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{4-y^2}$; б) $z=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=x^2y\sin x-3y^2$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{2y}$,

где $x=\dfrac{1}{t^3}$, $y=\sqrt[3]{t+7}$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{dz}{du}$, если $z=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{y^2}{u}\right)$, где $y=\ln u$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\sin^2(x-2y)$, где $x=\dfrac{u}{2}-v$, $y=u+\dfrac{v}{2}$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y(x)$, заданной уравнением $\sqrt{x^2+y^2}=ae^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z(x,y)$, заданной уравнением $x^2+y^2+z^2+2xy-4x-yz-3y-z=0$, в точке $M_0(1;-1;1)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\dfrac{x+y}{x-y}$ уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{2\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 .$$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8$ в точке $M_0(0;2;0)$.

10. На поверхности $S: 2x^2-y+2z^2=0$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=2t, \\ y=-t, \\ z=8t. \end{cases}$

11. По какому направлению должна двигаться точка $M(x;y;z)$ при переходе через точку $M_0(-1;1;-1)$, чтобы функция $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

12. Исследовать на экстремум функцию $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^3-y^3-3xy$ в области $D: y=-1, x=2, y=2, x=0$.

Вариант 23

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z = y - \sqrt{x^2 + y^2 - x}$; б) $z = \arcsin\frac{x}{y^2} + \arcsin(1-y)$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = \operatorname{ctg} 2^{\sqrt{xy}}$.

3. Вычислить значение производной $\frac{dz}{dt}$, если $z = \frac{3x}{y^2} - \frac{2y^2}{x}$, где $x = \sin 2t$, $y = \operatorname{tg} t$, при $t = \frac{\pi}{4}$.

4. Найти производную $\frac{dt}{dx}$, если $t = \ln\frac{x-y}{1+xy}$, где $y = \sqrt{x}$.

5. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = \cos\frac{x}{y}$, где $x = u^2 + v^2$, $y = u - v$.

6. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ функции $y = y(x)$, заданной уравнением $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$.

7. Вычислить значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = z(x, y)$, заданной уравнением $x^2 z - 3xy + 4z^2 + 4yz = 0$ в точке $M_0(0;1;-1)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = x\ln\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ уравнению $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0$ в точке $M_0(-1;-1;1)$.

10. На поверхности $S: x^2+y^2+2z^2=10$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x=-t, \\ y=t, \\ z=4t. \end{cases}$

11. Найти градиент и производную функции $z=x^3+y^3$ в точке $M_0(1;2)$ в направлении линии $x^2+y^2=5$ в сторону убывания аргумента *x*.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=4(x-y)-x^2-y^2$ в области $D: x+2y=4,\ x-2y=4,\ x=0$.

Вариант 24

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\ln\left(25-x^2-y^2+4y-2x\right)$; б) $z=\sqrt{x-2y}+\dfrac{1}{x+y-1}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2+4}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\dfrac{4}{\sqrt{x+y+3}}$, где $x=\ln t$, $y=t^2$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{dy}{dt}$, если $y=\dfrac{e^z}{t^2+z^2}$, где $z=\dfrac{1}{t}$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=x^2e^{x+y}$, где $x=uv$, $y=u+v$.

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}$.

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $\sqrt{x^2+y^2}+z^2-3z=3$ в точке $M_0\left(4;3;1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\operatorname{arctg}\left(2x-y\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: x^2+y^2-3z^2+xy+2z=0$ в точке $M_0\left(1;0;1\right)$.

10. На поверхности $S: y^2-4y+z^2+x^2=8$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$.

11. Найти градиент и производную функции $z=\sqrt{2y^2-x^2}$ в точке $M_0(2;-2)$ в направлении идущем от точки M_0 к точке $N(-3;1)$.

12. Исследовать на экстремум функцию $z=15xy-x^3-y^3$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2-y^2+2xy-4x$ в области $D: x-y+1=0,\ y=0,\ x=3.$

Вариант 25

1. Найти и изобразить на чертеже область определения функций

а) $z=\sqrt{25-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{y^2-16}}$; б) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

2. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z=\sqrt{e^{x^2y^3}}$.

3. Вычислить значение производной $\dfrac{dz}{dt}$, если $z=\operatorname{arcctg}\left(x+2y\right)$, где $x=e^{3(t-1)}$, $y=\ln t$, при $t=1$.

4. Найти производную $\dfrac{du}{dy}$, если $u=z^2e^{\frac{y}{z}}$, где $z=\left(2y+1\right)^2$.

5. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, если $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, где $x=u-v,\ \ y=uv.$

6. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=y\left(x\right)$, заданной уравнением $x^3+y^3-3axy=0.$

7. Вычислить значения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=z\left(x,y\right)$, заданной уравнением $e^{2x-1}+2y^2-3z=6yz+12$ в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2};\ 1;\ -1\right)$.

8. Проверить, удовлетворяет ли функция $z=\ln\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)$ уравнению $\dfrac{\partial^2 x}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x^2}=0.$

9. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ в точке $M_0(1; -1;\ 1)$.

10. На поверхности $S: z = x^2 + y^2 - y - 2$ найти точки, в которых касательная плоскость перпендикулярна прямой
$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0, \\ 2x + 5y + 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

11. По какому направлению должна двигаться точка $M(x; y; z)$ при переходе через точку $M_0(1; 1; 1)$, чтобы функция $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ убывала с наибольшей скоростью.

12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 8(x - y)$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y$ в области $D: x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ y = 2.$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. – М.: Альянс, 2021. – Т. 1. – 416 с.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 ч. – 7-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2019. – Ч. 1. – 646 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: АСТ, 2016. – 815 с.

Учебное издание

Смышляева Татьяна Владимировна,
Лойко Наталья Александровна,
Плехова Эльвира Валентиновна,
Савочкина Анна Александровна

МАТЕМАТИКА

Функции нескольких переменных

Учебно-методическое пособие

Редактор и корректор *Е.В. Копытина*

Подписано в печать 01.04.2022. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 6,56. Тираж 33 экз. Заказ № 51/2022

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.