Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»

**Т.В. Смышляева, А.А. Савочкина,
Н.А. Лойко, Э.В. Плехова**

МАТЕМАТИКА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия*

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета
2024

УДК 51(075.8)
М34

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *Е.Л. Кротова*
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет);
кандидат физико-математических наук, доцент *Ю.Н. Еленский*
(Пермский государственный национальный
исследовательский университет)

М34 **Математика**. Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб.-метод. пособие / Т.В. Смышляева [и др.] ; ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2024. – 215 с.

ISBN 978-5-398-03178-2

Приведены основные формулы и определения из раздела «Математика. Интегральное исчисление функции одной переменной» курса высшей математики. Содержание пособия охватывает программу соответствующей части дисциплины «Математика» действующих образовательных стандартов для большинства специальностей технических вузов. Приведены примеры решения задач. Материал изложен в доступной для самостоятельного изучения студентами форме.

Предназначено для студентов, лиц, занимающихся самообразованием по курсу высшей математики, и преподавателей, а также будет полезно для преподавателей математики среднеспециальных учебных заведений машиностроительного, электротехнического и экономического профилей.

УДК 51(075.8)

ISBN 978-5-398-03178-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математического анализа во втузе нередко вызывает определенные трудности у студентов по ряду причин (недостаточный уровень подготовки в школе, нехватка времени на изучение теоретического материала по современным стандартам и т.д.). Успешность изучения всего курса в значительной мере определяется навыками, приобретенными по части «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Предлагаемое пособие по интегральному исчислению функции одной переменной включает в себя следующие разделы: понятие первообразной и неопределенного интеграла, основные свойства неопределенного интеграла, основные методы интегрирования, интегрирование рациональных дробей, интегрирование дифференциальных биномов, понятие и свойства определенного интеграла, вычисление определенного интеграла и др.

Цель этого пособия – помочь студенту 1-го курса в подготовке к практическим занятиям, контрольным работам, тестированию, выполнению расчетно-графических работ, зачетам и экзаменам.

Для максимальной доступности материала содержание пособия разделено на главы и параграфы. Каждый параграф состоит из двух частей: в одной указаны основные формулы и рисунки, в другой – даются определения и замечания к ним. Такое построение пособия, как показывает практика, дает студенту широкие возможности для успешной самостоятельной работы.

При написании пособия использовано методическое обобщение многолетнего опыта работы авторов на электротехническом факультете и факультете прикладной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета. По характеру компоновки материала и стилю изложения данное пособие является продолжением пособия «Математика: введение в анализ, дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Издание предназначено для студентов 1-го курса высших технических учебных заведений. Помимо студентов книга может быть полезна для преподавателей математики среднеспециальных учебных заведений машиностроительного, электротехнического и экономического профилей.

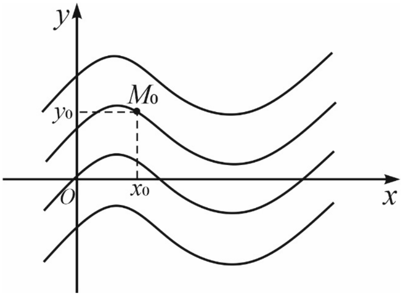
ГЛАВА I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Одной из основных задач дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала данной функции.

Одной из основных задач интегрального исчисления является обратная задача – отыскание функции по ее производной или заданному дифференциалу.

§1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. Обозначение первообразной: $F(x)$ (1.1.1)	**Замечание** Термин «первообразная функция» принадлежит Лагранжу и был введен и на рубеже XVIII и XIX веков.
2. $F'(x)=f(x)$ (1.1.2)	Функция $F(x)$ называется **первообразной** от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, если во всех точках этого промежутка выполняется равенство (1.1.2).
3. $F(x)+C$ (1.1.3)	**Следует запомнить:** любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым C (1.1.3).
4. $\int f(x)dx=F(x)+C$ (1.1.4)	Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то выражение $F(x)+C$ называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$.
5. Обозначение неопределенного интеграла: $\int f(x)dx$ (1.1.5)	$f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования, $\int$ – знак интеграла.

6.	**Следует запомнить:** операция нахождения неопределенного интеграла, т.е. нахождения первообразной для функции $f(x)$, называется **интегрированием** функции $f(x)$.
7.  Рис. 1.1.1	График первообразной функции $f(x)$, называется **интегральной кривой** функции $y = f(x)$. **Следует запомнить:** неопределённый интеграл геометрически представляется семейством всех интегральных кривых, полученных из одной интегральной кривой путем «параллельного» сдвига вдоль оси OY (рис. 1.1.1). **Замечание** Для того чтобы из данного семейства кривых выделить одну определенную кривую, нужно задать начальное условие $y(x_0) = y_0$ (рис. 1.1.1).
8.	**Следует запомнить:** если функция $f(x)$ **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, то для этой функции **существует** неопределенный интеграл. **Замечание** При помощи дифференцирования по данной функции находят ее производную, а при помощи интегрирования по данной производной находят первообразную функции. Правильность интегрирования всегда можно проверить дифференцированием результата.

Задачи

Задача 1

Проверить, что данные интегралы найдены верно:

а) $\int\left(3x^2-\frac{7}{x^3}+4\sqrt[3]{x}-5\right)dx=x^3+\frac{7}{2x^2}+3\sqrt[3]{x^4}-5x+C$;

б) $\int\frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}+C$;

в) $\int\frac{dx}{5x^2-25}=\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C$.

Решение

Учитывая замечание пункта 8 и формулу (1.1.2), имеем:

а) $\left(x^3+\frac{7}{2x^2}+3\sqrt[3]{x^4}-5x+C\right)'=3x^2+\frac{7}{2}\left(-2x^{-3}\right)+3\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-5=$

$=3x^2-\frac{7}{x^3}+4\sqrt[3]{x}-5.$

б) $\left(\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8-x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}$.

в) $\int\left(\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C\right)'=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\ln\left|x-\sqrt{5}\right|-\ln\left|x+\sqrt{5}\right|\right)'=$

$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{5}}-\frac{1}{x+\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\frac{x+\sqrt{5}-x+\sqrt{5}}{x^2-5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{10\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\left(x^2-5\right)}=$

$=\frac{1}{5\left(x^2-5\right)}=\frac{1}{5x^2-25}.$

Задача 2

На рис. 1.1.2 представлено семейство первообразных $F(x) = x^2 + C$ (при $C = 0; 2; -1; -4$) для функции $f(x) = 2x$, которое и является неопределенным интегралом от заданной функции $y' = f(x)$:

$y = \int 2xdx = x^2 + C$.

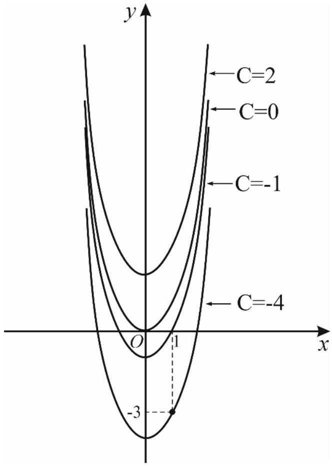


Рис. 1.1.2

Из интегральных кривых, представленных на рис. 1.1.2, выделить ту, которая проходит через точку $(1;-3)$.

Решение

Если необходимо из интегральных кривых, представленных на рис. 1.1.2, выделить ту, которая проходит через точку $(1;-3)$, то, подставив значения $x_0 = 1$, $y_0 = -3$ в выражение $y = x^2 + C$, находим $C = -4$.

Тогда искомая интегральная кривая имеет вид:

$$y = x^2 - 4.$$

§2. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
Свойства неопределенного интеграла, вытекающие из его определения	
1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ (1.2.1)	Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$ (1.2.2)	Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$ (1.2.3)	Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная.
Простейшие правила интегрирования	
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$ (1.2.4)	Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.
5. $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx =$ $= \int f(x)dx + \int g(x)dx$ (1.2.5)	Неопределенный интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов этих функций. **Замечание** Равенство (1.2.5) справедливо для любого конечного числа функций.
Таблица основных интегралов	
6. $\int dx = x + C$ (1.2.6)	
7. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (1.2.7)	$(n \neq -1)$
8. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$ (1.2.8)	
9. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (1.2.9)	$a > 0, a \neq 1$

10. $\int e^x dx = e^x + C$ (1.2.10)	
11. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ (1.2.11)	
12. $\int \cos x dx = \sin x + C$ (1.2.12)	
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (1.2.13)	
14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ (1.2.14)	
15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\left\|\cos x\right\| + C$ (1.2.15)	
16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\left\|\sin x\right\| + C$ (1.2.16)	
17. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\| + C$ (1.2.17)	
18. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$ (1.2.18)	
19. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C \end{cases}$ (1.2.19)	$a \neq 0$
20. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$ (1.2.20)	
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}$ (1.2.21)	$a > 0$
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$ (1.2.22)	

23. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C \quad (1.2.23)$	$a \neq 0$
24. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C \quad (1.2.24)$	$a \neq 0$
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} =$ $= \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C \quad (1.2.25)$	$a \neq 0$
26.	**Замечание** Для проверки таблицы достаточно установить, что производная правой части равенства тождественна с подынтегральной функцией левой части.

Операция интегрирования значительно сложнее операции дифференцирования. Дифференцирование элементарных функций производится по раз и навсегда установленным правилам и формулам; интегрирование же требует творческого подхода к каждой функции. Нужен большой навык, чтобы быстро и уверенно производить преобразования подынтегрального выражения для приведения интеграла к табличному.

Основные методы интегрирования

§3. Метод непосредственного интегрирования

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.	**Следует запомнить:** с помощью метода непосредственного интегрирования удается данный интеграл привести к одному или нескольким табличным интегралам. Для этого на практике рекомендуется: а) использовать простейшие правила интегрирования (§2, формулы (1.2.4) и (1.2.5)); б) непосредственно использовать таблицу основных интегралов (§2 формулы (1.2.6)–(1.1.25)); в) выполнять тождественные преобразования подынтегральных функций.

Задачи

Задача 1

Найти интегралы:

а) $\int\left(4x^3-\frac{5}{3x^2}+2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt{x}}-1\right)dx$;

б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{9x}}$;

в) $\int\frac{dx}{\sqrt{6-x^2}}$;

г) $\int\frac{dx}{3+x^2}$;

д) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

е) $\int\frac{dx}{9-x^2}$;

ж) $\int \frac{dx}{x^2-8}$.

Решение

а) $\int\left(4x^3-\frac{5}{3x^2}+2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt{x}}-1\right)dx=$(тождественно преобразуем подынтегральную функцию) $=\int\left(4x^3-\frac{5x^{-2}}{3}+2x^{\frac{1}{3}}-7x^{-\frac{1}{2}}-1\right)dx=$ (применяем свойства (4) и (5) (§2)) $=4\int x^3dx-\frac{5}{3}\int x^{-2}dx+2\int x^{\frac{1}{3}}dx-7\int x^{-\frac{1}{2}}-\int dx=$ (к первым четырем интегралам применяем формулу (1.2.7), а к последнему интегралу – формулу (1.2.6))$=x^4+\frac{5}{3x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}-14\sqrt{x}-x+C$;

б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{9x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{9}}\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\frac{1}{\sqrt[4]{9}}\int x^{-\frac{1}{4}}dx=\frac{1}{\sqrt[4]{9}}\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{3\sqrt[4]{9}}\cdot\sqrt[4]{x^3}+C$;

в) по формуле (1.2.21) получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{6-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}+C;$$

г) по формуле (1.2.19) получаем:

$$\int\frac{dx}{3+x^2}=\int\frac{dx}{\left(\sqrt{3}\right)^3+x^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C;$$

д) по формуле (1.2.25) получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C;$$

е) по формуле (1.2.24) получаем:

$$\int\frac{dx}{9-x^2}=\int\frac{dx}{3^2-x^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|+C;$$

ж) по формуле (1.2.23) получаем:

$$\int\frac{dx}{x^2-8}=\int\frac{dx}{x^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-2\sqrt{2}}{x+2\sqrt{2}}\right|+C.$$

Задача 2

Найти интегралы:

а) $\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} - 5}{x} dx$;

б) $\int \left(3 + \sqrt[3]{x}\right)^3 dx$;

в) $\int \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) dx$;

г) $\int 3^x \cdot 4^x \, dx$;

д) $\int \frac{\sqrt{3 + x^2} - \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{9 - x^4}} dx$;

е) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$.

Решение

а) Выполняя почленное деление числителя на знаменатель и учитывая, что $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, получаем:

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x^2} - 5}{x} dx = \int \frac{3\sqrt{x}}{x} dx - 4\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} dx - \int \frac{5}{x} dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}} dx - 4\int x^{-\frac{1}{3}} dx - \int \frac{5}{x} dx =$$

(применяем формулы 1.2.7 и 1.2.8) $= \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{4x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - 5\ln|x| + C =$

$= 6\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x^2} - 5\ln|x| + C$;

б) для решения данной задачи используем формулу $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$$\int \left(3 + \sqrt[3]{x}\right)^3 dx = \int \left(27 + 27x^{\frac{1}{3}} + 9x^{\frac{2}{3}} + x\right) dx = 27x + \frac{81}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{27}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{x^2}{2} + C;$$

в) учитывая, что $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, имеем:

$$\int \left(\sqrt{x} - 2\right)\left(\sqrt{x} + 2\right) dx = \int (x - 4) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + C;$$

г) так как $a^x b^x = (ab)^x$, то

$$\int 3^x \cdot 4^x dx = \int 12^x dx = \frac{12^x}{\ln 12} + C;$$

д) знаменатель дроби представляем в виде:

$$\sqrt{9-x^4} = \sqrt{3-x^2} \cdot \sqrt{3+x^2}.$$

Выполняя почленное деление, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3-x^2} \cdot \sqrt{3+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} =$$

(применяем формулы (1.2.21) и (1.2.25)) $= \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln\left| x + \sqrt{3+x^2} \right| + C$;

е) учитывая, что $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, и выполняя почленное деление, получаем:

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C..$$

§4. Метод подведения под знак дифференциала

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $dy(x) = y'(x)dx$ (1.4.1)	Чтобы найти дифференциал какой-либо функции $y = y(x)$, надо найти производную этой функции и умножить ее на дифференциал независимой переменной.
2. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x \pm b)dx = \int f(x \pm b)d(x \pm b) =$ $= F(x \pm b) + C$ (1.4.2)	$b = \text{const}$ $d(x \pm b) = (x \pm b)' dx = dx$. **Следует запомнить:** если аргумент функции совпадает с выражением под знаком дифференциала, то интеграл (1.4.2) – табличный. $\int f(u)du = F(u) + C$.
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(ax)d(ax) =$ $= \frac{1}{a}F(ax) + C$ (1.4.3)	$a = \text{const}$ **Следует запомнить:** $d(ax) = adx$, следовательно, $dx = \frac{1}{a} \cdot d(ax)$.
4. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax \pm b)dx =$ $= \frac{1}{a}\int f(ax \pm b)d(ax \pm b) =$ $= \frac{1}{a}F(ax \pm b) + C$ (1.4.4)	**Замечание** Формула (1.4.4) получена на основании формул (1.4.2) и (1.4.3).
5. $dx^n = nx^{n-1}dx$ $d\ln x = \frac{dx}{x}$	$x > 0$

$d\log_a x = \dfrac{1}{x\ln a}dx$ $da^x = a^x \ln a dx$ $de^x = e^x dx$ $d\sin x = \cos x dx$ $d\cos x = -\sin x dx$ $d\,\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx$ (1.4.5) $d\,\mathrm{ctg}\, x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$ $d\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $d\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ $d\,\mathrm{arctg}\, x = \dfrac{1}{1+x^2}dx$ $d\,\mathrm{arcctgx} = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$	$a>0, a\neq 1, x>0$ $a>0, a\neq 1$ $-1<x<1$ $-1<x<1$ **Замечание** При использовании на практике метода подведения под знак дифференциала необходимо хорошо знать таблицу дифференциалов (производных).

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int (x+8)^5 dx$.

Решение

Учитывая, что $d(x+8) = (x+8)' dx = dx$ (на основании формулы (1.4.2)), и принимая во внимание формулу (1.2.7), получаем: $\int (x+8)^5 dx = \int (x+8)^5 d(x+8) = \dfrac{(x+8)^6}{6} + C$.

Задача 2

Найти интеграл $\int \cos 4x dx$.

Решение

Учитывая, что $d\left(4x\right) = 4dx$,

$dx = \frac{1}{4} d\left(4x\right)$ и, на основании формул (1.4.3) и (1.2.12) получаем:

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos 4x d\left(4x\right) = \frac{1}{4} \sin\left(4x\right) + C.$$

Задача 3

Найти интеграл $\int \frac{dx}{3-2x}$.

Решение

Учитывая, что $d\left(3-2x\right) = \left(3-2x\right)' dx = -2dx$, то

$dx = -\frac{1}{2} d\left(3-2x\right)$.

Тогда $\int \frac{dx}{3-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d\left(3-2x\right)}{3-2x} = -\frac{1}{2} \ln\left|3-2x\right| + C$.

Задача 4

Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^2+5}$.

Решение

Учитывая, что $dx^2 = 2xdx$, получаем:

$xdx = \frac{dx^2}{2}$.

Другими словами, x вносим под знак дифференциала:

$\int \frac{xdx}{x^2+5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+5}$ (применяем формулы (1.4.2) и (1.2.8)) =

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+5} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2+5\right)}{x^2+5} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+5\right) + C.$$

Задача 5

Найти интеграл $\int \frac{x^3dx}{\cos^2\left(5x^4-1\right)}$.

Решение

Учитывая, что $dx^4 = 4x^3dx$, получаем:

$x^3dx = \frac{dx^4}{4}$.

Тогда

$\int \frac{x^3dx}{\cos^2\left(5x^4-1\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{\cos^2\left(5x^4-1\right)} =$ (применяем формулу (1.4.4)) $=$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\int \frac{d\left(5x^4-1\right)}{5x^4-1} = \frac{1}{20}\ln\left|5x^4-1\right| + C$.

Задача 6

Найти интеграл $\int \frac{x^2dx}{25+x^6}$.

Решение

Учитывая, что $dx^3 = 3x^2dx$, получаем:

$x^2dx = \frac{dx^3}{3}$.

Тогда:

$\int \frac{x^2dx}{25+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{25+x^6} =$(представим подынтегральную функцию в виде) $= \frac{1}{3}\int \frac{dx^3}{5^2+\left(x^3\right)^2} =$ (применяем формулу (1.2.19)) $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{5} + C =$

$= \frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{5} + C$.

Замечание

Данная задача отличается от предыдущих, так как формула (1.4.2) не применима. Выражение под знаком дифференциала – $\left(x^3\right)$, а в знаменателе – $\left(25+x^6\right)$.

Задача 7

Найти интеграл $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}}$.

Решение

Учитывая, что $d\cos x = -\sin x dx$, получаем:

$\sin x dx = -d\cos x$.

Тогда:

$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2-\cos^2 x}} = -\int \frac{d\cos x}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\cos x\right)^2}} =$ (по формуле (1.2.21)) $=$

$= -\arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + C$.

Задача 8

Найти интеграл $\int e^{\cos 3x} \cdot \sin 3x dx$.

Решение

Поскольку $d\cos 3x = \left(-\sin 3x\right) \cdot 3dx$, то

$\sin 3x dx = -\frac{1}{3} d\cos 3x$.

Тогда:

$\int e^{\cos 3x} \cdot \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\int e^{\cos 3x} d\cos 3x =$ (по формуле (1.2.10)) $=$

$= -\frac{1}{3} e^{\cos 3x} + C$.

Задача 9

Найти интеграл $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 2x^2}}{1+4x^4} dx$.

Решение

Учитывая, что $d \operatorname{arctg} 2x^2 = \frac{2 \cdot 2x}{1+4x^4} dx = \frac{4x dx}{1+4x^4}$, получаем:

$$\frac{x dx}{1+4x^4} = \frac{1}{4} d \operatorname{arctg} 2x^2 .$$

Тогда:

$$\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 2x^2}}{1+4x^4}dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{arctg}^{\frac{2}{3}}\left(2x^2\right) d\operatorname{arctg}\left(2x^2\right) = \text{(по формуле 1.2.7)} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\operatorname{arctg}^{\frac{5}{3}}\left(2x^2\right)}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{20}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^5\left(2x^2\right)} + C\,.$$

§5. Интегрирование методом замены переменной

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.	**Замечание** Метод замены переменной (метод подстановки) является одним из наиболее эффективных и распространенных методов интегрирования. Если при нахождении первообразной мы интегрируем каким-либо другим методом, то в промежуточных вычислениях нам часто приходится использовать замену переменной.
2. Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$, выполним подстановку $x = \varphi(t)$ (1.5.1)	**Замечание** Функция $x = \varphi(t)$ (1.5.1) удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(t)$ – непрерывна; 2) $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$; 3) $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi(x)$.
$dx = \varphi'(t)dt$ (1.5.2)	
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ (1.5.3)	Формула замены переменной в неопределенном интеграле.
$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C =$ $= \Phi(\psi(x)) + C$ (1.5.4)	**Следует запомнить:** после интегрирования по t необходимо вернуться к первоначальной переменной, учитывая, что обратная функция $t = \psi(x)$.

Большое значение на практике имеет выбор удачной подстановки. Однако дать одно общее правило для выбора хорошей подстановки невозможно.

Рассмотрим применение метода замены переменной на примере некоторых иррациональных или дробно-иррациональных функций.

3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx.$ (1.5.5) Подстановка $$ax+b=t^n, \quad (1.5.6)$$ $$x=\frac{t^n-b}{a}, \quad (1.5.7)$$ $$dx=\frac{n\cdot t^{n-1}}{a}dt, \quad (1.5.8)$$ $$\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx =$$ $$=\int R\left(\frac{t^n-b}{a}, t\right)\frac{n}{a}\cdot t^{n-1}dt \quad (1.5.9)$$	$a, b - \mathrm{const}$ $n=2,3,\ldots.$ **Замечание** С помощью подстановки (1.5.6) интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции.
4. $\int \sqrt[n]{e^{ax}+b}dx$ (1.5.10) Подстановка $$e^{ax}+b=t^n \quad (1.5.11)$$ $$e^{ax}=t^n-b$$ $$\ln e^{ax}=\ln\left(t^n-b\right)$$ $$ax=\ln\left(t^n-b\right)$$ $$x=\frac{1}{a}\ln\left(t^n-b\right) \quad (1.5.12)$$ $$dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{n\cdot t^{n-1}}{\left(t^n-b\right)}dt \quad (1.5.13)$$ $$\int \sqrt[n]{e^{ax}+b}dx=\int t\cdot\frac{n\cdot t^{n-1}}{a\cdot\left(t^n-b\right)}dt=$$ $$=\frac{n}{a}\int\frac{t^n}{t^n-b}dt \quad (1.5.14)$$	$a, b - \mathrm{const}$ $n=2,3,\ldots.$ **Замечание** С помощью подстановки (1.5.11) интеграл $\int \sqrt[n]{e^{ax}+b}dx$ сводится к интегралу от рациональной функции (1.5.14).
5. $\int R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}, \sqrt[l]{ax+b}, \ldots, \sqrt[p]{ax+b}\right)dx$ (1.5.15) Подстановка $$ax+b=t^n \quad (1.5.16)$$	$a, b - \mathrm{const}$ $k, l, \ldots, p$ – натуральные числа. **Следует запомнить:** n – наименьшее кратное всех показателей $k, l, \ldots, p$.

$$x = \frac{t^n - b}{a} \qquad (1.5.17)$$ $$dx = \frac{n \cdot t^{n-1}}{a} dt \qquad (1.5.18)$$ $$\int R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}, \sqrt[l]{ax+b}, \ldots, \sqrt[p]{ax+b}\right) dx =$$ $$= R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^{\frac{n}{k}}, t^{\frac{n}{l}}, \ldots, t^{\frac{n}{p}}\right) \frac{n}{a} t^{n-1} dt$$ (1.5.19)	**Замечание** С помощью подстановки (1.5.16) интеграл $\int R\left(x, \sqrt[k]{ax+b}, \sqrt[l]{ax+b}, \ldots, \sqrt[p]{ax+b}\right) dx$ сводится к интегралу от рациональной функции (1.5.19).
6. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$ (1.5.20) Подстановка $x = a\cos t$ или (1.5.21) $x = a\sin t$	$a = \text{const}$
7. $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$ (1.5.22) Подстановка $x = \dfrac{a}{\cos t}$ или (1.5.23) $x = \dfrac{a}{\sin t}$	$a = \text{const}$
8. $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$ (1.5.24) Подстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или (1.5.25) $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$	$a = \text{const}$ **Замечание 1** Подстановки (1.5.21), (1.5.23), (1.5.25) называют тригонометрическими подстановками. **Замечание 2** С помощью соответствующей тригонометрической подстановки интегралы (1.5.20), (1.5.22), (1.5.24) сводятся к интегралам от тригонометрических функций (§10).

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}$.

Решение

Применяем подстановку (1.5.6):

$3x+1=t^2$.

Отсюда

$x=\frac{t^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}tdt$.

Тогда:

$\int \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}=\int \frac{\frac{2}{3}tdt}{2+t}=\frac{2}{3}\int \frac{t}{2+t}dt=$ (применяем элементарные преобразования подынтегральной функции) $=\frac{2}{3}\int \frac{t+2-2}{2+t}dt=$ $=\frac{2}{3}\int dt-\frac{4}{3}\int \frac{dt}{2+t}=$ (используем формулы (1.2.6) и (1.2.8)) = $=\frac{2}{3}t-\frac{4}{3}\ln\left|t+2\right|+C$ = (учитывая, что $t=\sqrt{3x+1}$) $=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}-$ $-\frac{4}{3}\ln\left(\sqrt{3x+1}+2\right)+C$.

Задача 2

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}+3}}$.

Решение

Учитывая подстановку (1.5.11), получаем:

$e^{4x}+3=t^2$, $e^{4x}=t^2-3$, $4x=\ln\left(t^2-3\right)$,

$x=\frac{\ln\left(t^2-3\right)}{4}$;

$dx=\frac{2tdt}{4\left(t^2-3\right)}=\frac{tdt}{2\left(t^2-3\right)}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}+3}} = \int \frac{\frac{tdt}{2\left(t^2-3\right)}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= (\text{так как } t=\sqrt{e^{4x}+3}\,) = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{e^{4x}+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{e^{4x}+3}+\sqrt{3}}\right| + C.$$

Задача 3

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)\sqrt{x-1}}$.

Решение

Наименьшее общее кратное чисел 3 и 2 равно числу 6, поэтому выполняем замену:

$x-1=t^6$, $dx=6t^5dt$.

Тогда:

$$\int \frac{dx}{\left(1+\sqrt[3]{x-1}\right)\sqrt{x-1}} = \int \frac{6t^5dt}{\left(1+t^2\right)t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{t^2+1} = 6\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t^2+1} = 6t - 6\operatorname{arctg} t + C \ (\text{так как } t=\sqrt[6]{x-1}\,) =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x-1} + C.$$

Задача 4

Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{25-x^2}dx}{x^2}$.

Решение

Для интеграла вида $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ справедливы тригонометрические подстановки $x=a\cos t$ или $x=a\sin t$.

В данном случае $a=5$.

Выполняем подстановку

$x=5\cos t$, тогда

$dx=-5\sin t dt$.

$$\sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25\cos^2 t} = 5\sin t\,.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}dx}{x^2} = \int \frac{5\sin t \cdot \left(-5\sin t\right)dt}{25\cos^2 t} = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{dt}{\cos^2 t} + \int dt = -\operatorname{tg} t + t + C\,.$$

Чтобы вернуться к первоначальной переменной x, нужны тригонометрические преобразования:

$1 + \operatorname{tg}^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, следовательно,

$$\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}\,.$$

Учитывая, что $x = 5\cos t$,

получаем $\cos t = \dfrac{x}{5}$.

Тогда:

$$\operatorname{tg} t = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^2} - 1} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\,.$$

Если $x = 5\cos t$, то

$$t = \arccos\frac{x}{5}\,.$$

В результате:

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} + \arccos\frac{x}{5} + C\,.$$

Ответ задачи может быть записан и в другой форме.

Учитывая, что $t = \arccos\dfrac{x}{5}$, получаем:

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2}dx = -\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{x}{5}\right) + \arccos\frac{x}{5} + C\,.$$

Задача 5

Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Решение

Для интеграла вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ справедливы тригонометрические подстановки $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$.

В данном случае $a = 1$.

Выполняя подстановку

$x = \mathrm{tg}\,t$, имеем

$$dx = \frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,t} = \frac{1}{\cos t}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\mathrm{tg}^2\,t \cdot \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\,dt}{\sin^2 t} = \int \frac{d\sin t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C.$$

Используя формулу тригонометрии

$1 + \mathrm{ctg}^2\,t = \frac{1}{\sin^2 t}$ и учитывая, что

$\mathrm{ctg}\,t = \frac{1}{\mathrm{tg}\,t} = \frac{1}{x}$, получаем:

$$\frac{1}{\sin t} = \sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\,t} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

Ответ задачи может быть записан и в другой форме.

Учитывая, что $t = \mathrm{arctg}\,x$, получаем:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sin\left(\mathrm{arctg}\,x\right)} + C.$$

§6. Интегрирование дробей, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.	**Замечание** В этом параграфе будут рассмотрены интегралы, которых нет в таблице (§2, формулы (1.2.6)–(1.2.25)), но с помощью соответствующих преобразований и подстановок их нетрудно привести к табличным.
2. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (1.6.1) $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$ $=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=$ $=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm n^2\right]$ (1.6.2)	**Замечание** ax^2+bx+c – квадратный трехчлен $(a\neq 0)$ **Следует запомнить:** из квадратного трехчлена нужно выделить полный квадрат. **Замечание** $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm n^2$.
3. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=$ $=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm n^2}$, (1.6.3) $x+\frac{b}{2a}=t$, (1.6.4) $\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm n^2}=\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2\pm n^2}$ (1.6.5)	**Следует запомнить:** выполняя замену $x+\frac{b}{2a}=t$, (1.6.4) интеграл (1.6.3) приведем к виду $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+n^2}$ или $\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-n^2}$ (1.6.5) (табличные интегралы (1.2.19) и (1.2.23)).
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (1.6.6)	**Следует запомнить:** интеграл (1.6.6) приводится к табличным интегралам вида (1.2.25) и (1.2.21), если из квадратного трехчлена под знаком корня выделить полный квадрат (1.6.2) и выполнить замену (1.6.4).

5. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ (1.6.7) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (1.6.8)	**Следует запомнить:** первоначально выделяем полный квадрат в знаменателе (формула (1.6.2)), а затем выполняем замену $x+\frac{b}{2a}=t$. **Замечание** Интегралы указанных видов (1.6.7) и (1.6.8) рассмотрим подробно на конкретных примерах.

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int \frac{dx}{3x^2-12x+15}$.

Решение

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$3x^2-12x+15=3\left(x^2-4x+5\right)=3\left[\left(x-2\right)^2+1\right]$.

Выполним замену (подстановку):

$x-2=t$, откуда

$x=t+2$, $dx=dt$.

Следовательно,

$\int \frac{dx}{3x^2-12x+15}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-2\right)^2+1}=\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} t+C=$ (так как $t=x-2$) $=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(x-2\right)+C$.

Задача 2

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3x-2x^2}}$.

Решение

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$9-3x-2x^2=-2\left(x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}\right)=-2\left(\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{81}{16}\right)=2\left(\frac{81}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2\right).$$

Введем новую переменную:

$$x+\frac{3}{4}=t.$$

Тогда:

$$x=t-\frac{3}{4},\ dx=dt.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9-3x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{81}{16}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{t}{\frac{9}{4}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4t}{9}+C=\text{ (так как } t=x+\frac{3}{4}\text{)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+3}{9}+C.$$

Задача 3

Найти интеграл $\int\frac{9-5x}{2x^2+5x-2}dx$.

Решение

Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$2x^2+5x-2=2\left(x^2+\frac{5}{2}x-1\right)=2\left(\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\frac{41}{16}\right).$$

Выполним подстановку:

$$x+\frac{5}{4}=t.$$

Откуда:

$$x=t-\frac{5}{4},\ dx=dt.$$

Тогда:

$$\int\frac{9-5x}{2x^2+5x-2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{9-5t+\frac{25}{4}}{t^2-\frac{41}{16}}dt=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{61}{4}-5t}{t^2-\frac{41}{16}}dt=$$

$$=\frac{61}{8}\int\frac{dt}{t^2-\frac{41}{16}}-\frac{5}{2}\int\frac{tdt}{t^2-\frac{41}{16}}=\frac{61}{8}J_1-\frac{5}{2}J_2,$$

$J_1 = \int \frac{dt}{t^2 - \frac{41}{16}}$ – табличный интеграл (1.2.23), где $a = \frac{\sqrt{41}}{4}$.

$$J_1 = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{41}}{4}} \ln \left| \frac{t - \frac{\sqrt{41}}{4}}{t + \frac{\sqrt{41}}{4}} \right| = \frac{2}{\sqrt{41}} \ln \left| \frac{4t - \sqrt{41}}{4t + \sqrt{41}} \right| + C_1,$$

$J_2 = \int \frac{tdt}{t^2 - \frac{41}{16}} =$ (применяя метод подведения под знак дифференциала (глава I, §3) и формулу (1.2.8), получаем) $= \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{t^2 - \frac{41}{16}} =$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2 - \frac{41}{16}\right)}{t^2 - \frac{41}{16}} = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 - \frac{41}{16} \right| + C_2.$$

Учитывая J_1 и J_2 и возвращаясь к первоначальной переменной *x*, получаем:

$$\int \frac{9 - 5x}{2x^2 + 5x - 2} dx = \frac{61}{4\sqrt{41}} \ln \left| \frac{4t - \sqrt{41}}{4t + \sqrt{41}} \right| + C_1 - \frac{5}{4} \ln \left| t^2 - \frac{41}{16} \right| + C_2 =$$

$$= \frac{61}{4\sqrt{41}} \ln \left| \frac{4x + 5 - \sqrt{41}}{4x + 5 + \sqrt{41}} \right| - \frac{5}{4} \ln \left| x^2 + \frac{5}{2} x - 1 \right| + C, \text{ где } C = C_1 + C_2.$$

§7. Интегрирование по частям

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $d\left(uv\right)=udv+vdu$ (1.7.1)	**Замечание** Дифференциал произведения двух функций *uv* вычисляется по формуле (1.7.1), причем $u=u\left(x\right)$ и $v=v\left(x\right)$ – дифференцируемые функции от *x*.
2. $uv=\int udv+\int vdu$ (1.7.2) $\int udv=uv-\int vdu$ (1.7.3)	Интегрируя обе части равенства (1.7.1) и учитывая, что $\int d\left(uv\right)=uv$, получаем равенство (1.7.2). **формула интегрирования по частям.**
3.	**Следует запомнить:** для нахождения интеграла $\int f\left(x\right)dx$ по формуле (1.7.3) подынтегральное выражение $f\left(x\right)dx$ представляется каким-либо образом в виде произведения двух множителей *u* и *dv*. **Замечание** Умение разбивать подынтегральное выражение на подходящие множители *u* и *dv* вырабатывается в процессе решения задач, но можно указать некоторые часто встречающиеся интегралы, которые находят по формуле интегрирования по частям (1.7.3).

4. Первая группа интегралов: $\int P_n(x)e^{kx}dx,$ $\int P_n(x)a^{kx}dx,$ $\int P_n(x)\sin kxdx,$ (1.7.4) $\int P_n(x)\cos kxdx.$ $u = P_n(x)$ (1.7.5)	$k = \text{const}$ $n = 1, 2, \ldots$ **Следует запомнить:** если под знаком интеграла – произведение многочлена $P_n(x)$ на показательную или тригонометрическую функцию (1.7.4), то за *u* принимают многочлен (1.7.5), а всю остальную часть принимают за *dv*. **Замечание** Для нахождения интегралов первой группы, где $P_n(x)$ – многочлен второй степени, формулу (1.7.3) нужно применять дважды. Если многочлен *n*-й степени – формулу (1.7.3) нужно применять *n* раз, причем после каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.
5. Вторая группа интегралов: $\int P_n(x)\ln xdx,$ $\int P_n(x)\log_a xdx,$ $\int P_n(x)\arcsin axdx,$ $\int P_n(x)\arccos axdx,$ (1.7.6) $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\, axdx,$ $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\, axdx.$ $u = \ln x, \quad u = \log_a x$ (1.7.7)	$a = \text{const}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ **Следует запомнить:** если под знаком интеграла – произведение многочлена $P_n(x)$ на лога-

или $u=\arcsin ax$ и т.д. $dv=P_n(x)dx$ (1.7.8)	рифмическую или обратную тригонометрическую функцию, то за u принимают логарифмическую или обратную тригонометрическую функцию (1.7.7).
6. Третья группа интегралов: $\int e^{ax}\cos bxdx,$ $\int e^{ax}\sin bxdx,$ $\int \sin\ln xdx,$ (1.7.9) $\int \cos\ln xdx.$	$a, b-\mathrm{const}$ **Следует запомнить:** формулу интегрирования по частям (1.7.3) к интегралам третьей группы применяют дважды. В результате получается интеграл такой же, как исходный, но с некоторым коэффициентом. Полученное равенство является линейным алгебраическим уравнением относительно искомого интеграла. **Замечание** Если под знаком интеграла $e^{ax}\cos bx$ или $e^{ax}\sin bx$, то за u можно принимать любой из сомножителей.
7.	**Замечание** Рассмотренные случаи (1.7.4), (1.7.6) и (1.7.9) **не исчерпывают** всех интегралов, которые можно находить по формуле (1.7.3). Например, методом интегрирования по частям можно найти интегралы: $\int\frac{xdx}{\sin^2 x}$, $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$, $\int\sqrt{x^2+a}dx$, $\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$ и некоторые другие.

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int (x+2)e^{-x}dx$.

Решение

Под знаком интеграла – произведение многочлена первой степени на показательную функцию.

Применяем формулу интегрирования по частям (1.7.3) с учетом пункта 4:

$u = x + 2$, $dv = e^{-x}dx$.

Тогда $du = dx$, $\int dv = \int e^{-x}dx$, $v = -e^{-x}$.

$$\int (x+2)e^{-x}dx = -(x+2)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+2)e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+3) + C.$$

Задача 2

Найти интеграл $\int x^2 \cos 3x dx$.

Решение

Под знаком интеграла многочлен второй степени, следовательно, формулу интегрирования по частям применяем дважды.

Пусть $u = x^2$, $dv = \cos 3x dx$.

Тогда $du = 2x dx$, $\int dv = \int \cos 3x dx$, $v = \frac{1}{3}\sin 3x$.

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x - \frac{2}{3}\int x \sin 3x dx.$$

К последнему интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям.

Положим: $u = x$, $dv = \sin 3x dx$.

Тогда $du = dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$.

Следовательно,

$$\int x \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{3}\int \cos 3x dx = -\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x.$$

Поэтому:

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3}x^2 \sin 3x + \frac{2}{9}x \cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C.$$

Задача 3

Найти интеграл $\int x^5 \ln x dx$.

Решение

Под знаком интеграла – произведение многочлена на логарифмическую функцию. Учитывая пункт 5, получим:

$u = \ln x$, $dv = x^5 dx$.

Найдем: $du = \dfrac{1}{x} dx$, $v = \dfrac{x^6}{6}$.

Применяя формулу (1.7.3), будем иметь:

$$\int x^5 \ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^6}{6} - \int \frac{x^6}{6} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^6}{6} \ln x - \frac{x^6}{36} + C.$$

Задача 4

Найти интеграл $\int \arcsin 3x dx$.

Решение

Под знаком интеграла – произведение многочлена нулевой степени на обратную тригонометрическую функцию: $\int x^0 \cdot \arcsin 3x dx$.

Учитывая пункт 5, имеем:

$u = \arcsin 3x$, $dv = dx$.

Тогда $du = \dfrac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$, $v = x$.

Применяя формулу (1.7.3), получаем:

$$\int \arcsin 3x dx = x \arcsin 3x - \int \frac{3x dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

К последнему интегралу применяем метод подведения под знак дифференциала (§4. п. 4 и п. 5):

$$\int \frac{3x dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{3}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{9}\right) \int \frac{d\left(1-9x^2\right)}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot \sqrt{1-9x^2} = -\frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2}.$$

Следовательно,

$$\int \arcsin 3x dx = x \arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C.$$

Задача 5

Найти интеграл $\int e^{-2x}\sin 5xdx$.

Решение

Под знаком интеграла – произведение показательной функции на тригонометрическую.

Учитывая замечание пункта 6, за u можно взять любую из указанных функций.

Пусть $u=e^{-2x}$, $dv=\sin 5xdx$.

Тогда $du=-2e^{-2x}dx$, $v=-\frac{1}{5}\cos 5x$.

Применяя формулу (1.7.3), получаем:

$$\int e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos 5x-\frac{2}{5}\int e^{-2x}\cos 5xdx.$$

Ко второму интегралу вновь применяем формулу интегрирования по частям.

Так же, как на первом этапе, за u выбираем показательную функцию $u=e^{-2x}$.

Тогда: $du=-2e^{-2x}dx$, $dv=\cos 5xdx$, $v=\frac{1}{5}\sin 5x$.

Следовательно,

$$\int e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos 5x-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}e^{-2x}\sin 5x+\frac{2}{5}\int e^{-2x}\sin 5xdx\right)=$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos 5x-\frac{2}{25}e^{-2x}\sin 5x-\frac{4}{25}\int e^{-2x}\sin 5xdx.$$

В результате получаем интеграл такой же, как исходный, но с некоторым коэффициентом.

После двукратного применения формулы интегрирования по частям получили уравнение, где интеграл $\int e^{-2x}\sin 5xdx$ является неизвестной величиной:

$$\int e^{-2x}\sin 5xdx=-\frac{1}{5}e^{-2x}\cos 5x-\frac{2}{25}e^{-2x}\sin 5x-\frac{4}{25}\int e^{-2x}\sin 5xdx.$$

Перенесем в левую часть слагаемое с интегралом:

$$\int e^{-2x}\sin 5x dx+\frac{4}{25}\int e^{-2x}\sin 5x dx=-\frac{e^{-2x}}{5}\cos 5x-\frac{2}{25}e^{-2x}\sin 5x$$

$$\frac{29}{25}\int e^{-2x}\sin 5x dx=-\frac{e^{-2x}}{5}\left(\cos 5x+\frac{2}{5}\sin 5x\right)$$

Тогда:

$$\int e^{-2x}\sin 5x dx=-\frac{5}{29}e^{-2x}\left(\cos 5x+\frac{2}{5}\sin 5x\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{29}e^{-2x}\left(5\cos 5x+2\sin 5x\right)+C\,.$$

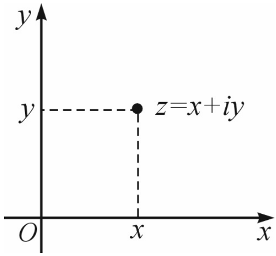
§8. Комплексные числа

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней, если его дискриминант $D=b^2-4ac$ отрицателен.

В области действительных чисел извлечение корней четной степени из отрицательных чисел невозможно.

Надо отметить, что такие задачи имеют решения в области комплексных чисел, которые представляют собой расширение понятия действительных чисел.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $z = x + iy$ (1.8.1) $i=\sqrt{-1}$ (1.8.2)	Число $z = x + iy$, где x, y – любые действительные числа, а i – **мнимая единица** $\left(i^2=-1\right)$, называется **комплексным числом**. **Следует запомнить:** x – действительная часть, а y – мнимая часть комплексного числа z. **Замечание** Запись числа z в виде $z = x + iy$ (1.8.1) называется **алгебраической формой** комплексного числа.
2. $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ и $y_1=y_2$ (1.8.3)	Два комплексных числа считаются **равными**, если равны их действительные и мнимые части (1.8.3).
3. $z=x+iy=0 \Leftrightarrow$ $x=0$ и $y=0$ (1.8.4)	
4. $z=x+iy$ $\overline{z}=x-iy$ (1.8.5)	Два комплексных числа $x+iy$ и $x-iy$ называются сопряженными. **Следует запомнить:** два комплексных сопряженных числа z и $\overline{z}$ всегда имеют одинаковые действительные части, а мнимые части различаются знаками.

5.  Рис. 1.8.1 Если $y=0$, то $z=x+iy$ принимает вид $z=x.$ (1.8.6) Если $x=0$, то $z=iy$ (1.8.7)	**Следует запомнить:** любое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой на плоскости OXY, которая называется комплексной плоскостью. Абсциссой точки будет служить действительная часть комплексного числа $x=\operatorname{Re}z$, а ординатой – мнимая часть комплексного числа $y=\operatorname{Im}z$. $z=x$ – есть действительное число, изображаемое точкой действительной оси (ось *OX*). $z=iy$ – чисто мнимое число, изображается точкой мнимой оси (*OY*).

Задачи

Задача 1

Решить уравнения:

а) $x^2-2x+2=0$;

б) $x^2+16=0$.

Решение

а) $x^2-2x+2=0$.

Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ определяются по формуле: $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, где $D=b^2-4ac$.

В данном случае $D=\left(-2\right)^2-4\cdot 2=-4$. $D<0$, следовательно, корни комплексные.

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i;$$

б) $x^2+16=0$.

В области действительных чисел уравнение решений не имеет, так как $x^2+16>0$ для любого *x*.

В области комплексных чисел уравнение $x^2+16=0$ имеет решение. Так как $x^2=-16$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{-16}=\pm 4i$.

Задача 2

Разложить на множители указанные выражения:

а) x^2-4;

б) x^2+4.

Решение

а) x^2-4.

Учитывая формулу $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, для выражения x^2-4 получаем: $x^2-4=(x-2)(x+2)$;

б) x^2+4.

В области действительных чисел выражение x^2+4 разложить на множители невозможно.

В области комплексных чисел эта задача выполнима:

$x^2+4=(x-2i)(x+2i)$, так как

$(x-2i)(x+2i)=x^2-4i^2$

Учитывая, что $i^2=-1$, получаем $(x-2i)(x+2i)=x^2+4$.

§9. Интегрирование рациональных дробей

Основные формулы и рисунки	**Определения и замечания**
1. $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+...+b_{n-1}x+b_n}=$ $=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ (1.9.1)	$f(x)$ – дробно-рациональная функция. $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены (целые рациональные функции).
2. $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь, если $m<n$ (1.9.2) $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ – неправильная рациональная дробь, если $m \geq n$ (1.9.3)	**Следует запомнить:** рациональная дробь называется **правильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т.е. $m<n$. Рациональная дробь называется **неправильной**, если степень многочлена, стоящего в числителе, больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе, т.е. $m \geq n$.
3. $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=M_{m-n}(x)+\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$, $(m \geq n)$ (1.9.4)	**Следует запомнить:** если дробь (1.9.1) – неправильная, то разделив числитель $P_m(x)$ на знаменатель $Q_n(x)$, получим целую часть – многочлен $M_{m-n}(x)$ и остаток – $R(x)$, степень которого ниже степени знаменателя $Q_n(x)$. **Замечание 1** $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ – правильная рациональная дробь. **Замечание 2** Интегрирование **неправильных** рациональных дробей $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ сводится к интегрированию многочлена

	$M_{m-n}(x)$ (что трудностей не вызывает) и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$.
Простейшие дроби	
4. $\dfrac{A}{x-a}$ (1.9.5)	A, a – действительные числа.
$\dfrac{A}{(x-a)^n}$ (1.9.6)	A, a – действительные числа. $n \geq 2$, n – целое положительное число.
$\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (1.9.7)	A, B, p, q – действительные числа. Корни знаменателя – комплексные, т.е. $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.
$\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ (1.9.8)	A, B, p, q – действительные числа. $n \geq 2$, n – целое положительное число, корни знаменателя – комплексные, т.е. $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$.
Интегрирование простейших рациональных дробей	
5. $\int \dfrac{A}{x-a} dx = A \ln\lvert x-a \rvert + C$ (1.9.9)	**Замечание 1** Для нахождения первообразной использованы метод подведения под знак дифференциала (§4, формула – (1.4.2)) и таблица интегралов – формула (1.2.8).
$\int \dfrac{A}{(x-a)^n} dx = \dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$ (1.9.10)	**Замечание 2** Для нахождения первообразной использованы метод подведения под знак дифференциала (§4, формула – (1.4.2)) и таблица интегралов – формула (1.2.7).

6. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ (1.9.11)	**Следует запомнить:** если корни знаменателя – комплексные, то, выделяя в знаменателе дроби полный квадрат, применяем способ, рассмотренный в §6, п. 3 и 5.
Разложение правильной рациональной дроби на простейшие	
7.	**Следует запомнить:** всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. **Замечание 1** Для разложения правильной рациональной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на простейшие дроби необходимо разложить знаменатель дроби $Q_n(x)$ на произведение линейных и квадратных множителей. Для этого должны знать все корни многочлена $Q_n(x)$.
8. $Q_n(x)=$ $=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ (1.9.12) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\frac{A_3}{x-x_3}+...+$ $+\frac{A_n}{x-x_n}$ (1.9.13)	Корни знаменателя действительные и различные. $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни многочлена $Q_n(x)$ **Следует запомнить:** правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей типа (1.9.5). **Замечание 1** Количество простейших дробей в разложении (1.9.13) определяется количеством различных действительных корней.

	Замечание 2 $A_1, A_2, ..., A_n$ – многочлены нулевой степени, т.е. const.
9. $Q_n(x) =$ $= (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} ... (x - x_p)^{\alpha_p}$ (1.9.14) $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}} + ... + \frac{A_{\alpha_1}}{x-x_1} +$ $+ \frac{B_1}{(x-x_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{\alpha_2-1}} + ... + \frac{B_{\alpha_2}}{x-x_2} + ... +$ $+ \frac{E_1}{(x-x_p)^{\alpha_p}} + \frac{E_2}{(x-x_p)^{\alpha_p-1}} + ... + \frac{E_{\alpha_p}}{x-x_p}$ (1.9.15)	Корни знаменателя действительные и кратные. **Замечание 1** Многочлен $Q_n(x)$ (1.9.14) имеет следующие корни: $x = x_1$ – корень кратности a_1; $x = x_2$ – корень кратности a_2; …………………………….. $x = x_p$ – корень кратности α_p, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p = n$. **Следует запомнить:** правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей типа (1.9.5) и (1.9.6). **Замечание 2** Число простейших дробей, соответствующих линейному множителю $(x - x_1)$, равно степени α_1, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Аналогично для множителей $(x - x_2), ..., (x - x_p)$. Общее количество дробей определяется суммой кратностей этих корней, т.е. $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_p$. $A_1, A_2, ..., A_{\alpha_1}, B_1, B_2, ..., B_{\alpha_2}, ...,$ $E_1, E_2, ..., E_{\alpha_p}$ – многочлены нулевой степени, т.е. const.

<table>
<tr>
<td>

10. $Q_n(x) = (x^2 + mx + n)(x^2 + px + q)\ldots$

$\ldots(x^2 + lx + s) \qquad (1.9.16)$

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Ax + B}{x^2 + mx + n} + \frac{Cx + D}{x^2 + px + q} + \ldots +$$

$$+\frac{Mx + N}{x^2 + lx + s} \qquad (1.9.17)$$

</td>
<td>

Корни знаменателя комплексные и различные.

Замечание 1

При решении задач комплексно-сопряженный корень принято считать за один.

Следует запомнить:

правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей типа (1.9.7).

Замечание 2

$Ax + B, Cx + D, \ldots, Mx + N$ – многочлены первой степени.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

11. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x^2 + px + q)\ldots(x^2 + sx + t)} =$

$$= \frac{A_1}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{(x - x_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha_1}}{x - x_1} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x - x_2)^{\alpha_2}} + \frac{B_2}{(x - x_2)^{\alpha_2 - 1}} + \ldots + \frac{B_{\alpha_2}}{x - x_2} + \qquad (1.9.18)$$

$$+ \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{Kx + L}{x^2 + sx + t}.$$

Следует запомнить:

для определения констант $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha_2}, M, N, \ldots, K, L$ можно применять два метода:

1) метод неопределенных коэффициентов;

2) метод частных значений.

Замечание 1

Указанные методы будут подробно разобраны на конкретных примерах.

Замечание 2

При решении ряда задач рекомендуется комбинировать эти два метода.

</td>
</tr>
</table>

Задачи

Задача 1

Указать правильные и неправильные дроби среди рассмотренных. Если дробь неправильная, представить ее в виде суммы многочлена (целая часть) и правильной рациональной дроби:

а) $\dfrac{4x^2 - x + 1}{3x^3 + 2x + 3}$; в) $\dfrac{6x^2 - 8x + 1}{3x^2 + 4x - 1}$;

б) $\dfrac{5}{x^2 + x + 3}$; г) $\dfrac{x^4 + 3x^3 - x + 5}{x^2 + 1}$.

Решение

В случае (*а*) дробь правильная, так как степень многочлена в числителе равна двум, а степень многочлена в знаменателе – трем, т.е. $m < n$ (1.9.2). Аналогично для случая (*б*), где в числителе – многочлен нулевой степени, а в знаменателе – второй.

В случае (*в*) имеем неправильную дробь, так как степень многочлена в числителе совпадает со степенью многочлена в знаменателе (формула (1.9.3)). В этом случае разделим числитель на знаменатель дроби:

$$\begin{array}{r|l} -\,6x^2 - 8x + 1 & 3x^2 + 4x - 1 \\ \cline{2-2} 6x^2 + 8x - 2 & \quad 2 \\ \hline -16x + 3 & \end{array}$$

Целая часть при делении равна 2, а остаток $R(x) = -16x + 3$.

Тогда, согласно формуле (1.9.4), имеем:

$$\frac{6x^2 - 8x + 1}{3x^2 + 4x - 1} = 2 + \frac{-16x + 3}{3x^2 + 4x - 1},$$

где $\dfrac{-16x + 3}{3x^2 + 4x - 1}$ – правильная дробь.

В случае (*г*) дробь неправильная, так как степень многочлена в числителе равна 4, а степень многочлена в знаменателе – 2.

Разделим числитель дроби на знаменатель:

$$
\begin{array}{l|l}
-\,x^4+3x^3-x+5 & x^2+1 \\
\quad x^4+x^2 & \overline{x^2+3x-1} \\
\hline
\quad -\,3x^3-x^2-x+5 & \\
\qquad 3x^3+3x & \\
\hline
\qquad -\,-x^2-4x+5 & \\
\qquad\quad -x^2-1 & \\
\hline
\qquad\qquad -4x+6 &
\end{array}
$$

Тогда $\dfrac{x^4+3x^3-x+5}{x^2+1}=x^2+3x-1+\dfrac{6-4x}{x^2+1}$.

Задача 2

Разложить многочлен $Q_n(x)$ на множители:

а) $4x^2-5x+1$;

б) x^4+5x^2+4;

в) $3x^4+7x^2-10$;

г) x^3-2x^2+x-2;

д) $x^5+6x^4+9x^3$;

е) $x^3+5x^2+11x+10$.

Решение

а) $Q_n(x)=4x^2-5x+1$ – квадратный трехчлен. Разложим квадратный трехчлен на линейные множители по формуле: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, учитывая, что $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Тогда $4x^2-5x+1=4(x-1)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=(x-1)(4x-1)$;

б) $Q_n(x)=x^4+5x^2+4$ – многочлен 4-й степени. Решим биквадратное уравнение $x^4+5x^2+4=0$.

Если $x^2=t$, то $t^2+5t+4=0$, где $t_1=-1,\ t_2=-4$.

Тогда $t^2+5t+4=(t+1)(t+4)$.

Следовательно, $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$;

в) $Q_n(x)=3x^4+7x^2-10$ – многочлен 4-й степени. Решим биквадратное уравнение: $3x^4+7x^2-10=0$.

Полагая $x^2=t$, получаем: $3t^2+7t-10=0$, где $t_1=1$, $t_2=-\dfrac{10}{3}$.

Тогда: $3t^2+7t-10=3(t-1)\left(t+\dfrac{10}{3}\right)=(t-1)(3t+10)$.

Следовательно, $3x^4+7x^2-10=\left(x^2-1\right)\left(3x^2+10\right)=(x-1)(x+1)\left(3x^2+10\right)$;

г) $Q_n(x)=x^3-2x^2+x-2$

Выполняя группировку членов, получаем:

$x^3-2x^2+x-2=\left(x^3-2x^2\right)+(x-2)=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)\left(x^2+1\right)$;

д) $Q_n(x)=x^5+6x^4+9x^3$;

Вынося общий множитель за скобки, получаем:

$x^5+6x^4+9x^3=x^3\left(x^2+6x+9\right)=x^3(x+3)^2$;

е) $Q_n(x)=x^3+5x^2+11x+10$ – многочлен 3-й степени. Один из корней многочлена находим методом подбора. Подставляем $x=0,\pm1,\pm2...$ в многочлен 3-й степени до тех пор, пока $Q_n(x)=0$.

$Q_n(-2)=0$. Это легко проверить:

$(-2)^3+5(-2)^2+11(-2)+10=-8+20-22+10=-30+30=0$.

Следовательно, $x=-2$ – корень многочлена 3-й степени.

Согласно следствию из теоремы Безу, если $x=-2$ – корень многочлена $Q_n(x)$, то многочлен $x^3+5x^2+11x+10$ можно разделить на $(x+2)$ без остатка.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3+5x^2+11x+10 & x+2 \\
\underline{-\;x^3+2x^2\qquad\qquad} & x^2+3x+5 \\
3x^2+11x+10 & \\
\underline{-\;3x^2+6x\qquad} & \\
5x+10 & \\
\underline{-\;5x+10} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $x^3+5x^2+11x+10=(x+2)\left(x^2+3x+5\right)$.

Корни многочлена x^2+3x+5 – комплексные, так как дискриминант квадратного трехчлена отрицательный.

Задача 3

Найти корни знаменателя:

а) $\dfrac{4x+1}{(x-1)(x+3)^2}$;

б) $\dfrac{3x^3+5x-1}{(x^2-4x+4)(x^2+4x+8)}$;

в) $\dfrac{5x^4-3x^2+x+5}{(x^2-5x+4)(x^2+1)}$.

Решение

а) Многочлен $Q_n(x)=(x-1)(x+3)^2$ имеет следующие корни: $x=1$, $x=-3$, причем $x=1$ – действительный корень кратности 1, а $x=-3$ – действительный корень кратности 2;

б) Многочлен $Q_n(x)=(x^2-4x+4)(x^2+4x+8)=(x-2)^2(x^2+4x+8)$ имеет следующие корни: $x=2$ – действительный корень кратности 2, а корни многочлена x^2+4x+8 – комплексно сопряженные, так как дискриминант квадратного трехчлена – отрицательный;

в) Многочлен $Q_n(x)=(x^2-5x+4)(x^2+1)=(x-1)(x-4)(x^2+1)$ имеет следующие корни: $x=1$ – действительный корень кратности 1, $x=4$ – действительный корень кратности 1 и комплексно сопряженные корни $x=\pm i$.

Задача 4

Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{3x^2+5}{(x^2-1)(x+2)}dx$;

б) $\displaystyle\int\frac{2x^4+5x^2+x+1}{x^4+2x^2}dx$;

в) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4+2}{x^4+4x^2+3}dx$.

Решение

а) $\int \frac{3x^2+5}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx$.

Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя $\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)$ действительные и различные, поэтому подынтегральную функцию можно представить в виде суммы трех простейших дробей – формула (1.9.13):

$\frac{3x^2+5}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{\left(x-1\right)}+\frac{B}{\left(x+1\right)}+\frac{C}{\left(x+2\right)}$, где коэффициенты A,B,C подлежат определению.

Рассмотрим **метод неопределенных коэффициентов**.

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{3x^2+5}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x-1\right)\left(x+2\right)+C\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)}.$$

Поскольку дроби равны, знаменатели равны, следовательно, равны и числители.

$$3x^2+5=A\left(x+1\right)\left(x+2\right)+B\left(x-1\right)\left(x+2\right)+C\left(x-1\right)\left(x+1\right), \qquad (*)$$

$$3x^2+5=A\left(x^2+3x+2\right)+B\left(x^2+x-2\right)+C\left(x^2-1\right),$$

$$3x^2+5=\left(A+B+C\right)x^2+\left(3A+B\right)x+\left(2A-2B-C\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &x^2: A+B+C=3\\ &x^1: 3A+B=0\\ &x^0: 2A-2B-C=5 \end{aligned}\right\}.$$

При сложении этих уравнений найдем A:

$$6A=8,\ A=\frac{4}{3}.$$

Из второго уравнения найдем B:

$$3\cdot\frac{4}{3}+B=0,\ B=-4.$$

Из первого уравнения найдем C:

$C = 3 - A - B$, $C = 3 - \frac{4}{3} + 4 = 7 - \frac{4}{3} = \frac{17}{3}$.

Тогда:

$$\int \frac{3x^2+5}{\left(x^2-1\right)\left(x+2\right)}dx = \int \frac{\frac{4}{3}}{x-1}dx + \int \frac{-4}{x+1}dx + \int \frac{\frac{17}{3}}{x+2}dx =$$

$$= \frac{4}{3}\ln|x-1| - 4\ln|x+1| + \frac{17}{3}\ln|x+2| + C = \ln\frac{\sqrt[3]{\left(x-1\right)^4\left(x+2\right)^{17}}}{\left(x+1\right)^4} + C.$$

Второй метод определения коэффициентов

1) Метод частных значений особенно удобен, когда знаменатель $Q_n\left(x\right)$ правильной рациональной дроби имеет только действительные различные корни.

2) Равенство (*) справедливо при любом значении *x*.

Удобнее всего в качестве значений *x* выбирать корни знаменателя.

Пусть $x = 1$, тогда:

$8 = 6A$, откуда $A = \frac{4}{3}$.

Полагая $x = -1$, найдем:

$8 = -2B$, $B = -4$.

При $x = -2$, имеем:

$17 = 3C$, $C = \frac{17}{3}$;

б) $\int \frac{2x^4+5x^3+x+1}{x^4+2x^2}dx$.

Подынтегральная функция – неправильная дробь (1.9.4), поэтому нужно выделить целую часть.

Разделив числитель дроби на знаменатель, получаем:

$$\frac{2x^4+5x^3+x+1}{x^4+2x^2} = 2 + \frac{5x^3-4x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2\right)}.$$

Знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{5x^3-4x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2\right)}$ имеет корни:

$x=0$ – действительный корень кратности 2, а многочлен x^2+2 имеет комплексно сопряженные корни.

Учитывая разложения (1.9.15) и (1.9.17), получаем:

$$\frac{5x^3-4x^2+x+1}{x^2\left(x^2+2\right)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Тогда:

$$5x^3-4x^2+x+1=A\left(x^2+2\right)+Bx\left(x^2+2\right)+\left(Cx+D\right)x^2,$$

$$5x^3-4x^2+x+1=\left(B+C\right)x^3+\left(A+D\right)x^2+2Bx+2A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему для определения коэффициентов A,B,C,D:

$$\left.\begin{aligned}&x^3: B+C=5,\\&x^2: A+D=-4,\\&x^1: 2B=1,\\&x^0: 2A=1.\end{aligned}\right\}$$

Тогда: $A=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{9}{2}$, $D=-\dfrac{9}{2}$.

Таким образом,

$$\int\frac{2x^4+5x^3+x+1}{x^4+2x^2}dx=\int 2dx+\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2}+\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x}+\int\frac{\frac{9}{2}x-\frac{9}{2}}{x^2+2}dx=$$

$$=2\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+\frac{9}{2}\int\frac{xdx}{x^2+2}-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=2x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{9}{4}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{9}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C;$$

в) $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4+2}{x^4+4x^2+3}dx$.

Подынтегральная функция – неправильная дробь (1.9.4), поэтому нужно выделить целую часть.

Разделив числитель дроби на знаменатель, получаем:

$$\frac{x^5+x^4+2}{x^4+4x^2+3}=x+1-\frac{4x^3+4x^2+3x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}.$$

Знаменатель дроби $\dfrac{4x^3+4x^2+3x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}$ имеет два комплексно сопряженных корня: $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{3}i$.

Учитывая замечание (1, п. 10, §9) и формулу (1.9.17), имеем:

$$\frac{4x^3+4x^2+3x+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+3}.$$

Отсюда:

$$4x^3+4x^2+3x+1=Ax^3+Bx^2+3Ax+3B+Cx^3+Cx+Dx^2+D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему для определения коэффициентов A,B,C,D:

$$\left.\begin{aligned} &x^3: A+C=4,\\ &x^2: B+D=4,\\ &x^1: 3A+C=3,\\ &x^0: 3B+D=1.\end{aligned}\right\}$$

Рассмотрим две системы:

$$\begin{cases} A+C=4,\\ 3A+C=3\end{cases} \text{ и } \begin{cases} B+D=4,\\ 3B+D=1.\end{cases}$$

Тогда: $A=-\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{3}{2}$, $C=\dfrac{9}{2}$, $D=\dfrac{11}{2}$.

Следовательно:

$$\int\frac{x^5+x^4+2}{x^4+4x^2+3}dx=\int\left(x+1\right)dx-\int\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}{x^2+1}dx-\int\frac{\frac{9}{2}x+\frac{11}{2}}{x^2+3}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{9}{4}\ln\left(x^2+3\right)-\frac{11}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

§10. Интегрирование тригонометрических функций

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ (1.10.1)	R – рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.
$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ (1.10.2)	$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ – универсальная тригонометрическая подстановка. **Замечание 1** $-\pi < x < \pi$
$\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$ (1.10.3)	
$\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ (1.10.4)	
$x = 2\operatorname{arctg} t$ (1.10.5)	
$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ (1.10.6)	
$\int R(\sin x; \cos x)dx =$ $= \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}; \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \dfrac{2}{1+t^2}dt$ (1.10.7)	**Следует запомнить:** интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ преобразуется в интеграл от рациональной функции и может быть найден методами, рассмотренными в §9. **Замечание 2** Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ называется универсальной, так как дает возможность проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$. Однако на практике такая подстановка часто приводит к слишком громоздким вычислениям.

	Замечание 3 С помощи подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ очень удобно находить интегралы вида $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$.
2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ (1.10.8) а) хотя бы один из показателей m или n – **нечетное положительное число**. Если n – нечетное, т.е. $n = 2k+1$, то $\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx =$ $= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx =$ (1.10.9) $= \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^k d\sin x,$ б) m и n – числа четные, неотрицательные, $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)$ (1.10.10)	 **Следует запомнить:** от множителя в нечетной степени отделяем один сомножитель в первой степени и вносим его под знак дифференциала, а к множителю в четной степени применяем основное тригонометрическое тождество (1.10.9). **Следует запомнить:** если m и n – числа четные, неотрицательные, то подынтегральное выражение (1.10.8) преобразуем с помощью формул (1.10.10), т.е. применяем формулы понижения степени.
3. $\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$ (1.10.11) а) m – нечетное положительное число, $m = 2k+1$. $\int \frac{\sin^{2k+1} x dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^{2k} x \sin x dx}{\cos^n x} =$ $= -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^k d\cos x}{\cos^n x},$ (1.10.12) б) m и n – четные, причем $m < n$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$ (1.10.13)	 **Следует запомнить:** от множителя $\sin^{2k+1} x$ отделяем один сомножитель в первой степени и вносим его под знак дифференциала, а к множителю в четной степени применяем основное тригонометрическое тождество. **Следует запомнить:** к числителю и знаменателю применяем формулы (1.10.13) и (1.10.14) и выполняем замену (1.10.15).

$\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$, (1.10.14) $\mathrm{tg}\, x = t$, (1.10.15) в) m и n – четные, причем $m > n$,	**Следует запомнить:** можно положить $\mathrm{tg}\, x = t$ или к числителю применить основное тригонометрическое тождество и почленно разделить на знаменатель.
г) m – четное, n – нечетное $\int \dfrac{\sin^m x}{\cos^n x} dx$, замена $\sin x = t$, (1.10.16) $\int \dfrac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$, замена $\cos x = t$, (1.10.17) д) $n - m = 2$ (1.10.18) $\int \dfrac{\sin^m x}{\cos^n x} dx = \int \dfrac{\sin^m x}{\cos^{m+2} x} dx =$ $= \int \dfrac{\sin^m x}{\cos^m x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} dx =$ (1.10.19) $= \int \mathrm{tg}^m x d\, \mathrm{tg}\, x$	**Следует запомнить:** если $\cos x$ – в нечетной степени, то выполняют замену (1.10.16), а если $\sin x$ – в нечетной степени, то замена (1.10.17). **Замечание** Аналогичные действия для $\int \dfrac{\cos^m x}{\sin^n x} dx$. В дальнейшем интегрируем степенную функцию.
4. $\int \mathrm{tg}^m x dx$ или (1.10.20) $\int \mathrm{ctg}^m x dx$, где m – целое положительное число	**Следует запомнить:** для интегралов вида (1.10.20) применяем замену $\mathrm{tg}\, x = t$ или $\mathrm{ctg}\, x = t$.
5. $\int \sin mx \cos nx\, dx$ (1.10.21)	**Следует запомнить:** формулы (1.10.22), (1.10.24), (1.10.26) дают возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы.

$\sin mx \cos nx =$ $= \frac{1}{2}\left(\sin\left(m+n\right)x +\right.$ (1.10.22) $\left. + \sin\left(m-n\right)x\right),$ $\int \cos mx \cos nx\, dx$ (1.10.23) $\cos mx \cos nx =$ $= \frac{1}{2}\left(\cos\left(m+n\right)x +\right.$ (1.10.24) $\left. + \cos\left(m-n\right)x\right),$ $\int \sin mx \sin nx\, dx$ (1.10.25) $\sin mx \sin nx =$ $= \frac{1}{2}\left(\cos\left(m-n\right)x -\right.$ (1.10.26) $\left. - \cos\left(m+n\right)x\right)$	

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\cos x+2\sin x}$.

Решение

Учитывая замечание 3 п.1, полагаем $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

Тогда, принимая по внимание формулы (1.10.3), (1.10.4), (1.10.5) и (1.10.6), будем иметь:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+2\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2+4t} = \int \frac{dt}{1+2t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+2t\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Задача 2

Найти интеграл $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx$.

Решение

Так как степени $\sin x$ и $\cos x$ нечетные и наименьшая степень равна 3, то согласно пункту 2 представим подынтегральную функцию в виде $\sin^3 x \cdot \cos^5 x = \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^5 x$.

Следовательно,

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^5 x dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^5 x d\cos x =$$

$$= \int \left(\cos^7 x - \cos^5 x\right) d\cos x = \frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

Задача 3

Найти интеграл $\int \cos^2 4x dx$.

Решение

Учитывая, что $\cos 4x$ находится в четной степени, применяем метод понижения степени, описанный в (п. 2, б).

$$\int \cos^2 4x dx = \int \frac{1+\cos 8x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{\cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Задача 4

Найти интеграл $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.

Решение

Показатель функции в числителе – нечетный, поэтому от $\cos^5 x$ отделяем один сомножитель в первой степени и вносим под знак дифференциала, а к множителю $\cos^4 x$ применяем основное тригонометрическое тождество (п. 3, а):

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\cos^4 x \cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\left(\cos^2 x\right)^2 d\sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2 d\sin x}{\sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{\left(1-2\sin^2 x + \sin^4 x\right) d\sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} d\sin x - 2\int d\sin x + \int \sin^2 d\sin x =$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Задача 5

Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx$.

Решение

Поскольку обе функции в числителе и в знаменателе в четной степени, причем $m < n$, полагаем $\operatorname{tg} x = t$ (п. 3, б).

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^8 x = \left(\cos^2 x\right)^4 = \left(\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^4 = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^4},$$

$$x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x} dx = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\left(1+t^2\right)^4}} = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 dt = \int t^2 \left(1 + 2t^2 + t^4\right) dt =$$

$$= \int \left(t^2 + 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{2}{5}\operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{7}\operatorname{tg}^7 x + C.$$

Задача 6

Найти интеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение

Так как функции в числителе и в знаменателе в четной степени, причем $m > n$, можно выполнить замену $\operatorname{tg} x = t$, но проще к числителю применить основное тригонометрическое тождество и почленно разделить на знаменатель (п. 3, в).

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2 dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int dx + \int \cos^2 x dx = \operatorname{tg} x - 2x + \frac{1}{2}\int \left(1 + \cos 2x\right) dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C = \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Задача 7

Найти интеграл $\int \frac{\cos^9 x}{\sin^{11} x} dx$.

Решение

Учитывая (п. 3, д), получаем:

$$\int \frac{\cos^9 x}{\sin^9 x \cdot \sin^2 x} dx = -\int \operatorname{ctg}^9 x d \operatorname{ctg} x = -\frac{\operatorname{ctg}^{10} x}{10} + C.$$

Задача 8

Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

Решение

Согласно п. 4 полагаем $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Тогда $\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int t^5 \cdot \frac{dt}{1+t^2}$.

Подынтегральная функция $\frac{t^5}{1+t^2}$ – дробно-рациональная, причем дробь – неправильная.

На основании §9, п. 3 (формула 1.9.4), имеем:

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right) + C.$$

Задача 9

Найти интеграл $\int \sin 7x \cdot \cos 8x dx$.

Решение

Учитывая формулы (1.10.21) и (1.10.22), получаем:

$$\int \sin 7x \cdot \cos 8x = \frac{1}{2} \int \left(\sin 15x + \sin\left(-x\right) \right) dx = \frac{1}{2} \int \sin 15x dx -$$

$$-\frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{30} \cos 15x + \frac{1}{2} \cos x + C.$$

§11. Интегрирование дифференциальных биномов

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (1.11.1)	дифференциальный бином (1.11.1). $a,b\in R$, где R – множество действительных чисел. $m,n,p\in Q$, где Q – множество рациональных чисел.
2. $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ (1.11.2)	**Следует запомнить:** интеграл (1.11.2) выражается через элементарные функции только в трех случаях.
а) если $p\in Z$, то $x=t^S$ (1.11.3)	Первая подстановка Чебышева. *s* – общий знаменатель дробей *m* и *n*.
б) если $\dfrac{m+1}{n}\in Z$, то $a+bx^n=t^k$ (1.11.4)	Вторая подстановка Чебышева. *k* – знаменатель дроби *p*.
в) если $\dfrac{m+1}{n}+p\in Z$, то $ax^{-n}+b=t^k$ (1.11.5)	Третья подстановка Чебышева. *k* – знаменатель дроби *p*.

Задачи

Задача 1

Найти интеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}$.

Решение

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}=$ (преобразуем подынтегральную функцию) $=$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}dx.$$

$m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=-1$, так как $p=-1\in Z$,

то применяем первую подстановку Чебышева (1.11.3).

$x=t^4,\ dx=4t^3dt$.

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}dx=\int\left(t^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\left(t^4\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-1}\cdot 4t^3dt=4\int t^{-2}\left(1+t\right)^{-1}t^3dt=$$

$=4\int\frac{t}{1+t}dt=4\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=4\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=4\left(t-\ln|1+t|\right)+C=$ (учитывая, что $t=\sqrt[4]{x}$) $=4\left(\sqrt[4]{x}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\right)+C$.

Задача 2

Найти интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение

$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=$ (преобразуем подынтегральную функцию) $=$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx.$$

$m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}$.

Так как $p=\frac{1}{3}\notin Z$, проверим $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2\in Z$, следовательно, используем вторую подстановку Чебышева.

$1+x^{\frac{1}{4}}=t^3,\ x^{\frac{1}{4}}=t^3-1,\ x=\left(t^3-1\right)^4,\ dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt$.

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\left[\left(t^3-1\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt=$$

$$=12\int\left(t^3-1\right)^{-2}t\left(t^3-1\right)^3t^2dt=12\int t^3\left(t^3-1\right)dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$= $ (учитывая, что $t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}$) $=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{7}}-3\sqrt[3]{\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{4}}+C=$

$=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7}}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4}}+C.$

Задача 3

Найти интеграл $\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx$.

Решение

$\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx=$ (преобразуем подынтегральную функцию) $=$

$=\int x^{-\frac{5}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}dx$.

$m=-\frac{5}{2},\ n=1,\ p=\frac{1}{2}$.

Так как $p=\frac{1}{2}\notin Z$, проверим $\frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{5}{2}+1}{1}=-\frac{3}{2}\notin Z$.

Вычислим $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-\frac{5}{2}+1}{1}+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-1\in Z$, следовательно, выполним третью подстановку Чебышева.

$x^{-1}+1=t^2,\ x^{-1}=t^2-1,\ x=\left(t^2-1\right)^{-1},\ dx=-\left(t^2-1\right)^{-2}2tdt$.

$$\int x^{-\frac{5}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\int\left[\left(t^2-1\right)^{-1}\right]^{-\frac{5}{2}}\left(1+\left(t^2-1\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-\left(t^2-1\right)^{-2}\right]2tdt=$$

$$=-2\int\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{2}}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left(t^2-1\right)^2}tdt=-2\int\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{2}}\frac{t}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{t}{\left(t^2-1\right)^2}dt=$$

$=-2\int t^2dt=-2\frac{t^3}{3}+C=$ (учитывая, что $t=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$) $=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}+C$.

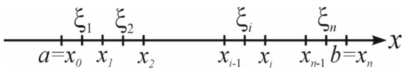
§12. Общие замечания о методах интегрирования

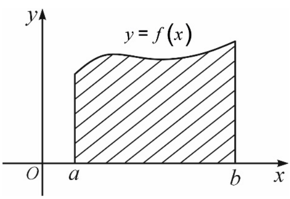
Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.	**Замечание** В предыдущих параграфах мы рассмотрели наиболее важные методы интегрирования. Нетрудно понять, что операция интегрирования функций значительно сложнее операции дифференцирования функций. Во многих задачах требуется рациональный подход к нахождению решения. Знание основных правил интегрирования нужно сочетать с умением находить более короткий, простой способ решения. Интегрирование чаще всего может быть выполнено не единственным способом.
а) $\int \frac{4x^3-9x^2+4}{x^4-3x^3+4x}dx$, (1.12.1)	интегрирование дробно-рациональной функции.
$\frac{4x^3-9x^2+4}{x^4-3x^3+4x}=\frac{4x^3-9x^2+4}{x(x+1)(x-2)^2}=$ $=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{x-2}$, (1.12.2)	(1.12.2) – разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей (§9). Данный способ решения этой задачи – не рациональный, так как при внимательном рассмотрении мы замечаем, что дифференциал функции, стоящей в знаменателе, есть числитель (1.12.3).
$d\left(x^4-3x^3+4x\right)=$ $=\left(4x^3-9x^2+4\right)dx$ (1.12.3)	
$\int \frac{4x^3-9x^2+4}{x^4-3x^3+4x}dx=$ $=\int \frac{d\left(x^4-3x^3+4x\right)}{x^4-3x^3+4x}dx=$ $=\ln\left\|x^4-3x^3+4x\right\|+C$,	Первообразная найдена с минимумом затраченного времени и труда.

б) $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$. (1.12.4) Полагая $u = x$ и $dv = \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$, получаем: $du = dx$, $v = -\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$. Отсюда $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} =$ $= -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.	Как и в предыдущей задаче, можно разложить дробь на сумму простейших дробей (§9), но не всегда следует действовать по шаблону. Рациональный способ решения данной задачи – интегрирование по частям: $\int udv = uv - \int vdu$ (§7).
2. $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ (1.12.5)	**Замечание 1** Производная от элементарной функции есть функция элементарная. Иное дело с операцией интегрирования. Существуют элементарные функции, интегралы от которых в элементарных функциях не выражаются. (1.12.5) – «неберущиеся» интегралы.

ГЛАВА 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Понятие определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ (2.1.1)	$y = f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a;b]$.
2.  Рис. 2.1.1	Отрезок $[a;b]$ произвольно разбивается на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, … ,$[x_{n-1}, x_n]$, причем $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.
3. $f(\xi_i)$, (2.1.2) $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$	$f(\xi_i)$ – значение функции в произвольно выбранной точке $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$.
4. $f(\xi_i)\Delta x_i$ (2.1.3)	Произведение найденного значения функции в точке ξ_i на длину соответствующего отрезка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
5. $S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots +$ $+ f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (2.1.4)	$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ n-я интегральная сумма функции $y = f(x)$.
6. $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ (2.1.5)	**Следует запомнить:** **определенным интегралом** называется предел, к которому стремится n-я интегральная сумма, когда $n \to \infty$, а наибольшая длина отрезка Δx_i стремится к нулю. **Замечание** При построении интегральной суммы выполнены два допущения: 1. Отрезок $[a;b]$ разбивается на частичные отрезки произвольным образом;

	2. Точки ξ_i выбирают на соответствующих отрезках произвольным образом. **Следует запомнить:** если функция $f(x)$ – **непрерывна** на отрезке $[a;b]$, то предел, к которому стремится *n*-я интегральная сумма, **не зависит** ни от **способа разбиения** отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки, ни от **выбора в них промежуточных точек** ξ_i, другими словами, если функция $y=f(x)$ – **непрерывна на отрезке** $[a;b]$, то **определенный интеграл** $\int\limits_a^b f(x)dx$ **существует**.
7. $\int\limits_a^b f(x)dx$ (2.1.6)	определенный интеграл (2.1.6). **Читается:** интеграл от *a* до *b* $f(x)$ на dx, *a* – нижний предел интегрирования, *b* – верхний предел интегрирования
8.  Рис. 2.1.2	$y=f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, причем $f(x)\geq 0$. **Следует запомнить:** фигура, ограниченная сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу – осью Ox, слева – прямой $x=a$ и справа – прямой $x=b$, называется криволинейной трапецией (рис. 2.1.2).

9. $$\int\limits_a^b f(x)dx = S_{\text{кр. трап.}} \qquad (2.1.7)$$	**Геометрический смысл определенного интеграла** **Следует запомнить:** определенный интеграл от неотрицательной функции равен площади криволинейной трапеции (рис. 2.1.2).
10.	**Замечание** Определенный и неопределенный интегралы тесно связаны между собой, хотя **определенный интеграл** есть число, а **неопределенный интеграл** – совокупность первообразных функций.

Задачи

Задача 1

Вычислить, исходя из определения, интеграл $\int\limits_a^b 1 \cdot dx$.

Решение

Построим криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y = 1$, снизу – осью Ox, слева – прямой $x = a$ и справа – прямой $x = b$. Полученная фигура – прямоугольник.

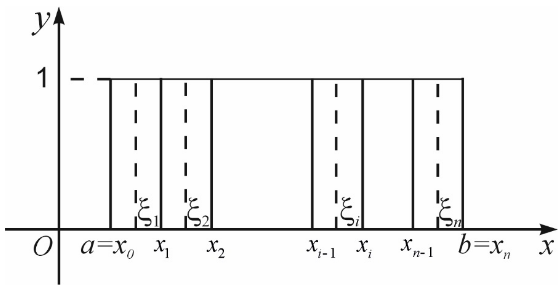


Рис. 2.1.3

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ (рис. 2.1.3).

Через точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ проведем прямые, параллельные оси Oy, т.е. разобьем прямоугольник на n малых прямоугольников.

На каждом отрезке Δx_i выберем произвольно точку ξ_i и вычислим значение функции $f(\xi_i)$. Очевидно, что для любой точки ξ_i функция $f(\xi_i)=1$. Составим интегральную сумму:

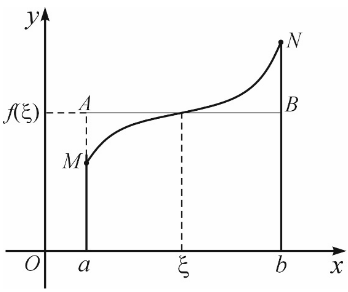
$$S_n = 1\cdot\Delta x_1 + 1\cdot\Delta x_2 + 1\cdot\Delta x_3 + \ldots + 1\cdot\Delta x_n =$$
$$= x_1 - a + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + b - x_{n-1} = b - a.$$

Предел этой интегральной суммы при $n\to\infty$ равен $(b-a)$.

Следовательно, $\int\limits_a^b 1\cdot dx = b-a$.

§2. Свойства определенного интеграла

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, (2.2.1)	$k = \text{const}$. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.
2. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx =$ $= \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$ (2.2.2)	Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций. **Замечание** Свойство 2 справедливо для любого конечного числа слагаемых.
3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$ (2.2.3)	Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то значение интеграла изменится на противоположное.
4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$ (2.2.4)	Если верхний и нижний пределы интегрирования совпадают, т.е. $a = b$, то такой интеграл равен нулю.
5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $a < c < b$ (2.2.5)	Отрезок интегрирования можно разбивать на части.
6. Если $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ (2.2.6)	Если подынтегральная функция на отрезке $[a;b]$ не меняет знака, то интеграл (2.2.6) – это число того же знака, что и функция.
7. Если $f(x) \leq \varphi(x)$, $\forall x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi(x)dx$ (2.2.7)	Неравенство между функциями влечет неравенство того же смысла между их определенными интегралами. **Следует запомнить:** неравенство между непрерывными функциями на отрезке $[a;b]$ можно интегрировать.

8. $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, (2.2.8) $a < \xi < b$  Рис. 2.2.1	**Теорема о среднем значении** **Следует запомнить:** если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что справедливо равенство (2.2.8). **Замечание** Формула (2.2.8) позволяет теорему о среднем значении сформулировать так: определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой точке отрезка интегрирования на длину отрезка. **Геометрическое истолкование** теоремы о среднем значении Пусть $f(x) \geq 0$. $\int\limits_a^b f(x)dx = S$, где S – площадь криволинейной трапеции $aMNb$ (рис. 2.2.1). Тогда найдется такая точка $\xi \in (a;b)$, что площадь криволинейной трапеции $aMNb$ равна площади прямоугольника $aABb\left(S = f(\xi)(b-a)\right)$, с тем же основанием, что и у криволинейной трапеции $aMNb$ и высотой – $f(\xi)$ (рис. 2.2.1). **Следует запомнить:** криволинейная трапеция равновелика прямоугольнику с тем же основанием и высотой $f(\xi)$ в промежуточной точке $\xi \in (a;b)$.

§3. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница

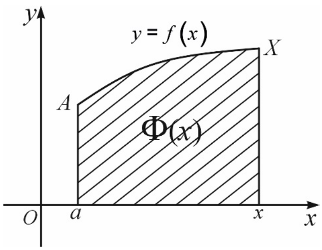
<table>
<tr><th>Основные формулы и рисунки</th><th>Определения и замечания</th></tr>
<tr><td>1. $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, (2.3.1)</td><td>интеграл с переменным верхним пределом.
$a=\text{const}$
Следует запомнить:
интеграл с переменным верхним пределом $\int\limits_a^x f(t)dt$ – есть функция верхнего предела $\Phi(x)$.</td></tr>
<tr><td>2.


Рис. 2.3.1

$\Phi'(x)=f(x)$ (2.3.2)
или
$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$ (2.3.3)</td><td>Если $f(t)\geq 0$, то величина $\Phi(x)$ численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$ (рис. 2.3.1).
Замечание
Площадь криволинейной трапеции $aAXx$ изменяется в зависимости от изменения x.
Следует запомнить:
производная от интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции, вычисленной в верхнем пределе.
Замечание
Функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ (глава I, §1, п.1), следовательно, интеграл с переменным верхним пределом является первообразной для подынтегральной функции.</td></tr>
<tr><td>3. $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ (2.3.4)</td><td>Формула Ньютона – Лейбница

Следует запомнить:
чтобы вычислить определенный интеграл, нужно найти первообразную</td></tr>
</table>

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big\|_a^b =$ (2.3.5) $= F(b) - F(a)$	$F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$ и определить разность значений первообразной в верхнем и нижнем пределах интегрирования (2.3.5). **Замечание 1** $\int\limits_a^b f(x)dx$ – определенный интеграл, если: 1) $f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a;b]$ 2) пределы интегрирования a и b – конечны. **Замечание 2** Для разрывных функций формула Ньютона – Лейбница может не иметь места.

Задачи

Задача 1

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-2}^{3}\left(5x^4 - 4x^3 + 2x - 1\right)dx$;

б) $\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{2}{x^3} - 4\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

в) $\int\limits_{1}^{8}\frac{2x-3}{\sqrt[3]{x}}dx$;

г) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Решение

а) $\int\limits_{-2}^{3}\left(5x^4 - 4x^3 + 2x - 1\right)dx = \left(x^5 - x^4 + x^2 - x\right)\Big|_{-2}^{3} = 3^5 - 3^4 + 3^2 - 3 -$

$-\left((-2)^5 - (-2)^4 + (-2)^2 - (-2)\right) = 243 - 81 + 9 - 3 + 32 + 16 - 4 - 2 = 210$;

б) $\int\limits_1^4 \left(\frac{2}{x^3} - 4\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx = \int\limits_1^4 \left(2x^{-3} - 4x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}} \right) dx =$

$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{8}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} \right) \Bigg|_1^4 = -\frac{1}{16} - \frac{8}{3}\sqrt{4^3} - 6\sqrt{4} - \left(-1 - \frac{8}{3} - 6 \right) =$

$= -\frac{1}{16} - \frac{64}{3} - 12 + 1 + \frac{8}{3} + 6 = -\frac{1139}{48}$;

в) $\int\limits_1^8 \frac{2x-3}{\sqrt[3]{x}} dx = \int\limits_1^8 \left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int\limits_1^8 \left(2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} \right) \Bigg|_1^8 =$

$= \frac{6}{5}\sqrt[3]{8^5} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{8^2} - \frac{6}{5} + \frac{9}{2} = \frac{6}{5} \cdot 32 - \frac{9}{2} \cdot 4 - \frac{6}{5} + \frac{9}{2} = \frac{186}{5} - \frac{27}{2} = 23,7;$

г) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9} - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} \Bigg|_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$

$= \frac{1}{3} \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36}.$

Задача 2

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^5 \sqrt{(2x-1)^3} dx$;

б) $\int\limits_0^1 e^{x^3} \cdot x^2 dx$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$.

Решение

а) $\int\limits_1^5 \sqrt{(2x-1)^3} dx = \frac{1}{2} \int\limits_1^5 (2x-1)^{\frac{3}{2}} d(2x-1) = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_1^5 = \frac{1}{5} \sqrt{(2x-1)^5} \Bigg|_1^5 =$

$= \frac{1}{5} \left(\sqrt{9^5} - 1 \right) = \frac{1}{5} \left(3^5 - 1 \right) = \frac{242}{5} = 48,4$;

б) $\int\limits_0^1 e^{x^3}\cdot x^2dx=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^{x^3}dx^3=\frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{2+\sin x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(2+\sin x)}{2+\sin x}=\ln(2+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=\ln\left(2+\sin\frac{\pi}{2}\right)-\ln(2+\sin 0)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$$

Задача 3

Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^3+x}$; в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xdx$.

Решение

а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Выделяем полный квадрат в знаменателе (глава I, §6, формула (1.6.2)): $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$.

Тогда, применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\limits_0^1\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\int\limits_0^1\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}(x+2)\Big|_0^1=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2.$$

б) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x^3+x}$.

Разложим правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей (глава I, §9, формула (1.9.18)):

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Тогда: $Ax^2+Bx^2+Cx+A=1$,

$$\left.\begin{array}{l} x^2 : A + B = 0 \\ x : C = 0 \\ x^0 : A = 1 \end{array}\right\} A = 1,\ B = -1,\ C = 0\,.$$

Применяя формулу Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 + x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{x^2 + 1} = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} = \ln\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \ln\sqrt{\frac{8}{5}} = \ln\sqrt{1,6}\,,$$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$.

Учитывая правило (глава I, §10, формула (1.10.9)), получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d\sin x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 x\right) d\sin x =$$

$$= \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

§4. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\int\limits_a^b f(x)dx$, $x=\varphi(t)$ (2.4.1)	Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции выполнена подстановка $x=\varphi(t)$ (2.4.1).
$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ (2.4.2)	Формула замены переменной в определенном интеграле **Следует запомнить:** 1) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$; 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$; 3) $f(\varphi(t))$ – определена и непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$. **Замечание 1** Для вычисления определенного интеграла с помощью замены переменной поступают так же, как и при решении задач (глава I, §5). **Замечание 2** Если в неопределенном интеграле после нахождения первообразной возвращаются к первоначальной переменной, то в случае определенного интеграла возвращаться к первоначальной переменной необходимости нет, так как в процессе решения меняют пределы интегрирования.
2. $\int\limits_a^b u\cdot dv=uv\Big\vert_a^b-\int\limits_a^b vdu$ (2.4.3)	Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. **Замечание 1** $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции от x.

	Замечание 2 Основные правила интегрирования по частям были рассмотрены ранее в главе I, §7, они справедливы и для определенного интеграла.

Задачи

Задача 1

Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}$;

б) $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

в) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Решение

а) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}$.

Применим подстановку $x+1=t^3$.

Тогда $x=t^3-1$, $dx=3t^2dt$.

Если $x=0$, то $t=1$;

если $x=7$, то $t=2$.

Поэтому $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}=\int\limits_1^2 \frac{3t^2dt}{t^2+3t}=3\int\limits_1^2 \frac{tdt}{t+3}=3\int\limits_1^2 \frac{t+3-3}{t+3}dt=$

$$=3\int\limits_1^2\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=3\left(t-3\ln|t+3|\right)\Big|_1^2=3\left(2-3\ln 5-1+3\ln 4\right)=$$

$$=3\left(1+3\ln\frac{4}{5}\right)=3+9\ln\frac{4}{5};$$

б) $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

Положим $t^2=e^x-1$, тогда $2tdt=e^x dx$ и $dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1}$.

Если $x=0$, то $t=0$;
если $x=\ln 2$, то $t=1$.

Поэтому $\int\limits_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\int\limits_{0}^{1}t\cdot\dfrac{2tdt}{t^2+1}=2\int\limits_{0}^{1}\dfrac{t^2dt}{t^2+1}=2\int\limits_{0}^{1}\dfrac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$

$$=2\int\limits_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-\operatorname{arctg}t\right)\Big|_0^1=2\left(1-\operatorname{arctg}1\right)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right);$$

в) $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\dfrac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

Применим подстановку $x=\operatorname{tg}t$, тогда $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

Если $x=1$, то $t=\dfrac{\pi}{4}$;

если $x=\sqrt{3}$, то $t=\dfrac{\pi}{3}$.

Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{\left(1+\operatorname{tg}^2 t\right)^3}}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^3 t}}=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos t dt=\sin t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2

Можно ли интеграл $\int\limits_{0}^{2}\sqrt[3]{1-x^2}dx$ вычислить с помощью подстановки $x=\cos t$.

Решение

Если выполнить подстановку $x=\cos t$, то при определении новых пределов интегрирования возникает ситуация $\cos t=2$. Данное уравнение решений не имеет, так как $|\cos t| \le 1$, и определить верхний предел интегрирования невозможно.

Следовательно, вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ с помощью подстановки $x = \cos t$ невозможно.

Задача 3

Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$;

б) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Решение

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.

Учитывая правило, рассмотренное в главе I, §7, формула (1.7.4), положим: $u = x$, $dv = \cos x dx$.

Тогда $du = dx$, $v = \sin x$. Следовательно, по формуле (2.4.3) получаем: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$.

б) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Согласно правилу, рассмотренному в главе I, §7, формула (1.7.6), положим: $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$.

Следовательно,

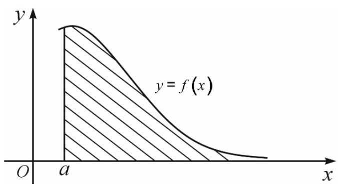
$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 =$$

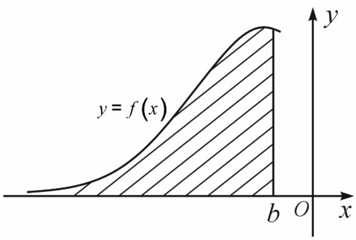
$$= \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

§5. Несобственные интегралы

Говоря об определённых интегралах, мы всегда отмечали, что промежуток интегрирования конечен и подынтегральная функция на нем непрерывна.

В этом параграфе будут рассмотрены интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций.

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx,$ $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx,$ (2.5.1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	Символическая запись **несобственных интегралов I рода** или интегралов с бесконечными пределами.
2. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (2.5.2)	Несобственным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$ называется предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$. **Следует запомнить:** если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется **сходящимся**, если указанный предел **бесконечен** или **не существует**, интеграл называют **расходящимся**.
3.  Рис. 2.5.1	**Геометрический смысл** сходящегося несобственного интеграла первого рода $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (рис. 2.5.1). График функции $y=f(x)$, где $f(x)>0$, ограничивает криволинейную трапецию с бесконечным основанием.

	Следует запомнить: если несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ **сходится**, то говорят, что заштрихованная фигура имеет **площадь**, равную этому интегралу. **Замечание** Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то говорить о площади фигуры нельзя.
4. $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (2.5.3)  Рис. 2.5.2	Определение несобственного интеграла на промежутке $(-\infty;b]$ и соответствующие выводы о сходимости аналогичны пункту 2. **Геометрический смысл** сходящегося несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ (рис. 2.5.2), где $f(x)>0$.
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ (2.5.4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$ (2.5.5)	Если $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то можно рассматривать несобственный интеграл на интервале $(-\infty;+\infty)$. c – произвольная точка на оси Ox. **Замечание** Так как функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой, то за произвольную точку оси Ox целесообразно взять $c=0$. **Следует запомнить:** если оба интеграла в правой части равенства (2.5.5) сходятся, то ин-

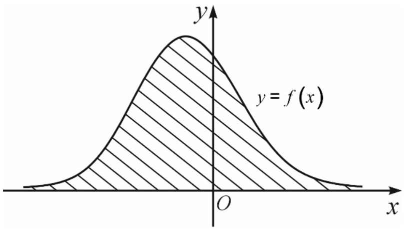
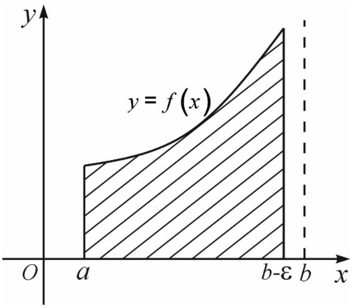
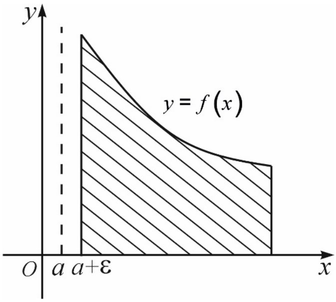
<table>
<tr><td>

Рис. 2.5.3</td><td>теграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся.
Замечание
Если хотя бы один из интегралов в правой части равенства (2.5.5) расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ расходится.
Геометрический смысл сходящегося несобственного интеграла первого рода $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (рис. 2.5.3), где $f(x) > 0$.</td></tr>
<tr><td>6.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, \qquad (2.5.6)$$
$\varepsilon > 0$</td><td>Перейдем к рассмотрению интегралов от функций с бесконечными разрывами (несобственные интегралы II рода).
Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a \le x < b$, а при $x = b$ имеет бесконечный разрыв (т.е. $x = b$ – точка разрыва второго рода).
Следует запомнить:
несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной при $a \le x < b$ и имеющей бесконечный разрыв при $x = b$, называется предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), формула (2.5.6).
Следует запомнить:
если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то несобственный интеграл называется сходящимся,</td></tr>
</table>

	если же указанный предел бесконечен или не существует – интеграл называется **расходящимся**.
7.  Рис. 2.5.4	**Геометрический смысл** сходящегося несобственного интеграла второго рода $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ ($x=b$ – точка бесконечного разрыва, т.е. точка разрыва второго рода). График функции $y=f(x)$, где $f\left(x\right)>0$ ограничивает бесконечно высокую криволинейную трапецию (рис. 2.5.4). **Следует запомнить:** если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ ($x=b$ – точка бесконечного разрыва) **сходится**, то говорят, что заштрихованная фигура измеряет площадь этой бесконечной трапеции; в противном случае трапеция площади не имеет.
8. $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f\left(x\right)dx$ (2.5.7) $\varepsilon>0$	Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна для всех значений x, $a<x\le b$, а при $x=a$ имеет бесконечный разрыв (т.е. $x=a$ – точка разрыва второго рода). **Следует запомнить:** несобственным интегралом от функции $f(x)$, непрерывной при $a<x\le b$ и имеющей бесконечный разрыв при $x=a$, называется предел интеграла $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f\left(x\right)dx$ при $\varepsilon\to 0$ ($\varepsilon>0$), формула (2.5.7).

 Рис. 2.5.5	**Замечание** Выводы о сходимости или расходимости $\int_a^b f(x)dx$, где $x = a$ – точка бесконечного разрыва, аналогичны пункту 6. **Геометрический смысл** сходящегося несобственного интеграла второго рода $\int_a^b f(x)dx$ ($x = a$ – точка разрыва второго рода). График функции $y = f(x)$, где $f(x) > 0$ ограничивает бесконечно высокую криволинейную трапецию (рис. 2.5.5). **Следует запомнить:** если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ ($x = a$ – точка разрыва второго рода) **сходится**, то говорят, что заштрихованная фигура измеряет площадь этой бесконечной трапеции (рис. 2.5.5); в противном случае трапеция площади не имеет.
9. $\int_a^b f(x)dx =$ $= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (2.5.8)$	Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в некоторой точке $x = c$ внутри отрезка $[a; b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ разбивают на два интеграла (2.5.8). **Замечание 1** К интегралу $\int_a^c f(x)dx$ применяем формулу (2.5.6), а к интегралу $\int_c^b f(x)dx$ – формулу (2.5.7).

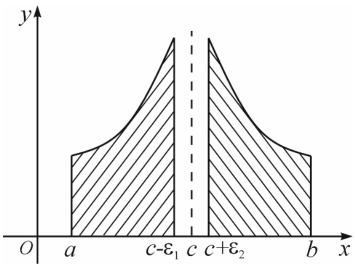
<table>
<tr>
<td>

Рис. 2.5.6</td>
<td>Следует запомнить:
если оба интеграла в правой части равенства (2.5.8) сходятся, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется сходящимся.
Замечание 2
Если хотя бы один из интегралов в правой части равенства (2.5.8) расходится, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.
Геометрический смысл сходящегося несобственного интеграла второго рода $\int_a^b f(x)dx$, где $c \in (a;b)$ – точка бесконечного разрыва (рис. 2.5.6).
Замечание 3
ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга, $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>10. $\int_a^b f(x)dx =$
$$=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx \qquad (2.5.9)$$</td>
<td>Следует запомнить:
если функция $y=f(x)$ имеет бесконечные разрывы при $x=a$ и $x=b$, а при $x\in(a,b)$ функция $f(x)$ – непрерывна, то отрезок $[a;b]$ разбивают на два отрезка любой внутренней точкой $c\in(a,b)$ (2.5.9).
К интегралу $\int_a^c f(x)dx$ применяют формулу (2.5.7), а к интегралу $\int_c^b f(x)dx$ – формулу (2.5.6).
Замечание
Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет внутри отрезка конечное число точек разры-</td>
</tr>
</table>

$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{c_n}^b f(x)dx$ (2.5.10)	ва второго рода $c_1, c_2, ..., c_n$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется по формуле (2.5.10).
11.	**Следует запомнить:** при вычислении интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, функция $y = f(x)$ может иметь бесконечный разрыв в одном из пределов интегрирования или во внутренней точке интервала (a; b), тогда применять формулу Ньютона – Лейбница нельзя. Если вычислить данный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, **не обращая внимание** на разрыв подынтегральной функции в одной из этих точек, то полученный результат будет **неверным**.

Задачи

Задача 1

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+5}$;

б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^x dx$.

Решение

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+5} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+5}$ (формула (2.5.2)).

Применяя метод подведения под знак дифференциала, получаем:
$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d\left(3x^2-7x+5\right)}{3x^2-7x+5}=\lim_{b\to+\infty}\ln\left|3x^2-7x+5\right|\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\left|3b^2-7b+5\right|-\ln 5\right]=+\infty,$$
т.е. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{(6x-7)dx}{3x^2-7x+5}$ – расходится;

б) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x^2+x+1}$ (формула (2.5.3)).

Выделяя полный квадрат в знаменателе, получаем:
$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{x^2+x+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\lim_{a\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_a^0=$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg|_a^0=\frac{2}{\sqrt{3}}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$
так как $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arctg}(-\infty)=-\operatorname{arctg}\infty=-\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ – сходится;

в) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^x dx=\int\limits_{-\infty}^{0}xe^x dx+\int\limits_0^{+\infty}xe^x dx$ (формула (2.5.5)).

Рассмотрим $I_2=\int\limits_0^{+\infty}xe^x dx$.

Применим формулу интегрирования по частям.

Полагая $u=x$, $dv=e^x dx$, получаем $du=dx$, $v=e^x$.

Тогда $I_2=\int\limits_0^{+\infty}xe^x dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b xe^x dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(xe^x\Big|_0^b-\int\limits_0^b e^x dx\right)=$
$$=\lim_{b\to+\infty}e^x(x-1)\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(e^b(b-1)+1\right)=+\infty.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty}xe^x dx$ – расходится. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}xe^x dx$ вычислять не нужно, так как, согласно замечанию п.5. §5, если хотя бы один из интегралов расходится, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xe^x dx$ расходится.

Задача 2

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^3}}$;

б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}$;

в) $\int\limits_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Решение

а) $\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^3}}$.

При $x=3$ подынтегральная функция $\frac{x^2}{\sqrt{27-x^3}}$ имеет бесконечный разрыв.

Учитывая формулу (2.5.6), получаем:

$$\int\limits_{1}^{3}\frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^3}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1}^{3-\varepsilon}\frac{x^2dx}{\sqrt{27-x^3}}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1}^{3-\varepsilon}\frac{d\left(27-x^3\right)}{\sqrt{27-x^3}}=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}2\sqrt{27-x^3}\Big|_{1}^{3-\varepsilon}=$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{27-(3-\varepsilon)^3}-\sqrt{26}\right)=\frac{2\sqrt{26}}{3}$$, т.е. интеграл сходится;

б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}$.

При $x=1$ подынтегральная функция $\frac{1}{(x-1)^4}$ имеет бесконечный разрыв.

Учитывая формулу (2.5.7), получаем:

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{(x-1)^4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2}\frac{d(x-1)}{(x-1)^4}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3(x-1)^3}\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)=-\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(1-\frac{1}{(1+\varepsilon-1)^3}\right)=\infty,$$

т.е. этот несобственный интеграл расходится;

в) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Так как внутри отрезка интегрирования существует точка $x=4$, где подынтегральная функция разрывна, то интеграл $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ нужно представить в виде суммы двух интегралов (формула (2.5.8)).

$$\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

К первому интегралу $I_1 = \int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ применяем формулу (2.5.6), так как $x=4$ – точка бесконечного разрыва.

$$I_1 = \int\limits_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{2}^{4-\varepsilon} \frac{d(4-x)}{(4-x)^{\frac{2}{3}}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{4-x}\Big|_{2}^{4-\varepsilon} =$$

$= -3\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{4-(4-\varepsilon)} - \sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{2}$, т.е. интеграл сходится.

Ко второму интегралу $I_2 = \int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ применяем формулу (2.5.7).

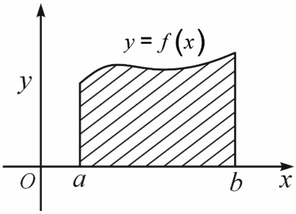
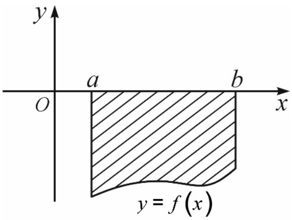
$$I_2 = \int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{4+\varepsilon}^{6} \frac{d(4-x)}{(4-x)^{\frac{2}{3}}} = -3\lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt[3]{4-x}\Big|_{4+\varepsilon}^{6} =$$

$= -3\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{-2} - \sqrt[3]{4-(4+\varepsilon)}\right) = 3\sqrt[3]{2}$, т.е. интеграл сходится.

Так как оба интеграла сходятся, то интеграл $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ также сходится, причем $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$.

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГЕОМЕТРИИ

§1. Вычисление площадей плоских фигур

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.  Рис. 3.1.1 $S=\int_a^b f(x)dx$ (3.1.1)	**В декартовой системе координат** площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 3.1.1), определяется по формуле (3.1.1). **Замечание 1** Функция $f(x)\geq 0$ на отрезке $[a;b]$. **Замечание 2** Как было показано выше (глава II, §1), формула (3.1.1) выражает геометрический смысл определенного интеграла.
2.  Рис. 3.1.2 $S=-\int_a^b f(x)dx$ (3.1.2)	**Следует запомнить:** если $f(x)\leq 0$ на отрезке $[a;b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx\leq 0$, следовательно, площадь криволинейной трапеции находят по формуле (3.1.2).

<table>
<tr>
<td>

3.

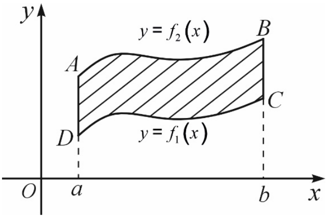


Рис. 3.1.3

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx \qquad (3.1.3)$$

</td>
<td>

Плоская фигура ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, причем $f_1(x)\le f_2(x)$, $(a\le x\le b)$ (рис. 3.1.3).

Следует запомнить:
площадь фигуры $ABCD$ равна разности площадей криволинейных трапеций S_2 и S_1, где $S_2=S_{aABb}$, а $S_1=S_{aDCb}$ (рис. 3.1.3).

</td>
</tr>
<tr>
<td>

4.

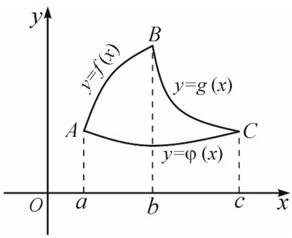


Рис. 3.1.4

$$S=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c g(x)dx-\int_a^c \varphi(x)dx$$

(3.1.4)

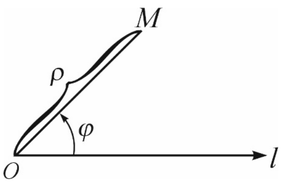
</td>
<td>

Плоская фигура ограничена кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=\varphi(x)$. В качестве величин a, b, c служат абсциссы точек пересечения заданных кривых.

Следует запомнить:
площадь фигуры ABC равна сумме площадей криволинейных трапеций S_1 и S_2, где $S_1=S_{aABb}$, а $S_2=S_{bBCc}$ минус площадь криволинейной трапеции S_3, $S_3=S_{aACc}$ (3.1.4).

Замечание
Если плоская фигура является симметричной, то решение задачи можно упростить, вычислив, например, половину площади искомой фигуры, если она имеет одну ось симметрии, или четверть искомой площади, если фигура имеет две оси симметрии и т.д.

</td>
</tr>
</table>

5. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ (3.1.5) $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt$ (3.1.6)	**Следует запомнить:** если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной **параметрическими уравнениями** (3.1.5), то **площадь** фигуры вычисляется по формуле (3.1.6). **Замечание** Если линия задана параметрическими уравнениями (3.1.5), то формулу (3.1.6) получаем из формулы (3.1.1) с учетом того, что $dx = x'(t)dt$, а α и β определяем из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.
Полярные координаты	
6.  Рис. 3.1.5	Полярная система координат определяется заданием некоторой точки *O* (полюса), исходящего из этой точки луча (полярной оси) и указанием единицы масштаба (рис. 3.1.5).
7.  Рис. 3.1.6	Полярными координатами произвольной точки *M* называются числа $\rho = OM$ и φ (рис. 3.1.6), где ρ – полярный радиус, φ – полярный угол.
$M(\rho, \varphi)$ (3.1.7)	Задание точки *M* в полярной системе координат. **Замечание 1** Угол φ будем понимать так, как это принято в тригонометрии (т.е. углы, получаемые при вращении полярной оси вокруг полюса против часовой стрелки; при вращении полярной оси по часовой стрелке – отрицательны).

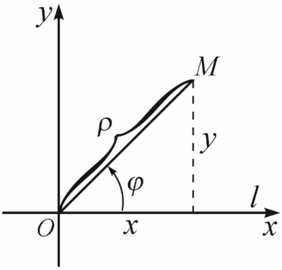
<table>
<tr><td></td><td>Замечание 2
Для того чтобы соответствие между точками плоскости и парами чисел (ρ,φ) было взаимооднозначным, обычно считают, что $0 \le \rho < \infty$ и $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).</td></tr>
<tr><td>8.


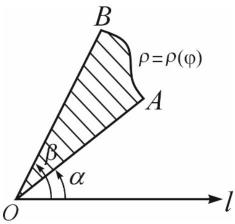
Рис. 3.1.7
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \qquad (3.1.8)$$</td><td>Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось OX совпадает с полярной осью, ось же OY перпендикулярна оси OX и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты определяются по формулам (3.1.8) (рис. 3.1.7).</td></tr>
<tr><td>9. $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$ (3.1.9)</td><td>Если известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам (3.1.9).</td></tr>
<tr><td>10. $\rho = \rho(\varphi)$
или (3.1.10)
$F(\rho,\varphi) = 0$</td><td>Уравнение линии в полярной системе координат (3.1.10).</td></tr>
<tr><td>11.


Рис. 3.1.8</td><td>Следует запомнить:
в полярных координатах площадь сектора OAB, ограниченного дугой кривой AB, с уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выражается формулой (3.1.11).</td></tr>
</table>

$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$ (3.1.11)	**Замечание 1** Построение кривой в полярной системе координат будет показано ниже на конкретном примере. **Замечание 2** Уравнения $\rho=a\sin k\varphi$ и $\rho=a\cos k\varphi$, где a и k – постоянные величины, описывают кривые, называемые «математическими розами». Если k – четное число, то кривая имеет $2k$ «лепестков», если k – нечетное число, то кривая имеет k «лепестков». В случае, когда $k=1$, «однолепестковая роза» является окружностью.

Задачи

Задача 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$, $y=\frac{8}{x}$ и прямой $x=4$.

Решение

Найдем точку пересечения параболы $y=x^2$ и гиперболы $y=\frac{8}{x}$.

С этой целью решим систему уравнений $\begin{cases} y=x^2, \\ y=\frac{8}{x}. \end{cases}$

Тогда $x^2=\frac{8}{x}$, $x^3=8$, $x=2$, следовательно, $y=4$.

Точка A – пересечения параболы и гиперболы имеет координаты $A(2;4)$.

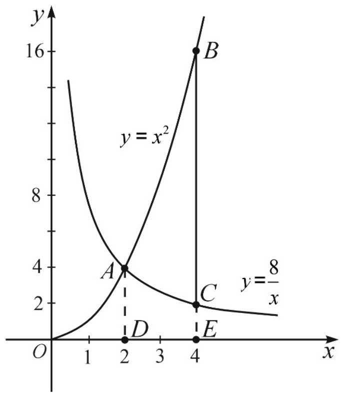


Рис. 3.1.9

Точка $B(4;16)$ – точка пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $x = 4$.

Точка $C(4;2)$ – точка пересечения гиперболы $y = \dfrac{8}{x}$ и прямой $x = 4$ (рис. 3.1.9).

Искомая площадь ABC равна разности площадей $S_1 = S_{DABE}$ и $S_2 = S_{DACE}$.

Согласно формуле (3.1.3), получаем:

$$S = \int_2^4 \left(x^2 - \frac{8}{x} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 8\ln|x| \right) \Bigg|_2^4 = \frac{64}{3} - 8\ln 4 - \frac{8}{3} + 8\ln 2 =$$

$$= \frac{56}{3} - 8\ln 2 \approx 17{,}28.$$

Задача 2

Найти площадь фигуры, лежащей в правой полуплоскости и ограниченной окружностью $x^2 + y^2 = 8$ и параболой $y^2 = 2x$.

Решение

Найдем точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 8$ и параболы $y^2 = 2x$. Решаем систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ y^2 = 2x. \end{cases}$

Уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$ имеет корни $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Корень $x = -4$ не удовлетворяет уравнению $y^2 = 2x$, а при $x = 2$ получаем $y_1 = 2$, $y_2 = -2$, т.е. $A(2;2)$, а $B(2;-2)$.

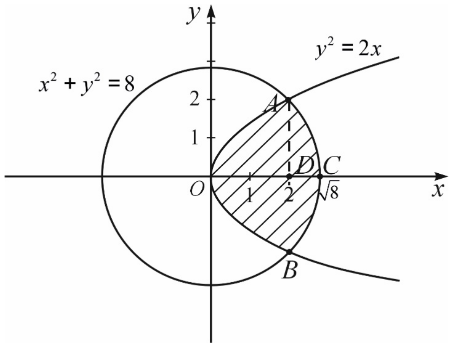


Рис. 3.1.10

$C\left(\sqrt{8};0\right)$ – точка пересечения окружности $x^2 + y^2 = 8$ с осью *OX*.

Фигура *OACB* симметрична относительно оси *OX*, следовательно, учитывая замечание §1, п. 4, вычислим площадь фигуры *OAC* и результат удвоим.

$S_{OAC} = S_{OAD} + S_{ADC}$ (рис. 3.1.10). На основании формулы (3.1.1) получаем: $S_{OAD} = \int\limits_0^2 \sqrt{2x}dx = \sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot 2}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8} = \frac{8}{3}$.

$$S_{ADC} = \int\limits_2^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}dx.$$

Искомый интеграл проще всего вычислить при помощи подстановки:

$$x = \sqrt{8}\sin t \text{ (гл. I, §5, п. 6)},$$

$$dx = \sqrt{8}\cos t dt.$$

При $x = 2$ из уравнения $2 = \sqrt{8}\sin t$ получаем $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$, а при $x = \sqrt{8}$ соответственно $\sqrt{8} = \sqrt{8}\sin t$, $\sin t = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$. Новые пределы интегрирования $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$S_{ADC}=\int\limits_{2}^{\sqrt{8}}\sqrt{8-x^2}\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot\sqrt{8}\cos t dt=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=8\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)=4\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\pi-2.$$

Итак, площадь фигуры OAC: $S=\frac{8}{3}+\pi-2=\frac{2}{3}+\pi\approx 3{,}81$. Следовательно, $S_{OACB}\approx 7{,}62$.

Задача 3

Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y=2x-x^2+3$ и $y=x^2-4x+3$.

Решение

Найдем точки пересечения парабол. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y=2x-x^2+3,\\ y=x^2-4x+3. \end{cases}$$

Получаем $2x^2-6x=0$, т.е. $x = 0$, $x = 3$.

При $x = 0$, $y=3$, а при $x = 3$, $y=0$. Указанные параболы пересекаются в точках $A(0;3)$ и $B(3;0)$.

Вершина параболы, заданной уравнением $y=2x-x^2+3$, находится в точке $C(1;4)$, а вершина параболы $y=x^2-4x+3$ находится в точке $D(2;-1)$.

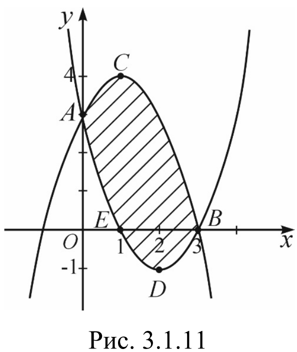


Рис. 3.1.11

Искомую площадь S_{ACBD} можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций:

$S_{ACBD} = S_{OACB} - S_{OAE} + S_{EDB}$ (рис. 3.1.11).

На основании формулы (3.1.1) получаем:

$$S_{OACB} = \int_0^3 \left(2x - x^2 + 3\right)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x \right)\Bigg|_0^3 = 9 - 9 + 9 = 9,$$

$$S_{OAE} = \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}.$$

Фигура *EDB* расположена ниже оси *OX*, т.е. $f(x) \le 0$, следовательно, для нахождения площади фигуры используем формулу (3.1.2).

$$S_{EDB} = -\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right)\Bigg|_1^3 = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $S_{ACBD} = 9 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 9$.

Задача 4

Вычислить площадь фигуры, ограниченную эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Решение

Каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 3.1.12).

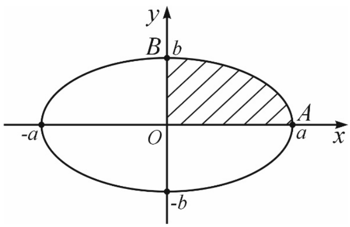


Рис. 3.1.12

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения эллипса.

Так как эллипс имеет две оси симметрии, которые совпадают с осями координат, найдем первоначально четверть искомой площади (замечание §1, п. 4), т.е. S_{OBA}.

$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt$ (формула (3.1.6)).

Учитывая, что $0 \le x \le a$ и $x = a\cos t$, получаем новые пределы интегрирования $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $t_2 = 0$.

Тогда $S_{OBA} = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)dt = ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot dt =$ (глава 1, §10, п. 2) =

$$= ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{ab}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab\pi}{4}.$$

Следовательно, искомая площадь равна πab .

Задача 5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$, где $a > 0$.

Решение

Уравнение кривой $\rho = a(1+\cos\varphi)$ задано в полярных координатах.

Построим линию $\rho = a(1+\cos\varphi)$, где $a > 0$.

Будем давать значения полярному углу φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$ и вычислим соответствующие значения ρ . Найденные значения поместим в таблицу. Примем произвольный отрезок за единицу масштаба, которой мы будем пользоваться при построении ρ . По значениям ρ и φ из таблицы построим точки, соответствующие каждой паре чисел ρ и φ , и соединим их плавной кривой.

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	$2a$	$1{,}92a$	$1{,}71a$	$1{,}38a$	a	$0{,}62a$	$0{,}29a$	$0{,}08a$	0	$0{,}08a$	$0{,}29a$	$0{,}62a$	a

$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$1{,}38a$	$1{,}71a$	$1{,}92a$	$2a$

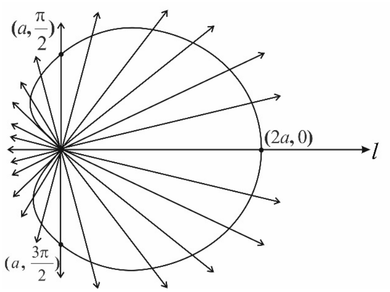


Рис. 3.1.13

Ввиду четности функций кривая симметрична относительно полярной оси.

Для решения используем формулу (3.1.11):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi .$$

Учитывая симметрию кривой относительно полярной оси (рис. 3.1.14), найдем площадь фигуры ABO и результат удвоим.

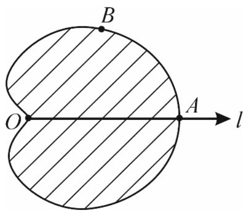


Рис. 3.1.14

Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ при изменении полярного угла φ от 0 до π.

Тогда,

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = \frac{a^2}{2}\left(\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3a^2\pi}{4}.$$

Следовательно, площадь фигуры, ограниченная кардиоидой, равна $\frac{3}{2}\pi a^2$.

Задача 6

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2\sin 7\varphi$.

Решение

Линия $\rho = 2\sin 7\varphi$ – семилепестковая роза. Учитывая тот факт, что все лепестки одинаковые, нам достаточно найти площадь одного лепестка и результат увеличить в 7 раз.

При $\varphi = 0$, $\rho = 0$. На следующем этапе решаем уравнение $2\sin 7\varphi = 0$, $\sin 7\varphi = 0$, $7\varphi = \pi n$, $\varphi = \frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$.

Тогда при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi n}{7}$ $\rho = 0$.

Следовательно, первый лепесток расположен между лучами, выходящими из полюса, под углами $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \frac{\pi}{7}$.

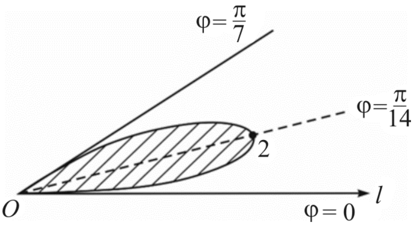


Рис. 3.1.15

Наибольшая длина лепестка достигается при $\varphi = \frac{\pi}{14}$.

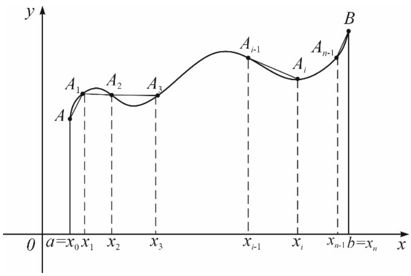
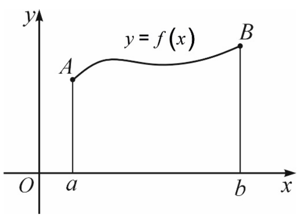
$\rho\left(\frac{\pi}{14}\right) = 2$ (рис. 3.1.15).

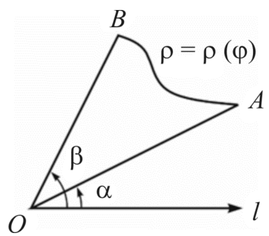
Для решения используем формулу $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{7}} 4\sin^2 7\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{7}}(1-\cos 14\varphi)\,d\varphi = \left(\varphi - \frac{1}{14}\sin 14\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{7}} = \frac{\pi}{7},$$

$S = 7S_1 = \pi$.

§2. Вычисление длин дуг плоских кривых

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.  Рис. 3.2.1	Пусть на плоскости задана дуга $\breve{AB}$ (рис. 3.2.1). Разобьем дугу точками $A_1, A_2, ..., A_n$ и соединим соседние точки отрезками прямых, получим ломаную линию, вписанную в дугу $\breve{AB}$. Обозначим длину отрезка AA_1 за Δl_1, длину AA_2 – за $\Delta l_2, \ldots$, длину AA_n за Δl_n.
$L_n = \Delta l_1 + \Delta l_2 + ... + \Delta l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$ (3.2.1)	L_n – длина ломаной.
$L = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta l_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta l_i$ (3.2.2)	**Следует запомнить:** **длиной** L дуги плоской кривой называется предел, к которому стремится длина вписанной в нее ломаной, когда количество звеньев неограниченно увеличивается, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю (3.2.2).
2.  Рис. 3.2.2	Кривая $\breve{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция, имеющая непрерывную производную $f'(x)$ для $x \in [a;b]$ (рис. 3.2.2).
$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$ (3.2.3)	Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах.

3. $$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt \qquad (3.2.4)$$	**Следует запомнить:** если уравнение кривой задано в параметрической форме: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $(\alpha\le t\le\beta)$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные $x'(t)$ и $y'(t)$, причем $x'(t)\neq 0$, то длина дуги кривой находится по формуле (3.2.4). **Замечание** Формулу (3.2.4) легко получить из формулы (3.2.3), учитывая, что $f'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.
4.  Рис. 3.2.3 $$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi \qquad (3.2.5)$$	Кривая $\breve{AB}$ задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$. **Следует запомнить:** длина дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах, находится по формуле (3.2.5). **Замечание 1** $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ – непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$. **Замечание 2** Формулу (3.2.5) легко получить из формулы (3.2.4), если в равенст-

	вах (3.1.8) $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ, т.е. $\begin{cases} x=\rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Задачи

Задача 1

Найти длину дуги кривой $9y^2=4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью OY.

Решение

Кривая $9y^2=4(3-x)^3$ – полукубическая парабола. Запишем уравнение кривой в виде $9y^2=-4(x-3)^3$.

Вершина параболы в точке $O'(3;0)$.

Если кривая пересекает ось OY, то $x=0$.

Следовательно, $9y^2=4\cdot 3^3$, $y=\pm 2\sqrt{3}$.

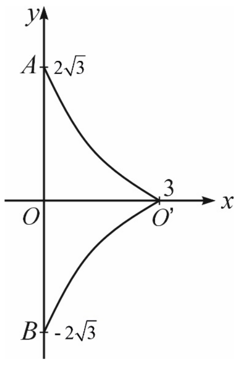


Рис. 3.2.4

Дуга кривой $AO'B$ симметрична относительно оси OX, следовательно, найдем длину дуги $\breve{AO'}$ и результат удвоим.

Для решения используем формулу (3.2.3):

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx.$$

Дуга $\breve{AO'}$ расположена в I четверти, следовательно, $y\geq 0$, т.е. $y=\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3}$.

Тогда $y'=-\sqrt{3-x}$.

$$L_{\overset{\cup}{AO'}}=\int_0^3\sqrt{1+3-x}dx=\int_0^3\sqrt{4-x}dx=-\frac{2(4-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^3=-\frac{2}{3}(1-8)=\frac{14}{3}.$$

Следовательно, $L_{\overset{\cup}{AO'B}}=\frac{28}{3}$.

Задача 2

Вычислить длину дуги астероиды $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ от точки $A(1;0)$ до точки $B\left(\frac{1}{8};\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

Решение

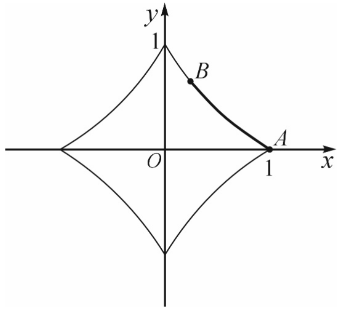


Рис. 3.2.5

Астроида задана параметрическими уравнениями, поэтому для вычисления длины дуги используем формулу (3.2.4):

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Определим изменение параметра t.

Учитывая, что $x = \cos^3 t$, а $x_A = 1$, получим $\cos^3 t = 1$.

Следовательно, $t_1 = 0$.

При $x_B = \frac{1}{8}$ получим $\cos^3 t = \frac{1}{8}$, $\cos t = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

Дифференцируя по t параметрические уравнения астроиды, получаем:

$x'(t) = 3\cos t \cdot (-\sin t)$;

$y'(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$.

Тогда $x'^2(t) + y'^2(t) = 9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t =$

$= 9\sin^2 t \cos^2 t \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = 9\sin^2 t \cos^2 t$.

Следовательно, $L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t}\, dt = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin t| \cdot |\cos t|\, dt$.

Так как $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$, то $|\sin t| = \sin t$, $|\cos t| = \cos t$.

Поэтому

$$L = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t \cdot \cos t dt = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t d(\sin t) = \frac{3\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}.$$

Задача 3

Вычислить длину дуги кривой $\rho = a\sec\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ при изменении полярного угла φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Решение

Так как кривая задана уравнением в полярных координатах, для решения применяем формулу (3.2.5):

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

$\rho = a\sec\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$ или $\rho = \dfrac{a}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)}$.

Найдем производную от функции ρ :

$$\rho'_\varphi=\frac{a\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{a}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{a}{\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}\cdot\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда:

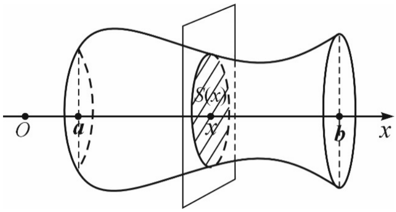
$$\rho^2(\varphi)+\rho'(\varphi)=\frac{a^2}{\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{a^2\operatorname{tg}^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{a^2}{\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

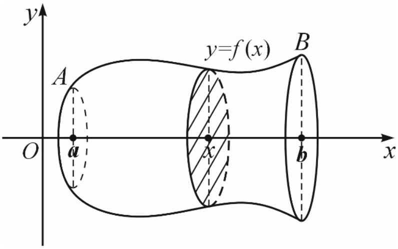
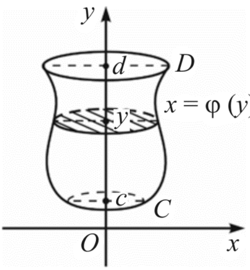
$$=\frac{a^2}{\cos^4\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Следовательно, $L=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}}d\varphi=a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^2\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}=$

$$=a\operatorname{tg}\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=a\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}a.$$

§3. Вычисление объема тела

Основные формулы и рисунки	Определения и замечания
1.  Рис. 3.3.1 $S(x)$ – площадь поперечного сечения (3.3.1)	Рассмотрим некоторое тело, объем V которого мы хотим определить (рис. 3.3.1). **Следует запомнить:** **сечение** тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, называется **поперечным** сечением. **Замечание 1** Положение поперечного сечения определяется абсциссой x точки его пересечения с осью OX. **Следует запомнить:** площадь поперечного сечения $S(x)$ есть некоторая функция, зависящая от x, и с изменением x площадь сечения изменяется. **Замечание 2** Если провести сечение перпендикулярно оси OY, то площадь поперечного сечения есть функция, зависящая от y, т.е. $S(y)$. Аналогично, для $S(z)$.
2. $V=\int\limits_a^b S(x)dx$ (3.3.2)	V – объем тела. $S(x)$ – площадь поперечного сечения. a и b – левая и правая границы изменения x. **Замечание** (3.3.2) – формула вычисления объема тела по известному поперечному сечению.

3.  Рис. 3.3.2	Криволинейная трапеция $aABb$, ограниченная непрерывной линией $y=f(x)\geq 0$, вращается вокруг оси OX (рис. 3.3.2). **Следует запомнить:** **поперечное сечение**, проведенное через произвольную точку $x\in(a;b)$, есть **круг**, радиус которого $y=f(x)$.
$S(x)=\pi f^2(x)$ (3.3.3)	Учитывая, что площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$, получаем площадь поперечного сечения (формула (3.3.3)).
$V_{OX}=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$ (3.3.4)	По формуле (3.3.4) находим объем тела вращения. **Замечание** Формула (3.3.4) получается из формулы (3.3.2) с учетом формулы (3.3.3).
4.  Рис. 3.3.3	Криволинейная трапеция $cCDd$, ограниченная линией $x=\varphi(y)\geq 0$, вращается вокруг оси OY (рис. 3.3.3). **Следует запомнить:** **поперечное сечение**, проведенное через произвольную точку $y\in(c,d)$, есть **круг**, радиус которого $x=\varphi(y)$.
$S(y)=\pi\varphi^2(y)$ (3.3.5)	Площадь поперечного сечения.
$V_{OY}=\pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$ (3.3.6)	По формуле (3.3.6) находим объем тела вращения.

Задачи

Задача 1

Определить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+\frac{y^2}{4}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$.

Решение

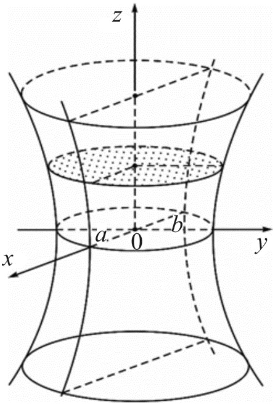


Рис. 3.3.4

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид, a и b – действительные полуоси, c – мнимая полуось.

При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью $z=\text{const}$ получится эллипс, уравнения которого имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2}, \\ z=\text{const}. \end{cases}$$

Выполняя преобразования, получим: $\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)}=1.$

Полуоси эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$, имеют вид: $m=a\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}$, $n=b\sqrt{1+\frac{z^2}{c^2}}$.

Тогда площадь поперечного сечения:

$S(z)=\pi mn$ (задача 4, §1),

$$S(z)=\pi ab\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

Так как поперечное сечение проведено перпендикулярно оси OZ, то $V=\int\limits_{z_1}^{z_2} S(z)dz$.

В данной задаче $a=1$, $b=2$, $c=1$, поэтому полуоси эллипса имеют вид: $m=\sqrt{1+z^2}$, $n=2\sqrt{1+z^2}$.

Тогда площадь поперечного сечения $S(z)=2\pi\left(1+z^2\right)$.

$$V=\int\limits_0^3 2\pi\left(1+z^2\right)dz=2\pi\left(z+\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=2\pi(3+9)=24\pi.$$

Задача 2

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=2$:

а) вокруг оси OX;

б) вокруг оси OY.

Решение

а) Кубическая парабола $y=x^3$ и прямая $x=2$ пересекаются в точке $A(2;8)$ (рис. 3.3.5).

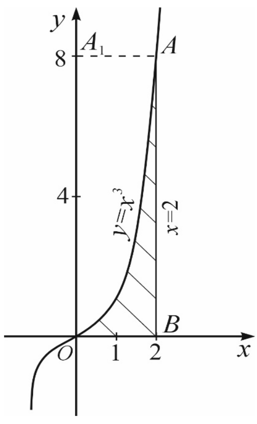


Рис. 3.3.5

Фигура *OAB* вращается вокруг оси *OX*. Объем полученного тела найдем по формуле (3.3.4):

$$V_{OX}=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

$$V_{OX}=\pi\int_0^2 x^6dx=\left.\frac{\pi x^7}{7}\right|_0^2=\frac{128\pi}{7}.$$

б) Фигура *OAB* (рис. 3.3.5) при вращении вокруг оси *OY* образует тело, объем которого можно найти как разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси *OY* прямоугольника $OBAA_1$ и криволинейной трапеции OAA_1.

$V_{OY}=V_1-V_2$, где V_1 и V_2 вычисляем по формуле (3.3.6).

$V_{OY}=\pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$ или $V_{OY}=\pi\int_c^d x^2dy$.

Тогда $V_{OY}=\pi\int_0^8\left(4-y^{\frac{2}{3}}\right)dy=\pi\left.\left(4y-\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}}\right)\right|_0^8=\pi\left(32-\frac{3}{5}\cdot 8^{\frac{5}{3}}\right)=$

$=\pi\left(32-\frac{3\cdot 32}{5}\right)=32\pi\cdot\frac{2}{5}=\frac{64\pi}{5}.$

Задача 3

Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $4x-y=0$, $3x-2y=0$, $x+y-5=0$, вокруг оси *OX*.

Решение

Прямые $4x-y=0$ и $3x-2y=0$ пересекаются в начале координат.

Найдем точку пересечения прямых $4x-y=0$ и $x+y-5=0$. С этой целью решим систему $\begin{cases}4x-y=0,\\ x+y-5=0.\end{cases}$

Получаем $5x=5$, $x=1$. Следовательно, $y=4$.

Указанные прямые пересекаются в точке $A(1;4)$.

Аналогично найдем точку пересечения прямых $3x-2y=0$ и $x+y-5=0$.

$B:\begin{cases}3x-2y=0,\\ x+y-5=0.\end{cases}$ $B(2;3)$ (рис. 3.3.6).

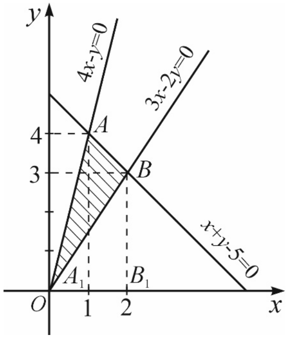


Рис. 3.3.6

Ограниченная данными линиями фигура OAB (см. рис. 3.3.6) при вращении вокруг оси OX образует тело, объем которого можно найти как сумму объемов тел, образованных вращением вокруг оси OX криволинейных трапеций OAA_1 и A_1ABB_1, минус объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции OBB_1, т.е. $V_{OX} = V_1 + V_2 - V_3$.

Объемы V_1, V_2, V_3 находим по формуле (3.3.4).

$$V_1 = \pi\int_0^1 16x^2 dx = 16\pi \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{16\pi}{3}.$$

$$V_2 = \pi\int_1^2 (5-x)^2\, dx = \int_1^2 (x-5)^2\, d(x-5) = \frac{\pi(x-5)^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{\pi}{3}(-27+64) = \frac{37\pi}{3}.$$

$$V_3 = \pi\int_0^2 \frac{9}{4}x^2 dx = \frac{9}{4}\pi\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = 6\pi.$$

Таким образом, искомый объем определяем как

$$V_{OX} = \frac{16\pi}{3} + \frac{37\pi}{3} - 6\pi = \frac{35\pi}{3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Основные методы интегрирования

Вариант 1

а) $\int\left(4+3x^2\right)^6 x dx$	л) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-3x^6}}$
б) $\int\frac{dx}{x^2\sin^2\frac{3}{x}}$	м) $\int\frac{e^{\operatorname{tg}4x}dx}{\cos^2 4x}$
в) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x+9}}$	н) $\int\frac{\operatorname{tg}\left(\ln 3x\right)}{x}dx$
г) $\int\frac{e^{3x}dx}{e^{6x}-81}$	о) $\int\frac{dx}{3^{-x}\left(4-5\cdot 3^x\right)}$
д) $\int\frac{\sin x dx}{9+16\cos^2 x}$	п) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
е) $\int\frac{5^{\operatorname{arctg}4x}}{1+16x^2}dx$	р) $\int\frac{dx}{25x^2+40x+17}$
ж) $\int\frac{\cos 3x dx}{\sqrt{15+\sin^2 3x}}$	с) $\int\frac{dx}{\sqrt{16+12x-4x^2}}$
з) $\int(2-x)\operatorname{ctg}\left(4x-x^2\right)dx$	т) $\int\frac{(5x-7)dx}{x^2-3x+3}$
и) $\int\frac{x\cos\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}dx$	у) $\int\frac{2-9x}{\sqrt{2x^2-7x-30}}dx$
к) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}\arcsin^4 3x}$	

Вариант 2

а) $\int \left(1-5x^3\right)^3 x^2 dx$	л) $\int \mathrm{tg}\left(4+\sqrt{x^3}\right)\sqrt{x}dx$
б) $\int 3^x \sin 3^{x-1} dx$	м) $\int \frac{2^x dx}{\cos^2\left(5\cdot 2^x\right)}$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(9+2x\right)}$	н) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(\mathrm{tg}^2 x-3\right)}$
г) $\int \frac{1-x^2}{x^3-3x} dx$	о) $\int \frac{\cos\frac{3}{x}}{x^2} dx$
д) $\int \frac{dx}{\left(5-\ln^2 x\right)x}$	п) $\int \frac{\mathrm{ctg}\left(\ln 2x\right)}{x} dx$
е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{25-9x^8}} dx$	р) $\int \frac{dx}{9x^2-6x+10}$
ж) $\int \frac{\sin 5x dx}{\sqrt[3]{4-2\cos 5x}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-20x-25x^2}}$
з) $\int \frac{3^{\mathrm{ctg}\, 2x} dx}{\sin^2 2x}$	т) $\int \frac{5x-3}{2x^2-3x-2} dx$
и) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{3+e^x}}$	у) $\int \frac{\left(11x+3\right)dx}{\sqrt{3x^2+13x-10}}$
к) $\int \frac{x^3 dx}{e^{4x^4-1}}$	

Вариант 3

а) $\int\left(4-3x^{11}\right)^{6}x^{10}dx$	л) $\int\frac{1+\cos 3x}{15x+5\sin 3x}dx$
б) $\int\frac{dx}{\sin^{2}3x\left(5-7\,\mathrm{ctg}\,3x\right)}$	м) $\int\frac{e^{\frac{x}{3}}dx}{\sqrt{5-e^{\frac{2x}{3}}}}$
в) $\int\frac{5^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$	н) $\int\frac{\sin\left(\mathrm{arcctg}\,3x\right)}{1+9x^{2}}dx$
г) $\int\frac{2^{x}}{4^{x+1}-64}dx$	о) $\int\frac{\left(x^{2}-5x\right)dx}{\cos^{2}\left(\frac{x^{3}}{3}-\frac{5}{2}x^{2}+1\right)}$
д) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^{2}\left(7x\right)-1}}$	п) $\int\frac{\sin 2x}{25-\cos^{4}x}dx$
е) $\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{9+4\cos^{2}\frac{x}{2}}dx$	р) $\int\frac{dx}{25x^{2}+30x+25}$
ж) $\int\frac{e^{\mathrm{arctg}\,9x}}{1+81x^{2}}dx$	с) $\int\frac{dx}{\sqrt{6+6x-9x^{2}}}$
з) $\int\frac{\cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}dx$	т) $\int\frac{3x-4}{10x^{2}+13x-3}dx$
и) $\int e^{4x-1}\cdot\mathrm{ctg}\left(e^{4x-1}\right)dx$	у) $\int\frac{5-3x}{\sqrt{2x^{2}-3x-14}}dx$
к) $\int\frac{dx}{x^{5}\cdot\sin\frac{4}{x^{4}}}$	

Вариант 4

а) $\int\left(5+3\ln x\right)^4\dfrac{dx}{x}$	л) $\int\left(x^2-2x\right)\sin\left(x^3-3x^2+1\right)dx$
б) $\int\dfrac{x^4dx}{\sin^2\left(3x^5\right)}$	м) $\int\dfrac{dx}{\cos^2 3x\left(5\operatorname{tg}3x-1\right)}$
в) $\int\dfrac{\cos 3x dx}{\sqrt{5-\sin^2 3x}}$	н) $\int\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$
г) $\int\dfrac{x^7}{9+25x^8}dx$	о) $\int\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\ln 4x\right)}{x}dx$
д) $\int\dfrac{8^{\arcsin 4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}$	п) $\int\dfrac{\ln x}{x\cos^2\left(\ln^2 x\right)}dx$
е) $\int\dfrac{9^x}{11+81^x}dx$	р) $\int\dfrac{dx}{9x^2+42x+50}$
ж) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}\left(x-5\right)}$	с) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{40-24x-16x^2}}$
з) $\int\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{2}{x^3}}{x^4}dx$	т) $\int\dfrac{11x-7}{3x^2+13x-10}dx$
и) $\int\dfrac{e^{-x}}{7-e^{-2x}}dx$	у) $\int\dfrac{2-7x}{\sqrt{3x^2-17x-6}}dx$
к) $\int\dfrac{\sin 4x dx}{\sqrt{\cos^2 4x+3}}$	

Вариант 5

а) $\int x^5\left(5-3x^6\right)^6 dx$	л) $\int \frac{5\,\mathrm{tg}\left(3\ln x\right)}{x}dx$
б) $\int \frac{\sin\left(4-3\ln x\right)}{x}dx$	м) $\int \frac{\cos\frac{5}{x^3}}{x^4}dx$
в) $\int e^{\cos\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx$	н) $\int\left(6-4x\right)\mathrm{ctg}\left(8+3x-x^2\right)dx$
г) $\int \frac{x^3+\cos 2x}{x^4+2\sin 2x}dx$	о) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\cos^2\left(2\sqrt[4]{x}\right)}$
д) $\int \frac{6xdx}{\sqrt{4-25x^4}}$	п) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}\arccos^3 5x}$
е) $\int \frac{\cos 3xdx}{\sqrt{16\sin^2 3x+1}}$	р) $\int \frac{dx}{16x^2-24x+25}$
ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(\mathrm{ctg}^2 x+7\right)}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-4x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{e^{-x}\left(5-e^{2x}\right)}$	т) $\int \frac{8x-3}{3x^2-4x-7}dx$
и) $\int \frac{4^{\mathrm{tg}\left(1-3x\right)}dx}{\cos^2\left(3x-1\right)}$	у) $\int \frac{5-6x}{\sqrt{11x^2+22x+1}}dx$
к) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt[5]{7-8\cdot 3^x}}$	

Вариант 6

а) $\int x^7\left(3+4x^8\right)^2 dx$	л) $\int(3-2x)\sin\left(x^2-3x+8\right)dx$
б) $\int \frac{e^{\arccos 6x}}{\sqrt{1-36x^2}}dx$	м) $\int \frac{25^x dx}{\cos 5^{2x}}$
в) $\int \frac{\cos\left(\frac{5}{x}-3\right)}{x^2}dx$	н) $\int \frac{dx}{5x\sin^2(\ln x)}$
г) $\int x\cdot 2^{x^2}\cdot \operatorname{tg}2^{x^2}dx$	о) $\int \frac{3^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx$
д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\left(\arcsin^2 2x-10\right)}$	п) $\int \frac{\sin 2x dx}{13-7\cos^2 x}$
е) $\int \frac{e^{7x}dx}{\sqrt{13+e^{14x}}}$	р) $\int \frac{dx}{2x^2+5x+3}$
ж) $\int \frac{\sin\frac{x}{9}dx}{\sqrt{5-5\cos^2\frac{x}{9}}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-4x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\left(11+\operatorname{tg}^2 4x\right)}$	т) $\int \frac{9x-1}{3x^2+8x-2}dx$
и) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}\operatorname{ctg}\left(2+\sqrt[5]{x}\right)dx$	у) $\int \frac{6-5x}{\sqrt{5x^2+30x+11}}dx$
к) $\int \frac{dx}{3^x\left(14-9^{-x}\right)}$	

Вариант 7

а) $\int\left(2-7x^5\right)^3 x^4dx$	л) $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x^{\frac{3}{2}}}$
б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}\left(9+25\sqrt{x+1}\right)}$	м) $\int\frac{\left(8-12x\right)dx}{\cos^2\left(3-4x+3x^2\right)}$
в) $\int\frac{dx}{x\left(11+\ln^2\left(2x\right)\right)}$	н) $\int\sqrt[5]{7x-\sqrt{x}}\left(7-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
г) $\int\frac{dx}{e^{-3x}\sqrt{7-e^{6x}}}$	о) $\int\frac{4^x dx}{\sin 4^x}$
д) $\int\cos x\cdot\operatorname{tg}\left(2+\sin x\right)dx$	п) $\int\frac{\operatorname{ctg}\frac{3}{x^2}}{x^3}dx$
е) $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}\left(4\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-8\right)}$	р) $\int\frac{dx}{3x^2+15x-13}$
ж) $\int\frac{\sqrt[3]{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}}dx$	с) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-12x-4x^2}}$
з) $\int\frac{10^{\operatorname{tg}5x}dx}{\cos^2 5x}$	т) $\int\frac{8x+11}{6x^2-x-2}dx$
и) $\int\frac{e^{5\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}dx$	у) $\int\frac{11-3x}{\sqrt{2x^2-x-18}}dx$
к) $\int\frac{x^5dx}{16-8x^{12}}$	

Вариант 8

а) $\int \frac{x^3}{\left(5x^4-1\right)^2}dx$	л) $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{5+\sqrt{x^5}}$
б) $\int \frac{\left(e^x+x\right)dx}{\sin^2\left(2e^x+x^2\right)}$	м) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\sqrt[4]{\operatorname{arctg}3x}}$
в) $\int \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^2}dx}{x^3}$	н) $\int \frac{4-\sin 2x}{8x+\cos 2x}dx$
г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{6-8\ln^2 5x}}$	о) $\int 9^x\cos\left(3^{2x}\right)dx$
д) $\int \frac{2^{\arcsin 3x}}{\sqrt{9-81x^2}}dx$	п) $\int \frac{\arccos^2 4xdx}{\sqrt{1-16x^2}}$
е) $\int \frac{\sin\frac{x}{3}dx}{4-2\cos^2\frac{x}{3}}$	р) $\int \frac{dx}{8x^2+6x+1}$
ж) $\int \frac{e^{\operatorname{tg}4x}}{\cos^2 4x}dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{6+10x-15x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(\operatorname{ctg}^2 x-3\right)}$	т) $\int \frac{2x-5}{3x^2+4x+1}dx$
и) $\int \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^4\frac{x}{2}+2}}dx$	у) $\int \frac{7-6x}{\sqrt{4x^2-28x+50}}dx$
к) $\int 3^{x+1}\sin\left(3^{x+1}\right)dx$	

Вариант 9

а) $\int x^8\left(11-5x^9\right)^4 dx$	л) $\int \frac{\cos 4x \cdot \sin 4x}{\sqrt{3-\cos^4 4x}}dx$
б) $\int \frac{x}{4x^2-5}dx$	м) $\int \frac{dx}{x\sin^2 \ln\sqrt{x}}$
в) $\int \frac{\sin 9x dx}{\sqrt{\cos^2 9x+5}}$	н) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x\left(\operatorname{tg}^2 5x-4\right)}$
г) $\int \frac{8^{\arcsin 4x}}{\sqrt{1-16x^2}}dx$	о) $\int \left(1-x^2\right)\operatorname{tg}\left(3x-x^3\right)dx$
д) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x}}{1+9x^2}dx$	п) $\int \sqrt[5]{8x-\sqrt{x}}\left(8-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
е) $\int \left(3x^2-2\right)\sin\left(x^3-2x\right)dx$	р) $\int \frac{dx}{16x^2-14x+9}$
ж) $\int 3^{x^2}\cdot x\cdot \operatorname{ctg} 3^{x^2} dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+12x-9x^2}}$
з) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin^2 3x}dx$	т) $\int \frac{3x+8}{\sqrt{3x^2-5x-12}}dx$
и) $\int e^{-x}\cos\left(\frac{1}{e^x}\right)dx$	у) $\int \frac{4-9x}{5x^2-15x+8}dx$
к) $\int \frac{3x^4}{17-x^{10}}dx$	

Вариант 10

а) $\int x^4\left(2+3x^5\right)^9 dx$	л) $\int \frac{6^{\operatorname{ctg}5x}}{\sin^2 5x}dx$
б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln(2x)-3}}$	м) $\int \frac{\sin 2x dx}{5-3\cos 2x}$
в) $\int \frac{dx}{x^3\cos^2\frac{4}{x^2}}$	н) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x\left(9\operatorname{tg}^2 3x-81\right)}$
г) $\int \frac{5^x}{11-25^x}dx$	о) $\int \frac{4x^2}{\sqrt{6x^6+36}}dx$
д) $\int \frac{\cos 8x}{5+\sin^2 8x}dx$	п) $\int \frac{\cos(\operatorname{arctg}3x)}{1+9x^2}dx$
е) $\int \frac{e^{\arcsin 4x}}{\sqrt{4-64x^2}}dx$	р) $\int \frac{dx}{2x^2-10x+13}$
ж) $\int\left(1-x^4\right)\operatorname{ctg}\left(5x-x^5\right)dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{20x-5x^2+21}}$
з) $\int \frac{x^2\sin\sqrt{x^3+2}}{\sqrt{x^3+2}}dx$	т) $\int \frac{5x-3}{3x^2-11x+6}dx$
и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arccos^3 2x}$	у) $\int \frac{9x+5}{\sqrt{2x^2+11x-6}}dx$
к) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}dx}{\sqrt{6-e^x}}$	

Вариант 11

а) $\int \frac{3x^5 dx}{\sqrt[3]{4-2x^6}}$	л) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(3-8\sqrt[4]{x}\right)}$
б) $\int e^{2x}\cos e^{2x}dx$	м) $\int \frac{\sin\left(\operatorname{arctg}4x\right)}{1+16x^2}dx$
в) $\int \frac{dx}{x\left(7+\ln^2 x\right)}$	н) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{3+\cos^4 x}}$
г) $\int \frac{\sin\frac{x}{4}}{\sqrt{5-\cos^2\frac{x}{4}}}dx$	о) $\int \frac{e^{\arccos 5x}}{\sqrt{1-25x^2}}dx$
д) $\int \frac{dx}{x^4\cos^2\frac{3}{x^3}}$	п) $\int (x+1)\operatorname{tg}\left(x^2+2x\right)dx$
е) $\int \frac{x^3-5x^2-x}{\sin^2\left(\frac{x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\right)}dx$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+24x+17}$
ж) $\int \frac{5^x dx}{25^{x+1}-125}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-25x^2}}$
з) $\int \frac{3^{\operatorname{tg}6x}}{\cos^2 6x}dx$	т) $\int \frac{7x-8}{\sqrt{2x^2-x-6}}dx$
и) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(3e^{-4x}\right)}{e^{4x}}dx$	у) $\int \frac{9-4x}{25x^2-10x+2}dx$
к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(7-x)}$	

Вариант 12

а) $\int \frac{(3-5\ln x)^5}{x}dx$	л) $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
б) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[6]{7-5x^4}}$	м) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$
в) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(5\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	н) $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x-1}}dx$
г) $\int \frac{\sin 3x}{7-\cos^2 3x}dx$	о) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x\left(\operatorname{ctg}^2 2x-3\right)}$
д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{6-\ln^2 4x}}$	п) $\int \frac{(8x-8)}{\cos\left(x^2-2x+4\right)}dx$
е) $\int \frac{e^{5x}dx}{\sqrt{e^{10x}-1}}$	р) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+9}$
ж) $\int \frac{16x+3\cos 3x}{8x^2+\sin 3x}dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-8x^2}}$
з) $\int \frac{2^x\cos\sqrt{2^x-9}}{\sqrt{2^x-9}}dx$	т) $\int \frac{7x-1}{3x^2+11x+10}dx$
и) $\int \frac{7^{\operatorname{arcctg} 2x}}{1+4x^2}dx$	у) $\int \frac{3-6x}{\sqrt{9x^2+30x+26}}dx$
к) $\int \frac{\operatorname{tg}\left(4-\frac{x}{2}\right)dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2}-4\right)}$	

Вариант 13

а) $\int \frac{x^8}{\sqrt[3]{4-7x^9}}dx$	л) $\int \frac{4^{\operatorname{arcctg}3x}dx}{1+9x^2}$
б) $\int \frac{e^{\arccos 4x}dx}{\sqrt{1-16x^2}}$	м) $\int \left(x^3-x\right)\sin\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-1\right)dx$
в) $\int \frac{\left(e^{2x}+2x\right)dx}{\cos^2\left(3e^{2x}+6x^2\right)}$	н) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$
г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9\ln^2 5x+4}}$	о) $\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}+5\right)}{\sqrt{x}}dx$
д) $\int \frac{8^x dx}{12+64^x}$	п) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\sin\sqrt[5]{x}}$
е) $\int \frac{\operatorname{ctg}\frac{5}{x^5}}{x^6}dx$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+30x+26}$
ж) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{5-10x^8}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+24x-16x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{e^{-2x}\left(10-e^{4x}\right)}$	т) $\int \frac{6x-11}{2x^2-7x-4}dx$
и) $\int \frac{\operatorname{tg}\left(\ln 5x\right)}{x}dx$	у) $\int \frac{3-x}{\sqrt{7x^2+21x+3}}dx$
к) $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos^2 3x-5}$	

Вариант 14

а) $\int \frac{6x^{10}dx}{\sqrt{11-5x^{11}}}$	л) $\int \frac{\sin\left(\frac{4}{x^2}\right)}{x^3}dx$
б) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\sin^2\left(2\sqrt[4]{x}\right)}$	м) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{6+\operatorname{ctg}^2 x}}$
в) $\int\left(e^{3x}+x^2\right)\operatorname{tg}\left(x^3+e^{3x}\right)dx$	н) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}(x-5)}$
г) $\int \frac{3^x}{\sqrt{4-9^x}}dx$	о) $\int \frac{e^x\sqrt{\operatorname{arctg}^3 e^x}}{1+e^{2x}}dx$
д) $\int \frac{x^5dx}{12+x^{12}}$	п) $\int \frac{dx}{\left(9-\arccos^2 x\right)\sqrt{1-x^2}}$
е) $\int \frac{dx}{x^4\cos^2\frac{5}{x^3}}$	р) $\int \frac{dx}{4x^2+3x+3}$
ж) $\int \frac{\cos\left(4e^x+5\right)dx}{e^{-x}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{30x-25x^2+24}}$
з) $\int \frac{5^{\arcsin 6x}}{\sqrt{1-36x^2}}dx$	т) $\int \frac{9-4x}{3x^2-17x-6}dx$
и) $\int e^{\cos\frac{3}{2}x}\sin\frac{3}{2}xdx$	у) $\int \frac{5-x}{\sqrt{11x^2-33x+1}}dx$
к) $\int \frac{2\cos 2x+2x+\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sin 2x+x^2+\sqrt{x^3}}dx$	

Вариант 15

а) $\int \frac{2x^2 dx}{\sqrt[6]{\left(3-7x^3\right)^5}}$	л) $\int \mathrm{ctg}\left(x^3-5x\right)\left(9x^2-15\right)dx$
б) $\int \frac{dx}{\cos^2 8x\left(3-5\,\mathrm{tg}\,8x\right)}$	м) $\int \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot e^{\cos 4x} dx$
в) $\int \frac{\mathrm{tg}\frac{6}{x^4}dx}{x^5}$	н) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+4}}\sin\sqrt{3x+4}dx$
г) $\int \cos\left(3x-\sqrt{x}\right)\left(3-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$	о) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^8}\sin^2\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}}$
д) $\int \frac{5^{\mathrm{arcctg}\,3x}dx}{1+9x^2}$	п) $\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}\left(2\,\mathrm{ctg}^2\frac{x}{3}-8\right)}$
е) $\int \frac{x^6}{17-34x^{14}}dx$	р) $\int \frac{dx}{4x^2+18x+3}$
ж) $\int \frac{\sqrt[4]{\arcsin^3 2x}dx}{\sqrt{1-4x^2}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{5^{-x}\left(13+25^x\right)}$	т) $\int \frac{5-9x}{2x^2+7x-5}dx$
и) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 5x+3}}$	у) $\int \frac{7-3x}{\sqrt{3x^2-4x-7}}dx$
к) $\int \frac{dx}{e^{4x}\sqrt{7-e^{-8x}}}$	

Вариант 16

а) $\int \frac{x^6dx}{\sqrt[3]{7-2x^7}}$	л) $\int \frac{5^{\arcsin 4x}dx}{\sqrt{4-64x^2}}$
б) $\int (5+\sin 2x)^6 \cos 2x dx$	м) $\int \operatorname{ctg}\left(4-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)(x+x^2)dx$
в) $\int \frac{dx}{3^{-2x}\sqrt{11-81^x}}$	н) $\int \frac{\ln 3x dx}{x(7-5\ln^2 3x)}$
г) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}dx$	о) $\int \frac{e^{-\frac{4}{x^3}}}{x^4}dx$
д) $\int \frac{6e^{2x}+6x^2}{\sin^2(3e^{2x}+2x^3)}dx$	п) $\int \frac{6^x dx}{12-36^x}$
е) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x(4+\operatorname{tg}^2 3x)}$	р) $\int \frac{dx}{3x^2+18x+22}$
ж) $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{16x-3x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{x(\ln^2 6x-2)}$	т) $\int \frac{5x+13}{2x^2+9x-1}dx$
и) $\int \frac{e^{\frac{x}{4}}}{\sqrt{e^{\frac{x}{2}}+5}}dx$	у) $\int \frac{5-6x}{\sqrt{4x^2+28x+30}}dx$
к) $\int \frac{3\operatorname{tg}\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}}$	

Вариант 17

а) $\int \frac{7x^9dx}{\sqrt{8-5x^{10}}}$	л) $\int \sqrt[4]{5x+\sqrt{x}}\left(5+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$
б) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\cos^2\left(3\sqrt[5]{x}\right)}$	м) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(3+e^{-2x}\right)dx}{e^{2x}}$
в) $\int \frac{e^{\arcsin\frac{x}{6}}dx}{\sqrt{36-x^2}}$	н) $\int \frac{dx}{x\sin^2\left(\ln\frac{x}{3}\right)}$
г) $\int \frac{\sin 2x}{13-4\cos^2 2x}dx$	о) $\int \frac{\sqrt[4]{\left(\operatorname{arctg} 9x\right)^3}}{1+81x^2}dx$
д) $\int \left(x^2+2x\right)5^{x^3+3x^2}dx$	п) $\int 2^{x^2}\cdot x\cdot\cos 2^{x^2}dx$
е) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x\left(1-5\operatorname{tg}4x\right)}$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+24x+45}$
ж) $\int \frac{\sin\sqrt{5x-3}dx}{\sqrt{5x-3}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-8x-8x^2}}$
з) $\int \frac{3^x}{\sqrt{9^x+7}}dx$	т) $\int \frac{11-4x}{3x^2+13x+4}dx$
и) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x\sqrt{8-\operatorname{ctg}^2 6x}}$	у) $\int \frac{5x-11}{\sqrt{2x^2-12x-9}}dx$
к) $\int \frac{\cos 3xdx}{3\sin^2 3x-33}$	

Вариант 18

а) $\int \frac{3x^7 dx}{\sqrt[3]{\left(8-5x^8\right)^2}}$	л) $\int \frac{4^{\frac{x}{2}}}{12+3\sqrt{4^x}} dx$
б) $\int \frac{\left(4+5\operatorname{tg}(3x)\right)^3 dx}{\cos^2 3x}$	м) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}\cos^2\sqrt{3x}}$
в) $\int \frac{x^3 \sin\sqrt{x^4+3}dx}{\sqrt{x^4+3}}$	н) $\int \frac{\operatorname{tg}\left(\ln\frac{x}{4}\right)dx}{x}$
г) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{15}{x}\right)}{x^2} dx$	о) $\int \frac{\sin 4x}{\cos^2 4x-3} dx$
д) $\int \frac{2{,}5^{\arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx$	п) $\int \frac{\sin\left(e^{-5x}-1\right)}{e^{5x}} dx$
е) $\int \frac{x\sin x-\cos x}{\left(x\cos x\right)^2} dx$	р) $\int \frac{dx}{3x^2+10x+15}$
ж) $\int \frac{dx}{e^{-2x}\sqrt{3e^{4x}+6}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-6x-6x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\sqrt{18-\operatorname{ctg}^2 4x}}$	т) $\int \frac{9x-1}{2x^2+4x-15} dx$
и) $\int \frac{dx}{\left(1+25x^2\right)\left(7-\operatorname{arctg}^2 5x\right)}$	у) $\int \frac{5-3x}{\sqrt{9x^2+30x+29}} dx$
к) $\int \frac{e^{\arccos 3x}}{\sqrt{2-18x^2}} dx$	

Вариант 19

а) $\int \frac{8x^5 dx}{\sqrt[5]{3-4x^6}}$	л) $\int \frac{2\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x+2}dx$
б) $\int \left(x^2-1\right)\operatorname{ctg}\left(6x-2x^3\right)dx$	м) $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
в) $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x}}$	н) $\int \frac{\cos(1-3x)dx}{\sqrt{5-\sin^2(3x-1)}}$
г) $\int \frac{\cos 6x}{\sqrt{\sin^2 6x+5}}dx$	о) $\int \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sin(x-\ln x)}dx$
д) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}{16+4x^2}dx$	п) $\int \operatorname{ctg} x\cdot \ln\sin x dx$
е) $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 3x-4\right)}$	р) $\int \frac{dx}{13x^2+39x+33}$
ж) $\int \frac{dx}{x^5\cos^2\frac{3}{x^4}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-16x^2}}$
з) $\int \frac{x^3\cos\sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$	т) $\int \frac{4-13x}{5x^2+15x-3}dx$
и) $\int \frac{dx}{3^{-x}\left(12-9^x\right)}$	у) $\int \frac{9+2x}{\sqrt{25x^2+40x+17}}dx$
к) $\int \frac{x^2}{e^{3x^3-1}}dx$	

Вариант 20

а) $\int \frac{9x^6dx}{\sqrt{11-8x^7}}$	л) $\int \frac{3\operatorname{tg}\frac{5}{x}}{x^2}dx$
б) $\int \frac{e^{5x}}{e^{10x}-6}dx$	м) $\int \frac{9^{\operatorname{arcctg}2x}}{1+4x^2}dx$
в) $\int \frac{\operatorname{ctg}\sqrt[5]{x^2}dx}{\sqrt[5]{x^3}}$	н) $\int \frac{(3x^4-3x^3)dx}{\cos^2\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}-1\right)}$
г) $\int \frac{x\cos\left(3x^2\right)}{7+\sin^2\left(3x^2\right)}dx$	о) $\int \frac{xdx}{\cos\left(5x^2\right)}$
д) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2(15x)+4}}$	п) $\int \frac{2\sin x+2x\cos x}{(x\sin x)^2}dx$
е) $\int \frac{\sin\left(3-5^{-x}\right)}{5^x}dx$	р) $\int \frac{dx}{7x^2+21x+16}$
ж) $\int \frac{x^2-\sin 6x}{6x^3+3\cos 6x}dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-3x^2}}$
з) $\int \frac{e^{\arcsin\frac{x}{5}}}{\sqrt{25-x^2}}dx$	т) $\int \frac{5x-1}{3x^2+x-4}dx$
и) $\int \frac{e^{4x}dx}{\sin^2 e^{4x}}$	у) $\int \frac{4-9x}{\sqrt{9x^2-12x+5}}dx$
к) $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(11-7^{2\sqrt{x}}\right)}dx$	

Вариант 21

а) $\int \frac{3xdx}{\sqrt[5]{8-5x^2}}$	л) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\cos^2 3x}dx$
б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{4-49x}}$	м) $\int 5^{\sin 2x} \cos 2xdx$
в) $\int \frac{dx}{x\left(25+4\ln^2 3x\right)}$	н) $\int (4x+6)\operatorname{tg}\left(x^2+3x+1\right)dx$
г) $\int \frac{\sqrt{3^x}}{\cos^2 3^{\frac{x}{2}}}dx$	о) $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1-x^2}}dx$
д) $\int \frac{\sin 4x \cos^2 4xdx}{5-7\cos^3 4x}$	п) $\int \frac{e^{2x} \cdot \operatorname{arcctg}^3 e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$
е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}\left(\arcsin^2 3x-6\right)}$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+6x+5}$
ж) $\int \frac{\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)}{4+x^2}dx$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-8x-16x^2}}$
з) $\int \frac{\sin\left(\ln 3x\right)}{x}dx$	т) $\int \frac{7x-13}{2x^2+5x-14}dx$
и) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(2e^{3x}\right)dx}{e^{-3x}}$	у) $\int \frac{6-10x}{\sqrt{4x^2+18x+3}}dx$
к) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x\sqrt{4\operatorname{ctg}^4 4x+5}}$	

Вариант 22

а) $\int 2x^9\left(8-11x^{10}\right)^5 dx$	л) $\int \frac{e^{4x}dx}{15-e^{8x}}$
б) $\int \frac{\cos\left(4-2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$	м) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\sin^2\left(\sqrt[3]{x}\right)}$
в) $\int \frac{dx}{6^{-x}\left(11+36^x\right)}$	н) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x\sqrt{\mathrm{ctg}^2 2x-1}}$
г) $\int \frac{e^{\arcsin\frac{x}{3}}}{\sqrt{9-x^2}}dx$	о) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\left(\mathrm{arctg}^2 3x-8\right)}$
д) $\int \frac{\mathrm{ctg}\left(\ln 8x\right)dx}{x}$	п) $\int \sqrt[5]{\sqrt[3]{x}-8x}\left(8-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$
е) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2\left(3+e^{\frac{1}{x}}\right)}$	р) $\int \frac{dx}{6x^2-18x+17}$
ж) $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\sqrt{5-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2x^2}}$
з) $\int\left(4x+\frac{1}{x^3}\right)\sin\left(4x^2-\frac{1}{x^2}+2\right)dx$	т) $\int \frac{9x-13}{2x^2-7x-30}dx$
и) $\int \frac{6^{\arccos 5x}dx}{\sqrt{1-25x^2}}$	у) $\int \frac{5-12x}{\sqrt{49x^2+42x+18}}dx$
к) $\int \frac{4}{\sqrt{x+2}}\mathrm{tg}\sqrt{x+2}dx$	

Вариант 23

а) $\int 5x^{10}\sqrt[4]{\left(8-3x^{11}\right)^3}dx$	л) $\int \frac{\sin 3x\cos 3x}{\sqrt{5-\sin^2 3x}}dx$
б) $\int \frac{\sin 2x}{4-5\cos 2x}dx$	м) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(5-\arccos^2 x\right)}$
в) $\int \frac{x^3\sin\sqrt{5x^4-1}}{\sqrt{5x^4-1}}dx$	н) $\int \frac{\cos\left(5^{2x}\right)dx}{25^{-x}}$
г) $\int \frac{dx}{e^{-3x}\sqrt{15-e^{6x}}}$	о) $\int \frac{3+2x}{\cos^2\left(3x+x^2\right)}dx$
д) $\int\left(3+\frac{1}{x^3}\right)\operatorname{ctg}\left(6x-\frac{1}{x^2}\right)dx$	п) $\int \frac{\operatorname{tg}\frac{5}{x^6}}{x^7}dx$
е) $\int \frac{7^{\operatorname{arcctg}4x}dx}{1+16x^2}$	р) $\int \frac{dx}{3x^2+18x+28}$
ж) $\int \frac{dx}{x\left(\ln^2 6x-3\right)}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{19-8x-4x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x^2}+9\right)}$	т) $\int \frac{11x-2}{2x^2+9x-6}dx$
и) $\int \frac{e^{3\sqrt{x+5}}}{\sqrt{x+5}}dx$	у) $\int \frac{8-9x}{\sqrt{16x^2-24x+25}}dx$
к) $\int \frac{4^x dx}{\sin^2\left(4^x\right)}$	

Вариант 24

а) $\int 4x^7 \cdot \sqrt[3]{\left(11-3x^8\right)^2}\,dx$	л) $\int 2^x \cos\left(4-2^x\right)dx$
б) $\int \dfrac{\operatorname{ctg}\left(e^{5x}+2\right)}{e^{-5x}}dx$	м) $\int \dfrac{(3+6x)\,dx}{\sin^2\left(x+x^2\right)}$
в) $\int \dfrac{8^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(5-7\cdot 8^{\sqrt{x}}\right)}dx$	н) $\int \dfrac{5x^2dx}{13-x^6}$
г) $\int \dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2 x+2}}dx$	о) $\int \dfrac{\sin 9x}{13+\cos^2 9x}dx$
д) $\int \dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}dx}{\cos^2 2x}$	п) $\int \dfrac{\left(1+3e^{3x}\right)dx}{\cos^2\left(4-x-e^{3x}\right)}$
е) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-6x^2}\left(\arcsin^2\left(\sqrt{6}x\right)-8\right)}$	р) $\int \dfrac{dx}{9x^2-12x+5}$
ж) $\int \dfrac{dx}{2^{\operatorname{arctg}5x}\left(1+25x^2\right)}$	с) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{6x-4x^2}}$
з) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 7x}}$	т) $\int \dfrac{3x-2}{3x^2+15x-7}dx$
и) $\int \dfrac{\sin\dfrac{6}{x^8}}{x^9}dx$	у) $\int \dfrac{8-6x}{\sqrt{2x^2-13x+11}}dx$
к) $\int \dfrac{x\cdot \operatorname{tg}\sqrt[3]{x^2+6}\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+6\right)^2}}$	

Вариант 25

а) $\int 2x^2\left(8-7x^3\right)^5 dx$	л) $\int \frac{dx}{x\cdot\cos^2\left(3\ln 3x\right)}$
б) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{11-e^x}}dx$	м) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(11-x\right)}$
в) $\int \frac{\cos 3x}{\sqrt[4]{5-7\sin 3x}}dx$	н) $\int \frac{\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{\sqrt{\sin^4\frac{x}{4}+3}}dx$
г) $\int \frac{dx}{\sin^2 8x\left(6+\mathrm{ctg}^2 8x\right)}$	о) $\int \frac{e^{\arccos 6x}}{\sqrt{1-36x^2}}dx$
д) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}\left(\arcsin^2 4x-3\right)}$	п) $\int \frac{dx}{e^{-x}\sin^2\left(5e^x\right)}$
е) $\int \frac{5^{\mathrm{arctg}\,4x}}{2+32x^2}dx$	р) $\int \frac{dx}{16x^2-8x+82}$
ж) $\int \frac{\cos\left(13\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{11-8x-24x^2}}$
з) $\int \frac{\sin\left(\mathrm{tg}\,2x\right)dx}{\cos^2 2x}$	т) $\int \frac{10x-7}{3x^2+5x-12}dx$
и) $\int \frac{9^{2x}dx}{4-5\cdot 81^x}$	у) $\int \frac{7-11x}{\sqrt{10x^2+13x-3}}dx$
к) $\int \frac{\mathrm{tg}\frac{5}{x^4}dx}{x^5}$	

Вариант 26

а) $\int 4x\cdot\sqrt[3]{11-4x^2}\,dx$	л) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{13-\operatorname{tg}^2 x}}$
б) $\int \frac{\cos\left(\frac{3}{x}+5\right)}{x^2}dx$	м) $\int\left(5-\frac{2}{x^3}\right)\sin\left(\frac{1}{x^2}+5x\right)dx$
в) $\int \frac{\sin 5x dx}{11-7\cos 5x}$	н) $\int \frac{e^{3x}}{e^{6x}-10}dx$
г) $\int \frac{9^{\arccos 2x}dx}{\sqrt{4-16x^2}}$	о) $\int \frac{dx}{x^2\sin\frac{3}{x}}$
д) $\int \frac{3^x dx}{4+3^{2x+2}}$	п) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\arcsin 5x}\cdot\sqrt{1-25x^2}}$
е) $\int\left(2x^2-e^{3x}\right)\operatorname{ctg}\left(2x^3-e^{3x}\right)dx$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+4x+3}$
ж) $\int \frac{\cos 3x dx}{5-\sin^2 3x}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+4x-25x^2}}$
з) $\int \frac{dx}{e^{-2x}\left(\cos^2 e^{2x}\right)}$	т) $\int \frac{3x-13}{2x^2-14x-7}dx$
и) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}$	у) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{6x^2-x-1}}dx$
к) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3+\ln^2 4x}}$	

Вариант 27

а) $\int \frac{2x^8 dx}{\left(13-4x^9\right)^5}$	л) $\int e^{\cos^2 2x} \sin 2x \cos 2x dx$
б) $\int \frac{3x^2-1}{\cos^2\left(x-x^3\right)} dx$	м) $\int \frac{10^{\operatorname{tg} 8x}}{\cos^2 8x} dx$
в) $\int \frac{dx}{\sin^2 6x \sqrt{\operatorname{ctg}^2 6x - 4}}$	н) $\int \frac{\cos\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+1}} dx$
г) $\int \frac{e^{8x} dx}{24+e^{16x}}$	о) $\int \frac{\cos 3x dx}{10-\sin^2 3x}$
д) $\int \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arcctg} 3x}$	п) $\int \frac{\left(e^{-x}+6e^{2x}\right)dx}{\sin^2\left(3e^{2x}-e^{-x}\right)}$
е) $\int \frac{dx}{3^{-x}\sqrt{25-9^x}}$	р) $\int \frac{dx}{4x^2-28x+58}$
ж) $\int \frac{\operatorname{ctg}\left(\ln 3x\right)dx}{x}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-2x^2+31}}$
з) $\int \frac{\sin\frac{5}{x^5} dx}{x^6}$	т) $\int \frac{6x-5}{4x^2-5x-3} dx$
и) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x-13\right)}$	у) $\int \frac{12-7x}{\sqrt{3x^2+13x+4}} dx$
к) $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin^2 4x} dx}{\sqrt{4-64x^2}}$	

Вариант 28

а) $\int 3x^3 \cdot \sqrt[5]{\left(9-8x^4\right)^2}\,dx$	л) $\int \frac{\sin(1-3x)dx}{\cos^2(1-3x)-8}$
б) $\int \frac{dx}{e^{-4x}\sqrt{17-e^{8x}}}$	м) $\int \frac{e^{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx$
в) $\int \frac{\arccos^5(3x)dx}{\sqrt{1-9x^2}}$	н) $\int x^2 \sin\left(3-\frac{x^3}{4}\right)dx$
г) $\int \frac{\cos\frac{x}{4}dx}{11-\sin^2\frac{x}{4}}$	о) $\int \frac{\ln x dx}{x\cos\left(\ln^2 x\right)}$
д) $\int \frac{2x-\cos 3x}{3x^2-\sin 3x+1}dx$	п) $\int \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{x^3}dx}{x^4}$
е) $\int \frac{x^2 \cdot 7^{\sqrt{x^3+1}}dx}{\sqrt{x^3+1}}$	р) $\int \frac{dx}{9x^2+30x+29}$
ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{15+\ln^2 5x}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-4x^2}}$
з) $\int \frac{\cos(\operatorname{tg}2x)dx}{\cos^2 2x}$	т) $\int \frac{11x-7}{6x^2+5x-2}dx$
и) $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sin^2\left(\frac{5}{x}\right)}$	у) $\int \frac{15-2x}{\sqrt{5x^2-11x+6}}dx$
к) $\int 25^x \operatorname{tg}\left(5^{2x}\right)dx$	

Вариант 29

а) $\int \frac{1}{3} x^9 \cdot \sqrt[3]{4x^{10}-1}\,dx$	л) $\int \frac{\sin 9x dx}{5-\cos^2 9x}$
б) $\int (4-8x) e^{x-x^2}\,dx$	м) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x \cdot \sqrt{8+\operatorname{tg}^2 5x}}$
в) $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln 4x)}$	н) $\int \frac{\sin^2 2x \cos 2x}{4+\sin^3 2x}\,dx$
г) $\int \frac{dx}{\sin\left(2-\sqrt[3]{x}\right)\sqrt[3]{x^2}}$	о) $\int \frac{10^{ar\operatorname{ctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$
д) $\int \frac{2^x dx}{15+4^x}$	п) $\int \operatorname{tg}\left(4-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)\cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\,dx$
е) $\int \frac{dx}{\sin^2 8x\left(\operatorname{ctg}^2 8x-3\right)}$	р) $\int \frac{dx}{81x^2-18x+2}$
ж) $\int \frac{x dx}{\arccos^3 x^2 \cdot \sqrt{1-x^4}}$	с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x-9x^2}}$
з) $\int \frac{\cos\sqrt{3x} dx}{\sqrt{x}}$	т) $\int \frac{5x+1}{8x^2-2x+3}\,dx$
и) $\int \frac{dx}{e^{-5x}\sqrt{17-e^{10x}}}$	у) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{2x^2+6x+7}}\,dx$
к) $\int \frac{\sin\frac{3}{x^6}}{x^7}\,dx$	

Вариант 30

а) $\int 6x^{10}\left(7-5x^{11}\right)^3 dx$	л) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(\arccos^2 x-18\right)}$
б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^4}\cos^2\left(3\sqrt[5]{x}\right)}$	м) $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{4+81\sqrt{x^3}}$
в) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5x}(5-x)}$	н) $\int e^{\sin^2 x}\cdot\sin 2x dx$
г) $\int \dfrac{\ln x dx}{x\left(3-5\ln^2 x\right)}$	о) $\int \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{6x-2}dx}{\sqrt{6x-2}}$
д) $\int \dfrac{dx}{4^x\sqrt{10-16^{-x}}}$	п) $\int \dfrac{\sin\left(\operatorname{arctg} 4x\right)}{1+16x^2}dx$
е) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5-10x^2}\arcsin^3\left(\sqrt{2}x\right)}$	р) $\int \dfrac{dx}{5x^2+40x+1}$
ж) $\int \dfrac{9^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}dx}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$	с) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{14x-8x^2}}$
з) $\int\left(16x^3-10\right)\operatorname{ctg}\left(5x-2x^4\right)dx$	т) $\int \dfrac{7-12x}{6x^2+18x-5}dx$
и) $\int 3^{3x}\cos\left(1-27^x\right)dx$	у) $\int \dfrac{8x-3}{\sqrt{4x^2+9x-1}}dx$
к) $\int \dfrac{\left(x^5-5x^3\right)dx}{\sin^2\left(2-\dfrac{5}{4}x^4+\dfrac{1}{6}x^6\right)}$	

2. Основные классы интегрируемых функций

Вариант 1

а) $\int \frac{\sqrt{x-1}-2}{1+\sqrt{x-1}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$
в) $\int \sqrt{4^{3x}-5}dx$	г) $\int \sqrt{4x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{9x^2-4}dx$	е) $\int \sqrt{40+24x-16x^2}dx$
ж) $\int \left(2-3x^2\right)\sin 5xdx$	з) $\int (2x+3)4^{5x+1}dx$
и) $\int \arccos 2xdx$	к) $\int x^2 \log_3(5+x)dx$
л) $\int e^{\frac{x}{2}}\cos 2xdx$	м) $\int \frac{x^4+3x}{x^3-x^2-x+1}dx$
н) $\int \frac{-2x^2-5x-6}{x^3+3x^2+4x+2}dx$	о) $\int \frac{3x^4+4x^3+6x^2+4x+8}{x^5+4x^3}dx$
п) $\int \frac{1}{1-2\cos x+\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin^3 x-2\sin x}{\cos x-5}dx$
с) $\int \frac{1}{7-2\sin^2 x}dx$	т) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}dx$
у) $\int \frac{2\cos x\sin x+\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^2 2x\cdot\sin^2 2xdx$
х) $\int \sin(x+4)\cos 2xdx$	ц) $\int \sqrt[3]{1+2\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\left(3+4\sqrt[3]{x}\right)^3}}{\sqrt[3]{x}}dx$	

Вариант 2

а) $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{2x}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+2}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-7^{3x}}}$	г) $\int \sqrt{x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{4x^2-9}dx$	е) $\int \sqrt{45+12x-9x^2}dx$
ж) $\int (4-3x)\sin\frac{x}{2}dx$	з) $\int \arcsin\frac{x}{2}dx$
и) $\int \left(2x^2-3\right)\cdot 3^{5x+1}dx$	к) $\int (x+1)^2 \ln x\, dx$
л) $\int e^{2x}\sin\frac{x}{4}dx$	м) $\int \frac{x^4+3x+1}{x^3+2x^2+x}dx$
н) $\int \frac{-2x^2-4x-21}{x^3-5x^2+8x-6}dx$	о) $\int \frac{12-4x-x^2}{x^4+4x^2}dx$
п) $\int \frac{2}{2\cos x+5\sin x}dx$	р) $\int \frac{\cos^3 x-\cos x}{9+\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{1}{3\cos^2 x+2\sin^2 x}dx$	т) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{14} x}dx$
у) $\int \frac{4-3\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4 x dx$
х) $\int \sin(5x+4)\cdot \sin x dx$	ц) $\int x\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{x}+5}}{\sqrt{x^3}}dx$	

Вариант 3

а) $\int \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{2-\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(4-9\sqrt[3]{x}\right)}$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-e^{3x}}}$	г) $\int \sqrt{9x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{36x^2-25}dx$	е) $\int \sqrt{6x-x^2}dx$
ж) $\int \left(x^2+3\right)e^{5x+1}dx$	з) $\int x\cdot \mathrm{arctg}x\,dx$
и) $\int (2-x)\sin^2 xdx$	к) $\int (x-1)\log_2(x+1)dx$
л) $\int e^x\cos(2x+1)dx$	м) $\int \frac{2x^4+2x+1}{x^3-2x^2-4x+8}dx$
н) $\int \frac{2x^2+4x-1}{x^3+x^2-2}dx$	о) $\int \frac{-19x^3+7x^2-5x+3}{4x^4+x^2}dx$
п) $\int \frac{3dx}{4+3\cos x}$	р) $\int \frac{\cos^3 x-5\cos x}{\sin x-9}dx$
с) $\int \frac{dx}{5\sin^2 x-2\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^{12} x}dx$
у) $\int \frac{1+\sin x\cos x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^2 x\cdot\sin^4 xdx$
х) $\int \cos 2x\cos 5xdx$	ц) $\int \sqrt[3]{4+3\sqrt[3]{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-4}dx}{\sqrt{x}}$	

Вариант 4

а) $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{4x}}$	б) $\int \frac{\sqrt{x+3}+1}{\sqrt[4]{x+3}-1}dx$
в) $\int \sqrt{e^{3x}-5}dx$	г) $\int \sqrt{16x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-9}dx$	е) $\int \sqrt{39+30x-9x^2}dx$
ж) $\int (3x-4)\cos^2 x dx$	з) $\int \left(x-x^2\right)2^{3x+1}dx$
и) $\int (x+1)\operatorname{arcctg} x dx$	к) $\int \ln\left(x^2+3\right)dx$
л) $\int e^x \sin(3x-1)dx$	м) $\int \frac{x^5-4x^4+x^3+x-1}{x^3-4x^2+4x}dx$
н) $\int \frac{3x^2-5x+2}{x^3+2x^2+2x+1}dx$	о) $\int \frac{-9x^3+7x^2-5x+6}{2x^4+x^2}dx$
п) $\int \frac{5}{1+2\sin x}dx$	р) $\int \frac{4\sin x-3\sin^3 x}{9-\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{1}{3+4\cos^2 x}dx$	т) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx$
у) $\int \frac{2\cos x\cdot\sin x+\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4 2x dx$
х) $\int \sin 2x\cdot\cos(5x+2)dx$	ц) $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{1-3\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}\sqrt{\left(2\sqrt{x}-1\right)^3}}$	

Вариант 5

а) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x+3}-1}dx$	б) $\int \frac{2\cdot\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{7^{3x}-5}}$	г) $\int \sqrt{25x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{16x^2-25}dx$	е) $\int \sqrt{3-2x-4x^2}dx$
ж) $\int (2-3x)\cos\frac{x}{2}dx$	з) $\int \left(2x^2+3\right)6^{1-x}dx$
и) $\int \arccos\frac{x}{2}dx$	к) $\int \left(x^2+x+1\right)\log_3 xdx$
л) $\int e^x\cdot\sin 2xdx$	м) $\int \frac{x^4-3x^3+30x-2}{x^3-3x^2-9x+27}dx$
н) $\int \frac{2x^2-x-4}{x^3-3x^2+6x-4}dx$	о) $\int \frac{-x^4+23x^3+6x^2+6x+2}{3x^5+x^3}dx$
п) $\int \frac{4}{5-4\cos x+3\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin x-2\sin^3 x}{3+\cos x}dx$
с) $\int \frac{1}{1+3\sin^2 x}dx$	т) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{14} x}dx$
у) $\int \frac{5-4\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4 3xdx$
х) $\int \sin 4x\cdot\cos 3xdx$	ц) $\int \frac{\sqrt[3]{\frac{5}{\sqrt[3]{x}}+1}dx}{x^2}$
ч) $\int \frac{\sqrt{\left(5\sqrt{x}+1\right)^3}}{\sqrt[4]{x^{11}}}dx$	

Вариант 6

а) $\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{2+\sqrt{x+1}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+5}}$	г) $\int \sqrt{36x^2+25}dx$
д) $\int \sqrt{9x^2-49}dx$	е) $\int \sqrt{4x-4x^2}dx$
ж) $\int (3-x)7^{2x+1}dx$	з) $\int \left(4-3x^2\right)\cos 5x dx$
и) $\int \arcsin 3x dx$	к) $\int \left(4-x^2\right)\ln(x+1)dx$
л) $\int e^{2x}\cdot \sin\frac{x}{2}dx$	м) $\int \frac{x^5+6x^4+10x^3-x-2}{x^3+6x^2+9x}dx$
н) $\int \frac{\left(4x^2+x-16\right)dx}{x^3-3x^2-2x-8}$	о) $\int \frac{x^3+12x^2+18x+63}{x^4+9x^2}dx$
п) $\int \frac{7}{1-4\cos x}dx$	р) $\int \frac{\sin^5 x-2\sin^3 x}{\cos x-4}dx$
с) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-4\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{14} x}dx$
у) $\int \frac{2+3\sin x\cdot \cos x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4 3x dx$
х) $\int \sin(2x+1)\cos 4x dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{4-3\sqrt{x}}}{\sqrt{x^3}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{x}-9\right)^3}}{\sqrt[4]{x^7}}dx$	

Вариант 7

а) $\int \frac{1}{(3x+3)-\sqrt[3]{x+1}}dx$	б) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(4-\sqrt[3]{x}\right)}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4}}$	г) $\int \sqrt{25x^2+4}dx$
д) $\int \sqrt{16x^2-49}dx$	е) $\int \sqrt{12-12x-9x^2}dx$
ж) $\int (2-3x)\sin^2\frac{x}{2}dx$	з) $\int (x+4)\operatorname{arctg}2x dx$
и) $\int \left(x^{2.}+x+1\right)e^{x+1}dx$	к) $\int \ln\left(x^3+4\right)dx$
л) $\int 2^x\cdot\sin 5x dx$	м) $\int \frac{x^4-4x^3+60}{x^3-4x^2-16x+64}dx$
н) $\int \frac{x^2-15}{x^3-x^2+3x-10}dx$	о) $\int \frac{5x^3+14x^2+8x+12}{3x^4+4x^2}dx$
п) $\int \frac{9}{3\cos x+4\sin x}dx$	р) $\int \frac{\cos^3 x-3\cos x}{\sin x+2}dx$
с) $\int \frac{1}{2+16\sin^2 x}dx$	т) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^8 x}dx$
у) $\int \frac{6-5\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4\frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin 2x\cdot\sin(3x+2)dx$	ц) $\int x\sqrt[3]{4+3\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\left(5\sqrt[3]{x}-3\right)^3}}{\sqrt{x^3}}dx$	

Вариант 8

а) $\int \frac{3\cdot\sqrt[3]{x-2}}{2+\sqrt[3]{x-2}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}+4}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{3^{2x}+4}}$	г) $\int \sqrt{16x^2+9}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-36}dx$	е) $\int \sqrt{12x-4x^2}dx$
ж) $\int \left(x^2+4x-1\right)5^{x+1}dx$	з) $\int (6-x)\cos^2\frac{x}{2}dx$
и) $\int x\cdot\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}dx$	к) $\int (5+x)\log_5(2x+1)dx$
л) $\int e^{-3x}\sin(x-1)dx$	м) $\int \frac{x^5-2x^4+x^3+x+2}{x^3-2x^2+x}dx$
н) $\int \frac{11x^2-13x+6}{x^3+1}dx$	о) $\int \frac{2x^3+x^2+6x+9}{2x^4+3x^2}dx$
п) $\int \frac{6}{3-2\sin x}dx$	р) $\int \frac{\cos^3 x-2\cos x}{4+\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+3\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{10} x}dx$
у) $\int \frac{\sin 2x-\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4\frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin(3x+1)\cos(5x-1)dx$	ц) $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}+4}dx}{\sqrt{x}}$	

Вариант 9

а) $\int \frac{1}{2+\sqrt[3]{x+4}}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1}dx$
в) $\int \sqrt{e^{5x}+1}dx$	г) $\int \sqrt{x^2+4}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-81}dx$	е) $\int \sqrt{16+12x-4x^2}dx$
ж) $\int (5-3x)\cdot 5^{2x+1}dx$	з) $\int \left(7x^2-1\right)\sin\frac{x}{2}dx$
и) $\int \arccos\frac{3x}{2}dx$	к) $\int \left(2x^2+1\right)\ln(3x)dx$
л) $\int e^{-x}\cos(3x+2)dx$	м) $\int \frac{2x^4+8x^3-30x^2-130x}{x^3+4x^2-16x-64}dx$
н) $\int \frac{9x^2+10x+1}{x^3+4x^2+7x+6}dx$	о) $\int \frac{-x^3+13x^2+15x+15}{x^5+5x^3}dx$
п) $\int \frac{11}{\cos x+3\sin x}dx$	р) $\int \frac{\cos^5 x-2\cos x}{4+\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{5+2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$
у) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin(4x-1)\cdot\cos 6x dx$	ц) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{3-2\sqrt[3]{x^2}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-9}}{\sqrt[4]{x^7}}dx$	

Вариант 10

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}-1}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[3]{x-3}+1}{\sqrt{x-3}-\sqrt[3]{x-3}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}dx$	г) $\int \sqrt{25x^2+9}dx$
д) $\int \sqrt{4x^2-81}dx$	е) $\int \sqrt{8-10x-25x^2}dx$
ж) $\int \left(5-3x^2\right)\cdot 2^{1+2x}dx$	з) $\int (2x+1)\cos\frac{x}{3}dx$
и) $\int (x-1)\operatorname{arctg}\frac{x}{3}dx$	к) $\int x^3\cdot \log_3(2x-1)dx$
л) $\int e^{\frac{x}{4}}\cdot \sin(4x+1)dx$	м) $\int \frac{3x^4-12x^3+14x^2-1}{x^3-4x^2+4x}dx$
н) $\int \frac{x^2-3x+3}{x^3+4x^2+6x+9}dx$	о) $\int \frac{-4x^3-x^2-14x+21}{x^4+7x^2}dx$
п) $\int \frac{1}{4-\cos x+2\sin x}dx$	р) $\int \frac{\cos^5 x-\cos x}{3-\sin x}dx$
с) $\int \frac{dx}{10+10\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{12} x}dx$
у) $\int \frac{\sin^2 2x}{\cos^6 x}dx$	ф) $\int \sin^2 x\cdot \cos^4 x dx$
х) $\int \sin x\cdot \cos(4x-2)dx$	ц) $\int \sqrt{x^3}\sqrt{2-3\sqrt{x}}dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)^3}}$	

Вариант 11

а) $\int \frac{2\sqrt{x-2}+1}{1-\sqrt{x-2}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt{6x}-3\sqrt[3]{6x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-3^{2x}}}$	г) $\int \sqrt{4x^2+9}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{80-2x-x^2}dx$
ж) $\int \left(4-3x^2+x\right)e^{1-x}dx$	з) $\int (6-4x)\cdot \cos^2 2xdx$
и) $\int \arcsin \frac{2x}{3}dx$	к) $\int \left(5-x-x^2\right)\ln(2x)dx$
л) $\int 5^x \cdot \cos 5xdx$	м) $\int \frac{x^4+2x^3-2x^2-x+3}{x^3+x^2-x-1}dx$
н) $\int \frac{3+x-3x^2}{x^3+x^2-7x-15}dx$	о) $\int \frac{-26x^3+35x^2-3x+5}{8x^4+x^2}dx$
п) $\int \frac{-2}{5-3\cos x}dx$	р) $\int \frac{\cos^3 x-5\cos x}{3+\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{12} x}dx$
у) $\int \frac{4-3\sin x\cdot \cos x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4 \frac{x}{4}dx$
х) $\int \cos 3x\cdot \cos(2x-1)dx$	ц) $\int x^3\sqrt{5-3\sqrt[3]{x^4}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{\left(x^2-1\right)^3}}$	

Вариант 12

а) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}-x-2}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}+9}dx$
в) $\int \sqrt{3^{5x}+1}dx$	г) $\int \sqrt{25x^2+36}dx$
д) $\int \sqrt{16x^2-81}dx$	е) $\int \sqrt{2x-9x^2}dx$
ж) $\int (3-2x)\sin^2 2x dx$	з) $\int \left(2x-3x^2\right)7^{x-3}dx$
и) $\int (3+3x)\operatorname{arcctg}(2x)dx$	к) $\int \left(x-4x^2\right)\log_2(x+3)^2 dx$
л) $\int e^{3x}\cdot\cos(x+1)dx$	м) $\int \frac{3x^4-18x^3+28x+5}{x^3-6x^2+9x}dx$
н) $\int \frac{5x^2+x-1}{x^3+3x^2-x+12}dx$	о) $\int \frac{-17x^4+20x^3-7x^2+20x+4}{5x^5+4x^3}dx$
п) $\int \frac{8}{1-\cos x+\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin^5 x-3\sin^3 x}{5-\cos x}dx$
с) $\int \frac{dx}{9+\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^{10} x}dx$
у) $\int \frac{\cos^2 2x}{\cos^6 x}dx$	ф) $\int \sin^2 3x\cdot\cos^2 3x dx$
х) $\int \sin(5x-1)\cdot\sin(3x+1)dx$	ц) $\int \sqrt{x}\sqrt{2-3\sqrt[4]{x^3}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-9}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$	

Вариант 13

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}+4}{2-\sqrt[3]{x+3}}dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(4+25\sqrt[3]{x}\right)}$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-5^{\frac{x}{2}}}}$	г) $\int \sqrt{16x^2+25}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-4}dx$	е) $\int \sqrt{24+10x-25x^2}\,dx$
ж) $\int \left(4x^2+1\right)\cos\frac{x}{2}dx$	з) $\int \left(3x+7\right)e^{4x}dx$
и) $\int \frac{x}{2}\cdot \operatorname{arctg} 4\mathrm{x}\,dx$	к) $\int \left(x-1\right)^2\cdot \log_4\left(x+4\right)dx$
л) $\int 3^{-x}\cdot\cos\left(5x-1\right)dx$	м) $\int \frac{x^5+2x^4-4x^3-x+1}{x^3+2x^2-4x-8}dx$
н) $\int \frac{2-3x-4x^2}{x^3+2x+12}dx$	о) $\int \frac{-11x^3-2x^2-15x+5}{3x^4+5x^2}dx$
п) $\int \frac{1}{1-4\sin x}dx$	р) $\int \frac{2\cos^5 x+3\cos x}{4-\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{9+2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^6 x}{\sin^{10} x}dx$
у) $\int \frac{5+3\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4\frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin 5x\cdot\cos\left(3x+4\right)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{6-\frac{5}{\sqrt[3]{x}}}dx}{x^2}$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt[4]{x^7}}dx$	

Вариант 14

а) $\int \frac{1}{4+3\sqrt{x+2}}dx$	б) $\int \frac{3\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}+1}dx$
в) $\int \sqrt{2^{-x}+1}dx$	г) $\int \sqrt{25x^2+16}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-36}dx$	е) $\int \sqrt{3x-x^2}\,dx$
ж) $\int (4x-1)e^{-x+1}dx$	з) $\int \left(3x-x^2\right)\sin 6\mathrm{x}\,dx$
и) $\int \arcsin 5x dx$	к) $\int x^4 \cdot \ln(6x-1)dx$
л) $\int e^{-2x} \cdot \cos(3-4x)dx$	м) $\int \frac{x^3+x+1}{x^3-8x^2+16x}dx$
н) $\int \frac{5+x-3x^2}{x^3-8}dx$	о) $\int \frac{-2x^4-x^3-8x^2+9x+6}{2x^5+3x^3}dx$
п) $\int \frac{8}{4-5\cos x}dx$	р) $\int \frac{\sin x-\sin^5 x}{2-\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{2+8\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx$
у) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{x}{2}dx$
х) $\int \cos(4x+3) \cdot \cos(3x-2)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{5-4\sqrt[3]{x^2}}}dx$
ч) $\int \sqrt[4]{x}\sqrt{7-3\sqrt{x^5}}\,dx$	

Вариант 15

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2}{\sqrt{x-3}+3}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{2x}+1}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-e^{\frac{x}{2}}}}$	г) $\int \sqrt{25x^2+49}dx$
д) $\int \sqrt{9x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{35+8x-16x^2}dx$
ж) $\int (3+2x)\cos(4x+1)dx$	з) $\int \left(4x-3x^2\right)e^{x-2}dx$
и) $\int \arccos\frac{3x}{5}dx$	к) $\int (1-8x)\log_6(x-1)^3\,dx$
л) $\int 2^{-x}\cdot\sin(2x-1)dx$	м) $\int \frac{x^4+3x^3-10x^2-28x+2}{x^3+3x^2-9x-27}dx$
н) $\int \frac{4x^2+2x-3}{x^3+6x^2+12x+9}dx$	о) $\int \frac{-11x^4+22x^3-9x^2+49x+28}{3x^5+7x^3}dx$
п) $\int \frac{5}{3\cos x+4\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin^5 x+3\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3-\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}dx$
у) $\int \frac{4+\sin 2x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4\frac{x}{6}dx$
х) $\int \sin(1-3x)\cdot\sin(2x+5)dx$	ц) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}}$	

Вариант 16

а) $\int \frac{3-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}+1}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt[3]{x^2}}dx$
в) $\int \sqrt{e^{-x}+4}dx$	г) $\int \sqrt{x^2+9}dx$
д) $\int \sqrt{4x^2-25}dx$	е) $\int \sqrt{11+20x-25x^2}dx$
ж) $\int (5-2x)\sin(3-4x)dx$	з) $\int \left(9-x^2\right)\cdot 5^{2x-3}dx$
и) $\int (2x-1)\operatorname{arcctg} 3x dx$	к) $\int \left(x^2+x+1\right)\ln(x+2)dx$
л) $\int e^{\frac{x}{3}}\cos(x+3)dx$	м) $\int \frac{x^5+8x^4+16x^3-3x+5}{x^3+8x^2+16x}dx$
н) $\int \frac{3x^2-x+2}{x^3-3x^2+2x-24}dx$	о) $\int \frac{-14x^3+32x^2-6x+14}{5x^4+2x^2}dx$
п) $\int \frac{7}{1-\cos x+3\sin x}dx$	р) $\int \frac{5\cos x-2\cos^5 x}{4+\sin x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-5\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^{10} x}dx$
у) $\int \frac{3-\cos 2x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4 \frac{3x}{2}dx$
х) $\int \cos(3-5x)\cdot\cos(2-x)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{5-3\sqrt[3]{x^2}}}{x}dx$
ч) $\int \sqrt[3]{3x-x^3}dx$	

Вариант 17

а) $\int \frac{1}{x-8-\sqrt[3]{8-x}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5^{\frac{x}{2}}-4}}$	г) $\int \sqrt{4x^2+25}dx$
д) $\int \sqrt{36x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{5x-x^2}dx$
ж) $\int (1-x)\cdot e^{1-\frac{x}{2}}dx$	з) $\int \left(1-x-2x^2\right)\cos 3x dx$
и) $\int \arcsin\frac{x}{4}dx$	к) $\int (x+2)^2\log_6(x-2)dx$
л) $\int 5^x\cdot\sin(2+4x)dx$	м) $\int \frac{4x^4-4x^3+2x^2+3}{4x^3-4x^2+x}dx$
н) $\int \frac{5x^2+x+2}{x^3+3x^2+2x-6}dx$	о) $\int \frac{-x^4-x^3+5x^2+7x+42}{2x^5+7x^3}dx$
п) $\int \frac{4}{2\cos x-3\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin x-2\sin^3 x}{1-4\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3+2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{14} x}dx$
у) $\int \frac{\sin 2x-\cos 2x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^2\frac{x}{2}\cdot\sin^4\frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin(5x+2)\cdot\sin(3-4x)dx$	ц) $\int \sqrt{2+5\sqrt[4]{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-9}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$	

Вариант 18

а) $\int \frac{3-\sqrt[3]{x-3}}{2+\sqrt[3]{x-3}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x}-4}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{\frac{x}{2}}-4}}$	г) $\int \sqrt{9x^2+49}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-16}dx$	е) $\int \sqrt{x-16x^2}dx$
ж) $\int (8x-1)6^{2x-1}dx$	з) $\int (5x-4x^2)\sin 2xdx$
и) $\int (x+3)\operatorname{arctg}\frac{3x}{2}dx$	к) $\int \ln(2x^4+1)dx$
л) $\int e^{\frac{x}{5}}\cos(2x-3)dx$	м) $\int \frac{16x^3+9x^2-3x+3}{8x^3+4x^2-2x-1}dx$
н) $\int \frac{6x^2+x-4}{x^3+4x-16}dx$	о) $\int \frac{-34x^4+6x^3+50x^2+x+6}{9x^5+x^3}dx$
п) $\int \frac{10}{5+3\cos x-4\sin x}dx$	р) $\int \frac{2\sin^5 x-\sin^3 x}{3+\cos x}dx$
с) $\int \frac{dx}{12+6\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{12} x}dx$
у) $\int \frac{7-6\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^4 \frac{x}{8}dx$
х) $\int \cos 6x \cdot \cos(4-4x)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-3\sqrt[4]{x^3}}}dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{2+3\sqrt[3]{x}}}$	

Вариант 19

а) $\int \frac{1}{4-3\sqrt[3]{x-5}}dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+16\sqrt[4]{x}\right)}$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2^{3x}+9}}$	г) $\int \sqrt{25x^2+81}dx$
д) $\int \sqrt{16x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{6x-9x^2}dx$
ж) $\int (4-3x)\cos(3x+2)dx$	з) $\int \left(7x-2x^2\right)e^{3-x}dx$
и) $\int \arccos\frac{x}{5}dx$	к) $\int \left(x^3+1\right)\log_{0,5}(x-3)dx$
л) $\int e^{-4x}\cdot\sin(1-x)dx$	м) $\int \frac{12x^4+12x^3+4x^2-x-1}{4x^3+4x^2+x}dx$
н) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3-2x^2+4x-21}dx$	о) $\int \frac{-5x^4+32x^3+39x^2+15x+18}{7x^5+3x^3}dx$
п) $\int \frac{-3}{2\cos x-\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin x+4\sin^3 x}{8+\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{5\cos^2 x-2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^{10} x}dx$
у) $\int \frac{5+4\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4\frac{x}{8}dx$
х) $\int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}dx$	ц) $\int \sqrt[3]{x^2}\sqrt{3+\sqrt[3]{x}}dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\left(2\sqrt[3]{x}-1\right)^3}}$	

Вариант 20

а) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{2-x}+1}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[4]{x}-7}{\sqrt{x}+16}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+9}}$	г) $\int \sqrt{x^2+25}dx$
д) $\int \sqrt{4x^2-49}dx$	е) $\int \sqrt{3+12x-9x^2}dx$
ж) $\int \left(2-x+x^2\right)\cos 4x dx$	з) $\int (7-x)3^{1-4x}dx$
и) $\int (2x+1)\operatorname{arcctg}\frac{x}{3}dx$	к) $\int \left(2x-3x^2\right)\ln x^4 dx$
л) $\int e^{-\frac{x}{5}}\sin(5x+3)dx$	м) $\int \frac{16x^4-8x^3-5x^2+3x+3}{8x^3-4x^2-2x+1}dx$
н) $\int \frac{-3x^2-2x-1}{x^3+4x^2+9x+10}dx$	о) $\int \frac{-13x^3+22x^2-12x+20}{5x^4+4x^2}dx$
п) $\int \frac{6}{1+\cos x}dx$	р) $\int \frac{\cos^5 x-4\cos x}{2-\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{8+16\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$
у) $\int \frac{\cos^2 2x}{\sin^6 x}dx$	ф) $\int \sin^2 4x\cdot\cos^2 4x dx$
х) $\int \sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2}dx$	ц) $\int x^3\sqrt[3]{1-3\sqrt[3]{x^4}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}}$	

Вариант 21

а) $\int \frac{2\sqrt{x+5}+3}{1+\sqrt{x+5}}dx$	б) $\int \frac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt[4]{x}+2}dx$
в) $\int \sqrt{e^{2x}+25}dx$	г) $\int \sqrt{36x^2+1}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-64}dx$	е) $\int \sqrt{8+4x-4x^2}dx$
ж) $\int (9x-1)\sin(5x-2)dx$	з) $\int \left(7+x-x^2\right)6^{x-3}dx$
и) $\int \arcsin\frac{x}{5}dx$	к) $\int \ln\left(x^2+x+1\right)dx$
л) $\int e^{-\frac{x}{4}}\cos 6x dx$	м) $\int \frac{27x^3-19x^2+5x+5}{9x^3-6x^2+x}dx$
н) $\int \frac{8x^2+x-1}{x^3-10x+24}dx$	о) $\int \frac{-7x^4+12x^3-12x^2+10x-4}{3x^5+2x^3}dx$
п) $\int \frac{1}{2\cos x+\sin x+3}dx$	р) $\int \frac{\cos^3 x-6\cos x}{3+3\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{4+12\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^{10} x}dx$
у) $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^8 x}dx$	ф) $\int \sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^4\frac{x}{4}dx$
х) $\int \cos\frac{x}{4}\cdot\cos 3x dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{3-2\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{x}-2}}{\sqrt{x^3}}dx$	

Вариант 22

а) $\int \frac{1}{x+2\sqrt[3]{x-4}-4}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{3x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-e^{3x}}}$	г) $\int \sqrt{4x^2+49}dx$
д) $\int \sqrt{9x^2-25}dx$	е) $\int \sqrt{8+8x-16x^2}dx$
ж) $\int (5x+2)\cdot e^{3-x}dx$	з) $\int (5x^2-9)\sin(x+2)dx$
и) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$	к) $\int x\cdot \log_2(x^2+5x)dx$
л) $\int 5^{-x}\cdot\cos\left(\frac{x}{4}-1\right)dx$	м) $\int \frac{54x^4+18x^3-7x^2-3x+2}{27x^3+9x^2-3x-1}dx$
н) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^3+27}dx$	о) $\int \frac{6x^4-2x^3+4x^2-5x-3}{x^5+3x^3}dx$
п) $\int \frac{9}{5-4\cos x-3\sin x}dx$	р) $\int \frac{2\sin^5 x-3\sin^3 x}{3-\cos x}dx$
с) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+7\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$
у) $\int \frac{(\sin x+3\cos x)^2}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \cos^4 \frac{x}{6}dx$
х) $\int \sin\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{4}+1\right)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{2+7\sqrt{x}}}dx$
ч) $\int \sqrt[4]{x}\sqrt{\sqrt{x^5}+1}dx$	

Вариант 23

а) $\int \frac{1-2\sqrt[3]{x+5}}{3+\sqrt[3]{(x+5)^2}}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt{x}+3}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-5^{3x}}}$	г) $\int \sqrt{9x^2+4}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-25}dx$	е) $\int \sqrt{5x-2x^2}dx$
ж) $\int (6x-5)\cos^2 3xdx$	з) $\int \left(2x^2+x+1\right)e^{\frac{x}{2}}dx$
и) $\int \arccos\frac{4x}{3}dx$	к) $\int (6x-1)\ln\left(x^2+1\right)dx$
л) $\int 4^{-x}\cdot\sin\left(\frac{x}{3}+1\right)dx$	м) $\int \frac{18x^4+12x^3+3x^2+x-3}{9x^3+6x^2+x}dx$
н) $\int \frac{6x^2-x+5}{x^3-3x^2+6x-40}dx$	о) $\int \frac{-13x^3+17x^2-21x+28}{5x^4+7x^2}dx$
п) $\int \frac{2}{6-\cos x}dx$	р) $\int \frac{\sin x+3\sin^3 x}{4+8\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-6}$	т) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$
у) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sin^8 x}dx$	ф) $\int \cos^2 5x\cdot\sin^2 5xdx$
х) $\int \sin 5x\cdot\sin\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$	ц) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{2-\sqrt[3]{x}}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x^3}}dx$	

Вариант 24

а) $\int \frac{1}{4-\sqrt[4]{x+1}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}-2}}$	г) $\int \sqrt{16x^2+81}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-4}dx$	е) $\int \sqrt{24+6x-9x^2}dx$
ж) $\int \left(4x-5x^2\right)4^{3-x}dx$	з) $\int \left(3-\frac{x}{2}\right)\sin\left(2+x\right)dx$
и) $\int \left(x^2+1\right)\operatorname{arcctg}\frac{x}{4}dx$	к) $\int \left(6-x^2\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(3x+1\right)dx$
л) $\int e^{-6x}\cos\left(5x+4\right)dx$	м) $\int \frac{81x^3-29x^2-10x+6}{27x^3-9x^2-3x+1}dx$
н) $\int \frac{5x^2+x-3}{x^3-4x^2-4x-5}dx$	о) $\int \frac{-20x^4+25x^3+11x^2+4x+2}{7x^5+x^3}dx$
п) $\int \frac{10}{6-3\cos x+4\sin x}dx$	р) $\int \frac{4\cos x-\cos^5 x}{5-\sin x}dx$
с) $\int \frac{dx}{5+15\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^{12} x}dx$
у) $\int \frac{\left(2\sin x-3\cos x\right)^2}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \sin^6 \frac{x}{2}dx$
х) $\int \cos\left(\frac{1}{2}-3x\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}+4x\right)dx$	ц) $\int \sqrt{x^3}\sqrt{2-\sqrt[4]{x^5}}\,dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$	

Вариант 25

а) $\int \frac{5-x}{2\sqrt{x-6}-4}dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(4-3\sqrt[4]{x}\right)}$
в) $\int \sqrt{2^{2x}+25}dx$	г) $\int \sqrt{x^2+36}dx$
д) $\int \sqrt{16x^2-9}dx$	е) $\int \sqrt{4x-8x^2}dx$
ж) $\int (2-8x)\sin^2\frac{x}{2}dx$	з) $\int \left(2x-x^2\right)e^{1-\frac{x}{2}}dx$
и) $\int \arcsin 8x dx$	к) $\int \ln\left(x^3+3x^2+x+1\right)dx$
л) $\int e^{6x}\cdot\sin\left(4+\frac{x}{2}\right)dx$	м) $\int \frac{16x^4-24x^3-36x^2+55x+6}{8x^3-12x^2-18x+27}dx$
н) $\int \frac{-x^2+5x+5}{x^3+x^2-8x+16}dx$	о) $\int \frac{-4x^4+17x^3+x^2+36x+18}{5x^5+9x^3}dx$
п) $\int \frac{8}{5\cos x-2\sin x}dx$	р) $\int \frac{\sin x-2\sin^3 x}{9-\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x-\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}dx$
у) $\int \frac{\left(2\cos^2 x-\sin^2 x\right)^2}{\cos^6 x}dx$	ф) $\int \sin^2 x\cdot\cos^6 x dx$
х) $\int \sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{5x}{4}dx$	ц) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{6-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	

Вариант 26

а) $\int \frac{\sqrt{x+2}-7}{1+\sqrt{x+2}}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt[4]{5x}-3}{\sqrt{5x}+4}dx$
в) $\int \sqrt{5^x-2}dx$	г) $\int \sqrt{4x^2+81}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-9}dx$	е) $\int \sqrt{8x-x^2}dx$
ж) $\int (7-6x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}dx$	з) $\int \left(x^2-3x+2\right)\cos 5xdx$
и) $\int \left(1-x^2\right)\operatorname{arctg} 3xdx$	к) $\int x\cdot \log_9\left(3x^2+1\right)dx$
л) $\int 6^x\cdot \sin 7xdx$	м) $\int \frac{16x^3+47x^2+37x+4}{4x^3+12x^2+9x}dx$
н) $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3+6x^2+6x+5}dx$	о) $\int \frac{3x^4+3x^3+6x^2+6x-4}{4x^5+3x^3}dx$
п) $\int \frac{-5}{3+4\cos x}dx$	р) $\int \frac{\sin x-4\sin^5 x}{9+\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+1}$	т) $\int \frac{\sin^8 x}{\cos^{14} x}dx$
у) $\int \frac{2\sin^3 x-3\cos^3 x}{\cos^5 x}dx$	ф) $\int \cos^4 2x\cdot \sin^2 2xdx$
х) $\int \cos(3x-1)\cdot \cos\frac{x}{2}dx$	ц) $\int \sqrt{2+5\sqrt[3]{x}}dx$
ч) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\left(2\sqrt[3]{x}+7\right)^5}}$	

Вариант 27

а) $\int \frac{1}{5(x-2)-\sqrt[5]{(x-2)^3}}dx$	б) $\int \frac{2\sqrt{3x}+1}{\sqrt[4]{3x}-1}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-2^{3x}}}$	г) $\int \sqrt{25x^2+64}dx$
д) $\int \sqrt{x^2-16}dx$	е) $\int \sqrt{24-8x-16x^2}\,dx$
ж) $\int (x+1)^2 \cdot \sin\frac{x}{3}dx$	з) $\int (2-7x)4^{1-2x}\,dx$
и) $\int \arccos 6x dx$	к) $\int x^5 \cdot \ln(x+1)\,dx$
л) $\int e^{-\frac{x}{6}} \cdot \cos(2-7x)\,dx$	м) $\int \frac{27x^4+18x^3-3}{27x^3+18x^2-12x-8}dx$
н) $\int \frac{4x^2-3x+3}{x^3+5x^2+12x+8}dx$	о) $\int \frac{-11x^3+5x^2-27x+18}{4x^4+9x^2}dx$
п) $\int \frac{3}{2\sin x-2\cos x+3}dx$	р) $\int \frac{3\cos^5 x-2\cos x}{\sin x+1}dx$
с) $\int \frac{dx}{\cos^2 x-2\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^{10} x}{\sin^{10} x}dx$
у) $\int \frac{4\sin^3 x+7\cos^3 x}{\sin^5 x}dx$	ф) $\int \cos^6 \frac{x}{2}dx$
х) $\int \sin\left(1-\frac{3x}{2}\right) \cdot \sin\left(1+\frac{x}{2}\right)dx$	ц) $\int \sqrt{x}\sqrt[3]{3-4\sqrt[4]{x^3}}\,dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{\left(\sqrt{x}-3\right)^3}dx}{\sqrt[4]{x^7}}$	

Вариант 28

а) $\int \frac{3\sqrt[3]{4-x}-1}{2+\sqrt[3]{4-x}}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{5x}-4}{x-\sqrt[3]{(5x)^2}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-e^{-3x}}}$	г) $\int \sqrt{16x^2+49}dx$
д) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{7+6x-x^2}dx$
ж) $\int \left(1-\frac{x}{4}\right)\sin(3x+1)dx$	з) $\int (9-4x^2)e^{1-4x}dx$
и) $\int (4x+1)\operatorname{arcctg}\frac{x}{5}dx$	к) $\int \log_7(2x^3-4)dx$
л) $\int 6^{-x}\cdot\cos\left(1+\frac{x}{7}\right)dx$	м) $\int \frac{9x^4-12x^3+7x^2+x+1}{9x^3-12x^2+4x}dx$
н) $\int \frac{6x^2-x+5}{x^3-3x^2+8x-12}dx$	о) $\int \frac{6x^4-2x^3+9x^2+15x-10}{3x^5+5x^3}dx$
п) $\int \frac{11}{6\sin x-\cos x}dx$	р) $\int \frac{2\cos^5 x-3\cos x}{4-2\sin^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{3+9\cos^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^8 x}{\sin^{12} x}dx$
у) $\int \frac{3-2\sin x\cdot\cos x}{\cos^4 x}dx$	ф) $\int \sin^2 3x\cdot\cos^4 3x dx$
х) $\int \cos(2x+6)\cdot\cos\frac{x}{4}dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{4+3\sqrt[3]{x}}}{x}dx$
ч) $\int \sqrt{2-\sqrt[3]{x^2}}\,dx$	

Вариант 29

а) $\int \frac{5-2x}{\sqrt{3-x}+1}dx$	б) $\int \frac{\sqrt[3]{9x}+1}{\sqrt{9x}-\sqrt[3]{9x}}dx$
в) $\int \sqrt{5e^x-2}\,dx$	г) $\int \sqrt{9x^2+25}\,dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-49}\,dx$	е) $\int \sqrt{2x-3x^2}\,dx$
ж) $\int \left(5x-x^2\right)3^{1-x}dx$	з) $\int \left(\frac{x}{2}+5\right)\sin^2\frac{x}{4}dx$
и) $\int \arcsin\frac{3x}{4}dx$	к) $\int \left(3x^2-1\right)\ln\left(x+5\right)^2 dx$
л) $\int e^{\frac{x}{6}}\sin\left(1+8x\right)dx$	м) $\int \frac{128x^3-34x^2-9x+7}{64x^3-16x^2-4x+1}dx$
н) $\int \frac{5x^2+6x+4}{x^3+2x^2+3x-6}dx$	о) $\int \frac{-10x^3+7x^2-9x+9}{4x^4+3x^2}dx$
п) $\int \frac{1}{3-2\sin x-3\cos x}dx$	р) $\int \frac{\sin^3 x-4\sin^5 x}{4-\cos^2 x}dx$
с) $\int \frac{dx}{5-3\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x}dx$
у) $\int \frac{2\sin 2x-5\cos 2x}{\sin^4 x}dx$	ф) $\int \cos^2\frac{x}{6}\cdot\sin^2\frac{x}{6}dx$
х) $\int \sin\frac{5x}{4}\cdot\cos\left(x+1\right)dx$	ц) $\int \sqrt[3]{2+5\sqrt[4]{x}}\,dx$
ч) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{\left(2+x^2\right)^3}}$	

Вариант 30

а) $\int \frac{\left(\sqrt{6-x}+1\right)^2}{\sqrt{6-x}-1}dx$	б) $\int \frac{\sqrt{7x}+1}{\sqrt{7x}-\sqrt[3]{7x}}dx$
в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5^{-3x}-2}}$	г) $\int \sqrt{x^2+16}dx$
д) $\int \sqrt{25x^2-1}dx$	е) $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$
ж) $\int \left(\frac{x}{3}+1\right)\cos^2 3xdx$	з) $\int (x-1)^2 e^{2x-1}dx$
и) $\int \arccos 4xdx$	к) $\int \log_8\left(x^5+4x+1\right)dx$
л) $\int 8^x \cdot \sin\left(\frac{x}{5}+1\right)dx$	м) $\int \frac{32x^4+16x^3-x+2}{16x^3+8x^2+x}dx$
н) $\int \frac{2x^2+2x+3}{x^3-x^2+x-21}dx$	о) $\int \frac{-20x^3+2x^2-6x+2}{7x^4+2x^2}dx$
п) $\int \frac{4dx}{4\sin x-5}$	р) $\int \frac{5\sin^3 x-2\sin x}{2-\cos x}dx$
с) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x-3\sin^2 x}$	т) $\int \frac{\sin^{10} x}{\cos^{14} x}dx$
у) $\int \frac{6\cos^3 x-5\sin^3 x}{2\cos^5 x}dx$	ф) $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 xdx$
х) $\int \cos\left(2-\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$	ц) $\int \frac{\sqrt{7-x^3}}{x}dx$
ч) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}dx}{\sqrt{\frac{4}{\sqrt{x}}-1}}$	

3. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла к геометрии. Несобственные интегралы

Вариант 1

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2xdx$ в) $\int\limits_0^3 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x-1,$
$y = 1+2x-x^2,$
$x = 0\ (x \geq 0)$

б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$
$y = \sqrt{3}\ \left(y \geq \sqrt{3}\right)$

в) $\rho = 2\sqrt{6}\sin\varphi,$
$\rho = 6\sqrt{2}\cos\varphi$
$\left(M\left(3; \frac{\pi}{3}\right) \in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = e^x,$
$0 \leq x \leq \ln 3$

б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{t^2+1}{2t}, \end{cases}$
$1 \leq t \leq 2$

в) $\rho = 2(1+\sin\varphi),$
$\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (*OX* и *OY*).

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-z^2 = -1,$
$z = 2$

б) $y = 0,25x^2+2$
$5x-8y+14 = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+4x^2}$ б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln x+1}{x}dx$ в) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2xdx$

Вариант 2

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$ б) $\int\limits_1^2 x\ln(x+1)dx$ в) $\int\limits_0^1 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}-\sqrt[3]{9x-1}+1}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x-1,$ $y = 4-\frac{2}{9}x^2,$ $x=-1\,(x\geq -1)$

б) $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\,(x\geq 4)$

в) $\rho = 2(1+\cos\varphi),$ $\rho = 6\cos\varphi$ $(M(5;0)\in S)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$ $0\leq x\leq \ln 2$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\frac{t}{4}-\frac{1}{4}\ln t, \end{cases}$ $1\leq t\leq e$

в) $\rho = 4\cos\varphi,$ $\frac{\pi}{8}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;

б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=0,$ $y=-2$

б) $y=x^3,$ $y=4x,$ $x\geq 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+10}$ б) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ в) $\int\limits_0^5\frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{dx}{1-\cos 4x}$

Вариант 3

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)dx}{x-1}$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$ в) $\int\limits_0^7 \frac{2xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 + 3x,$
$y = x + 3$

б) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 3\ (y \ge 3)$

в) $\rho = 2(1 + \sin\varphi),$
$\rho = 6\sin\varphi$
$\left(M\left(5; \frac{\pi}{2}\right) \in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln x,$
$1 \le x \le 2$

б) $\begin{cases} x = \sqrt[4]{t}, \\ y = \frac{\sqrt{t}}{4} - \frac{1}{8}\ln t, \end{cases}$
$e \le t \le 4$

в) $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}},$
$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2},$
$z = 1$

б) $2x - y = 0,$
$y = 4x - x^2,$
$y = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-2x^2} dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$ в) $\int\limits_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^5}}$ г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Вариант 4

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$ б) $\int\limits_0^{\pi} x\sin 3x dx$ в) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{(7x+16)dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $xy-6=0,$ $x-y-5=0,$ $x=1$

б) $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=3\ (y\geq 3)$

в) $\rho = 3(1-\cos\varphi),$ $\rho = 3(1+\cos\varphi)$ $\left(M\left(1;\frac{\pi}{2}\right)\in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \arccos x - \sqrt{1-x^2},$ $0\leq x\leq 1$

б) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^4}{4} - \ln t, \end{cases}$ $1\leq t\leq 2$

в) $\rho = 5\cos\varphi + 12\sin\varphi,$ $\frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $x^2+\frac{z^2}{4}-y^2=1,$ $y=-2,$ $y=1$

б) $x-y=0,$ $4x+y-20=0,$ $y=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{x^4+9}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{x^3}dx$ в) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1-\cos x}}$

Вариант 5

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$ б) $\int\limits_{0}^{3} \ln(x+3)dx$ в) $\int\limits_{1}^{4} \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x-y-3=0,$ $y=4x-x^2-3$ б) $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t), \end{cases}$ $y=9\ (y\geq 9)$ в) $\rho=2\cos 2\varphi,$ $\rho=1\ (\rho\geq 1)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\sqrt{6x-x^2},$ $1\leq x\leq 4$ б) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=\frac{e^{2t}}{4}-\frac{t}{2}, \end{cases}$ $1\leq t\leq 2$ в) $\rho=3(1-\cos\varphi),$ $\frac{\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $-x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=-1,$ $x=2$ б) $y=6x-x^2,$ $y=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{3x-1}dx$ в) $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$ г) $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1+\cos 6x}$

Вариант 6

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x + 3\sin x}{\left(2\sin x - 3\cos x\right)^3} dx$ б) $\int\limits_2^3 x \ln\left(x-1\right) dx$ в) $\int\limits_0^3 \frac{15x dx}{\sqrt[4]{\left(5x+1\right)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 - 4x,$ $y = x,$ $x = 4\left(x \le 4\right)$ б) $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\left(x \ge 4\right)$ в) $\rho = 2\sin 2\varphi,$ $\rho = 1\ \left(\rho \ge 1\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^2 + 32}{32x^2},$ $\frac{1}{2} \le x \le 1$ б) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 - \frac{t}{3}, \end{cases}$ $1 \le t \le 3$ в) $\rho = \frac{1}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)},$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (*OX* и *OY*).

а) $2z = x^2 + \frac{y^2}{3},$ $z = 2$ б) $y = x^2,$ $x = 1 + \sqrt{1-y},$ $y = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^4 e^{x^5} dx$ б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ в) $\int\limits_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ г) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\left(\ln x - 1\right)}$

Вариант 7

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$ б) $\int\limits_2^{e} x^2 \ln x dx$ в) $\int\limits_0^{5} \frac{9x dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y^2 - x - 1 = 0,$ $y + x - 1 = 0$ б) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\ (y \geq 4)$ в) $\rho = a(1+\cos\varphi),$ $\rho = a\ (\rho \geq a)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x,$ $1 \leq x \leq 2$ б) $\begin{cases} x = t^2\left(1 + \frac{1}{32t^3}\right), \\ y = \sqrt{t}, \end{cases}$ $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ в) $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3},$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (*OX* и *OY*).

а) $x^2 + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1$ б) $y = 4 - x^2,$ $y + x^2 - 9 = 0,$ $y = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{(2x-5)dx}{x^2-5x+7}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{2x^2+6x+5}$ в) $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$ г) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$

Вариант 8

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ в) $\int\limits_1^4 \frac{(13-5x)dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3}+3\sqrt[4]{5x-4}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=1-x^2,$
$y=-\sqrt{3-3x}$

б) $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$
$x=2\ (x\geq 2)$

в) $\rho=2\sin 5\varphi,$
$\rho=1\ (\rho\geq 1)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\ln\sin x,$
$\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

б) $\begin{cases} x=e^t, \\ y=e^{2t}-\frac{t}{8}, \end{cases}$
$0\leq t\leq 1$

в) $\rho=\sin\varphi+\cos\varphi,$
$\frac{\pi}{16}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $x^2+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{4}-1=0,$
$z=4$

б) $y=\frac{x^2}{4},$
$y=x^2,$
$y=4,$
$x\geq 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+6}}$ б) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+1)^3}$ в) $\int\limits_8^{10} \frac{dx}{\sqrt{x}(9-x)}$ г) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^3dx}{1-x^4}$

Вариант 9

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{5x^4+1}$ б) $\int\limits_0^1 (2x+1)e^{-x}dx$ в) $\int\limits_0^5 \frac{3xdx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x(y+1)-6=0,$
$x-5y-6=0,$
$x=1$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$
$y=2\ (y\ge 2)$

в) $\rho=2\cos\varphi,$
$\rho=\sqrt{2}\quad (\rho\ge\sqrt{2})$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=x^3+\frac{1}{12x},$
$1\le x\le 2$

б) $\begin{cases} x=\frac{1}{4}\left(2t-e^{2t}\right), \\ y=e^t, \end{cases}$
$1\le t\le 3$

в) $\rho=2\sin\varphi,$
$\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{2\pi}{3}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $y^2+z^2-\frac{x^2}{4}=0,$
$x=-1$

б) $2x-y=0,$
$2x-3y=0,$
$y=6$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+7}$ б) $\int\limits_0^{\infty} \sin x dx$ в) $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^x-1}$ г) $\int\limits_1^4 \frac{x^2dx}{\left(27-x^3\right)^3}$

Вариант 10

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \ln\cos x\, dx$ б) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx$ в) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} + 3\sqrt[3]{3x-8}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x - y - 1 = 0,$
$x^2 - 2x + y - 1 = 0,$
$x = 0 \ (x \le 0)$

б) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 4 \ (y \ge 4)$

в) $\rho = 6\sqrt{2}\sin\varphi,$
$\rho = 2\sqrt{6}\cos\varphi$
$\left(M\left(2; \frac{\pi}{6} \right) \in S \right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},$
$0 \le x \le \frac{15}{16}$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^2 + 1}{2t}, \\ y = \ln t, \end{cases}$
$1 \le t \le 2$

в) $\rho = 2e^{\frac{5}{2}\varphi},$
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{25} - y^2 = 1,$
$y = 0,$
$y = 2$

б) $x^2 + y^2 = 1,$
$y^2 = \frac{3}{2}x,$
$x \ge 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{-x}dx}{e^{-x} + 3}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1 + 9x^2}$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$ г) $\int\limits_2^4 \frac{xdx}{\sqrt[3]{(9 - x^2)^5}}$

Вариант 11

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x - \operatorname{arctg}^3 x}{1 + x^2} dx$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$ в) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(9x+1)^2} + 3\sqrt[3]{9x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y - x = 0,$ $x + 5y = 0,$ $x = 3 + \sqrt{3 - y}$ б) $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 2\ (x \geq 2)$ в) $\rho = 2(1 - \sin\varphi),$ $\rho = 2\sin\varphi$ $\left(M\left(1; \frac{\pi}{2}\right) \in S \right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln(2x),$ $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ б) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = t + \frac{1}{12\sqrt[3]{t}}, \end{cases}$ $1 \leq t \leq 8$ в) $\rho = 5(1 + \cos\varphi),$ $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $2x = y^2 + z^2,$ $x = 1$ б) $xy = 2,$ $y = 2,$ $y = 4,$ $x = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[5]{3\ln x + 2}}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(9x^2 + 4x)dx}{(3x^3 + 2x^2 + 4)^2}$ в) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{1 + \sin x}$ г) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(2x-1)^3}$

Вариант 12

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x dx$ в) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+4\sqrt[3]{x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=4-\frac{2}{9}x^2,$ $y=x-1,$ $x=-1\,(x\le -1)$

б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$ $y=3\,(y\ge 3)$

в) $\rho=a(1+\sin\varphi),$ $\rho=a(1-\sin\varphi)$ $\left(M\left(a;\frac{\pi}{2}\right)\in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\sqrt{2x-x^2},$ $0\le x\le 2$

б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t^3}{3}-t, \end{cases}$ $1\le t\le 3$

в) $\rho=3e^{\frac{4\varphi}{5}},$ $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-z^2=-1,$ $z=-2$

б) $y=1-x^2,$ $y=x^2+2,$ $x=1,$ $x=-1$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^0 \cos x dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}dx}{4+e^{3x}}$ в) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}$ г) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\cos 3x}$

Вариант 13

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$ б) $\int\limits_{-1}^0 x^2\ln(x+4)dx$ в) $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $3x-2y-3=0,$
$5x+2y-21=0,$
$y=-\sqrt{x-1}$

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$
$y=3\ (y\geq 3)$

в) $\rho=2\cos 3\varphi,$
$\rho=\sqrt{3}\ \left(\rho\geq\sqrt{3}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\sqrt{x}\left(x-\frac{1}{3}\right),$
$1\leq x\leq 4$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\frac{\sqrt{t^3}}{6}+\frac{1}{2\sqrt{t}}, \end{cases}$
$1\leq t\leq 4$

в) $\rho=\cos^3\frac{\varphi}{3},$
$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-x^2=1,$
$x=1,$
$x=2$

б) $y=x,$
$y=2x,$
$x=4$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\ln^2 2x}{x}dx$ б) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$ в) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}3x\,dx$ г) $\int\limits_2^4\frac{dx}{(3-x)^3}$

Вариант 14

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} \frac{\mathrm{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$ б) $\int\limits_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$ в) $\int\limits_1^4 \frac{(3x-3)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2-4x+y+1=0,$
$x-3y-3=0,$
$x=3\ (x\le 3)$

б) $\begin{cases} x=16\cos^3 t \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$
$x=6\sqrt{3}\ \left(x\ge 6\sqrt{3}\right)$

в) $\rho=2\cos 2\varphi,$
$\rho=\sqrt{3}\ \left(\rho\ge\sqrt{3}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=1-\ln\left(x^2-1\right),$
$3\le x\le 4$

б) $\begin{cases} x=\frac{1}{8}\left(8e^{2t}-t\right), \\ y=e^t, \end{cases}$
$1\le t\le 3$

в) $\rho=6\cos\varphi-4\sin\varphi,$
$\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $y=5x^2+z^2,$
$y=1$

б) $y=x^2,$
$y=-2x$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\, 2x}{1+4x^2}dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{e^{-2x+1}}$ в) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[5]{\ln x}}$ г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x+1}}$

Вариант 15

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin^2 x - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ б) $\int_0^2 \ln\left(x^2+4\right)dx$ в) $\int_0^3 \frac{5dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3} + \sqrt[4]{5x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 2 + \sqrt{1-y}$, $4x + y - 9 = 0$, $y = -3 \left(y \le -3\right)$ б) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6\left(y \ge 6\right)$ в) $\rho = a(1 + \sin\varphi)$, $\rho = a \ \left(\rho \ge a\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$ б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(3t^2 - 1\right), \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ $2 \le t \le 3$ в) $\rho = 4(1 + \sin\varphi)$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{4} + y^2 = z^2$, $z = -2$ б) $x^2 + y^2 = 25$, $3x - 4y = 0$, $x = 0\left(x \ge 0\right)$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int_0^\infty \frac{xdx}{\left(x^2+2\right)^3}$ б) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{5\ln x + 2}}$ в) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^6}}$ г) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^2 x}$

Вариант 16

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$ б) $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx$ в) $\displaystyle\int_0^5 \frac{6dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+2\sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 - 4x,$
$y = x,$
$x = 4 \ (x \geq 4)$

б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$x = 3\sqrt{3} \ \left(x \geq 3\sqrt{3}\right)$

в) $\rho = 3\cos 5\varphi,$
$\rho = 6 \ (\rho \geq 6)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \dfrac{1}{6}\left(3x^3 + \dfrac{1}{x}\right),$
$1 \leq x \leq 2$

б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = t^6 - \dfrac{t^2}{3}, \end{cases}$
$0 \leq t \leq 1$

в) $\rho = \dfrac{1}{2}(1+\cos\varphi),$
$\dfrac{\pi}{8} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = -1,$
$x = -5$

б) $y^3 = x^2,$
$y = 1$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\left(4\ln^2 x+1\right)}$ б) $\displaystyle\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}dx$ в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{5}} \frac{dx}{1+\cos 5x}$ г) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$

Вариант 17

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$ б) $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$ в) $\int\limits_1^4 \frac{5dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3} + 3\sqrt[4]{5x-4}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x - 3y - 1 = 0,$ $x - y + 1 = 0,$ $y = \sqrt{1-x}$ б) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}$ $\left(y \geq 2\sqrt{3}\right)$ в) $\rho = 2\sin\varphi,$ $\rho = 1$ $(\rho \geq 1)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^2}{8} - \ln\frac{x}{2},$ $1 \leq x \leq 2$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t^2 + \frac{1}{32t}, \end{cases}$ $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ в) $\rho = \frac{1}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)},$ $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1,$ $z = 1,$ $z = 4$ б) $y = 2 - x^2,$ $y^3 = x^2$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 10x + 50}$ б) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(4\ln x + 3)^5}$ в) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x-4)^4}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^5 2x}}$

Вариант 18

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}x \cdot \ln\sin x dx$ б) $\int\limits_{-2}^{1} x^2 \ln(x+3) dx$ в) $\int\limits_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2 - 4x + y + 1 = 0,$
$x + 3y + 3 = 0,$
$x = 3 \ (x \le 3)$

б) $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$
$y = 15 \quad (y \ge 15)$

в) $\rho = 2\sin\varphi,$
$\rho = 2\cos\varphi$
$\left(M\left(1; \frac{\pi}{4}\right) \in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{1}{8x^2}\left(x^6 + 2\right),$
$2 \le x \le 4$

б) $\begin{cases} x = \sqrt{2+t}, \\ y = \sqrt{2-t}, \end{cases}$
$\sqrt{3} \le t \le 2$

в) $\rho = 3\sin\varphi - 2\cos\varphi,$
$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

б) $2x + 3y - 10 = 0,$
$x = \sqrt{2y},$
$y = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x^3 dx}{5 + 3x^4}$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{x^4} dx$ в) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x(\ln x - 2)^2}$ г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{ctg}\, 4x dx$

Вариант 19

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \operatorname{arcctg} 4x dx$ в) $\int\limits_0^3 \frac{3dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}+4\sqrt[3]{3x-8}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x=2-\sqrt{1-y}$, $x+y-3=0$, $y=-3$

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x=1$ $(x\ge 1)$

в) $\rho=2(1-\cos\varphi)$, $\rho=2\cos\varphi$ $\left(M\left(\frac{3}{2};0\right)\in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\sqrt{4x-x^2}$, $0\le x\le 3$

б) $\begin{cases} x=t^2\left(t^4-\frac{1}{3}\right), \\ y=t^4, \end{cases}$ $1\le t\le 2$

в) $\rho=2e^{\frac{\sqrt{3}}{5}\varphi}$, $\frac{-\pi}{2}\le\varphi\le 0$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $z=\frac{x^2+y^2}{4}$, $z=1$

б) $y=0$, $x-2y=0$, $x=6-\sqrt{2y}$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty}\sin 3x dx$ б) $\int\limits_0^{\infty}\frac{(4x-5)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}$ в) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sin x}$ г) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^4 x}}$

Вариант 20

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$ в) $\int\limits_3^8 \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}dx$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 4-\sqrt{x-1}$, $3x-y+1=0$, $2x-3y-4=0$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y=4\ \left(y\ge 4\right)$

в) $\rho = 2\sin 3\varphi$, $\rho=\sqrt{3}\ \left(\rho\ge\sqrt{3}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}$, $1\le x\le 2$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t+3}, \\ y=1-\ln\left(t+2\right), \end{cases}$ $1\le t\le 6$

в) $\rho=\sin^4\frac{\varphi}{4}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $y^2+\frac{z^2}{16}-\frac{x^2}{2}=1$, $x=-1$, $x=1$

б) $2x-y=0$, $x+y=6$, $x=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{x^6+1}$ б) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x\left(\ln x+5\right)}$ в) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1-\cos 8x}$ г) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$

Вариант 21

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 2x \cdot \sin 2x dx$ б) $\int\limits_0^2 \arcsin\frac{x}{2} dx$ в) $\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2 - 5x + 6,$ $y = 8x - x^2 - 12$ б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1 \quad (y \geq 1)$ в) $\rho = a(1 - \cos\varphi),$ $\rho = a \quad (\rho \geq a)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \ln\cos x,$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ б) $\begin{cases} x = \frac{t^3}{12} - \operatorname{arctg} t, \\ y = \sqrt{1 + t^2}, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$ в) $\rho = 1 - \sin\varphi,$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (*OX* и *OY*).

а) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1,$ $z = 5$ б) $x - y + 5 = 0,$ $3x + y + 3 = 0,$ $y = 0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{x^3} dx$ б) $\int\limits_0^{\infty} (x^3 + 1)^5 \cdot x^2 dx$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{16}} \operatorname{tg} 8x dx$ г) $\int\limits_3^4 \frac{dx}{(x-2)\ln(x-2)}$

Вариант 22

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \sin 2x dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-2x)\cos 2x dx$ в) $\int\limits_{1}^{4} \frac{9(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 3-\sqrt{3-y},$
$4x-5y-9=0,$
$y=3$

б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$x=1 \quad (x \ge 1)$

в) $\rho = 2\cos\varphi,$
$\rho = 1 \quad (\rho \ge 1)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{x^4}{2}\left(1+\frac{1}{8x^6}\right),$
$2 \le x \le 3$

б) $\begin{cases} x = \frac{t^4}{4} - \ln t, \\ y = t^2+1, \end{cases}$
$1 \le t \le 2$

в) $\rho = 4\sin\varphi + 3\cos\varphi,$
$\frac{\pi}{12} \le \varphi \le \frac{\pi}{8}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=z^2,$
$z=1$

б) $y=x^2,$
$y=(x-4)^2,$
$y=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{(2\ln x+5)^3}}$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{4+x^8}$ в) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{-2x}dx}{e^{-2x}-1}$ г) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x}$

Вариант 23

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x} dx$ в) $\int\limits_{1}^{9} x \cdot \sqrt[3]{1-x}\, dx$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \sqrt{4-x},$ $y = x+2,$ $x - 4y - 4 = 0$

б) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2 \ (y \geq 2)$

в) $\rho = 3\sqrt{2}\sin\varphi,$ $\rho = \sqrt{6}\cos\varphi$ $\left(M\left(1; \frac{\pi}{6}\right) \in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \sqrt{x}\left(\frac{x}{3} - 1\right),$ $1 \leq x \leq 4$

б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(t^3 - 3), \\ y = t^2 - 1, \end{cases}$ $\frac{1}{3} \leq t \leq 1$

в) $\rho = 6(1 - \cos\varphi),$ $\frac{\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = -1,$ $y = 3$

б) $xy = 8,$ $y = x^2,$ $x = 6$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{1-x^2}{x^3 - 3x} dx$ б) $\int\limits_{\frac{6}{\pi}}^{\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2} dx$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ г) $\int\limits_{3}^{5} \frac{xdx}{(16 - x^2)^5}$

Вариант 24

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{e+2}^{e^2+2} \frac{1+\ln(x-2)}{x-2} dx$ б) $\int\limits_0^1 x^3 \cdot \operatorname{arctg} x dx$ в) $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x^2 - 4x + y + 1 = 0,$ $x + 3y + 3 = 0,$ $x = 3 \ (x \geq 3)$ б) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 12 \ (y \geq 12)$ в) $\rho = 2\cos 3\varphi,$ $\rho = 1 \ (\rho \geq 1)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \frac{1}{2x^2}\left(1 + \frac{x^6}{8}\right),$ $1 \leq x \leq 2$ б) $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\left(\sqrt[3]{t^4} + \frac{1}{12}\right), \\ y = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$ $1 \leq t \leq 27$ в) $\rho = \frac{2}{\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)},$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{5},$ $x = 3$ б) $x = 2 - y^4,$ $x = y^2$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^3 \cdot e^{2x^4} dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{7}} \frac{dx}{1 - \cos 7x}$ г) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[5]{2x+1}}$

Вариант 25

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\operatorname{tg}^2(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx$ в) $\int\limits_{0}^{5} \frac{7dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+4\sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x=2+\sqrt{1-y}$, $2x+3y+1=0$, $y=1$

б) $\begin{cases} x=24\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$ $x=9\sqrt{3}$ $\left(x\ge 9\sqrt{3}\right)$

в) $\rho=a(1-\sin\varphi)$, $\rho=a$ $(\rho\ge a)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

б) $\begin{cases} x=\ln(t-1), \\ y=\sqrt{t}, \end{cases}$ $2\le t\le 4$

в) $\rho=\cos^4\frac{\varphi}{4}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:
   а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
   б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-z^2=1$, $z=0$, $z=3$

б) $4x-3y+2=0$, $3x+2y-24=0$, $x-5y+9=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln^2 x+9)}$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{2^x dx}{3+2^x}$ в) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x}(4-x)}$ г) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$

Вариант 26

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{(x^3+1)dx}{x^4+4x+1}$ б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cdot\cos x dx}{\sin^2 x}$ в) $\int_0^3 \frac{25x dx}{\sqrt{5x+1}+\sqrt[4]{5x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y=2+\sqrt{x-1}$, $2x+y-4=0$, $3x-y-11=0$

б) $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=4\sin^2 t, \end{cases}$ $y=3$

в) $\rho=2\sin 4\varphi$, $\rho=\sqrt{2}$ $\left(\rho\geq\sqrt{2}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{1}{6x}\left(x^4+3\right)$, $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\frac{\sqrt{t^3}}{6}+\frac{1}{2\sqrt{t}}, \end{cases}$ $1\leq t\leq 4$

в) $\rho=\frac{1}{5}(1-\sin\varphi)$, $\frac{\pi}{8}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{9}-y^2+\frac{z^2}{4}=-1$, $y=-2$

б) $y^2=x^3$, $x=1$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+4x}$ б) $\int_{-\infty}^0 x\cdot 5^{x^2}dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1-\cos^2 x}dx$ г) $\int_1^2 \frac{dx}{(3-2x)^2}$

Вариант 27

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg}^3 x + x}{1+x^2}dx$ б) $\int\limits_0^1 (1-3x)\cdot e^x dx$ в) $\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+3\sqrt[4]{3x+1}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x = 2+\sqrt{1-y}$, $4x+y-9=0$, $y=-3$ $(y \geq -3)$

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin^2 t, \end{cases}$ $y = \frac{3}{2}$

в) $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = a\sin\varphi$ $\left(M\left(a;\frac{\pi}{4}\right)\in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = \ln\left(1-x^2\right)$, $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$

б) $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2}, \\ y = \frac{t^3}{12} - \operatorname{arctg} t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$

в) $\rho = 8(1+\cos\varphi)$, $\frac{\pi}{9} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{3}$, $y = 4$

б) $y = \sqrt{x^3}$, $x+2y-20=0$, $x=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^8+4}$ б) $\int\limits_{e^3}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x+2)^2}$ в) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{tg} 4x dx$ г) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$

Вариант 28

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 \frac{x^5+x^2}{1+x^6}dx$ б) $\int\limits_0^1 (5x+1)\cdot 2^x dx$ в) $\int\limits_1^4 \frac{(3x-5)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}+1}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y+\sqrt{x-1}=0,$
$y=x-7,$
$2x-5y-2=0$

б) $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=4\sin^2 t, \end{cases}$
$y=3$

в) $\rho=\sqrt{6}\sin\varphi,$
$\rho=3\sqrt{2}\cos\varphi$
$\left(M\left(2;\frac{\pi}{3}\right)\in S\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2},$
$\frac{1}{2}\le x\le 2$

б) $\begin{cases} x=\frac{t}{4}-\frac{1}{4}\ln t, \\ y=\sqrt{t}, \end{cases}$
$e\le t\le e^2$

в) $\rho=6\sin\varphi+2\cos\varphi,$
$\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (*OX* и *OY*).

а) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,$
$z=-1,$
$z=2$

б) $x=\sqrt{2y},$
$2x+2y-3=0,$
$x=0$

5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_1^\infty \frac{8x+1}{4x^2+x-3}dx$ б) $\int\limits_{-\infty}^0 x^6 e^{x^7}dx$ в) $\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x-1}}$ г) $\int\limits_{-1}^0 \frac{4^x dx}{1-4^x}$

Вариант 29

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\sin 1} \frac{2+\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot\sin 2xdx}{\cos^3 x}$ в) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $x=1+\sqrt{5-y}$, $6x-y-1=0$, $2x-3y-3=0$

б) $\begin{cases} x=4\sin^2 t, \\ y=4\cos t, \end{cases}$ $x=3$

в) $\rho=2\sin 2\varphi$, $\rho=\sqrt{3}$ $\left(\rho\ge\sqrt{3}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y=\frac{x^3}{4}+\frac{1}{3x}$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1-\ln(t-1), \end{cases}$ $9\le t\le 16$

в) $\rho=\frac{1}{\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)}$, $\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

3. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;
б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

а) $\frac{x^2}{9}-y^2+\frac{z^2}{4}=0$, $y=3$

б) $y=2x$, $y=\frac{5-x}{2}$, $y=0$

4. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} x^3\cdot 8^{x^4}dx$ б) $\int\limits_0^{\infty}\frac{3^x}{9+9^x}dx$ в) $\int\limits_{-4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{10}}\frac{dx}{1+\cos 10x}$

Вариант 30

1. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^{2x}dx}{e^{4x}-4}$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^3}dx$ в) $\int\limits_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$

2. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = 2+\sqrt{x-1}$, $3x+y-5=0$, $5x-3y-13=0$

б) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y = 2\cos^2 t, \end{cases}$ $y=\frac{3}{2}$

в) $\rho = 2\sin\varphi$, $\rho=\sqrt{2}$ $\left(\rho \ge \sqrt{2}\right)$

3. Вычислить длины дуг кривых:

а) $y = x^4+\frac{1}{32x^2}$, $\frac{1}{2} \le x \le 1$

б) $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{t}}{4}-\frac{1}{8}\ln t, \\ y=\sqrt[4]{t}, \end{cases}$ $e \le t \le e^2$

в) $\rho = 2\left(1+\cos\varphi\right)$, $\frac{\pi}{10} \le \varphi \le \frac{\pi}{5}$

4. Вычислить объем тела:

а) ограниченного поверхностями по известному поперечному сечению;

б) образованного вращением фигуры, ограниченной линиями, вокруг некоторой оси (OX и OY).

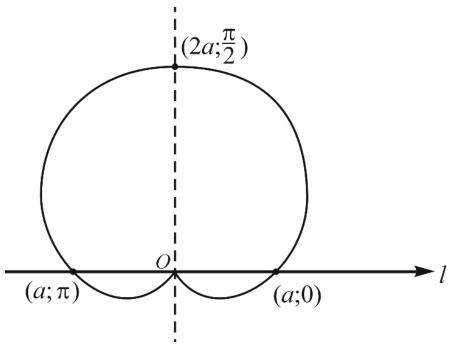
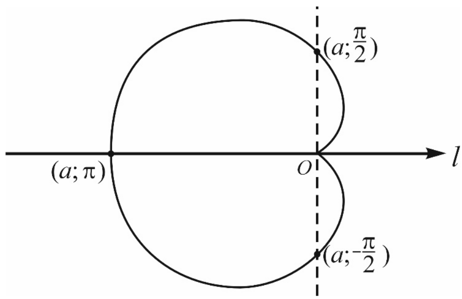
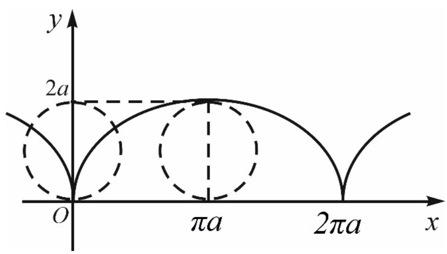
а) $x^2-y^2+z^2=-1$, $y=2$ б)

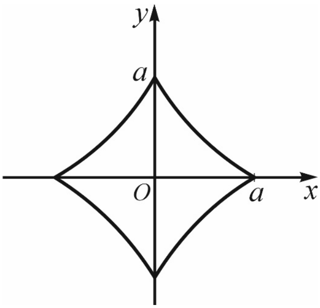
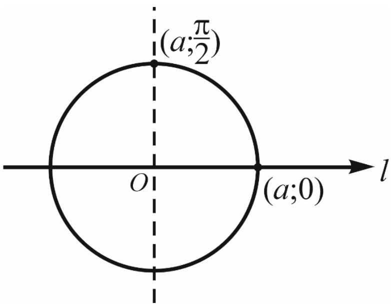
5. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^6 x}$ б) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{ctg}4xdx$ г) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\left(4x-5\right)^3}$

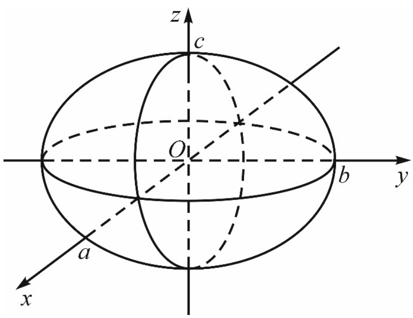
СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

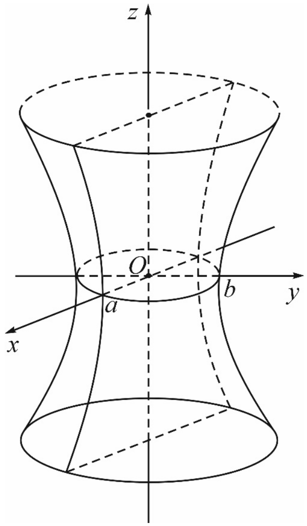
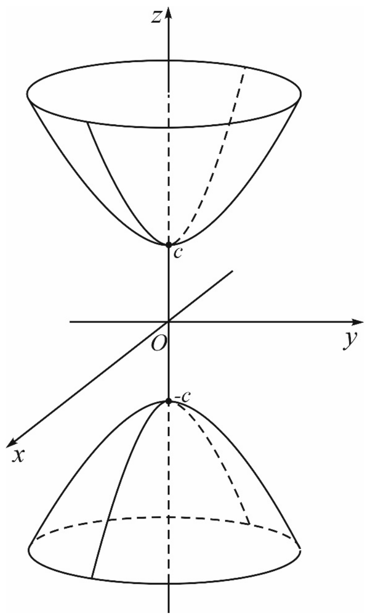
1. Некоторые кривые, заданные параметрически, в полярных и декартовых координатах

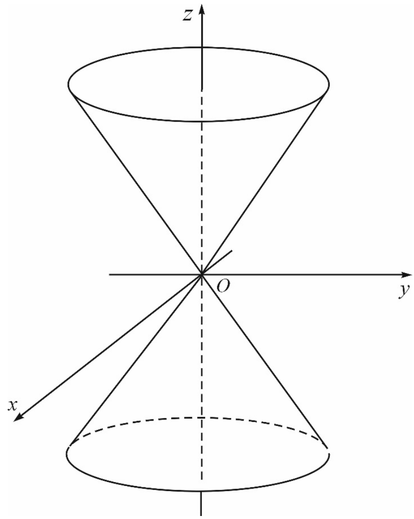
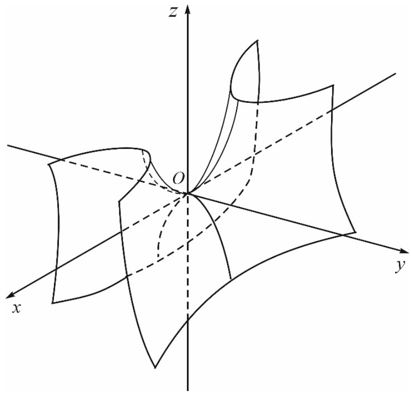
Функция	График	Уравнение
Кардиоида		$\rho = a(1+\sin\varphi)$
Кардиоида		$\rho = a(1-\cos\varphi)$
Циклоида		$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

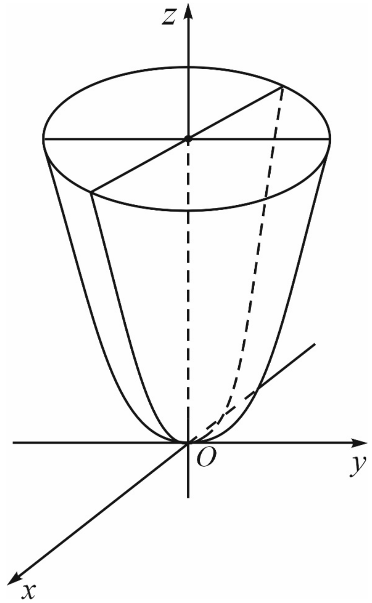
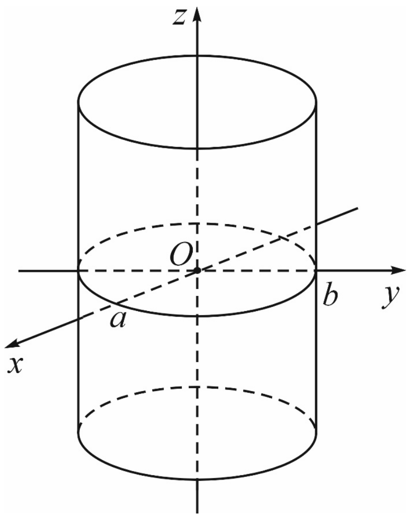
Астроида		$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
Окружность		$\rho = a$, $x^2 + y^2 = a^2$

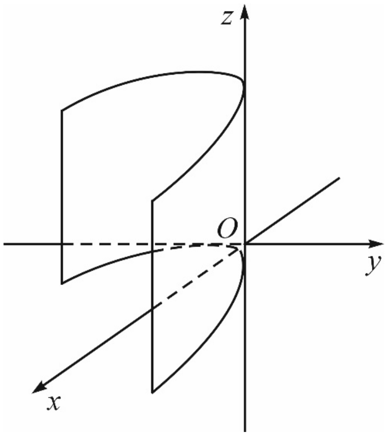
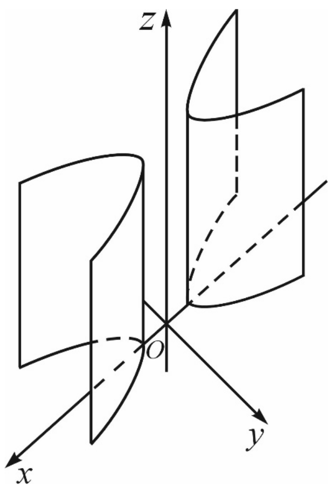
2. Поверхности второго порядка

Функция	**График**	**Уравнение**
Эллипсоид		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Однополостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Двухполостный гиперболоид		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

Конус второго порядка		$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
Гипер-болический параболоид		$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

Эллиптический параболоид		$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
Эллиптический цилиндр		$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Параболиче-ский цилиндр		$y^2 = 2px$
Гиперболиче-ский цилиндр		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб. пособие: в 2 т. – М.: Альянс, 2021. – Т. 1. – 416 с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: учебник для вузов: в 2 ч. – 7-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2019. – Ч. 1. – 646 с.
3. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М.: АСТ, 2016. – 815 с.

Учебное издание

Смышляева Татьяна Владимировна,
Савочкина Анна Александровна,
Лойко Наталья Александровна,
Плехова Эльвира Валентиновна

МАТЕМАТИКА. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 19.08.2024. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 13,5. Тираж 32 экз. Заказ № 134.

Издательство Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.

Отпечатано в типографии Издательства
Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.