

На правах рукописи

Ташкинов Михаил Анатольевич

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ОТКЛИКА И
ДИЗАЙНА СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ
МНОГОТОЧЕЧНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ**

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Пермь – 2025

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

**Официальные
оппоненты:**

Лурье Сергей Альбертович

Член-корреспондент РАН, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории «Неклассические модели механики композиционных материалов и конструкций» Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной механики Российской академии наук»

Романова Варвара Александровна

Доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории механики структурно-неоднородных сред Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт физики прочности и материаловедения Сибирского отделения Российской академии наук»

Федулов Борис Никитович

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории пластичности Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет»

Защита состоится «09» декабря 2025 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Пермского национального исследовательского политехнического университета Д ПНИПУ.01.19 по адресу 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, ауд. 423.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (сайт <http://pstu.ru>)

Автореферат разослан «__» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
Д ПНИПУ.01.19
кандидат физико-математических наук, доцент

Е. Л. Кротова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Одной из основных задач математического моделирования в области материаловедения является установление связи между физическими и механическими свойствами материалов, их микроструктурными особенностями и параметрами, влияющими на них в процессе производства. На протяжении многих веков сбор большого объема эмпирической информации был единственным способом исследования этой связи. Новые модели и методы численного моделирования, начавшие развиваться в XX веке, значительно расширили возможности производства материалов с заданными параметрами, адаптированными под конкретные инженерные задачи. Это позволило заменить ресурсоёмкие экспериментальные методы математическим моделированием и дало толчок к созданию новых классов материалов.

К числу наиболее перспективных относятся неоднородные материалы, состоящие из нескольких фаз с различными свойствами. Примерами таких материалов являются композиционные материалы с дискретным и волоконным армированием, поликристаллические металлические и керамические сплавы, многокомпонентные аморфные материалы и некоторые классы полимеров. Для успешного исследования механического поведения неоднородных материалов необходимо учитывать сложные взаимодействия внутренних микромасштабных составляющих. Поиск взаимосвязей между распределением, формой и свойствами отдельных компонентов и макроскопическим откликом неоднородных материалов является одним из наиболее активно изучаемых вопросов в области механики.

Как правило, многомасштабное моделирование неоднородных материалов сопряжено с гомогенизацией (передачу информации с нижнего на верхний масштабный уровень), либо локализацией (с верхнего на нижний уровень). Последние достижения в области экспериментальных методов исследований, такие как рентгеновская микротомография, рентгеновская дифракционная микроскопия и другие позволяют получать достоверные и полные данные о трехмерной микроструктуре материалов. В связи с этим большие усилия направлены на разработку новых подходов, сочетающих традиционные модели механики сплошной среды с методами анализа значительных объемов микроструктурной информации с целью повышения точности решения задач локализации и гомогенизации. Особенно актуальной является разработка моделей и аналитических средств для материалов, обладающих случайной микроструктурой со стохастическими свойствами. Передача информации между масштабными уровнями в таких материалах является ключевым аспектом в моделировании механического поведения.

Большинство существующих подходов ориентированы на передачу информации в одном направлении – от микроструктуры к ее эффективным характеристикам, и не способны результативно решать обратные задачи. Аналитические подходы, основанные только на скалярных морфологических характеристиках (таких как, например, объемная доля), не учитывают пространственные микроструктурные особенности и могут привести к неверным прогнозам в случаях, когда решающее значение имеют внутреннее расположение и

взаимодействие компонентов. Альтернативой является разработка физико-механических моделей, способных подкрепить получение локальных и макроскопических свойств неоднородных сред достаточным количеством микроструктурной информации.

Существенный вклад в развитие многоуровневых моделей механики неоднородных материалов внесли работы отечественных исследователей: Б.Д. Аннина, Н.С. Бахвалова, Р.Р. Балохонова, В.В. Болотина, Г.А. Ванина, В.А. Лихачева, В.А. Ломакина, Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова, С.А. Лурье, В.Е. Панина, Б.Е. Победри, С.Г. Псахье, В.П. Радченко, В.А. Романовой, П.В. Трусова и др.

Результаты, полученные в стохастических постановках, отражены в монографиях и статьях И.М. Лифшица, Л.Н. Розенцвейга, Т.Д. Шермергора, С.Д. Волкова, Е. Kröner, M.J. Beran, S. Torquato, O. Pierard, S. Kalidindi, D. Fullwood, В.А. Буряченко, Е. Ghossein, Y. Jiao и др. Значительный вклад в развитие математических моделей структурно-неоднородных сред и механики композитов внес Ю.В. Соколкин и его ученики А.А. Ташкинов, А.А. Паньков, В.Э. Вильдеман и др. Этими авторами был предложен подход, при котором локальные поля и макроскопические свойства случайных сред анализируются на основе решения интегральных уравнений с функциями Грина, а также с учетом морфологических статистических дескрипторов. Такой подход позволяет формализовать информацию о сложных морфологических параметрах и эффективен для решения многомасштабных задач, требующих учета различных особенностей и вариаций микроструктуры неоднородных материалов. Анализ локального механического поведения в этом случае основан на исследовании распределений напряжений и деформационных полей в моделях, которые зависят не только от свойств микромасштабных компонентов, но и от параметров морфологии. Полный обзор работ в этой области приведен в [1].

Несмотря на то, что основы использования статистических характеристик для описания стохастических полей напряжений и деформаций в случайных неоднородных средах были исследованы ранее, примеры практического внедрения таких методов, особенно в случае рассмотрения n -точечных корреляций, весьма ограничены. В данной работе представлен общий подход для анализа параметров распределения полей напряжений и деформаций в компонентах неоднородных сред, учитывающих многоточечные взаимодействия между микромасштабными морфологическими составляющими, разработаны способы его численной реализации, а также рассмотрены некоторые частные случаи его применения в задачах проектирования отклика и прогнозирования поведения неоднородных сред.

Целью работы является разработка математических моделей для проектирования, прогнозирования и анализа механического отклика неоднородных сред на основе стохастических подходов механики с учетом многоточечных структурных взаимодействий.

Для достижения обозначенной цели были поставлены следующие **научные задачи**:

1. Обобщение постановок и решений стохастических краевых задачи в многоточечных приближениях на случай многокомпонентных неоднородных сред.

2. Разработка математических моделей для расчета параметров распределений полей напряжений и деформаций в приближениях высокого порядка.

3. Установление аналитической взаимосвязи между многоточечными структурными статистическими дескрипторами и механическим откликом неоднородных сред.

4. Создание алгоритмов и программных инструментов для реализации разработанных математических моделей и подходов.

5. Исследование влияния морфологических микроструктурных параметров на особенности эффективного и локального механического отклика в неоднородных средах на основе разработанных математических моделей.

6. Создание подхода для решения задач рационального проектирования структуры неоднородных сред с использованием методов оптимизации и машинного обучения.

Методология и методы исследования.

Методологической базой для решения задач диссертационной работы являются методы математического моделирования, механики деформируемого твердого тела и механики неоднородных сред. В частности, в работе применялись аппарат математической морфологии, подходы стохастического моделирования, статистического анализа, методы многомерного численного интегрирования, конечно-элементного анализа, трехмерного проектно-ориентированного моделирования, методы многокритериальной оптимизации и машинного обучения.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан комплекс новых математических моделей, определяющих взаимосвязь между морфологией и механическим откликом многокомпонентных неоднородных сред на основе решения стохастической краевой задачи в многоточечном приближении.

2. Разработаны и верифицированы новые вычислительные методы для прогнозирования локального механического отклика неоднородных сред на основе формализованных данных о микроструктуре с учетом многоточечных микроструктурных взаимодействий.

3. Создана новая модель для вычисления эффективных упругих свойств неоднородных сред в многоточечных приближениях.

4. Созданы и апробированы математические модели для дизайна, адаптации и поиска эквивалентных неоднородных сред с учетом морфологических и физико-механических параметров.

5. Разработаны новые алгоритмы и программные инструменты для решения задач механики и дизайна неоднородных сред.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы состоит в создании научных основ для проектирования неоднородных материалов и конструкций. Разработанные модели и методы решения стохастических краевых задач механики композитов могут быть использованы для сравнительного анализа влияния различных морфологических параметров на характеристики полей напряжений с целью создания материалов с заранее заданным комплексом свойств и оценки вероятностей их разрушения.

Методы реконструкции, учитывающие многоточечные статистические характеристики, могут быть использованы для создания структур с оптимальными, либо рациональными, свойствами, адаптированными для решения конкретных задач.

Практическая значимость работы заключается в разработке математических моделей, методов и алгоритмов, оформленных в виде зарегистрированных программных продуктов, которые могут быть использованы научно-исследовательскими и проектно-конструкторскими организациями, занимающимися разработкой и проектированием конструкций из неоднородных материалов, а также неоднородных структур для различных областей применения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Многоточечная аппроксимация решения стохастической краевой задачи и ее обобщение на случай многокомпонентных сред. Способ определения значений моментных функций на основе методов интегрирования по объему.

2. Математическая модель взаимосвязи статистических характеристик полей деформирования и морфологии. Метод расчета корреляционных функций напряжений и деформаций в компонентах неоднородных сред. Стохастическая модель для вычисления эффективных упругих свойств с учетом трехточечных взаимодействий, результаты ее применения для двухфазных моделей неоднородных сред.

3. Метод для восстановления распределений локальных полей напряжений и деформаций в неоднородных средах на основе формализованных данных о микроструктуре в виде многоточечных статистик. Результаты расчета распределений для случая взаимопроникающих неоднородных структур. Верификации модели с использованием метода конечных элементов. Метод верификации упругих констант модели на основе распределенных данных о значениях деформаций.

4. Математические модели для исследования влияния морфологических особенностей случайных неоднородных сред на локальный механический отклик, формализованный в виде статистических распределений, для случая пористых и двухфазных композитов. Результаты применения статистического подхода для решения задач проектирования биомедицинских скаффолдов и структур на основе ауксетичных метаматериалов.

5. Подход для реконструкции, адаптации и поиска эквивалентных неоднородных сред с учетом морфологических и физико-механических параметров. Результаты применения статистического подхода для анализа соответствия исходных и сгенерированных структур.

Достоверность и обоснованность результатов подтверждается удовлетворительным соответствием результатов численного моделирования экспериментальным данным, обеспечиваются сходимостью результатов, полученных с помощью разработанных вычислительных алгоритмов и программ, воспроизводимостью полученных результатов. Содержащиеся в работе положения и выводы также подтверждены сопоставлением результатов, полученных на основе различных методик и приближений.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 106 печатных работ, в том числе 42 статьи в изданиях Web of Science и/или Scopus, из них 21 статья в журналах первого и второго квартиля. Получено 22 свидетельства о регистрации программ для ЭВМ.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы представлялись автором в устных докладах на Всероссийских и Международных конференциях: Международная конференция «Современная механика: Структура, материалы, трибология» (2024), 3-й Международный семинар по пластичности, повреждению и разрушению инженерных материалов (2023), 2-я Международная конференция по медицинским устройствам: Материалы, механика и производство (2023), Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (2023, 2015 и 2011), Зимняя школа по механике сплошных сред (2023, 2019, 2017, 2015 и 2011), Международная конференция по моделированию материалов (2022, 2019 и 2011), Виртуальная 4-я Международная конференция по структурной целостности (2021), 1-я Виртуальная конференция по структурной целостности (2020), 16-я Международная конференция по гражданским, структурным и экологическим инженерным вычислениям (2019), Тематическая конференция по смарт структурам и материалам ECCOMAS (2019), 16-я Международная конференция по инженерным вычислениям в области гражданского строительства и окружающей среды (2019), 1-я Международная конференция по численному моделированию в инженерных науках (2018), 1-я Международная конференция по теоретической, прикладной, экспериментальной механике (2018), Мировой конгресс по вычислительной механике (2014 и 2012), 20-я Международная конференция по композиционным материалам (2015), Коллоквиум Euromech 577 «Микромеханика металлокерамических композитов» (2015), 14-я Международная конференция по разрушению (2017), 10-я Международная конференция по науке и технологиям в области композитов (2016), Международная конференция по вычислительной механике материалов, (2013 и 2010), Международная конференция по механике композитов (2017 и 2013), Европейская конференция по композиционным материалам (2014 и 2012), 20-я Европейская конференция по разрушению (2014), Европейский Конгресс по вычислительным методам в прикладных и инженерных науках (2016 и 2012), Первая Международная конференция по механике композитов (2014), Международный семинар «Разрушение неоднородных материалов при интенсивных нагрузках: эксперимент и многоуровневое моделирование» (2014), Международная конференция «Высокопроизводительные параллельные вычисления на кластерных системах» (2014 и 2010), Конференция ASME по прикладной механике и материалам (2011), Первая Международная конференция по достижениям в области взаимодействия и многомасштабной механики (2010).

Диссертационная работа полностью докладывалась и обсуждалась на семинарах кафедры «Динамика и прочность машин» ПНИПУ (рук. д.т.н., академик РАН, проф. В.П. Матвеев), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. д.т.н., академик РАН, проф. В.П. Матвеев), Центра экспериментальной механики

ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. В.Э. Вильдеман), кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., проф. П.В. Трусков).

Личный вклад автора. Автором получены все включенные в диссертацию результаты: аналитический обзор литературы по тематике работы, постановка задач, обоснование и формулировка основных положений, определяющих научную новизну и практическую значимость исследования, разработка моделей и алгоритмов их реализации, создание комплексов программ, проведение вычислительных экспериментов, анализ и обобщение аналитических и численных результатов моделирования, формулировка выводов.

Связь исследований с научными проектами. Работы по тематике диссертации проводились при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание на выполнение фундаментальных научных исследований, проекты FSNM-2024-0013, FSNM-2025-0001, FSNM-2023-0003, в рамках гранта, выделяемого для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных организациях высшего образования, научных учреждениях и государственных научных центрах Российской Федерации, соглашение № 075-15-2021-578), в рамках проектов Российского научного фонда (гранты №22-79-10350, №20-79-00216, №18-71-00135, №15-19-00243), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 20-48-596011, №19-41-590023, №16-41-590259, №16-01-00327), Гранта Президента для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-2395.2017.1 и МК-5172.2015.1).

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, списка использованной литературы (421 наименование). Работа изложена на 267 страницах, содержит 68 иллюстраций, 11 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведено обоснование актуальности выбранной темы исследования и характеристика степени ее разработанности. Сформулированы цель и задачи работы. Освещена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, подходы и методы исследования, положения, выносимые на защиту. Приведена информация о степени достоверности и об апробации результатов. Представлено краткое описание содержания глав диссертационной работы.

Первая глава посвящена анализу современного состояния исследований в области моделирования стохастических неоднородных сред.

В п.1.1 рассматриваются методы математического описания морфологии неоднородных структур с использованием инструментов математической морфологии, теории вероятностей и математической статистики. Особое внимание уделяется статистическим характеристикам, которые позволяют количественно характеризовать микроструктуру и устанавливать связь между её морфологией и эффективными свойствами материала.

В п.1.2 описываются подходы к реконструкции геометрии неоднородных сред на основе статистических характеристик, прежде всего корреляционных функций, что позволяет формировать статистически эквивалентные модели микроструктур.

В п.1.3 приводятся алгоритмы генерации геометрии случайных структур, используемые для моделирования представительных объёмов неоднородных материалов. Приводятся основные подходы позволяющие создавать трехмерные модели различных типов двух- и многофазных неоднородных структур с заданными морфологическими параметрами.

В п.1.4 представлены методы гомогенизации упругих механических свойств неоднородных сред на основе статистических характеристик. Рассматриваются подходы, позволяющие установить связь между характеристиками микроструктуры, локальными и макроскопическими свойствами материалов.

В п.1.5 рассматривается проблема статистического описания напряжённо-деформированного состояния в неоднородных средах. Особое внимание уделяется учёту микромасштабных флуктуаций напряжений и деформаций, существенно влияющих на процессы разрушения и нелинейное поведение материалов.

Во второй главе приводится постановка и решение краевых задач теории упругости для неоднородных сред в многоточечном приближении.

В п.2.1 приводится математическая постановка и разрешающие соотношения стохастической краевой задачи теории упругости для представительного объема неоднородных сред, которую с граничными условиями в перемещениях можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j}(\vec{r}) &= 0, \\ \varepsilon_{ij}(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \left(u_{i,j}(\vec{r}) + u_{j,i}(\vec{r}) \right), \\ \sigma_{ij}(\vec{r}) &= C_{ijkl}(\vec{r}) \varepsilon_{kl}(\vec{r}), \\ u_i(\vec{r})|_{\vec{r} \in S_V} &= e_{ij} r_j,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где подстрочный символ $,j$ обозначает производную $\frac{\partial}{\partial x_j}$ по переменной радиус-вектора, $C_{ijkl}(\vec{r})$ тензор жёсткости. Граничные условия на поверхности представительного объема обеспечивают однородность макромасштабных деформаций, r_j координаты точек на внутренней поверхности объема S_V .

Адгезия на границе раздела между компонентами представительного объема считается идеальной: $u_i^{(M)}(\vec{r})|_{\vec{r} \in S_M} = u_i^{(I)}(\vec{r})|_{\vec{r} \in S_I}(\vec{r}), \sigma_{ij}^{(M)} n_j = \sigma_{ij}^{(I)} n_j$, где S_M внутренняя поверхность матрицы, S_I внешняя поверхность фазы включения, n_j нормаль к граничной поверхности между компонентами.

Решение поставленной задачи может быть найдено относительно флуктуаций поля перемещений $u_i'(\vec{r})$. Для упругих двухфазных гетерогенных сред, представленных матрицей и включениями, тензор жесткости можно выразить с помощью индикаторной функции:

$$C_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r}) C_{ijkl}^I + (1 - \lambda(\vec{r})) C_{ijkl}^M,\tag{2.2}$$

где $C_{ijkl}^{(I)}$ и $C_{ijkl}^{(M)}$ тензоры жесткости компонентов включений и матрицы соответственно, которые в изотропном случае могут быть представлены как

$$C_{ijkl}^{(I)} = \lambda_I \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_I (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad C_{ijkl}^{(M)} = \lambda_M \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_M (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

$\lambda_I, \lambda_M, \mu_I, \mu_M$ константы Ламе матрицы и включений.

Для двухфазной среды индикаторная функция $\lambda(\vec{r})$ определяется как:

$$\lambda(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \vec{r} \in V_I \\ 0, & \vec{r} \in V_M \end{cases} \quad (2.3)$$

где V_I пространственный объём фазы включений, V_M пространственный объём фазы матрицы. С учетом введенных разложений и преобразований, краевая задача (2.1) может быть сведена к уравнению

$$\langle C_{ijkl} \rangle u'_{k,lj}(\vec{r}) = -P_{ij,j}(\vec{r}), \quad (2.4)$$

где $P_{ij,j}(\vec{r}) = -(C'_{ijkl}(\vec{r})e_{kl} + C'_{ijkl}(\vec{r})u'_{k,l}(\vec{r}))_{,j}$. Уравнение (2.4) можно считать упругой краевой задачей с тензором жесткости $\langle C_{ijkl} \rangle$, перемещениями $u'_k(\vec{r})$ и объемными силами $P_{ij}(\vec{r})$.

Если представительный объем значительно больше, чем его микроструктурные компоненты, уравнение (2.4) можно решить методом функций Грина. Решение стохастической краевой задачи для флуктуаций перемещений принимает форму интегрально-дифференциального уравнения, содержащего функцию Грина как ядро:

$$u'_i(\vec{r}) = \int_{V_1} G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}_1) \frac{\partial P_{jn}(\vec{r}_1)}{\partial x_{1n}} dV_1. \quad (2.5)$$

В п.2.2 представлен способ последовательного разложения решения стохастической краевой задачи с использованием метода функций Грина.

Уравнение (2.5) содержит флуктуации $u'_i(\vec{r})$ как в левой, так и в правой части, таким образом, оно может быть представлен в рекуррентной форме:

$$u'_{i,j}^{(\chi)}(\vec{r}) = \int_{V_1} G_{im,j}(\vec{r}, \vec{r}_1) \left[C'_{mnkl}(\vec{r}_1) e_{kl} + C'_{mnkl}(\vec{r}_1) u'_{k,l}^{(\chi-1)}(\vec{r}_1) \right]_{,1n} dV_1, \quad (2.6)$$

где χ порядок аппроксимации. Последовательное разложение решения (2.6) может быть представлено в следующем виде (записано в тензорной форме):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'(\vec{r})_1 = & \mathbf{e} \bar{\mathbf{C}} \int_V \mathbf{G}_{,0}(\vec{r}, \vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_1)_{,1} dV + \\ & + \mathbf{e} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}} \int_V \mathbf{G}_{,0}(\vec{r}, \vec{r}_1) \mathbf{G}_{,1,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \left(\lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_2) \right)_{,1,2} dV_2 dV_1 + \\ & + \mathbf{e} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{C}} \int_V \mathbf{G}_{,0}(\vec{r}, \vec{r}_1) \mathbf{G}_{,1,1}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \mathbf{G}_{,2,2}(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \left(\lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_2) \lambda'(\vec{r}_3) \right)_{,1,2,3} dV_1 dV_2 dV_3 + \dots, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где произведения флуктуаций индикаторной функции $\lambda'(\vec{r}_1) \lambda'(\vec{r}_2) \lambda'(\vec{r}_3) \times \dots$ образуют n -точечные структурные моментные функции $K^{(n)}$.

Специальная функция Грина (называемая также тензором Кельвина-Сомильяны) была получена для композита с изотропными компонентами:

$$G_{kn}(\vec{r}, \vec{r}_1) = \frac{1}{8\pi\langle\mu\rangle|\vec{r}-\vec{r}_1|} \left(\frac{\langle\lambda\rangle+\langle 3\mu\rangle}{\langle\lambda+2\mu\rangle} \delta_{kn} + \frac{\langle\lambda\rangle+\langle\mu\rangle}{8\pi\langle\mu\rangle\langle\lambda+2\mu\rangle} (x_k - x_{1[k]})(x_n - x_{1[n]}) \right), \quad (2.8)$$

где $\langle \lambda \rangle = \lambda_I p + \lambda_M (1 - p)$, $\langle \mu \rangle = \mu_I p + \mu_M (1 - p)$ константы Ламе компонентов неоднородной среды, p объемная доля включений.

Аналитическая форма многоточечного решения краевой задачи (2.7) используется в стохастическом подходе для получения статистических характеристик для случайных полей напряжений и деформаций в представительном объеме.

В п.2.3 приводится алгоритм определения значений структурных многоточечных моментных функций, используемых в решении стохастической краевой задачи в качестве характеристик морфологии неоднородной среды.

В общем случае многокомпонентных сред моментная функция n -го порядка определяется как:

$$K_{\alpha}^{(n)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \langle \lambda'_{\alpha}(\vec{r}_1) \dots \lambda'_{\alpha}(\vec{r}_n) \rangle, \quad (2.9)$$

где $\lambda_{\alpha}(\vec{r})$ индикаторная функция фазы α , значения которой равны 1 если позиция радиус-вектора $\vec{r}$ соответствует фазе α , и 0 в любом другом случае.

Сравнивая дескрипторы, полученные для разных сред между собой, можно сделать выводы о сопоставимости этих сред с точки зрения морфологии. Впоследствии эти закономерности можно использовать при построении моделей механического поведения на микроуровне, где морфология среды учитывается в явном виде, а также для методов оценки эффективных свойств.

В данной работе предложен подход, согласно которому значения моментных функций и других статистических характеристик находятся путем интегрирования по геометрическому региону, а изменение положения радиус-векторов происходит не скачкообразно, а плавно, с приращением, соответствующим методу интегрирования:

$$K_{\alpha}^{(n)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \langle \int_V (\lambda_{\alpha}(\vec{r}_1) - p)(\lambda_{\alpha}(\vec{r}_2) - p) \dots (\lambda_{\alpha}(\vec{r}_n) - p) dV \rangle, \quad (2.10)$$

где p объемная доля включений.

Таким образом, положение радиус-векторов не привязано к точкам дискретизации структуры, что позволяет реализовывать любую конфигурацию их положения в представительном объеме при расчете статистических характеристик. Установлено, что в качестве оптимального с точки зрения погрешности результатов и скорости работы можно использовать адаптивный метод интегрирования Монте-Карло.

В п.2.4 описываются численные методы решения многомерных интегральных уравнений, содержащих функцию Грина. Важным фактором, влияющим на работоспособность представленного подхода при использовании приближений высоких порядков, является точность используемых методов численного интегрирования. Это связано с тем, что при росте размерности интегралов в связи с увеличением порядка приближения, возрастает значения фактора сингулярности производных функций Грина. Сложность численных расчетов определяется порядком приближения решения краевой задачи и методикой его получения. Для вычисления интегралов в выражениях для статистических характеристик, содержащих вторую производную функции Грина, применялась глобальная адаптивная стратегия в совокупности с многомерным правилом интегрирования и правилом преобразования переменных ИМТ для обхода сингулярности.

Третья глава посвящена установлению аналитической связи между морфологическими характеристиками структуры и статистическими параметрами распределений напряжений и деформаций в представительном объеме неоднородных сред, а также эффективными характеристиками представительного объема.

В п.3.1 выводятся аналитические выражения для центральных моментов напряжений и деформаций с учетом многоточечного приближения решения стохастической краевой задачи.

Поскольку микроструктурные поля в пределах представительного объема зависят от радиус-вектора и могут рассматриваться как случайные величины, для их численного количественного определения можно использовать классические инструменты статистического анализа. В частности, с помощью решения стохастической краевой задачи можно однозначно вывести выражения для центральных моментов случайных значений напряжений и деформаций. Точность этих статистических характеристик можно повысить, если учитывать члены разложения решения (2.7) со структурными моментными функциями более высокого порядка. Полученные выражения содержат в явном виде структурные моментные функции до 5-го порядка и представляют собой более общий случай выражений для статистических характеристик полей. Численный расчет полученных выражений может быть значительно упрощен при задании конкретных видов нагружения за счет свойств симметрии входящих в выражения тензоров.

В п 3.2 на примере многокомпонентных сред показан расчет моментов первого и второго порядка полей напряжений и деформаций в трехточечном приближении. Микроструктурные составляющие представительного объема композитов были смоделированы как случайно расположенные сферы различных размеров. Был рассмотрен представительный объем с тремя фазами: матрица, армирующие частицы и поры, в разных пропорциях. Нагружение представительного объема соответствовало простому сдвигу.

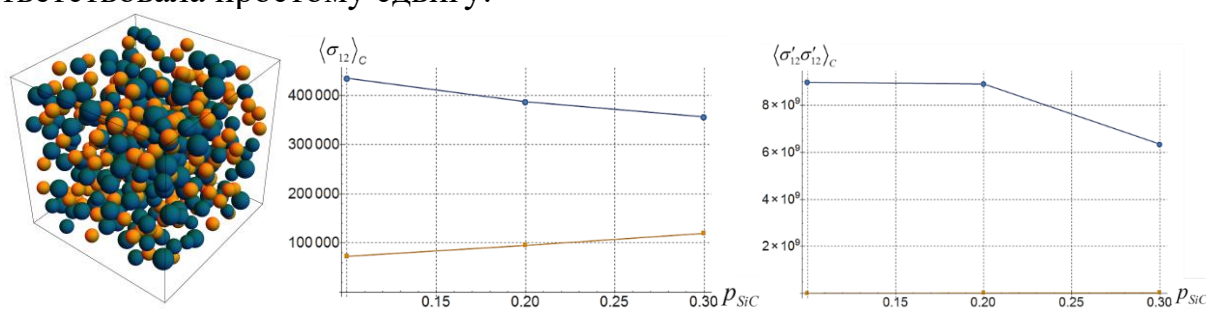


Рис. 1. Моменты первого и второго порядков для двухфазных композитов с дефектами в зависимости от объемной доли пор: -●- Включения, -■- Матрица

Нелинейные зависимости наблюдаются для статистик первого и второго порядка в сравнении с объемом фракции пор, что свидетельствует о том, что не только количество дефектов дает эффект, но и их распределение и позиционирование (рис. 1). Статистики для включений демонстрируют более высокие изменения, чем статистики для матрицы, что объясняется большей разницей в механических характеристиках фаз. Показано, что численные значения

этих статистик, полученные для исследованных случаев, отражают изменения в микроструктурной конфигурации. Это позволяет изучать и оценивать влияние различных параметров микроструктуры без необходимости вычисления большого числа реализаций случайной микроструктуры представительного объема, что может существенно снизить вычислительные затраты для некоторых задач [2].

В п.3.3 показан вывод выражений для многоточечных условных и безусловных моментных функций полей напряжений и деформаций в представительных объемах композитов. Они позволяют описывать взаимосвязь полей в удаленных на различное расстояние точках.

В общем виде моментные функции n -го порядка полей напряжений могут быть получены из выражения:

$$M_{\sigma_c}^{(n)}(|\vec{r} - \vec{x}|) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \langle \sigma \rangle^{(n-i)} \left(\frac{1}{\langle \lambda_c \rangle} \langle \lambda_c \sigma^{(i)} \rangle + D_{(i)}^{(\sigma)} \right) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-i)!} D_{(i)}^{(\sigma_c)} \langle \sigma \rangle_c^{(n-i)}. \quad (3.1)$$

Для примера реализации методики были построены трехмерные модели внутренней полидисперсной структуры исследуемых материалов – двухкомпонентных матричных композитов с эллипсоидальными включениями. Вид полученных корреляционных функций полей деформаций (рис. 2) в целом схож с видом структурных корреляционных функций (моментных функций второго порядка), поэтому для их аппроксимации могут быть использованы те же аналитические выражения.

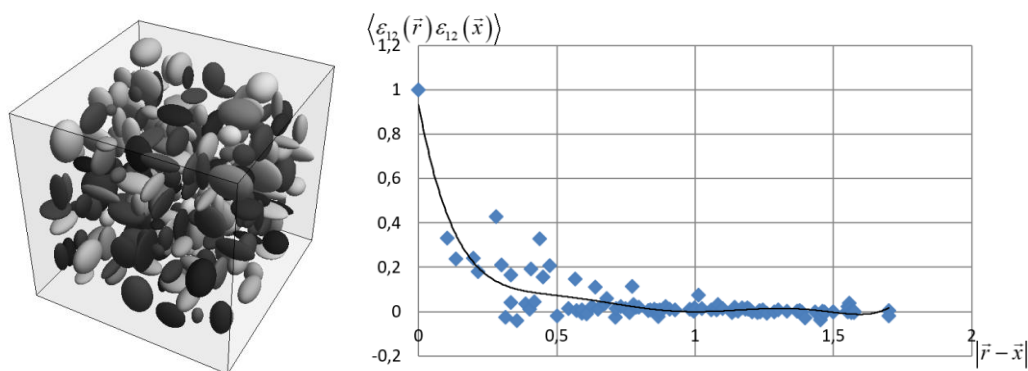


Рис. 2. Геометрия представительного объема и нормированная моментная функция деформации для неоднородной среды с объемной долей 24% при чистом сдвиге

Корреляционные функции полей напряжений и деформаций неоднородных сред находят применение в задачах анализа и прогнозирования механического поведения сложных материалов. Они используются для количественной характеристики статистической структуры распределения напряжений и деформаций, оценки влияния микро- и мезоструктурных неоднородностей на макроскопические свойства материала, а также для выявления зон концентрации напряжений и потенциальных точек инициирования разрушения [3].

В п. 3.4 рассмотрен пример расчета упругих механических эффективных свойств двухфазных сред с использованием многоточечных статистических дескрипторов и метода интегральных уравнений.

Считая макрооднородный представительный объем неоднородной среды изотропным, на основе решений краевой задачи при чистом сдвиге и всестороннем

растяжении были выведены выражения для упругих эффективных свойств в зависимости от многоточечных структурных характеристик. Входными параметрами данной модели являются упругие свойства компонент среды, а также формализованная в виде многоточечных моментных функций информация о морфологии среды. Согласно предложенному методу, эффективные модули определяются как сумма их средних значений и уточняющей добавки, связанной с упругими многоточечными взаимодействиями между неоднородностями. Для вывода аналитических выражений для смешанного статистического момента второго порядка $\langle \lambda'(\vec{r}) \varepsilon'_{kl}(\vec{r}) \rangle$, определяющего величину данной добавки, используются приближения решений стохастической краевой задачи [4].

Установлено, что для пористых структур с равномерным распределением включений добавка, вносимая вторым приближением решения, является несущественной. В то же время значимость этой добавки увеличивается с ростом отклонения распределения включений в представительном объеме от равномерного, который может быть обусловлен формированием кластеров, сильным разбросом размеров включений или другими факторами (рис. 3).

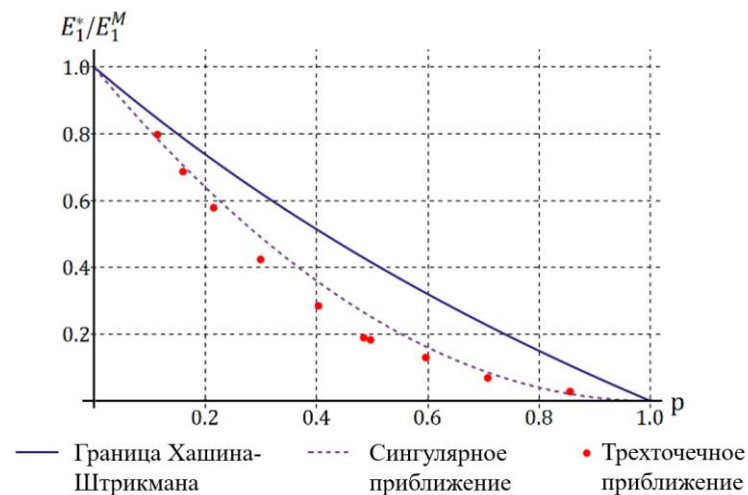


Рис. 3. Значения эффективных характеристик среды в трехточечном приближении в сравнении с границами Хашина-Штрикмана и сингулярного приближения

Таким образом, при использовании многоточечных моментных функций и высших приближений решения стохастических краевых задач можно получить значения эффективных свойств с точностью, превышающей традиционные аналитические методы.

Четвертая глава посвящена решению задач исследования локализации механического поведения в представительных объемах неоднородных сред с помощью определения параметров модельных статистических распределений.

В п.4.1 приведен общий подход для определения распределений случайных полей напряжений и деформаций в компонентах неоднородных сред с использованием центральных статистических моментов.

Параметры законов распределения аналитически связаны с моментами случайной величины, для каждого закона распределения эта связь имеет свой вид. Соответственно, для восстановления закона распределения полей деформаций или напряжений при известных характеристиках макронагружения необходимо решить

обратную задачу – найти такие параметры, которые соответствовали бы распределению с центральными моментами, полученными с помощью решения краевой задачи. Согласно разложению Грама-Шарлье, плотность вероятности случайной величины с определенной точностью может быть восстановлена конечным набором моментов. Если предположить нормальное распределение случайной величины, то для ее восстановления требуются только первые два центральных момента. Статистические моменты более высокого порядка могут быть использованы для определения параметров более сложных законов параметрического распределения. Например, параметры косого нормального распределения и распределения Вейбулла могут быть определены по моментам первого, второго и третьего порядка.

В п. 4.2 на примере взаимопроникающих случайных сред, которые не попадают в область применимости известных моделей для дискретных включений, была рассмотрена задача верификации распределений, полученные на основе стохастического подхода, с использованием метода конечных элементов.

Функция плотности вероятности компонента тензора деформаций ε_{11} была восстановлена для всего представительного объема и каждой фазы с использованием данных конечно-элементной модели в виде взвешенных сумм с предположением о нормальном распределении. Аналогичные функции плотности вероятности предполагаемого нормального распределения были получены путем расчета параметров распределения с использованием центральных моментов первого и второго порядка в рамках стохастического подхода, в которых учитывались первые два члена разложения решения (2.7).

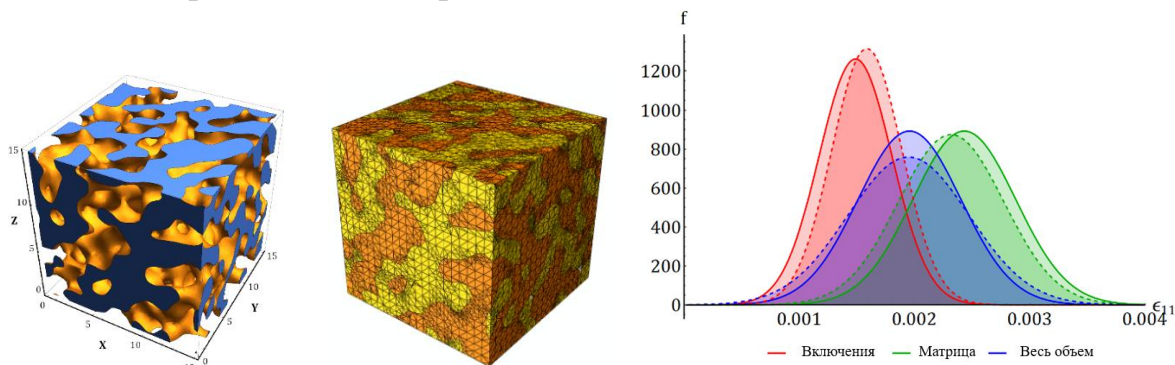


Рис. 5. Представительный объем взаимопроникающей среды и его конечно-элементная модель, а также сравнение функций плотности вероятности, полученных при стохастическом подходе (сплошные линии) и моделировании методом конечных элементов (пунктирные линии)

Распределения, полученные в рамках стохастического подхода, показали хорошее соответствие с результатами численного конечно-элементного моделирования. Положение пиков функций плотности вероятности определяется средними значениями случайного поля. Характерная для стохастического подхода структура подразумевает, что каждый последующий член в последовательных разложениях случайных величин вводит некоторое дополнение к конечному результату. С каждым новым членом в ряду значение и абсолютная величина новых добавок уменьшается. Таким образом, для вычисления первых членов разложений крайне важно поддерживать максимальную точность [5].

В п.4.3 описывается применение методов и инструментов статистического анализа для расчета вероятности разрушения неоднородных сред. В таком случае, например, характеристики разрушения представительного объема и его компонент могут быть выражены в вероятностных величинах [6]. Графический смысл вероятности разрушения – это площадь под графиком плотности распределения компоненты тензора σ_{ij} , ограниченная слева критическим значением $\sigma_{ij}^{(cr)}$ (рис. 6).

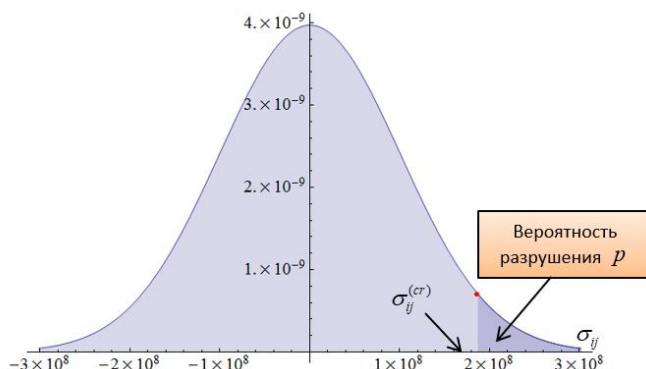


Рис. 6. Пример графического представления расчета вероятности разрушения на основе плотности распределения компоненты тензора σ_{ij}

При рассмотрении многофазного материала подобное представление может быть введено как для каждой фазы материала в отдельности, так и для среды с эффективными свойствами. В общем случае, когда, например, свойства фаз не изотропны, может быть использован более сложный критерий. Закон распределения значений выражений для таких критериев можно получить в виде трансформации законов распределения входящих в него компонент тензоров напряжений или деформаций. Таким образом, одним из возможных применений для статистик локальных микроструктурных полей является создание статистических моделей разрушения в компонентах, где они используются для обнаружения момента начала разрушения, а также для создания новых критериев прочности.

В п.4.4 приводятся некоторые способы экспериментальной верификации статистических распределений полей деформаций, а также алгоритм оптимизации, который можно использовать для уточнения значений упругих констант моделей.

Для верификации результатов стохастического моделирования могут быть использованы различные экспериментальные методики, позволяющие регистрировать распределенные поля деформаций. Так, для визуализации поверхностных деформаций при испытаниях может быть использована бесконтактная система цифровой корреляции изображений.

Существует также направление экспериментального мониторинга механического состояния конструкций в процессе их эксплуатации на основе интегрированных сенсорных элементов, в частности, волоконно-оптических датчиков на основе брэгговских решеток. В данной работе был разработан подход, согласно которому данные измерений локальных деформаций, полученные экспериментально от волоконно-оптических датчиков, используются для уточнения упругих механических характеристик конечно-элементной модели [7]. В качестве параметров оптимизации используются материальные константы,

которые должны обеспечивать согласованность результатов моделирования и измерений деформаций в контрольных точках. Так, для оптимизации создается регрессионная модель и используется алгоритм Левенберга-Марквардта.

Уточнение констант, как правило, требуется для композитных конструкций, в которых могут происходить заметные структурные изменения, в основном, связанные с производственными процессами. Эти изменения могут привести к разнице между свойствами, реализованными в конструкциях, и свойствами образцов, изготовленных из того же материала и используемых для стандартных испытаний. Предложенный алгоритм позволяет скорректировать значения этих констант в соответствии с фактически реализуемым деформированным состоянием.

В пятой главе приводятся некоторые результаты исследования зависимости механических свойств различных неоднородных сред от вариации их внутренних морфологических параметров.

В п.5.1 представлены результаты исследования взаимосвязи морфологии микроструктуры и механического поведения пористых материалов с замкнутыми порами с вакуумом внутри. Модели представительных объемов микроструктуры традиционных материалов, основанные на экспериментальных данных, могут учитывать только некоторые особенности их морфологии или представлять структуру конкретного образца. Следовательно, верификация теоретических предсказаний для различных морфологических эффектов на механическое поведение материалов осложнена, поскольку изменение параметров искусственных моделей представительных объемов довольно сложно воспроизвести в реальных материалах. Статистический подход делает возможным выявление нетипичных реализаций микроструктуры, механическое поведение которых существенно отличается от среднего.

Всего было рассмотрено шесть отдельных типов геометрических конфигураций внутренней морфологии, охватывающих сценарии изменения формы, размеров и распределения пор, а также влияние отдельных крупных включений (рис. 7).

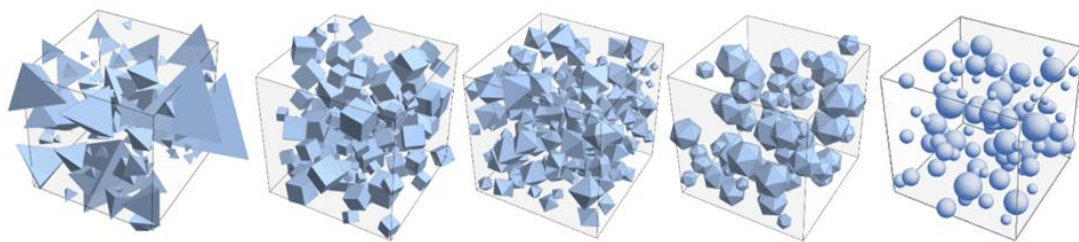


Рис.7 Модели структур с различной формой пористых включений

В результате выполненного исследования выявлены закономерности влияния морфологических характеристик микроструктуры на механическое поведение материалов с замкнутыми порами. Анализ показал, что форма пор не оказывает определяющего влияния на величину эффективного модуля упругости при фиксированных объемной доле и диапазоне размеров включений. Однако остроугольные формы (тетраэдр, куб, октаэдр) создают дополнительные концентраторы напряжений, что отражается в распределениях минимальных

главных напряжений (рис. 8а). Такие включения формируют зоны с локально повышенной интенсивностью напряжений и могут ускорять зарождение микротрещин. В противоположность этому, сглаженные формы (сфера, икосаэдр) обеспечивают более равномерное напряженное состояние.

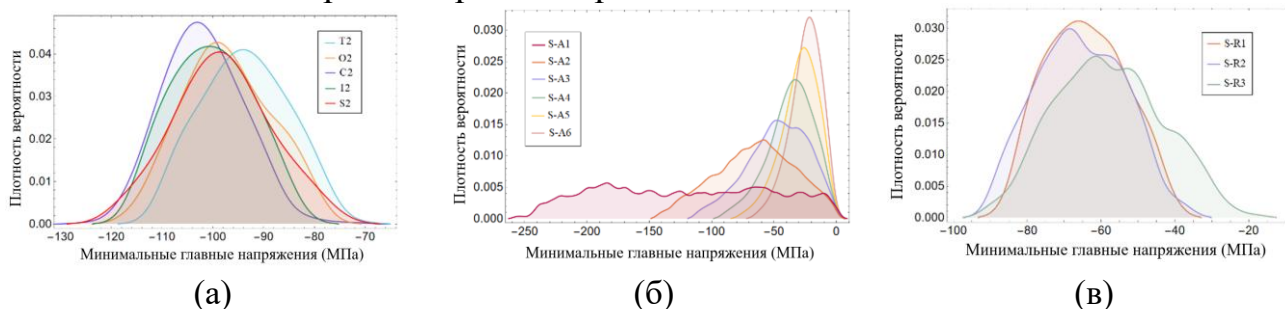


Рис. 8. Распределение плотности вероятности минимальных главных напряжений при исследовании поведения моделей с замкнутыми порами при сжатии: (а) изменение формы включений при фиксированном объёме; (б) изменение размера представительного объема; (в) изменение размера включений

Выявлено, что уменьшение размеров представительного объема приводит к значительным колебаниям упругих характеристик, связанным с недостаточным количеством включений в расчетной ячейке. Кроме того, с ростом размеров представительного объема снижается влияние локальных концентраторов напряжений, а распределения вероятностей значений компонент тензоров напряжений приобретают вид, близкий к нормальному (рис. 8б).

Изменение распределения размеров включений для структур с постоянной объемной долей не оказало существенного влияния как на их механические свойства, так и на общее напряженное состояние. Тем не менее, наблюдалось влияние изменения размера включений на морфологические свойства этих структур. Влияние концентраторов напряжений на распределение напряжений уменьшалось с ростом размера представительного объема. Отдельное внимание уделено эффекту аномально крупных включений. В случае множественных крупных пор наблюдается потеря изотропии механических свойств даже при статистически однородной морфологии (рис. 8в).

В целом, полученные результаты подтвердили, что надежное описание механического поведения пористых материалов возможно только при комплексном учете совокупности морфологических факторов – формы, размеров, распределения и концентрации пор [8].

В п.5.2 приводятся результаты исследования взаимосвязи морфологии микроструктуры и механических свойств полимерных композитов для аддитивного производства, армированных короткими волокнами.

Были исследованы термопластичные композиты для аддитивного производства на основе матрицы из акрилонитрил-бутадиен-стирола (АБС). Материал армировался короткими волокнами трех типов: углеродными (УВ), стеклянными (СВ) и базальтовыми (БВ). Для получения информации о внутренней структуре композитов были изучены коммерчески доступные филаменты диаметром 1,75 мм (рис. 9). Для изучения внутренней структуры исследуемых композитов проводилось томографическое сканирование образцов [9, 10].

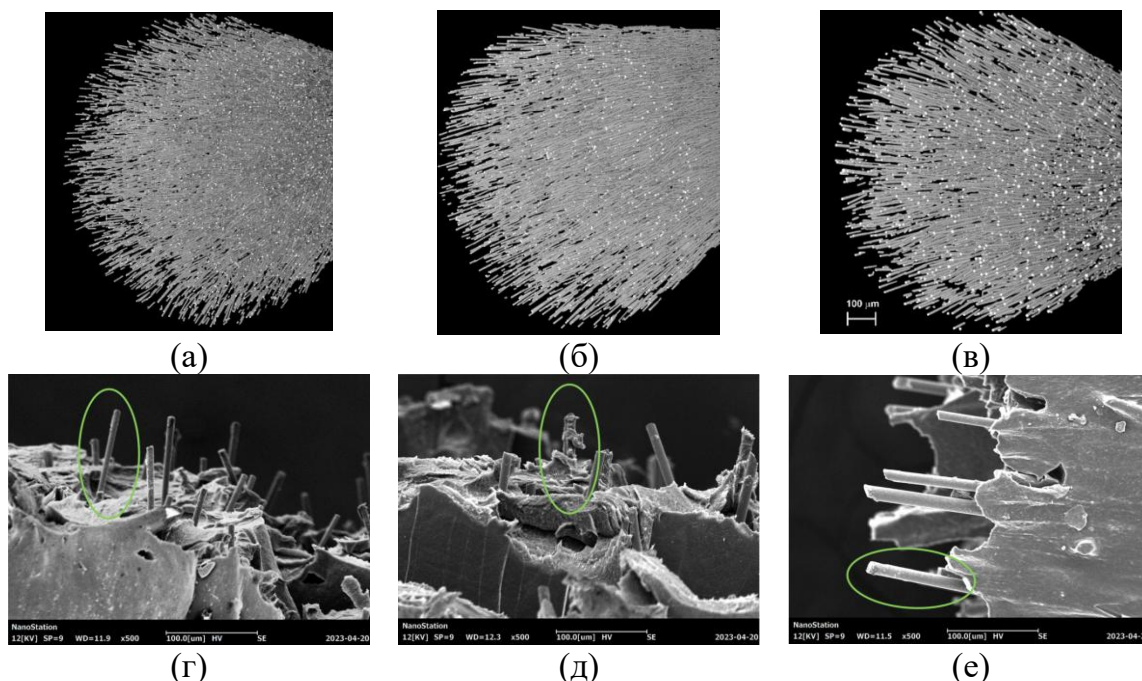


Рис. 9. Общий вид трехмерной модели структуры армированного филамента: (а) АБС+УВ, (б) АБС+СВ, (в) АБС+БВ; изображения вытянутых в процессе разрушения волокон: (г) АБС+УВ, (д) АБС+СВ, (е) АБС+БВ

С целью анализа влияния изменения геометрических параметров композитов на механический отклик рассматривались модели с модифицированной длиной волокон и их ориентацией. Варьирование геометрических параметров осуществлялось путём изменения параметров логнормального распределения. Были получены три вариации распределения угла ориентации волокон, отличающиеся от исходного: от 0 до 35°, от 0 до 60° и от 0 до 90°. Для каждой вариации использовалось исходное распределение длин волокон, определённое методом микрокомпьютерной томографии. Рассматривались также вариации распределения длин волокон.

Выполненный анализ показал, что ориентация волокон определяет степень равномерности перераспределения нагрузки: расширение диапазона углов ориентации способствует увеличению податливости структур и позволяет снизить количество концентраторов напряжений. Наиболее выраженное влияние отмечается для композитов с углеродными волокнами из-за их малого диаметра и высокого модуля упругости (рис. 10а). Варьирование длины волокон, напротив, приводит к смещению максимумов распределений и в отдельных случаях вызывает бимодальность кривых, что отражает перераспределение нагрузки между матрицей и армирующими элементами и возникновение зон локальных перегрузок (рис. 10б).

Влияние контраста свойств матрицы и волокон выражается в том, что при высоких значениях модуля упругости волокон по сравнению с матрицей перераспределение напряжений становится более резким и неоднородным. Особенно это характерно для композитов с углеродным армированием, где фиксируется повышенная чувствительность к изменению морфологических параметров.

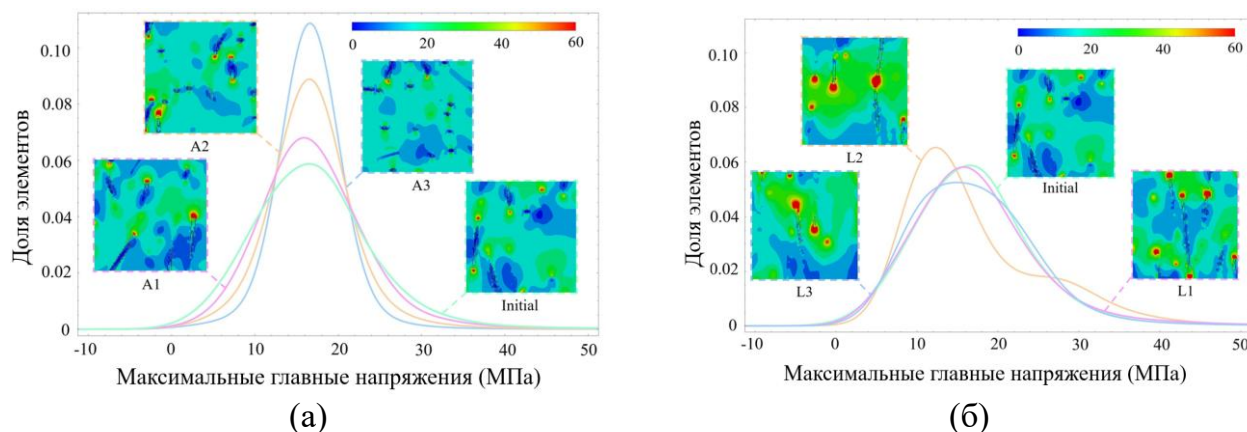


Рис. 10. Распределение вероятностей максимальных главных напряжений для моделей композита АБС+УВ с вариации угла ориентации волокон (а) и с вариацией длины волокон (б)

Таким образом, установлено, что морфология волокон (их ориентация, длина, пространственное расположение и контраст свойств с матрицей) определяет не только форму распределений напряжений, но и эффективность армирования в целом, задавая границы прочностных и эксплуатационных характеристик рассмотренных полимерных композитов.

В главе 6 приведены примеры использования инструментов стохастической механики для решения практических задач проектирования и прогнозирования поведения структур.

В п.6.1 представлена задача адаптации механического отклика пористых биомедицинских скаффолдов для регенерации костной ткани. Такие скаффолды должны обладать морфологическими и механическими свойствами, аналогичными замещаемой кости. Были проанализированы фрагменты трехмерной геометрии кости, полученные с помощью компьютерной томографии. Для оценки влияния различных конструкций скаффолдов на имитацию свойств замещаемого фрагмента кости сравнивались несколько геометрий трёхмерных структур, разработанных на основе различных подходов: регулярные структуры на основе повторяющейся элементарной ячейки, структуры, созданные на основе трехмерных трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП, класс поверхностей, обладающих нулевой средней кривизной), случайные структуры, построенные с использованием диаграммы Вороного, а также алгоритм фазового разделения с применением случайных гауссовских полей (рис. 11).

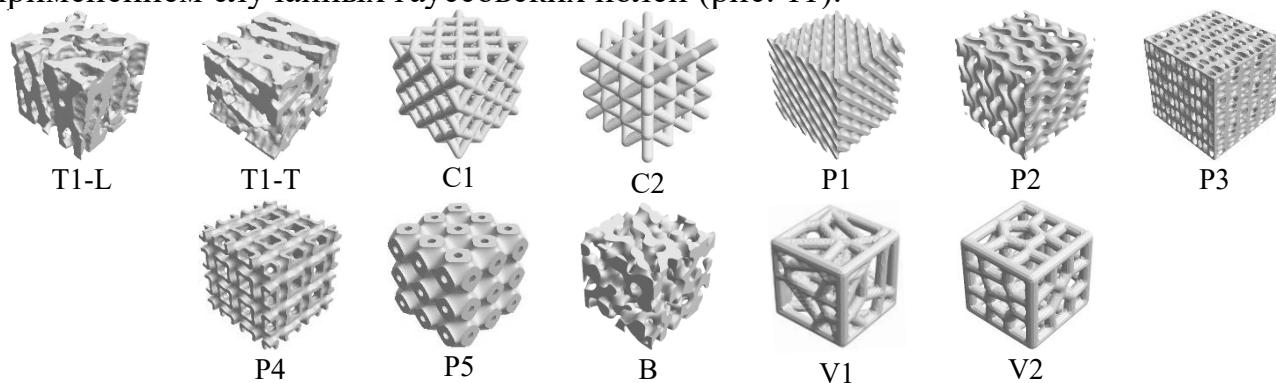


Рис. 11. Модели костной ткани и прототипы скаффолдов, созданные с использованием различных генерирующих алгоритмов

Эффективная пористость служит объединяющим параметром для каждой структуры и соотносится с уровнем пористости исходных фрагментов трабекулярной кости, полученных на основе данных микрокомпьютерной томографии. Для первоначальной оценки механического отклика разработанных прототипов необходимо исследовать их поведение при сжимающих нагрузках – основном типе нагрузки, испытываемый костной тканью.

Для количественной оценки доли элементов, достигших предельного состояния, и связи этой доли с архитектурными особенностями конструкции можно использовать методы анализа распределения случайных величин. Распределения напряжений фрагментов трабекулярной кости зависят от ориентации нагрузки: в осевой ориентации распределение близко к нормальному, а в трансверсальной проявляется выраженная скошенность, что соответствует большему числу элементов с напряжениями, превышающими прочность материала.

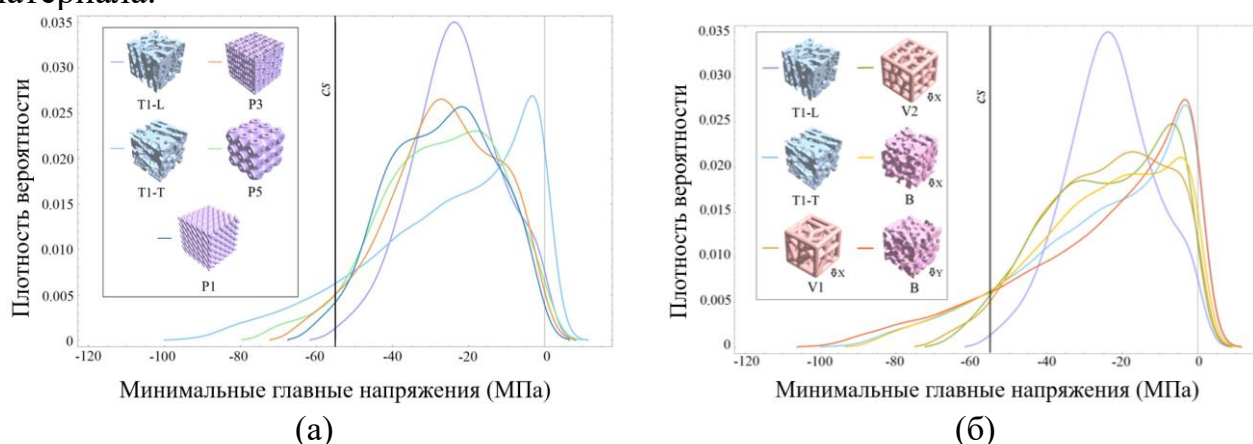


Рис. 12. Плотность вероятности распределения минимальных главных напряжений для структур скаффолдов в сравнении с костью T1-L и T1-T: (a) P1, P3 и P5; (b) V1, V2 и B. cs – прочность при сжатии

Регулярные решётчатые структуры, в особенности вариация структуры гироида, показали самое близкое распределение напряжений к оригинальной костной ткани, при этом характеризовались меньшей вероятностью возникновения высоких локальных напряжений и концентрации напряжений (рис. 12а). Случайные структуры на основе диаграмм Вороного и двунепрерывные модели демонстрировали механическое поведение, близкое к трабекулярной кости при трансверсальной нагрузке, и проявляли устойчивость к направлению нагрузки (рис. 12б). Доля элементов, где напряжения превышали предел прочности, служила ключевым критерием оценки прочности скаффолдов. Если она значительно превышала аналогичный показатель реальной кости более чем на 5%, структура считалась неприемлемой для замены кости из-за недостаточной механической надёжности [11, 12].

В п.6.2 рассматривается задача оценки механического отклика мультиморфологических скаффолдов с градиентом пористости на основе статистических распределений с учетом предела упругости.

Сложная морфология костной ткани может быть достигнута в разработанных скаффолдах несколькими способами, одним из которых является использование

функционального градиента. Предлагаемые структуры сочетают в себе высокопроницаемые элементы, соответствующие трабекулярной кости, и низкопористые структуры, соответствующие кортикальной кости. Для анализа влияния градиента на распределение напряжений в структурах параметры градиента варьировались с целью получения различных свойств перехода между геометриями - от более резкого к более плавному. Статистический анализ распределения напряжений фон Мизеса выявил характерные пики, свидетельствующие о локализации напряжений в определённых диапазонах, которые зависят от параметров градиента и исходной морфологии элементарных ячеек. Показано, что управление параметрами градиента морфологии и пористости является ключевым фактором при разработке скаффолдов с оптимальными механическими характеристиками для замещения и восстановления различных типов костной ткани, а статистический анализ напряжений служит эффективным инструментом для прогнозирования и улучшения прочности таких структур [13].

В п.6.3 инструменты статистического анализа поля напряжений применены для изучения процесса биодеградации полимерных скаффолдов.

Для анализа влияния различных типов деградации на прочностные свойства скаффолдов исследовалось их механическое поведение на определенном этапе деградации. Были смоделированы элементарные ячейки на основе ТПМП с пористостью 30%. При рассмотрении влияния объемной деградации (ОД) структуры на её механическое поведение моделирование каждого этапа заключалось в занижении упругих свойств материала, при этом данный процесс не затрагивал морфологию структуры. Для моделирования поверхностной деградации (ПД) на каждом этапе наблюдалось уменьшение общего объема структуры.

Тип эрозии оказал существенное влияние на распределение деформаций в исследуемых скаффолдах, особенно заметное с ростом скорости деградации. По мере развития процесса деградации величина максимальных локальных деформаций в структурах, подвергнутых поверхностной деградации, значительно превышала начальную деформацию структуры, чего нельзя сказать о структурах, подвергнутых объемной деградации. Это видно по параметрам распределений, которые показывают долю структур с деформациями, превышающими заданные значения макроскопических деформаций (рис. 13).

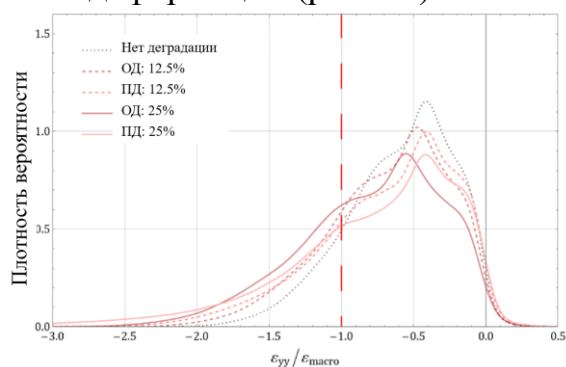


Рис. 13. Распределение нормированных деформаций в структуре при объемной и поверхностной эрозии при сжатии

Полученные результаты могут быть учтены на этапе проектирования пористых полимерных скаффолдов, где программируются и учитываются как морфологические свойства, так и морфометрические характеристики [14].

В п.6.4 с использованием инструментов анализа распределений напряжений представлены результаты исследования влияния жесткости наполнителя на напряженно-деформированное состояние трехмерного метаматериала – ауксетичной решетчатой структуры (рис. 15а).

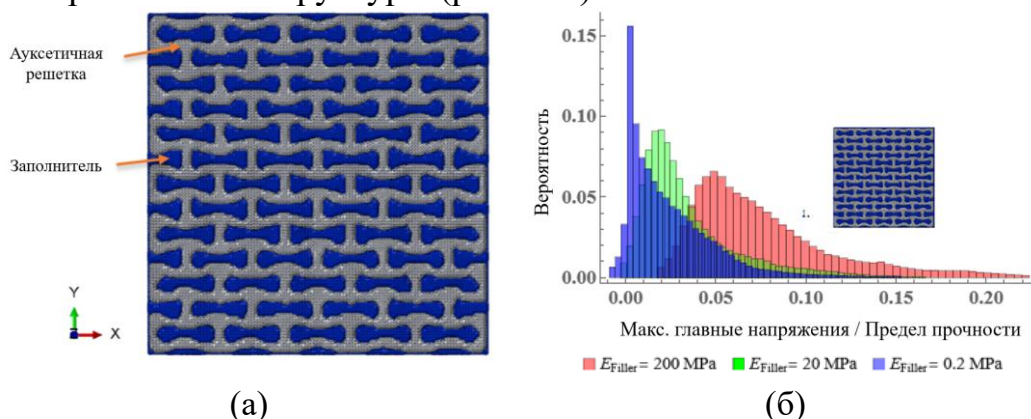


Рис. 15. (а) Конечно-элементная модель двухфазной ауксетичной структуры; (б) сравнение распределения нормированного отношения полей максимальных главных напряжений для двухфазных ауксетичных структур с модулем упругости наполнителя 200, 20 и 0.2 МПа

Высокие значения модуля наполнителя, сопоставимые с модулем решетки, обеспечивают положительный коэффициент Пуассона, характерный для традиционных материалов. Снижение жесткости наполнителя до существенно низких уровней (характерных для биомедицинских приложений) способствует проявлению ауксетичного поведения с отрицательным коэффициентом Пуассона. При среднем значении модуля наполнителя около 20 МПа коэффициент Пуассона приближается к нулю. Кроме того, моделирование показало значительное влияние наполнителя в распределении напряжений и повреждаемости структуры (рис. 15б). Управление жесткостью наполнителя позволяет точнее настраивать деформационные характеристики подобных ауксетичных решетчатых структур, поддерживая желаемые механические свойства, включая сохранение отрицательного коэффициента Пуассона и улучшение сопротивляемости разрушению [15].

В главе 7 представлена методология для реконструкции геометрии неоднородных сред с применением морфологических статистических характеристик. Процесс реконструкции предполагает восстановление геометрии микроструктуры, морфология которой соответствует неким заданным свойствам. На основе набора морфологических данных по единственному образцу структуры можно создать бесконечное количество новых структур, не повторяющих в точности исходную геометрию, но идентичных по своим морфологическим свойствам. Существует ряд базовых параметров, которые сохраняются в процессе реконструкции морфологии неоднородных сред (объемная доля фаз, размеры кластеров, минимальный размер локальной фазы и прочие). Таким образом, для каждого типа структур можно подобрать набор статистических характеристик,

описывающих те или иные взаимодействия, которые в наибольшей мере эффективны для их восстановления.

В п.7.1 представлен подход для реконструкции статистически эквивалентной микроструктуры неоднородных сред на основе задачи оптимизации, которая решается с помощью корректировки некоторой произвольной начальной структуры с целью минимизации функции, которая измеряет разницу между выбранными статистическими характеристиками эталонной и реконструируемой среды. Структурные статистические характеристики могут быть использованы как входные данные для этих задач, и также могут быть инструментами для оценки полученного результата. Для использования полезной информации, содержащейся в различных статистических дескрипторах, в процессе реконструкции можно использовать составной вид энергетической функции, учитывающий произвольное количество различных функций.

Установлено, что для достижения качественных результатов при восстановлении представительных объемов с использованием методов оптимизации в общем случае достаточно корреляционной функции, функции линейного пути, а также одной из многоточечных функций (рис. 16а). Кроме того, установлено, что для реконструкции представительных объемов неоднородных сред более эффективно будут работать те дескрипторы, которые наиболее чувствительны к изменению параметров морфологии конкретной неоднородной среды. На основе этого разработана модификация оптимизационного алгоритма, позволяющего сократить вычислительные ресурсы, необходимые для реконструкции (рис. 16б).

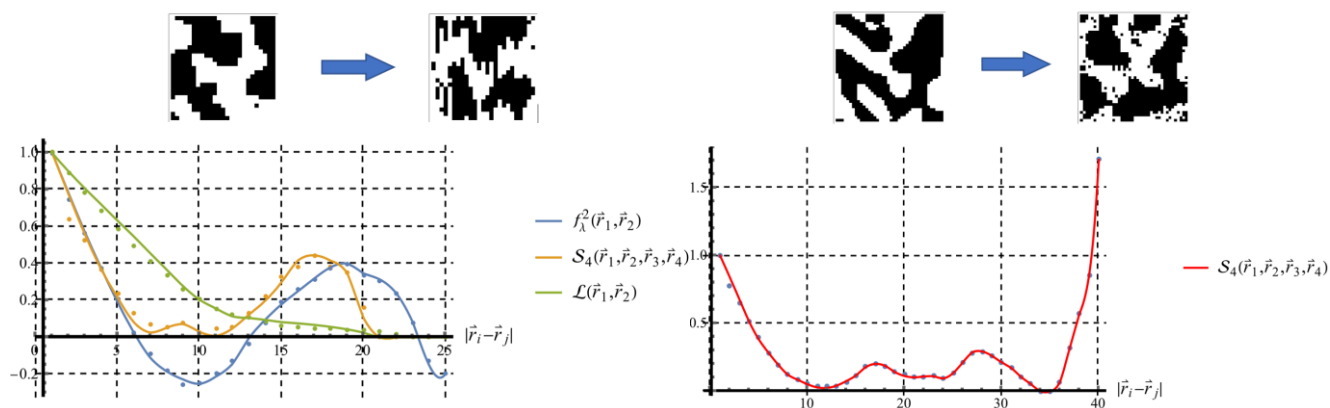


Рис. 16. Пример реализации алгоритма реконструкции двумерной структуры с использованием (а) корреляционной функции, вероятностной функции четвертого порядка и функции линейного пути; (б) вероятностной функции четвертого порядка. Сплошными линиями обозначены интерполированные эталонные функции, точками – реконструированные значения дескрипторов

В п.7.2 приведен пример использования структурных статистических характеристик для реконструкции трехмерной микроструктуры неоднородных материалов по данным двумерных изображений (срезов) с использованием генеративных нейронных сетей.

В случае, когда доступны множественные данные о структуре (например, это могут быть двумерные срезы, полученные при экспериментальном исследовании

внутренней структуры материалов), они могут быть использованы для обучения нейронной сети. Натренированная таким образом нейронная сеть способна оценить распределение фаз в структуре и предложить вариант начального приближения реконструируемой среды, с характеристиками, максимально приближенными к эталонным изображениям. В данной работе применен метод реконструирования статистически эквивалентной 3D-структуры из 2D-изображения на основе VAE-GAN (вариационный автокодировщик, VAE, в комбинации с генеративно-состязательной сетью, GAN [16]).

Для оценки сгенерированных изображений использовались структурные статистические характеристики. Больше всего для целей исследования подходят двухточечная корреляционная функция и функция линейного пути. Для иллюстрации работы алгоритма нейронная сеть обучалась на наборе данных материалов с порами открытого и закрытого типа. При анализе структурных статистических дескрипторов видно, что график функции линейного пути для исходных и реконструированных на основе нейронной сети структур во всех случаях согласуется практически идеально (рис. 17).

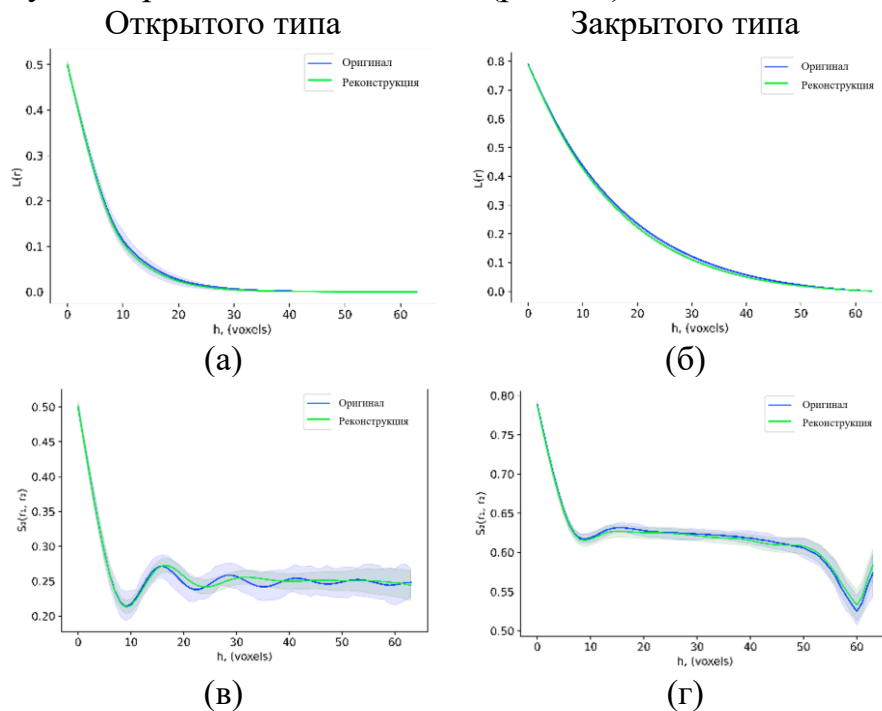


Рис. 17. Функции линейного пути (а,б) и корреляционные функции (в,г) для оригинальных и реконструированных структур

Полученные результаты говорят о применимости предложенного подхода к решению задач стохастической реконструкции неоднородных и пористых сред. Синтезированные искусственные структуры в статистическом плане позволяют заменить экспериментальные методы при необходимости исследования большого объема входных данных.

Механический отклик оригинальных и реконструированных моделей с граничными условиями в виде растягивающей нагрузки был численно проанализирован с помощью метода конечных элементов. Распределения плотности вероятности максимальных главных напряжений в результате растягивающей нагрузки представлены в виде сглаженных гистограмм (рис. 18).

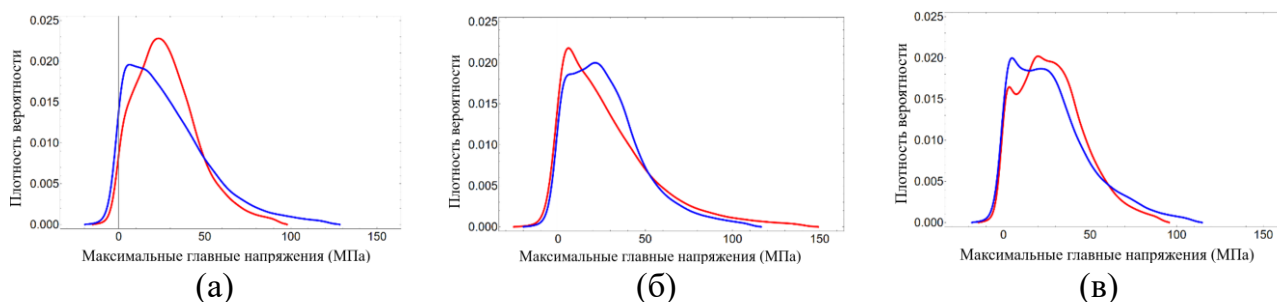


Рис. 18. Графики плотности вероятности максимальных главных напряжений для оригинальных и реконструированных структур с порами открытого типа

При использовании структурных характеристик для реконструкции неоднородной среды важным является поиск баланса между вычислительной эффективностью подхода и обеспечения адекватной статистической эквивалентности. Включение большего числа статистических функций в процессе оптимизации обеспечивает большую точность, но значительно увеличивает требуемые для реконструкции вычислительные ресурсы. Текущие исследования в данной области посвящены поиску компромисса между качеством реконструкции и вычислительной стоимостью алгоритмов. Предложенный в данной работе подход на основе нейронных сетей позволяет избежать вычислительных затрат, связанных с использованием дополнительных статистических характеристик [17].

Практическое применение разработанной методики может быть востребовано в биомедицинских приложениях. Так, при проектировании костных имплантатов важно соответствие морфологии имплантата нативной ткани. Для этого структура имплантата может быть сгенерирована с использованием предложенного подхода, когда в качестве эталонной структуры используется полученное методами компьютерной томографии трехмерное изображение нативной ткани.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработан комплекс новых математических моделей, методов, алгоритмов и программ, определяющих взаимосвязь между морфологией и механическим откликом неоднородных сред на основе параметров их микроструктуры.
2. Предложены новые решения задач локализации и гомогенизации отклика неоднородных сред на основе стохастического подхода с учетом морфологических особенностей и с возможностью управления точностью за счет порядка учитываемых многоточечных взаимодействий.
3. На основе созданных моделей определены зависимости между характером механического отклика неоднородных сред и их морфологическими параметрами, которые могут быть использованы для создания материалов с заранее определенным набором свойств и оценки вероятности их разрушения.
4. Созданы подходы для верификации моделей на основе данных о распределенных полях и локальных значениях деформаций, полученных с использованием методов корреляции цифровых изображений и волоконно-оптических датчиков деформаций.
5. Продемонстрирована возможность практического использования инструментария многоточечных стохастических моделей для решения задач

проектирования, дизайна и оптимизации структур с учетом механического отклика и морфологических характеристик.

6. С использованием многоточечных статистических дескрипторов, а также на основе многопараметрической оптимизации и генеративных нейронных сетей разработаны алгоритмы для реконструкции, адаптации и поиска эквивалентных неоднородных сред.

7. На основе разработанных математических моделей и методов для решения задач механики и дизайна неоднородных сред с учетом морфологии микроструктуры созданы и апробированы алгоритмы и программные инструменты.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

1. Tashkinov M. Statistical methods for mechanical characterization of randomly reinforced media / M. Tashkinov // *Mechanics of Advanced Materials and Modern Processes*. – 2017. – Vol. 3. – № 1. – P. 18.

2. Tashkinov M. Micro-scale modeling of phase-level elastic fields of SiC reinforced metal matrix multiphase composites using statistical approach / M. Tashkinov // *Computational Materials Science*. – 2016. – Vol. 116. – P. 113-121. **Wos, Scopus, Q1**

3. Tashkinov M. A. Correlation functions of stress and strain fields in micro-heterogeneous media / M. A. Tashkinov, N. V. Mikhailova // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2016. – № 4. – P. 35-51. **Wos, Scopus**

4. Tashkinov M. Method of calculation of elastic effective properties of two-phase polydisperse media using multipoint statistical descriptors and the integral equations technique / M. Tashkinov // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2019. – Vol. 2019. – № 2. – P. 203-214. **Wos, Scopus**

5. Tashkinov M. A. Multipoint stochastic approach to localization of microscale elastic behavior of random heterogeneous media / M. A. Tashkinov // *Computers & Structures*. – 2021. – Vol. 249. – P. 106474. **Wos, Scopus, Q1**

6. Tashkinov M. A. Stochastic model of microstructural failure based on restoration of distributions laws for random stress and strain fields in microheterogeneous media / M. A. Tashkinov // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2017. – № 4. – P. 76-91. **Wos, Scopus**

7. Tashkinov M. Optimization of Elastic Properties of Composite Laminates Using Fiber-Optic Strain Sensors / M. Tashkinov, V. Matveenko // *Applied Composite Materials*. – 2020. – Vol. 27. – № 5. – P. 491-509. **Wos, Scopus, Q2**

8. Pirogova Y. Elastic properties and compressive mechanical behaviour of closed-cell porous materials: Effect of microstructural morphology / Y. Pirogova, M. Tashkinov, I. Vindokurov, V. V. Silberschmidt // *International Journal of Solids and Structures*. – 2024. – Vol. 295. – P. 112791. **Wos, Scopus, Q1**

9. Lobov E. Mechanical Properties and Performance of 3D-Printed Acrylonitrile Butadiene Styrene Reinforced with Carbon, Glass and Basalt Short Fibers / E. Lobov, I. Vindokurov, M. Tashkinov // *Polymers*. – 2024. – Vol. 16. – № 8. – P. 1106. **Wos, Scopus, Q1**

10. Lobov E. Effect of Short Carbon Fiber Reinforcement on Mechanical Properties of 3D-Printed Acrylonitrile Butadiene Styrene / E. Lobov, A. Dobryднева, I. Vindokurov, M. Tashkinov // *Polymers*. – 2023. – Vol. 15. – № 9. – P. 2011. **Wos, Scopus, Q1**

11. Pirogova Y. Design of lattice structures for trabecular-bone scaffolds: comparative analysis of morphology and compressive mechanical behaviour / Y. Pirogova, M. Tashkinov,

- I. Vindokurov [et al.] // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2025. **Wos, Scopus, Q1**
12. Elenskaya N. TPMS-based scaffolds: Adaptation of morphological properties and mechanical response to reference tissue / N. Elenskaya, M. Tashkinov, V. V. Silberschmidt // International Journal of Solids and Structures. – 2025. – Vol. 315. – № January. – P. 113366. **Wos, Scopus, Q1**
13. Elenskaya N. Understanding of trabecular-cortical transition zone: Numerical and experimental assessment of multi-morphology scaffolds / N. Elenskaya, M. Tashkinov, I. Vindokurov [et al.] // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2023. – Vol. 147. – № August. – P. 106146. **Wos, Scopus, Q1**
14. Elenskaya N. Effect of degradation in polymer scaffolds on mechanical properties: Surface vs. bulk erosion / N. Elenskaya, P. Koryagina, M. Tashkinov, V. V Silberschmidt // Computers in Biology and Medicine. – 2024. – Vol. 174. – № March. – P. 108402. **Wos, Scopus, Q1**
15. Kononov E. Reconstruction of 3D Random Media from 2D Images: Generative Adversarial Learning Approach / E. Kononov, M. Tashkinov, V. V. Silberschmidt // Computer-Aided Design. – 2023. – Vol. 158. – P. 103498. **Wos, Scopus, Q1**
16. Tashkinov M. Composites with Re-Entrant Lattice: Effect of Filler on Auxetic Behaviour / M. Tashkinov, A. Tarasova, I. Vindokurov [et al.] // Polymers. – 2023. – Vol. 15. – № 20. – P. 4076. **Wos, Scopus, Q1**
17. Tashkinov M. Reconstruction of Random Structures Based on Generative Adversarial Networks: Statistical Variability of Mechanical and Morphological Properties / M. Tashkinov, Y. Pirogova, E. Kononov [et al.] // Mathematics. – 2024. – Vol. 13. – № 1. – P. 7. **Wos, Scopus, Q1**
18. Tashkinov M. Method of successive approximations in stochastic elastic boundary value problem for structurally heterogenous materials / M. Tashkinov, V. Wildemann, N. Mikhailova // Computational Materials Science. – 2012. – Vol. 52. – № 1. – P. 101-106. **Wos, Scopus, Q1**
19. Tashkinov M. Statistical characteristics of structural stochastic stress and strain fields in polydisperse heterogeneous solid media / M. Tashkinov // Computational Materials Science. – 2014. – Vol. 94. – № C. – P. 44-50. **Wos, Scopus, Q1**
20. Tashkinov M. Multipoint Approximation of Statistical Descriptors of Local Strain and Stress Fields in Heterogeneous Media Using Integral Equation Method / M. Tashkinov // Advances in Mathematical Physics. – 2018. – Vol. 2018. – P. 1-9. **Wos, Scopus, Q2**
21. Tashkinov M. A. Modeling of the Effect of Microscale Morphological Parameters on the Deformation Behavior of Porous Materials with a Metal Matrix / M. A. Tashkinov, A. S. Shalimov // Physical Mesomechanics. – 2021. – Vol. 24. – № 5. – P. 618-624. **Wos, Scopus, Q2**
22. Tashkinov M. A. Method of successive approximations in a stochastic boundary-value problem in the elasticity theory of structurally heterogeneous media / M. A. Tashkinov, V. E. Vildeman, N. V. Mikhailova // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2011. – Vol. 2. – № 1. – P. 21-37. **Wos, Scopus**
23. Tashkinov M. A. Modeling of elastic behavior of multicomponent composite materials based on approximate solution of stochastic boundary value problems / M. A. Tashkinov // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – Vol. 2015. – № 3. – P. 165-181. **Wos, Scopus**

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ

24. Dolgikh D. Introducing microarchitecture into 3D-printed prosthesis socket: Pressure distribution and mechanical performance / D. Dolgikh, M. Tashkinov, D. Sudoplatova, V. V. Silberschmidt // *Medical Engineering and Physics*. – 2023. – Vol. 122. – № August. – P. 104075. **Wos, Scopus, Q2**
25. Dolgikh D. A. Pressure redistribution in additively manufactured composite prosthesis by architecture control / D. A. Dolgikh, M. A. Tashkinov, V. V. Silberschmidt // *Multiscale and Multidisciplinary Modeling, Experiments and Design*. – 2024. – Vol. 7. – № 3. – P. 1565-1580. **Wos, Scopus, Q2**
26. Enhancing the Strength of 3D-Printed Polymer Exoprosthetic Socket by Localized Non-Planar Continuous Carbon Fiber Reinforcement / D. Dolgikh, E. Lobov, I. Bezukladnikov [et al.] // *Polymers*. – 2025. – Vol. 17. – № 8. – P. 1097. **Wos, Scopus, Q1**
27. Kononov E. Efficient design of porous structures with superior mechanical properties using deep learning and multi-objective optimization / E. Kononov, M. Tashkinov // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. – 2025. – Vol. 68. – № 7. **Wos, Scopus, Q1**
28. Tashkinov M. A. Stochastic modelling of deformation process in elastoplastic composites with randomly located inclusions using high order correlation functions / M. A. Tashkinov // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2014. – Vol. 2014. – № 3. – P. 163-185. **Wos, Scopus**
29. Tashkinov M. A. Methods of Stochastic Mechanics for Characterization of Deformation in Randomly Reinforced Composite Materials / M. A. Tashkinov // *Engineering Materials* / eds. V. V. Silberschmidt, V. P. Matveenko. – Cham : Springer, Cham, 2015. – Vol. 21. – P. 43-78. **Wos, Scopus**
30. Tashkinov M. Characterization of microstructure of fibrous composites using high-order correlation functions / M. Tashkinov // *Solid State Phenomena*. – 2016. – Vol. 243. – P. 121-129. **Wos, Scopus**
31. Tashkinov M. A. Optimization of mechanical characteristics of models of laminate composites using embedded optical fiber strain sensors / M. A. Tashkinov, V. P. Matveenko // *PNRPU Mechanics Bulletin*. – 2018. – Vol. 2018. – № 4. – P. 136-144. **Wos, Scopus**
32. Elenskaya N. V. Numerical Modeling of the Deformation Behavior of Polymer Lattice Structures with a Density Gradient Based on Additive Technologies / N. V. Elenskaya, M. A. Tashkinov, V. V. Silberschmidt // *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*. – 2022. – Vol. 55. – № 4. – P. 443-452. **Wos, Scopus**
33. Ташкинов М. А. Многоточечные моментные функции структурных свойств полидисперсных композитов / М. А. Ташкинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2011. – Vol. 2(23). – № 23. – P. 74-82. **RSCI**
34. Tashkinov M. High order multipoint approximations of stochastic elastic boundary value problem for polydisperse composites / M. Tashkinov, N. Mikhailova, V. Wildemann // *ECCM 2012 - Composites at Venice, Proceedings of the 15th European Conference on Composite Materials*. – 2012. **Scopus**
35. Tashkinov M. Probabilistic description of stochastic processes of structural failure in advanced polydisperse composites / M. Tashkinov // 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2014 and 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECFD 2014. –

International Center for Numerical Methods in Engineering, 2014. – P. 237-244. **Wos, Scopus**

36. Tashkinov M. Characterisation of micro-scale mechanical behaviour of multiphase composites using stochastic boundary value problem solutions / M. Tashkinov, N. Mikhailova, V. Wildemann // ICCM International Conferences on Composite Materials. – 2015. – Vols. 2015-July. – № July. – P. 19-24. **Scopus**

37. Tashkinov M. Model of damage evolution in elements of sandwich panels with transversely isotropic properties using multi-criteria approach / M. Tashkinov, V. Wildemann, A. Anoshkin, A. Tashkinov // ECCM 2016 - Proceeding of the 17th European Conference on Composite Materials. – European Conference on Composite Materials, ECCM, 2016. – P. 26-30. **Scopus**

38. Mikhailova N. Correlation functions for strain fields in elastic-plastic composites with random microstructure / N. Mikhailova, M. Tashkinov // AIP Conference Proceedings. – American Institute of Physics Inc., 2016. – Vol. 1785. – P. 040039. **Wos, Scopus**

39. Tashkinov M. Method of assessment of mechanical characteristics of quasi-isotropic composite laminates using experimental data from fiber- optic strain sensors / M. Tashkinov, V. Matveenko // Procedia Structural Integrity. – 2017. – Vol. 5. – P. 577-583. **Wos, Scopus**

40. Tashkinov M. Estimation of microstructural failure probability based on restoration of the field distributions laws in components of heterogenous media / M. Tashkinov, E. Spaskova // Procedia Structural Integrity. – Elsevier B.V., 2017. – Vol. 5. – P. 608-613. **Wos, Scopus**

41. Tashkinov M. Multiscale Statistical Model of Progressive Failure in Random Heterogeneous Media / M. Tashkinov // Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Pleiades Publishing, 2019. – Vol. Part F6. – P. 114-123. **Scopus**

42. Pirogova Y. Effect of voids shape on deformation of 3D-printed closed-cell porous structures / Y. Pirogova, M. Tashkinov // Procedia Structural Integrity. – 2021. – Vol. 37. – № C. – P. 1049-1056. **Wos, Scopus**

СВИДЕТЕЛЬСТВА О РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ

43. Ташкинов М.А. Программный продукт для создания конечно-элементных моделей представительных объемов композитов с короткими волокнами. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2025661295 от 05 мая 2025 г.

44. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания геометрических и конечно-элементных моделей неоднородных сред с упорядоченными включениями полиэдральной формы – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022682491 от 23 ноября 2022 г.

45. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания геометрических и конечно-элементных моделей неоднородных структур с геометрией на основе диаграмм Вороного – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022683855 от 08 декабря 2022 г.

46. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания двухфазных воксельных конечно-элементных моделей на основе произвольной трехмерной геометрии – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022682374 от 22 ноября 2022 г.

47. Еленская Н.В., Кононов Е.А., Пирогова Ю.В., Ташкинов М.А. Программа для оценки статистического распределения полей на основе данных конечно-элементных моделей – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022684067 от 12 декабря 2022 г.
48. Еленская Н.В., Ташкинов М.А. Программа для генерации конечно-элементных функционально-градиентных структур на основе трижды периодических минимальных поверхностей – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022684068 от 12 декабря 2022 г.
49. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания представительных объемов неоднородных сред с включениями полиэдральной формы – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021682062 от 29 декабря 2021 г.
50. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для тетраэдральной дискретизации закрытоячеистых неоднородных структур – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2021682061 от 29 декабря 2021 г.
51. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания тетраэдральных конечно-элементных моделей для представительных объемов трехмерных взаимопроникающих структур – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020664276 от 11 ноября 2020 г.
52. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для расчета значений многоточечных статистических инструментов математической морфологии с использованием методов численного интегрирования – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020664275 от 11 ноября 2020 г.
53. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для создания воксельных конечно-элементных моделей на основе морфологии представительных объемов – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020664121 от 09 ноября 2020 г.
54. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для генерации статистически эквивалентных двумерных микроструктур на основе методов машинного обучения – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020664274 от 11 ноября 2020 г.
55. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для расчета вероятности разрушения компонент неоднородной среды на основе анализа распределения микроструктурных полей напряжений – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018661308 от 05 сентября 2018 г.
56. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для анализа прогрессирующего разрушения представительных объемов неоднородной среды на основе данных о распределении значений критериев разрушения в компонентах – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018661309 от 05 сентября 2018 г.
57. Ташкинов М.А. Модуль для вычисления эффективных свойств многокомпонентных материалов на основе анализа распределения полей напряжений и деформаций в представительных объемах – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018610436 от 11 января 2018 г.
58. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для расчета центрального момента третьего порядка полей напряжений и деформаций в компонентах неоднородной

среды – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017619872 от 08 сентября 2017 г.

59. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для расчета параметров законов распределения полей напряжений и деформаций в компонентах неоднородных сред – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017619531 от 25 августа 2017 г.

60. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для расчета первого приближения условных и безусловных моментов полей напряжений и деформаций в многокомпонентных неоднородных средах в упругом случае – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016661133 от 30 сентября 2016 г.

61. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для численного решения интегродифференциальных уравнений, содержащих функцию Грина – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016661176 от 03 октября 2016 г.

62. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для генерации и анализа трехмерных многофазных представительных объемов композитов со сферическими включениями – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015661084 от 16 октября 2015 г.

63. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для построения и аппроксимации моментных функций представительных объемов двухфазных композитов – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015660369 от 29 сентября 2015 г.

64. Ташкинов М.А. Вычислительный модуль для синтеза трехмерных двухфазных представительных объемов композитов со сферическими и эллипсоидальными включениями – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015660370 от 29 сентября 2015 г.