

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»

На правах рукописи

МИСЮРА НАТАЛЬЯ ЕВГЕНЬЕВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО
ОПИСАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И
ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

05.13.18 Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
С.А. Берестова

Екатеринбург

2018

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	10
1.1. Методы геометрического моделирования	10
1.2. Методы гладкого сопряжения и построения линейной перспективы	12
1.3. Методы описания вращений геометрических объектов вокруг оси произвольного положения	15
Выводы по главе 1	18
2. КОМПЛЕКС УНИВЕРСАЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	21
2.1. Метод гладкого сопряжения кривых и плоскостей	22
2.2. Метод поворота геометрического объекта вокруг оси, проходящей через заданную точку пространства	29
2.3. Метод построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов ..	33
2.4. Метод описания плавного сферического движения твердого тела на основе алгебры кватернионов	39
Выводы по главе 2	50
3. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ И АРХИГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФАСАДОВ	52
3.1. Пример многопараметрического формообразования оболочек высотных зданий	52
3.2. Пример моделирования архиграфического решения объектов городской среды .	59
Выводы по главе 3	69
4. ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТИ ВИРАЖА ГОРКИ ИЛИ САННОЙ ТРАССЫ	70
4.1. Интегрирование уравнений Френе для линии откоса	70
4.2. Динамический метод нахождения закона изменения кривизны осевой линии горки или санной трассы	76
4.3. Моделирование направляющей кривой и поверхности желоба санной трассы	77
Выводы по главе 4	82
5. ПРИЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСА АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ОПИСАНИЮ ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ	84
5.1. Описание случайных распределений на группе $SO(3)$ в параметрах ось-угол	84
5.2. Геометрические факторы анизотропии упругих свойств текстурированных поликристаллов	94
5.3. Траектория текстурных состояний при непрерывной горячей прокатке алюминиевого сплава	102
Выводы по главе 5	106
Заключение	108

Литература 110

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее время невозможно представить без нарастающего присутствия визуальных геометрических образов в таких областях человеческой деятельности как: графический дизайн, архитектурно-строительная сфера, судо- и авиастроение, машиностроение, металлургия, а также во многих других отраслях, где возникают задачи формообразования и оптимизации геометрических структур по эстетическим, технологическим или конструктивным признакам. Процесс решения тех или иных естественно-научных и инженерных задач неразрывно связан с созданием пространственной модели, построенной на реальных параметрах исследуемого объекта. Средства компьютерного моделирования могут обеспечивать наглядность происходящих изменений при варьировании параметров, визуализированных на экране компьютера геометрических моделей, что позволяет в достаточной мере верифицировать исходную модель без средств математического моделирования, то есть без установления функциональных связей между параметрами объекта и использования содержательного математического аппарата.

Далеко не всегда целью геометрического моделирования является формообразование, так при использовании статистических методов при количественном описании текстуры поликристаллических материалов геометрическая модель является наглядной демонстрацией физических процессов, а также позволяет получить геометрические факторы, определяющие те или иные физико-механические свойства текстурированных поликристаллических материалов и находить области их изменения.

Геометрическое моделирование использует фундаментальные результаты теории матриц, математического анализа, дифференциальной геометрии, аналитической и начертательной геометрий, векторной и линейной алгебр, вычислительной математики и как одно из направлений математического моделирования развито незначительно.

Актуальность темы. Математическое моделирование физико-механических процессов и инженерных сооружений часто связано с необходимостью создания геометрических моделей. С их помощью можно определить образ существующего или проектируемого объекта, провести соответствующий постановке задачи численный эксперимент и осуществить необходимые коррекции. Геометрической моделью в широком смысле называется совокупность формального описания исследуемого объекта и соответствующего ему визуального образа, представленного в пространствах различной размерности. Формальным описанием в связи с развитием современных методов компьютерного моделирования в первую очередь является численное моделирование геометрических объектов окружающего мира. При этом их многообразие создается с использованием базовых геометрических элементов: точки, линии и поверхности.

В последние годы появились и нашли широкое применение специализированные пакеты для компьютерного моделирования геометрических объектов, из которых наибольшее распространение на российском рынке получили *Ansys, Компас, Лира, AutoCAD, SolidWorks, Illustrator, CorelDraw*. Математический аппарат, используемый при создании этих пакетов, основан на численных методах задания объектов. Большой вклад в их разработку и описание внесли *Д. Роджерс, Дж. Адамс, М. Агастона, С. Кунс, Жан Галльера, Карл де Бур, Н.Н. Голованов, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко, Е.А. Никулин*. Создание сложных геометрических моделей осуществляется с использованием группы преобразований, таких как сопряжение, пересечение, объединение, трансляция, вращение, деформация, масштабирование.

Для повышения точности, сокращения вычислительных затрат и алгоритмического удобства при компьютерном моделировании весьма эффективным инструментом являются аналитические методы. Они позволяют получить связь между параметрами объекта моделирования в аналитической форме, исследовать различные его свойства и анализировать их качественное поведение. Аналитическими методами описания геометрических объектов и их преобразований занимаются *R. M. Brannon, E. Kovacs, M. Behandish, С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, Н.Р. Щербаков, П.Г. Доля*. Несмотря на первенство в исторической ретроспективе, как самостоятельное направление аналитическое моделирование геометрических объектов и их преобразований не так широко развито.

Существует отдельная группа специализированных математических пакетов компьютерной алгебры – *MatLab, Mathematica, Mathcad, Maple*, которые позволяют создавать геометрические модели, используя преимущества аналитического моделирования. Актуальным является развитие аппарата аналитического описания сложных геометрических объектов на основе преобразований независимых от выбора системы координат. Это даст возможность создавать математические модели объектов и применять их в качестве самостоятельных элементов при решении различных научных и прикладных задач.

Цель диссертационной работы: создание комплекса универсальных методов аналитического описания сложных геометрических объектов, применимого для решения задач математического моделирования в различных областях.

Для достижения цели диссертационной работы решены следующие **задачи:**

1. Анализ существующих методов геометрического моделирования: гладкого сопряжения кривых и плоскостей; построения линейной перспективы плоских и объемных геометрических объектов; описания сферического движения твердого тела и операции поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного направления и положения.
2. Разработка метода аналитического описания гладкого сопряжения кривых и поверхностей в векторной форме и получение алгоритма построения поверхности сопряжения как самостоятельного объекта.
3. Разработка и реализация векторного алгоритма операции поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства.
4. Разработка метода аналитического описания и алгоритма построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов при произвольном задании плоскости проецирования и центра перспективы.
5. Построение нелинейной интерполяции кватернионов и на его основе получение аналитического описания плавного сферического движения абсолютно твердого тела.
6. Разработка комплекса прикладных программ для описания преобразований сложных геометрических объектов в пакетах компьютерной алгебры.

7. Демонстрация универсальности разработанных математических методов на примере компьютерного моделирования инженерных объектов и при решении естественно-научных задач.

Научная новизна:

1. Предложен метод для аналитического описания сложных геометрических объектов и преобразований, удовлетворяющий требованию их независимости от выбора системы координат.

2. Выполнено аналитическое описание гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей, получено аналитическое представление и компьютерная модель поверхности их сопряжения.

3. Разработан оригинальный метод аналитического построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов.

4. Впервые получено аналитическое описание плавного сферического движения твердого тела с использованием нелинейной интерполяции кватернионов.

5. Разработана система компьютерного моделирования для реализации рассмотренных в диссертационной работе аналитических методов преобразований сложных геометрических объектов.

6. Получено аналитическое описание динамической модели поверхности желоба горки или санной трассы и осуществлено ее компьютерное моделирование в пакете компьютерной алгебры Mathcad.

Достоверность результатов подтверждается соответствием представленных в работе результатов моделирования частным решениям, полученным другими исследователями, а также удовлетворительными результатами решения тестовых задач.

Практическая ценность состоит в возможности использовать разработанные аналитические методы в специализированных пакетах компьютерной алгебры, а также в широком их применении для описания высокотехнологичных инженерных объектов сложной геометрии, в том числе – с учетом геометрических, кинематических и динамических характеристик объекта моделирования. Разработан новый комплекс прикладных программ для компьютерного моделирования оболочек высотных зданий, архитектурных решений фасадов, поверхности желоба горки и санной трассы, а также текстуры поликристаллического материала.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новый универсальный комплекс аналитических методов описания сложных геометрических объектов и их преобразований для компьютерного моделирования: гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей; линейной перспективы одномерных и двумерных объектов при произвольном задании центра перспективы и плоскости проецирования; поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства; нелинейной интерполяции кватернионов для описания плавного сферического движения твердого тела.
2. Динамическая модель поверхности желоба горки или санной трассы при произвольном законе изменения перегрузки, заданной начальной скорости движения и с учетом конструктивных параметров горки.
3. Аналитический вид функции плавного пуска и торможения для её использования в задачах компьютерного моделирования движения механических систем.
4. Новый способ описания и компьютерной визуализации текстуры поликристаллических материалов, в том числе ортотропных материалов с кубической симметрией решетки с использованием статистических характеристик случайных распределений на группе $SO(3)$ в параметрах ось-угол.

Апробация работы. Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на Всероссийских и Международных конференциях: XII Международной научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2013), II Всероссийской научной школе-конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Научные исследования и инновации в аэрокосмической технике и технологиях» (Пермь, 2013), Международной научно-практической конференции «Современный город: проектирование, строительство и развитие» (Екатеринбург, 2014), VIII Российской научно-технической конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций MRDMS» (Екатеринбург, 2014), межвузовском научном семинаре «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы», (Москва, 2014), Международном форуме и выставке высотного строительства FORUM RUSIA 100+ (Екатеринбург, 2014), Всероссийской научной конференции «Проблемы деформирования и

разрушения материалов и конструкций» к 50-летию кафедры «Динамика и прочность машин» (Пермь, 2015), Международной научной конференции «Textile Composites and Inflatable Structures» Structural Membranes (Барселона, 2015), Международной научной конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций MRDMS) (Екатеринбург, 2016, 2018), XI Международной научной конференции «Полиномиальная Компьютерная Алгебра» (Санкт-Петербург, 2018).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах кафедры теоретической механики УрФУ, г. Екатеринбург (рук. д.ф.-м.н. С.А. Берестова), кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.т.н. А.Н. Аношкин), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н. П.В. Трусов); на семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН, д.т.н. В.П.Матвеев), на тридцать девятом межвузовском научном семинаре «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы», Инженерная академия РУДН, г. Москва (рук. д.т.н. В.Н. Иванов).

Публикации. Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 14 публикациях, из них 6 статей опубликованы в журналах, рекомендованных для опубликования результатов диссертационных исследований по направлению 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 2 статьи – в изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Scopus; 4 статьи – в сборниках материалов конференций, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и/или Web of Science; получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

1. ОБЗОР МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В первой главе приводится подробный обзор ключевых особенностей основных направлений математического моделирования сложных геометрических объектов и их преобразований с целью поиска новых описаний для их использования в пакетах компьютерной алгебры. Рассматриваются два основных направления геометрического моделирования: методы численного моделирования, используемые в САПР и компьютерной графике, и аналитические методы. Анализируются существующие методы математического моделирования гладкого сопряжения и построения центральной проекции одномерных и двумерных объектов, методов описания поворота геометрических объектов, а также описание методов интерполяции кватернионов для задания сферического движения твердого тела.

1.1. Методы геометрического моделирования

Геометрическое моделирование в настоящее время развивается по двум направлениям. Первое направление – численные методы в задачах САПР и компьютерной графики [1-5]. Современные этапы внедрения САПР характеризуются переходом от плоского моделирования к объемному. Точность модели геометрического объекта обеспечивается точностью осуществления преобразования базового примитива. Для плоского моделирования, основными объектами моделирования являются отрезки, дуги, полилинии и кривые, в том числе кривые Безье, сплайны, рациональные кривые. Базовые преобразования на их основе – продление, обрезка и соединение. В объемном моделировании основные объекты — это замкнутые контуры. При этом используются поверхности движения, линейчатые, поверхности Безье, Кунса. Главные операции – булевы: объединение, дополнение, пересечение, а также преобразования поворота и трансляции. Существует понятие базовой поверхности, с которой в процессе моделирования осуществляют то или иное преобразование. В результате

средствами САПР проектируемый объект численно конструируется из геометрических тел, называемых графическими примитивами, которые могут быть трансформированы теми или иными программными средствами. Аналитического представления новых форм, получаемых такими преобразованиями, не существует.

Второе направление геометрического моделирования представлено работами, где геометрические объекты задаются в аналитическом виде [6 -12]. В работе [13] собрано более 500 аналитически заданных поверхностей 38 классов, которые могут быть использованы при решении различных задач науки и техники. Аналитические методы представления геометрических объектов обладают высокой степенью точности. Возможны различные формы описания объектов и их преобразований – векторные, операторные, тензорные и иные формы, что позволяет задавать каждую точку геометрического объекта и выполнять произвольные преобразования в аналитическом виде. В основе классификации аналитических поверхностей существенную роль имеют те способы, в результате которых эти поверхности получаются [7]. Существует большой класс поверхностей, которые получены преобразованием вращения плоской кривой вокруг оси Oz . Еще один обширный класс поверхностей получается преобразованием переноса кривой некоторого направления, так что ее одна точка скользит по другой кривой. Более сложные преобразования образуют классы винтовых, спиралевидных и других поверхностей [7,13]. Пополнение известного набора аналитических поверхностей новыми и расширение их классов представляет интерес для развития методов геометрического моделирования и их приложений. Важной составляющей исследований в этом направлении может быть расширение многообразия поверхностей и создание новых аналитических форм путем различных преобразований: дополнений, поворотов, пересечений и других. Использование аналитических методов может являться начальным этапом проектирования. Это позволяет после верификации соответствующих геометрических моделей транслировать их в графические пакеты, поддерживающие геометрические масштабы для получения проектной документации. Некоторые вопросы использования математических моделей

сложных геометрических объектов и их преобразований рассматриваются в ходе всего диссертационного исследования.

1.2. Методы гладкого сопряжения и построения линейной перспективы

Существуют алгоритмы гладкого сопряжения кривых и плоскостей при разработке системы геометрического моделирования машиностроительных деталей на основе численных методов. Для их применения требуется описать объекты сопряжения в форме поверхности или кривой Безье, или сплайновой поверхности соответственно, как рассмотрено в работах [2,3,4,14]. Степень гладкости сопряжения зависит от числа контрольных точек, что в свою очередь увеличивает алгебраическую степень кривых, и затрудняет численные расчеты. Более широко данные методы моделирования используются для поверхностного моделирования сложных объемных форм (рис. 1.1).

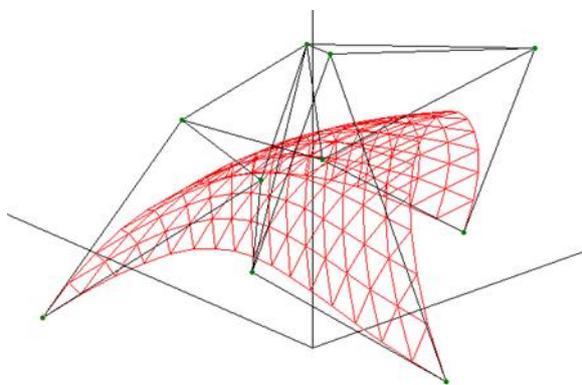


Рисунок 1.1. Схема поверхностного моделирования сложных геометрических форм

Сопряжение поверхностей в компьютерной геометрии [2] осуществляется для операции скругления ребер. Для этого строят новые грани, которые различным образом сопрягают тела, которые стыкуются в скругляемых ребрах. В основе этих методов лежат геометрические алгоритмы с использованием поверхностей скругления постоянного радиуса и поверхностей, представляющие собой следы от качения сферы, частей цилиндрических поверхностей и поверхностей тора. В

случае если требуется построить поверхность переменного радиуса, то опорная дуга поверхности сопряжения представляется в виде рациональной кривой Безье. Также рассматриваются и гладкие сопрягаемые поверхности – эллиптические, параболические и гиперболические, которые получаются варьированием функции веса средней точки, заданной рациональной кривой Безье. При этом не исследовался вопрос кривизны и степени гладкости такого сопряжения. Возникающая от привлечения численных методов погрешность, в описанных методах гладкого сопряжения при определении точек касания требует дополнительных исследований.

Исследованию преобразования центрального проецирования посвящен раздел геометрии – проективная геометрия, которая развилась и выделилась в отдельную ветвь знаний в первые десятилетия 19 века в связи с потребностью развития теории изображений в перспективе. Геометр Жан Виктор Понселе один из первых выделил особые свойства геометрических фигур, названные им проективными. Проективная геометрия составляет геометрию класса проективных преобразований и представляет из себя систему теорем, утверждающих неизменность свойств фигур в этом классе [15]. Идея классификации различных отраслей геометрии в соответствии с классами преобразований принадлежит Феликсу Клейну [16].

Метод создания перспективного изображения широко применяется в компьютерной графике при создании реалистического изображения. В основе метода в популярных и конкурирующих между собой пакетах OpenGL и DirectX лежит построение так называемой проекционной матрицы и ее применение для создания проективного изображения [18]. Преобразование осуществляется с использованием однородных координат с переходом на заключительной стадии к декартовым для определения положения координаты трёхмерной вершины на двумерном экране монитора [6,19].

Формирование проекционной матрицы для создания требуемой иллюзии осуществляется с помощью четырёх параметров: угол обзора в радианах - $fovy$,

соотношение сторон - *aspect*, расстояние до ближней плоскости отсечения (*n*), расстояние до дальней плоскости отсечения - *f* (рис 1.2.).

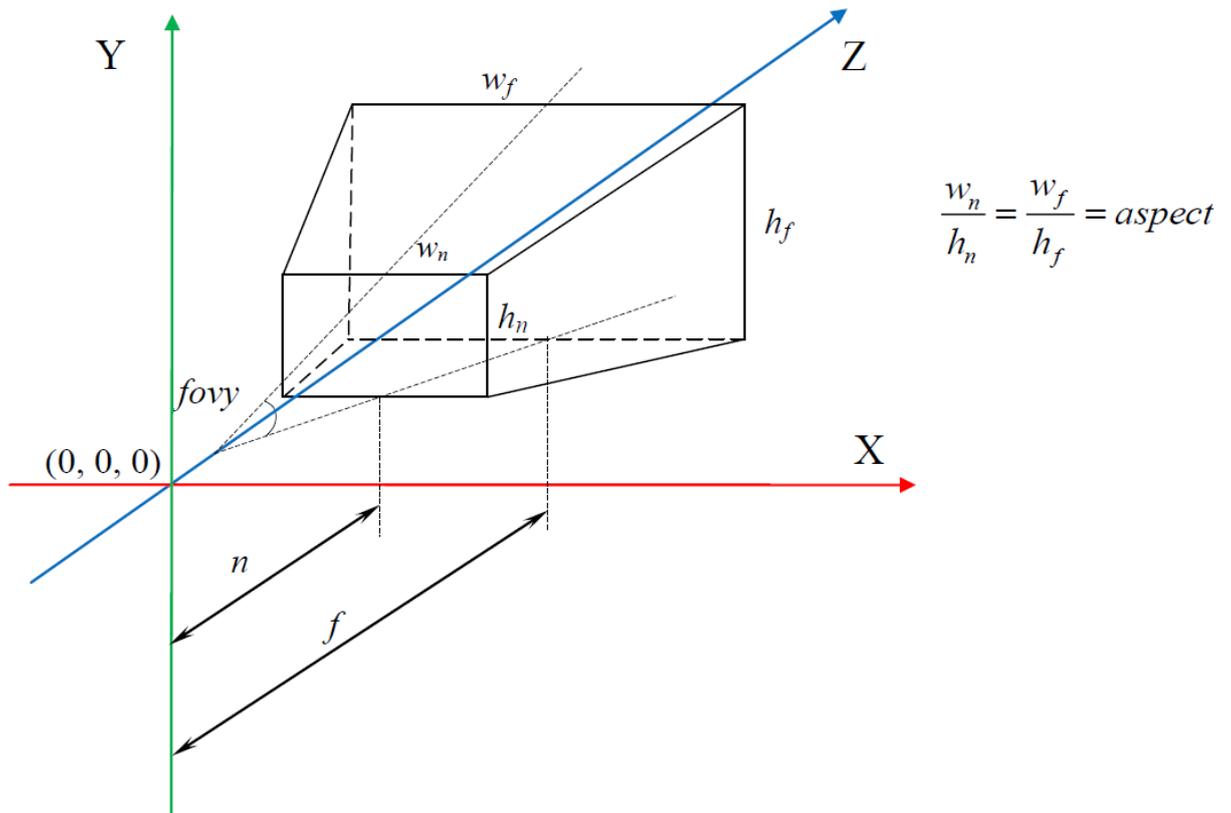


Рисунок 1.2. Перспективный объём видимости

Соответствующая этим параметрам проекционная матрица принимает вид

$$[P] = \begin{pmatrix} \frac{\text{ctg}\left(\frac{fovy}{2}\right)}{\text{aspect}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ctg}\left(\frac{fovy}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{f-n} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-2fn}{f-n} & 0 \end{pmatrix}$$

А преобразование с использованием однородных координат записывается равенством

$$[X, Y, Z, H] = [x, y, z, 1][P],$$

где $x, y, z \in CVV, CVV = [-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1]$ – канонический объём отсечения.

Координаты точки после проективного преобразования находятся из равенства

$$[x', y', z', 1] = \left[\frac{X}{H}, \frac{Y}{H}, \frac{Z}{H}, 1 \right]$$

Дальнейшая процедура получения проекции при произвольном расположении картинной плоскости относительно объекта сводится к последовательному преобразованию систем координат: поворота и трансляции к исходному преобразованию центрального проецирования [3,15].

В данных методах объект проецирования задается организованным программным образом массивом координат. При использовании аналитических форм возникает обязательная необходимость в переходе к таким массивам перед осуществлением преобразования проецирования. Используются различные методы, в частности, триангуляции, для возможности выполнения процедур в соответствии с аксиоматикой проективной геометрии. Серьезные вычислительные трудности возникают в тех случаях, когда проецируемый объект, плоскость проецирования или центр проецирования меняют свое положение в пространстве произвольным образом. Все алгоритмы получения проективных изображений связаны с необходимостью переходов от декартовых координат к однородным и затем требуют выполнения обратного перехода.

1.3. Методы описания вращений геометрических объектов вокруг оси произвольного положения

Одним из востребованных методов геометрического моделирования является задача поворота геометрического объекта в пространстве. Наиболее просто эта задача решается в случае вращения тела вокруг одной из координатных осей, заданных в фиксированном координатном базисе. Более сложной задачей является поворот относительно оси произвольного направления, проходящей через начало координат. Математическое решение поставленной задачи традиционно осуществляется по следующему алгоритму. Если ось поворота проходит через начало координат и задана единичным направляющим вектором $l = \{l_x, l_y, l_z\}$, то

преобразование поворота на угол ϑ может быть представлено следующим операторным равенством:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r} - \text{формула Родрига}, \quad (1.1.1)$$

где $\{r\} = \{x \ y \ z\}^T$ - радиус-вектор точки тела до поворота, оператору соответствует в произвольном ортогональном базисе матрица поворота $[R]$.

Для матрицы поворота существует несколько аналитических способов представления, в частности, в работе [20] дано следующее представление

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta)l_x^2 & (1 - \cos \vartheta)l_x l_y + (\sin \vartheta)l_z & (1 - \cos \vartheta)l_x l_z + (\sin \vartheta)l_y \\ (1 - \cos \vartheta)l_y l_x + (\sin \vartheta)l_z & \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta)l_y^2 & (1 - \cos \vartheta)l_y l_z + (\sin \vartheta)l_x \\ (1 - \cos \vartheta)l_z l_x + (\sin \vartheta)l_y & (1 - \cos \vartheta)l_z l_y + (\sin \vartheta)l_x & \cos \vartheta + (1 - \cos \vartheta)l_z^2 \end{pmatrix}.$$

Согласно работам [21,22] матрицу можно представить в виде

$$[R] = [I] + \sin \vartheta [L] + (1 - \cos \vartheta)[L]^2,$$

$$\text{где } [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [L] = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица поворота также задается и в терминах матричной экспоненты [23]

$$[R] = \exp(\vartheta L).$$

При задании поворота с помощью единичного кватерниона матрица, то соответствующая матрица поворота имеет вид

$$[R(t)] = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2^2 - 2\lambda_3^2 & 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & 1 - 2\lambda_3^2 - 2\lambda_1^2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 \\ 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 & 1 - 2\lambda_1^2 - 2\lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - координаты единичного кватерниона

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \frac{\vartheta}{2} + l_x \sin \frac{\vartheta}{2} \mathbf{i} + l_y \sin \frac{\vartheta}{2} \mathbf{j} + l_z \sin \frac{\vartheta}{2} \mathbf{k}.$$

Формула Родрига (1.1.1) может быть записана в кватернионом виде

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{r} \boldsymbol{\lambda}^{-1} = \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + \mathbf{l} \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \mathbf{r} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} - \mathbf{l} \sin \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Необходимость получить аналитическое выражение преобразования поворота относительно оси произвольного направления, не проходящей через

начало координат, в задачах САПР и компьютерной графики инициировала получение общего алгоритма, который реализуется путем перемножения пяти матриц прямого и обратного поворота относительно координатных осей и двух матриц трансляции [1]

$$[M] = [T][R_x][R_y][R_\theta][R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[T]^{-1} \quad (1.1.2)$$

- матрица поворота вокруг оси произвольного положения.

Данный алгоритм предусматривает задание локальной и глобальной системы координат и является достаточно громоздким.

В работе [24] в пакете компьютерной алгебры Maple из равенства (1.1.2) был предложен вывод матрица поворота (1.1.1) путем непосредственного перемножения матриц последовательных преобразований.

В работе [25] осуществлен подробный обзор малоизвестных аналитических представлений различной параметризации преобразования поворота относительно оси произвольного направления, включая матричное, векторное, кватернионное и тензорное представление, а также представления с помощью матричных рядов. При этом компактной и алгоритмически удобной, для пакетов компьютерной алгебры, записи преобразования поворота геометрического объекта относительно оси произвольного положения не приводится.

Формула Родрига позволяет использовать аналитическое представление поворота геометрического объекта вокруг оси произвольного направления для описания сферического движения этого объекта, если ввести функциональную зависимость от времени координат единичного вектора оси поворота и угла поворота вокруг этой оси (параметры ось-угол). В задачах управления движением, в также в компьютерной графике сферическое движение зачастую задается последовательностью поворотов. Если использовать кватернионное представление сферического движения, то последовательности поворотов $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ может быть сопоставлен следующий алгоритм нахождения последовательных положений твердого тела

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{q}_1^{-1}, \mathbf{r}_2 = \mathbf{q}_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{q}_2^{-1}, \dots, \mathbf{r}_n = \mathbf{q}_n \dots \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{q}_1^{-1} \dots \mathbf{q}_n^{-1}.$$

Это процесс является итерационным, требует большого объема вычислений, связан с накоплением погрешности. На практике в последние годы активно стал применяться алгоритм сферической линейной интерполяции кватернионов SLEP [26].

$$\lambda(t) = \lambda_1 \frac{\sin\vartheta(1-t)}{\sin\vartheta} + \lambda_2 \frac{\sin\vartheta t}{\sin\vartheta}, 0 \leq t \leq 1,$$

где $\vartheta = \arccos \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Данный метод имеет ограничения, связанные с линейностью интерполяционной функции. Это приводит к серьезным ограничениям на закон сферического движения. Для прикладных задач представляет интерес получение сферической нелинейной интерполяции кватернионов для обеспечения плавных сферических движений твердого тела.

Выводы по главе 1

1. По результатам анализа существующих методов геометрического моделирования установлено, что при математическом моделировании сложных геометрических объектов и их преобразований используются два основных подхода – численные методы в задачах САПР, компьютерной графики и аналитическое геометрическое моделирование. Средствами САПР проектируемый объект численно конструируется из геометрических тел, называемых графическими примитивами, которые могут быть трансформированы теми или иными программными средствами. Точность модели геометрического объекта обеспечивается точностью осуществления поточечного преобразования базового примитива. Аналитические же методы обладают высокой степенью точности результатов моделирования, так как аналитически задается каждая точка геометрического объекта и преобразования выполняются синхронно.

2. Существуют алгоритмы гладкого сопряжения кривых и плоскостей при разработке системы геометрического моделирования машиностроительных деталей методами САПР на базе использования численных методов. Степень гладкости сопряжения зависит от числа контрольных точек, что увеличивает и

алгебраическую степень кривых сопряжения и затрудняет численные расчеты. Операцию скругления ребер осуществляют методами компьютерной геометрии, в основе которых лежит сопряжение в аналитической форме с использованием поверхностей постоянного радиуса.

Основным применением методов создания перспективных изображений является решение задач компьютерной визуализации. Теоретические основы соответствующих методов заложены в проективной геометрии. Основными инструментами при моделировании построения центральной проекции являются проективные матрицы в однородных координатах с использованием глобальных и локальных систем координат. Объект проецирования задается поточечно – числовым массивом его координат. Расположение плоскости проецирования является строго фронтальной.

Наряду с рассмотренными, возможен иной поход к математическому моделированию представленных выше преобразований, когда объекты моделирования заданы в аналитической форме, а все преобразования выполняются в аналитическом виде независимо от выбора системы координат.

2. Обзор существующих методов описания поворота твердого тела, как наиболее широко используемого преобразования, свидетельствует о большом разнообразии подходов к решению задачи. Объединяющим является использование в разных формах представления матрицы поворота вокруг оси, проходящей через начало координат. Поворот вокруг оси, проходящей через произвольную точку пространства осуществляется путем композиции преобразования поворота относительно координатных осей и преобразования трансляции. При этом обязательным условием является введение подвижной и неподвижной системы отчета.

Эффективным средством описания сферического движения твердого тела является использование кватернионной параметризации, которая в последние годы находит все большее применение в задачах управления движением, робототехники и компьютерной анимации. При этом популярность приобретает метод сферической линейной интерполяции кватернионов. Методы нелинейной

интерполяции кватернионов, позволяющих в более широком диапазоне задавать кинематические законы сферического движения в научной литературе отсутствуют. Представляется целесообразным получение независимых от выбора системы координат и удобных для реализации в пакетах компьютерной алгебры алгоритмов описания поворота твердого тела относительно оси произвольного положения.

3. Результат обзора позволяет сделать вывод о целесообразности создания универсальных математических методов для аналитического описания сложных геометрических объектов и их преобразований в основе которых лежит выполнение требований независимости от выбора системы координат и совместимости с существующими аналитическими представлениями объектов. Именно такие методы позволят осуществить компьютерное моделирование преобразований сложных геометрических объектов в пакетах компьютерной алгебры.

2. КОМПЛЕКС УНИВЕРСАЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Во второй главе диссертационной работы разрабатываются аналитические методы для выбранной группы геометрических преобразований. При этом для задания геометрических объектов и их преобразований используется векторное представление, не зависящее от выбранного координатного базиса, на всей стадии решения. Такое представление можно назвать инвариантным. Понятие инвариантности базируется на концепции Ф.Клейна, как свойстве некоторого класса математических объектов, остающихся неизменными при преобразованиях, и на принципе инвариантности геометрических понятий Г.Ф.Лаптева, как связи геометрических понятий с рассматриваемой фигурой, полностью определяемые фигурой и не зависящие от способа ее задания. Формальным инструментом для построения математических моделей являются векторы и кватернионы, как объекты, позволяющие осуществлять алгебраические преобразования, сохраняя принцип инвариантности геометрических понятий [16,17]. Основными компонентами решения являются алгебраический подход к решению векторных уравнений, включая дифференциальные и аналитический метод построения кривых и поверхностей.

Выводятся аналитические методы геометрического моделирования: гладкого сопряжения кривых и поверхностей; поворота геометрического объекта вокруг оси, проходящей через произвольную точку пространства; линейной перспективы одномерных и двумерных объектов для произвольного задания центра перспективы и плоскости проецирования; непрерывной интерполяции кватернионов, а также комплекс программ, реализующий разработанные универсальные методы.

2.1. Метод гладкого сопряжения кривых и плоскостей

Многообразие форм аналитических поверхностей [2,7] позволяет решать различные задачи геометрического моделирования в графическом дизайне [27], архитектурно-строительной сфере [8,28], судо- и авиастроении [29-32], машиностроении [4,12]. Расширению возможности аналитических методов задания поверхностей в задачах формообразования может способствовать гладкое сопряжение плоскостей. Гладкое сопряжение с использованием примитивов в качестве инструмента сглаживания или скругления постоянного/переменного радиуса эффективно применяется в САД-системах [4]

Алгоритм гладкого сопряжения плоскостей при разработке системы компьютерного моделирования машиностроительных деталей на базе использования метода Безье для представления кривых и поверхностей в параметрическом виде рассмотрен в работах [3,5,14]. Базовые критерии оценки качества функциональных поверхностей изделия и схема моделирования кривой высокого качества (плавной кривой) разрабатывались в работе [33]. В работе [3] получена поверхность сопряжения двух пересекающихся плоскостей в форме части цилиндрической поверхности, при этом не исследовался вопрос кривизны и степени ее гладкости.

Рассмотрим аналитический метод гладкого сопряжения плоскостей на примере сопряжения двух пересекающихся плоскостей, произвольно ориентированных в пространстве, что позволяет получить поверхность сопряжения в аналитическом виде с заданным порядком гладкости [34].

На первом этапе решения задачи введем в рассмотрение две плоскости S_1 и S_2 , которые заданы своими нормальными единичными векторами $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ и радиус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ фиксированных точек $M_1 \in S_1$ и $M_2 \in S_2$ (рис.2.1)

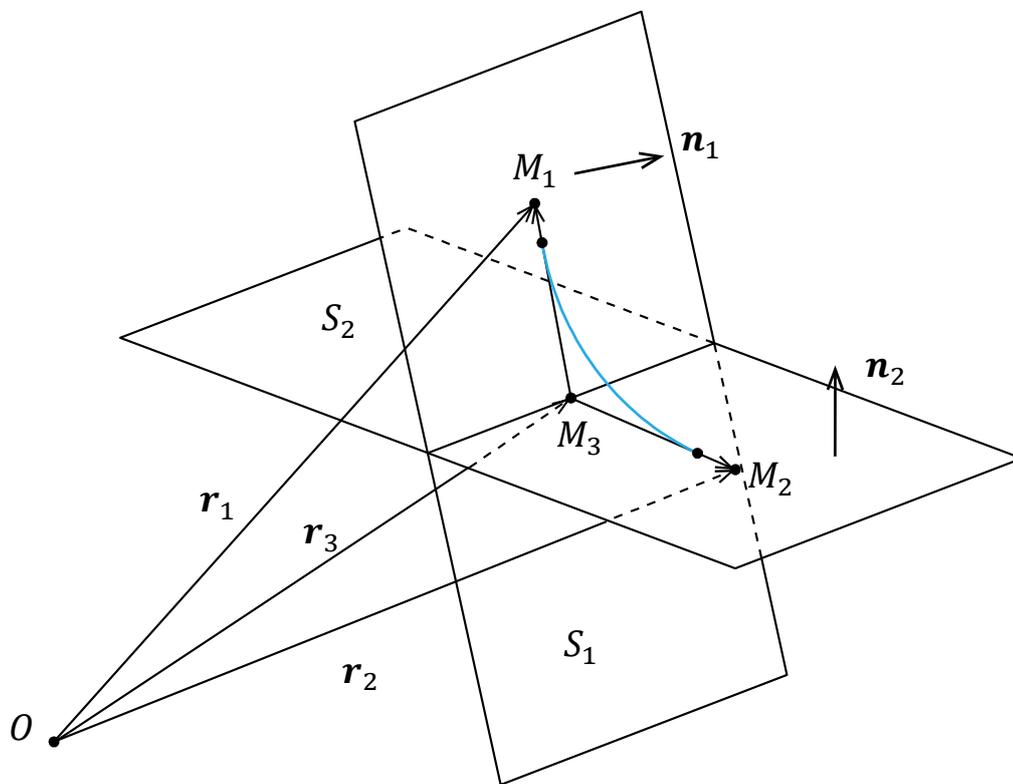


Рисунок 2.1. Базовая линия сопряжения двух плоскостей

Аналитическая запись линии пересечения плоскостей может быть представлена системой векторных уравнений

$$\begin{cases} S_1: (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ S_2: (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Первый шаг процедуры решения поставленной задачи заключается в получении линии пересечения плоскостей в параметрической форме.

Уравнение линии пересечения плоскостей L ищется в следующей параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + t \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|} \text{ или } \mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + t\mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}, \quad (2.1.2)$$

где \mathbf{r}_3 – радиус-вектор точки на прямой L , \mathbf{l} – единичный вектор этой прямой.

На следующем шаге находится положение такой точки M_3 , которая лежит на пересечении прямой L с перпендикулярно расположенной к ней прямой, лежащей в плоскости S_1 и проходящей через точку M_1 . Положение этой точки может быть найдено путем решения системы следующих уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2), \end{cases} \quad (2.1.3)$$

где ρ – параметр системы

Первое уравнение задает плоскость S_2 , а второе уравнение задает прямую в параметрической форме, проходящую через точку M_1 , лежащую в плоскости S_1 и перпендикулярную L .

Подставим в систему (2.1.3) радиус-вектор точки M_3 .

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2). \end{cases}$$

Исключая из этой системы вектор \mathbf{r}_3 , находим значение параметра ρ

$$\begin{cases} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \\ (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{r}_1 + \rho \mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_2}{(\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)) \cdot \mathbf{n}_2}.$$

Подставляя найденное значение параметра ρ во второе равенство системы (2.1.3), находим положение точки M_3

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_2}{[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)] \cdot \mathbf{n}_2} [\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)]. \quad (2.1.4)$$

С использованием тождества $[\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)] \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - 1$, которое вытекает из правила вычисления двойного векторного произведения, формула (2.1.4) преобразуется к виду

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_2}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - 1} [\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)].$$

Подстановка полученного значения \mathbf{r}_3 в формулу (2.1.2) дает уравнение линии пересечения плоскостей S_1 и S_2 в инвариантной параметрической форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}_2}{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - 1} [\mathbf{n}_1 \times (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2)] + t \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}. \quad (2.1.5)$$

При этом знаменатель $(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2 - 1$ обращается в ноль, когда плоскости параллельны.

Дальнейшее решение задачи гладкого сопряжения плоскостей заключается в нахождении лучей L_1 и L_2 . Лучи L_1 и L_2 исходят из точки M_3 , лежат в плоскостях S_1 и S_2 и перпендикулярны к прямой L

$$L_1: \mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + t(\mathbf{l} \times \mathbf{n}_1),$$

$$L_2: \mathbf{r} = \mathbf{r}_3 + t(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}).$$

Далее на лучах L_1 и L_2 выбираются точки на расстояниях d_1 и d_2 от линии пересечения плоскостей. Их положение при этом определяется равенствами

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}_3 + d_1(\mathbf{l} \times \mathbf{n}_1),$$

$$\mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}_3 + d_2(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{l}).$$

Гладкое сопряжение лучей L_1 и L_2 осуществляется с помощью векторного полинома пятой степени

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}u^5 + \mathbf{b}u^4 + \mathbf{c}u^3 + \mathbf{d}u^2 + \mathbf{e}u + \mathbf{f}, u \in [0,1]. \quad (2.1.6)$$

Степень полинома выбирается из условий обеспечения гладкого сопряжения лучей L_1 и L_2 , при котором выполняются следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u)|_{u=0} = \mathbf{r}^{(1)}, \quad \left. \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \right|_{u=0} = \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}), \quad \left. \frac{d^2\mathbf{r}(u)}{du^2} \right|_{u=0} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}(u)|_{u=1} = \mathbf{r}^{(2)}, \quad \left. \frac{d\mathbf{r}(u)}{du} \right|_{u=1} = \beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3), \quad \left. \frac{d^2\mathbf{r}(u)}{du^2} \right|_{u=1} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

где α и β - корректирующие параметры.

Подстановка векторного полинома (2.1.6) в краевые условия приводит к следующей системе линейных уравнений с векторными неизвестными

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f} = \mathbf{r}^{(1)}, \\ \mathbf{e} = \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}), \\ \mathbf{d} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{e} + \mathbf{f} = \mathbf{r}^{(2)}, \\ 5\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 3\mathbf{c} + \mathbf{e} = \beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3), \\ 20\mathbf{a} + 12\mathbf{b} + 6\mathbf{c} = \mathbf{0}. \end{array} \right.$$

Эта система сводится к матричному уравнению относительно трёх неизвестных векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 20 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(2)} - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) - \mathbf{r}^{(1)} \\ \beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3) - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы в инвариантной форме записывается равенством

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0,5 \\ -15 & 7 & -1 \\ 10 & -4 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}^{(2)} - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) - \mathbf{r}^{(1)} \\ \beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3) - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\mathbf{a} = 6(\mathbf{r}^{(2)} - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) - \mathbf{r}^{(1)}) - 3(\beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3) - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)})),$$

$$\mathbf{b} = -15(\mathbf{r}^{(2)} - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) - \mathbf{r}^{(1)}) + 7(\beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3) - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)})),$$

$$\mathbf{c} = 10(\mathbf{r}^{(2)} - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)}) - \mathbf{r}^{(1)}) - 4(\beta(\mathbf{r}^{(2)} - \mathbf{r}_3) - \alpha(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}^{(1)})).$$

Окончательно, поверхность, реализующая гладкое сопряжение плоскостей S_1 и S_2 , находится, как поверхность переноса с образующей в виде полинома пятой степени (2.1.6) и направляющим вектором \mathbf{l}

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u, v) &= \mathbf{a}u^5 + \mathbf{b}u^4 + \mathbf{c}u^3 + \mathbf{d}u^2 + \mathbf{e}u + \mathbf{f} + v\mathbf{l}, u \in [0,1], \\ v &\in [v_1, v_2]. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

В качестве примера рассматривается сопряжение, выполненное в системе компьютерной алгебры Mathcad, двух плоскостей (рис.2.2) .

$$\mathbf{n}_1 = \left\{ 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right\}, \mathbf{r}_1 = \{1, -1, 1\},$$

$$\mathbf{n}_2 = \left\{ 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3} \right\}, \mathbf{r}_2 = \{1, 1, 1\}$$

при значениях параметров $d_1 = 4, d_2 = 4, \alpha = 2, \beta = 2$.

По уравнению образующей кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}u^5 + \mathbf{b}u^4 + \mathbf{c}u^3 + \mathbf{d}u^2 + \mathbf{e}u + \mathbf{f}, u \in [0,1]$$

определяется кривизна на интервале сопряжения по формуле [5]

$$k(u) = \frac{|\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}''(u)|}{|\mathbf{r}'(u)|^3}, u \in [0,1].$$

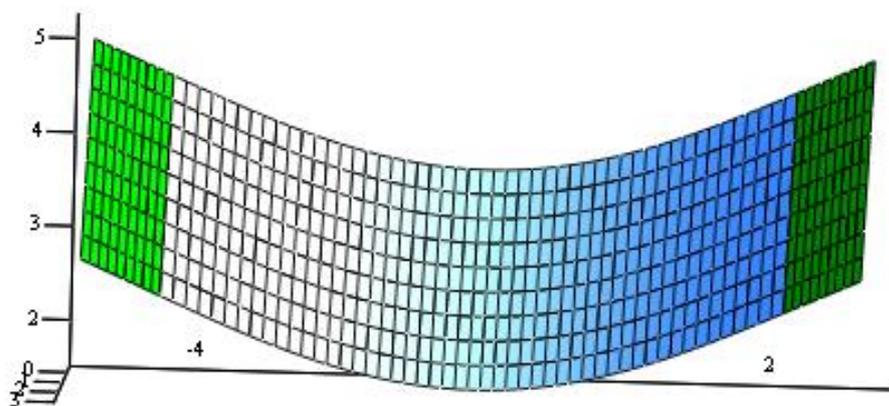


Рисунок 2.2. Поверхность гладкого сопряжения двух плоскостей, выполненная в системе компьютерной алгебры Mathcad

Как следует из графика изменения кривизны образующей кривой (рис. 2.3) при данных значениях корректирующих параметров α и β изменение кривизны образующей кривой происходит симметрично. Путем варьирования этих параметров изменение кривизны может быть реализовано по разным законам с учётом требуемых целей моделирования.

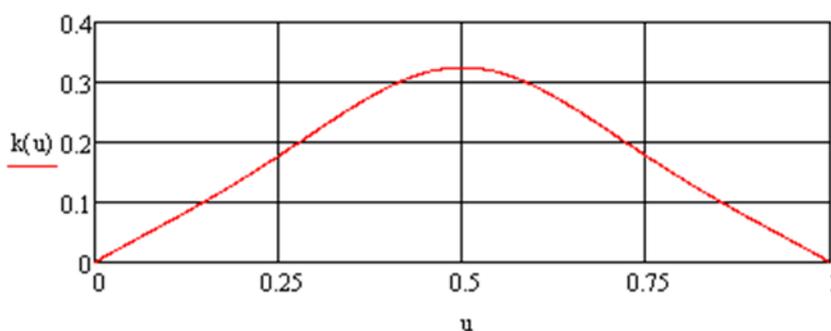


Рисунок 2.3. График изменения кривизны образующей кривой поверхности гладкого сопряжения, построенный в системе компьютерной алгебры Mathcad

2.2. Метод поворота геометрического объекта вокруг оси, проходящей через заданную точку пространства

Поворот или вращение трехмерного евклидова пространства вместе с параллельным переносом образуют так называемую подгруппу движения группы аффинных преобразований [35]. Математические алгоритмы преобразования поворота востребованы при решении различных задач динамики твердого тела [36], робототехники [37], мультипликации [38], твердотельного моделирования [39]. Для решения задач используются различные алгоритмы [40-43]. Так, поворот вокруг оси произвольным образом ориентированной в пространстве традиционно решается путем последовательного выполнения операций параллельного переноса и поворота вокруг координатных осей [1].

Рассмотрим обобщенный метод поворота вокруг оси с единичным направляющим вектором l , проходящей через заданную точку пространства M_1 [44]. При таком преобразовании все точки оси остаются неподвижными, а остальные точки поворачиваются в плоскостях перпендикулярных этой оси на один и тот же угол ϑ (рис.2. 4).

С учетом равенства $|CM| = |CM'|$ имеем

$$CM' = |CM| \cos \vartheta \frac{CM}{|CM|} + |CM| \sin \vartheta \frac{l \times CM}{|l \times CM|}$$

или

$$CM' = \cos \vartheta CM + \sin \vartheta (l \times CM). \quad (2.2.1)$$

Из геометрических соображений находим, что

$$CM = r - r_c, \quad CM' = r' - r_c \quad (2.2.2)$$

При этом

$$r_c = r_1 + \text{pr}_l(r - r_1)l = r_1 + ((r - r_1) \cdot l)l.$$

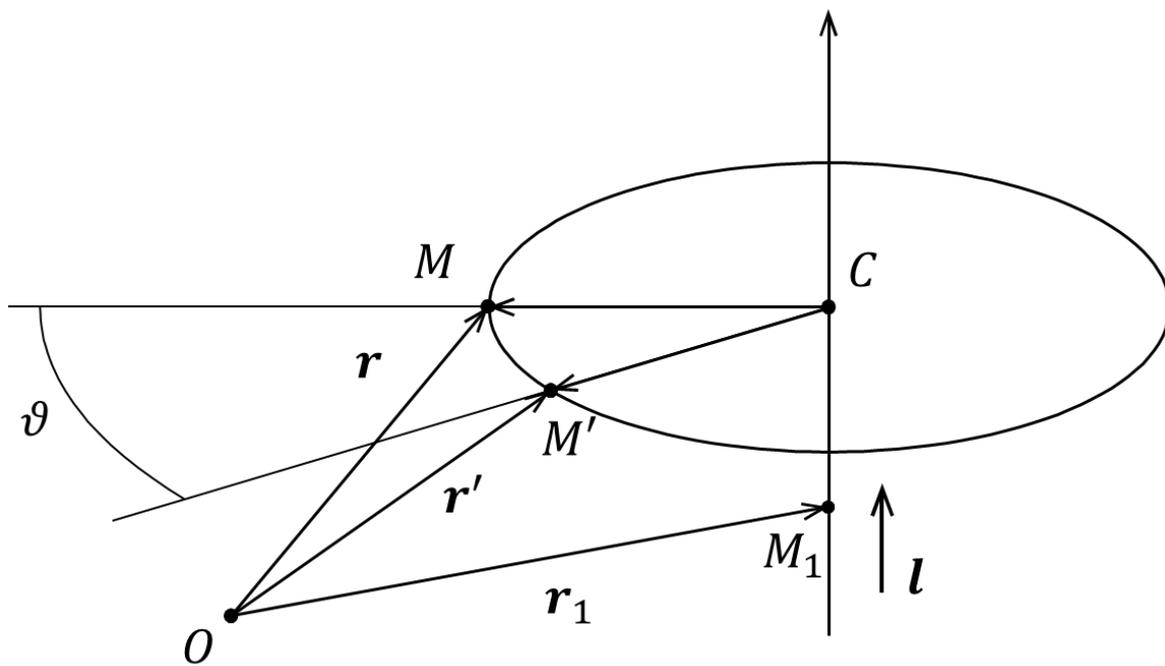


Рисунок 2.4. Схема поворота точки M евклидова пространства вокруг произвольной оси, с единичным направляющим вектором l , проходящей через точку M_1

Используя формулу для двойного векторного произведения находим, что

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)) \quad (2.2.3)$$

Подстановка соотношений (2.2.2) и (2.2.3) в равенство (2.2.1) дает

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (1 - \cos \vartheta) (\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1))) + \sin \vartheta (\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)). \quad (2.2.4)$$

Векторное произведение двух векторов можно записать как произведением кососимметрической матрицы и вектора [45]:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Вследствие этого, векторному равенству (2.2.4) соответствует операторная форма записи

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{L} \sin \vartheta + \mathbf{L}\mathbf{L}(1 - \cos \vartheta))(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (2.2.5)$$

где $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрическая матрица, определяемая единичным направляющим вектором оси поворота, $\{\mathbf{r}\} = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$.

Равенство (2.2.5) является обобщением формулы Родрига [22] поворота вокруг оси, проходящей через начало координат

$$\mathbf{r}' = \left(\mathbf{I} + (\mathbf{L} \sin \vartheta + \mathbf{L}\mathbf{L}(1 - \cos \vartheta)) \right) \mathbf{r}.$$

Векторное равенство (2.2.4) позволяет получить тензорное представление преобразования поворота относительно оси, проходящей через произвольную фиксированную точку. Для этого необходимо воспользоваться следующим представлением двойного векторного произведения в тензорной форме:

$$\mathbf{l} \times (\mathbf{l} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{l} \otimes \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r}l^2.$$

Подстановка этого выражения в равенство (2.2.4) дает

$$r' = r_1 + Q \cdot (r - r_1),$$

где Q – тензор конечного поворота, определяемый равенством [41]

$$Q = (1 - \cos \vartheta) l \otimes l + \cos \vartheta E + \sin \vartheta l \otimes E.$$

Преимущество метода, основанного на использовании формулы (2.2.5), в описании поворота трехмерного евклидова пространства по сравнению с имеющимися алгоритмами заключается в быстрой действии, уменьшении погрешности и в алгоритмическом удобстве при использовании в пакетах компьютерной алгебры.

Сравнительная эффективность алгоритма была выполнена на примере многократного выполнения поворота точки $M(0,1000,0)$ на угол $\frac{\pi}{3}$ вокруг оси, заданной единичным вектором $l = \left\{ \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}, \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}, \frac{l}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \right\}$ и проходящей через точку $M_1(0,1,0)$. Параметрам h, k, l , определяющим положение оси, приданы значения $h = 0,01; k = 1; l = 0,02$.

Численный эксперимент, выполненный в математическом пакете Mathematica 7, показал, что при 10000 запусках вычисления путем последовательного выполнения операций методом работы [1] заняли 1,591 секунд с результатом $M'(-12,3064; 999,75; 15,6344)$. При том же количестве запусков вычисления по формуле (1.2.5) заняли 0,681 секунд с результатом $M'(-12,3064; 999,75; 15,6344)$. При использовании встроенной функции RotationTransform пакета Mathematica 7 время счета составило 17,971 секунд. Эти результаты показывают высокую эффективность предложенного инвариантного метода поворота трехмерного евклидова пространства вокруг произвольной оси.

2.3. Метод построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов

Перспектива – это система изображения объемных объектов на плоскости или какой-либо иной поверхности, учитывающая их пространственную структуру и удаленность отдельных их частей от наблюдателя. Перспективное изображение предмета на плоскости называется линейной перспективой, на внутренней поверхности цилиндра – панорамной, на внутренней поверхности сферы – купольной. Для получения перспективного изображения какого-либо предмета проводят из выбранной точки пространства (центра перспективы) лучи ко всем точкам данного предмета. На пути лучей ставят ту поверхность, на которой желают получить изображение. В пересечении проведенных лучей с поверхностью получают искомое изображение [46].

Строгое решение задачи о построении линейной перспективы востребовано при решении различных задач, связанных с проблемами компьютерного зрения и визуализации [47], а также при дешифровке изображений [48].

Перспективный способ изображения фигур основан на применении метода центрального проецирования, алгоритм которого может быть представлен в аналитической форме. Для формализации задачи нахождения центральной проекции точки на плоскость зададим центр проецирования в точке M_1 , произвольную фиксированную точку M_2 , плоскость S с нормальным вектором \mathbf{n} и проходящую через точку M_3 . Требуется найти центральную проекцию точки M_2 на заданную плоскость (рис. 2.5).

Положение проекции определяется как точка M пересечения прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 , с плоскостью S

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \\ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{n} - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}$$
$$\Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

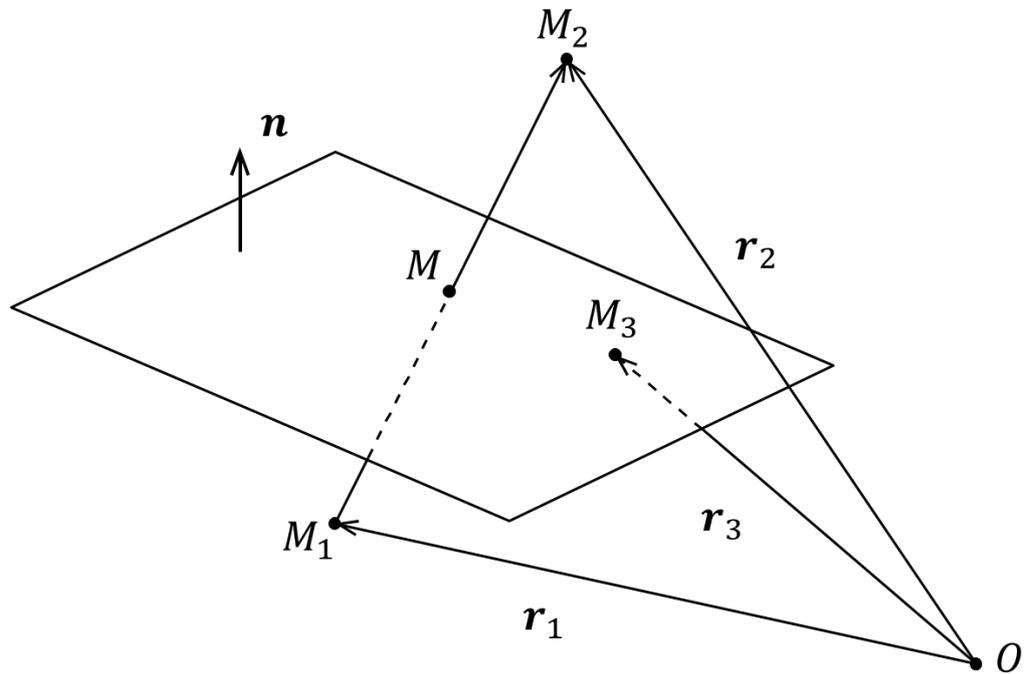


Рисунок 2.5. Схема центральной проекции точки на плоскость

Пусть линия задана параметрическим уравнением $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u)$, тогда ее центральная проекция на плоскость определяется равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1). \quad (2.3.1)$$

Пусть поверхность задана параметрическим уравнением $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(u, v)$, тогда ее центральная проекция на плоскость в инвариантной форме определяется равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \frac{(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}}{(\mathbf{r}_2(u, v) - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{n}} (\mathbf{r}_2(u, v) - \mathbf{r}_1).$$

Для построения линейной перспективы вводится вертикальная плоскость, которая называется картинной. Наблюдатель располагается перед картинной плоскостью. Перспективное изображение отображает части предмета, которые

расположены за картинной плоскостью. Получаемые перспективные изображения на картинной плоскости находятся выше так называемой линии горизонта, получаемой пересечением картинной плоскости и горизонтальной плоскости, проходящей через центр перспективы [46].

Совместим картинную плоскость $Oy'z'$ с плоскостью Oyz как указано на рис.2.5. Далее, помещаем наблюдателя в точку M^* перед картинной плоскостью и используем инвариантную формулу (2.3.1) для нахождения центральной проекции точки на плоскость при следующих условиях и обозначениях

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^*, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}'.$$

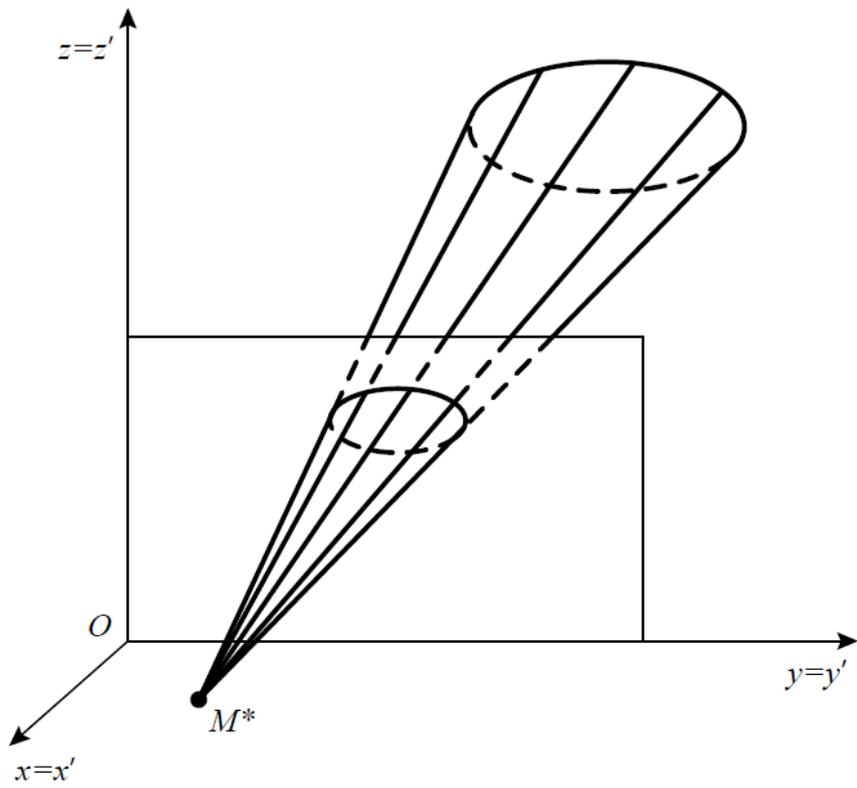


Рисунок 2.6. Построение линейной перспективы

Тогда, центральная проекция геометрических объектов на картинную плоскость, дающая перспективное изображение, находится с помощью следующего равенства

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}^* - \frac{\mathbf{r}^* \cdot \mathbf{i}}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}^*) \cdot \mathbf{i}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}^*), \quad (2.3.2)$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор проецируемой точки предмета, $\mathbf{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$ – радиус-вектор точки зрения.

Уравнению (2.3.2) соответствует следующая координатная форма записи:

$$\begin{aligned} x' &= x^* - \frac{x^*}{x - x^*} (x - x^*) = 0, \\ y' &= y^* - \frac{x^*}{x - x^*} (y - y^*), \\ z' &= z^* - \frac{x^*}{x - x^*} (z - z^*). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

В качестве примера найдем перспективное изображение спирали на картинной плоскости, проходящей через начало координат, при наблюдении из точки $M^*(\boldsymbol{\pi}; \mathbf{2}; \mathbf{0}, \mathbf{5})$. Спираль моделируется винтовой линией, накручивающейся на каналовую поверхность эллиптического сечения, когда ось каналовой поверхности является параболой. Уравнение спирали в этом случае задается уравнениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_H(t) + a \cos \omega t \mathbf{n}(t) + b \sin \omega t \mathbf{b}(t), \quad \mathbf{r}_H(t) = \begin{pmatrix} -pt^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t > 0.$$

Здесь $\mathbf{r}_H(t)$ – радиус-вектор точек направляющей параболы,

$\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)$ – единичные векторы нормали и бинормали к направляющей кривой,

a и b – полуоси эллиптического сечения поверхности намотки,

ω – параметр намотки,

p – параметр направляющей параболы.

С учетом формул для вычисления единичных векторов касательной $\boldsymbol{\tau}$, нормали \boldsymbol{n} и бинормали \boldsymbol{b}

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_H/dt}{|d\mathbf{r}_H/dt|}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{\tau}/dt}{|d\boldsymbol{\tau}/dt|}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n},$$

находим

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_H/dt}{|d\mathbf{r}_H/dt|} = \frac{1}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \begin{pmatrix} -2pt \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2pt \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение спирали записывается формулой:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -pt^2 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t \begin{pmatrix} 1 \\ 2pt \\ 0 \end{pmatrix} + b \sin \omega t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -pt^2 + \frac{a}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t \\ 2pt + \frac{2atp}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t \\ -b \sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Для получения перспективного изображения необходимо воспользоваться формулами (2.3.3). Математическая модель перспективного изображения спирали записывается равенствами:

$$x' = 0$$

$$y' = y^* - \frac{x^*}{-pt^2 + \frac{a}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t - x^*} \left(t + \frac{2atp}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t - y^* \right),$$

$$z' = z^* - \frac{x^*}{-pt^2 + \frac{a}{\sqrt{1+4p^2t^2}} \cos \omega t - x^*} (-b \sin \omega t - z^*).$$

Здесь координаты x^*, y^*, z^* - определяют положение наблюдателя в системе координат $Oxyz$.

На рисунке 2.7 показана спираль с параболической направляющей в перспективном изображении.

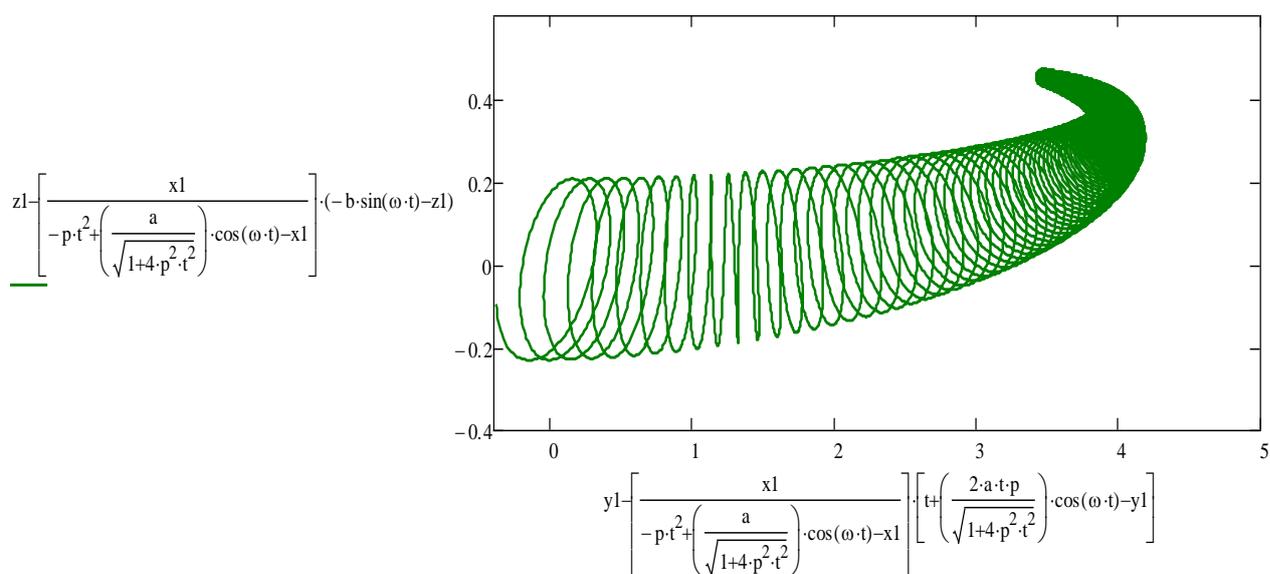


Рисунок 2.7. Перспективное изображение спирали, выполнено в системе компьютерной алгебры Mathcad

2.4. Метод описания плавного сферического движения твердого тела на основе алгебры кватернионов

Многие задачи управления движением и навигации [49], робототехники [50] и компьютерной графики [51] связаны с описанием вращения твердого тела в трехмерном пространстве. Как известно, конфигурационным пространством этого вращения является группа Ли $SO(3)$. Положение твердого тела может быть однозначно определено с помощью системы гиперкомплексных чисел – кватернионов $\mathbf{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$ с единичной нормой $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, которые образуют группу $Sp(1)$ ($SO(3) \approx Sp(1) / \pm 1$) [36,52-54]. При этом

трехмерная сфера единичного радиуса S^3 двулистным образом покрывает группу $SO(3)$ – кватернионам $\lambda^{(i)}$ и $-\lambda^{(i)}$ соответствует один и тот же элемент из $SO(3)$ [36,52]. Наглядной иллюстрацией этого служит получение плотности совместного распределения углов Эйлера при равновероятном вращении твердого тела и равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы, выполненное в работе [55].

Единичные кватернионы можно рассматривать как четырехмерные векторы, задающие положение точки на трехмерной единичной гиперсфере S^3 в четырехмерном пространстве. Это позволяет применять инвариантные методы задания сферического движения твердого тела и решать задачи поиска его оптимальных траекторий в ориентационном пространстве.

Так как множество случайных равновероятных вращений может быть представлено множеством точек случайным образом равномерно распределенных на поверхности трехмерной гиперсферы, то возможно перейти к равномерному дискретному распределению точек на гиперсфере, и, как следствие, равномерному дискретному заполнению пространства вращений – ориентационного пространства. Для этого могут быть использованы правильные четырехмерные центросимметричные многогранники. Вершины этих многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса, дадут дискретное равномерное распределение точек на гиперсфере и, соответственно, дискретный набор ориентаций, соответствующий равномерному заполнению пространства ориентаций.

При выполнении упорядочения вершин четырехмерных многогранников открывается путь к построению кратчайшей траектории в виде дуг большого радиуса, соединяющих эти вершины на поверхности единичной гиперсферы.

Для построения закона плавного сферического движения по соответствующей траектории в работе используется гладкая нелинейная интерполяция кватернионов.

Существование равномерного распределения конечного числа точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве доказывается существованием пяти центросимметричных правильных четырехмерных многогранников, вписанных в трехмерную гиперсферу единичного радиуса. Этими многогранниками являются: тессеракт (16), шестнадцатичейник (8), двадцатичетырехчейник (24), шестидесятичейник (600), шестисотичейник (120). В скобках указано количество вершин.

При этом необходимо принимать во внимание и факт двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$ и свойство симметрии четырехмерных многогранников.

Таким образом для моделирования дискретного набора ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, могут быть использованы вершины пяти правильных четырехмерных многогранников в совокупности с процедурой отбрасывания половины вершин по условию тождественности кватернионов с координатами $\{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ и $\{-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3\}$.

В качестве примера дискретного заполнения ориентационного пространства выбраны ориентации, соответствующие вершинам двадцатичетырехчейника с координатами $\{\pm 1, 0, 0, 0\}$, $\{0, \pm 1, 0, 0\}$, $\{0, 0, \pm 1, 0\}$, $\{0, 0, 0, \pm 1\}$, $\{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\}$ [56]. После отбрасывания зеркально симметричных вершин остаются двенадцать вершин и находятся соответствующие единичные кватернионы: $1 - \lambda^{(1)} = \{1, 0, 0, 0\}$, $2 - \lambda^{(2)} = \{0, 1, 0, 0\}$, $3 - \lambda^{(3)} = \{0, 0, 1, 0\}$, $4 - \lambda^{(4)} = \{0, 0, 0, 1\}$, $5 - \lambda^{(5)} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $6 - \lambda^{(6)} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $7 - \lambda^{(7)} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $8 - \lambda^{(8)} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, $9 - \lambda^{(9)} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$, $10 - \lambda^{(10)} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, $11 - \lambda^{(11)} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$, $12 - \lambda^{(12)} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$.

Для упорядочения ориентаций, задаваемых этими кватернионами, определим угловые расстояния (табл. 1), задаваемые равенством

$$\vartheta_{ij} = \arccos(\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)}),$$

где $\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)} = \lambda_0^{(i)}\lambda_0^{(j)} + \lambda_1^{(i)}\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(i)}\lambda_2^{(j)} + \lambda_3^{(i)}\lambda_3^{(j)}$ - скалярное произведение кватернионов.

Таблица 1. Угловые расстояния ϑ_{ij} между дискретными ориентациями

	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$	$\lambda^{(7)}$	$\lambda^{(8)}$	$\lambda^{(9)}$	$\lambda^{(10)}$	$\lambda^{(11)}$	$\lambda^{(12)}$
$\lambda^{(1)}$	0											
$\lambda^{(2)}$	$\pi/2$	0										
$\lambda^{(3)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	0									
$\lambda^{(4)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0								
$\lambda^{(5)}$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	0							
$\lambda^{(6)}$	$\pi/2$	$2\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0						
$\lambda^{(7)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0					
$\lambda^{(8)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/2$	$\pi/2$	0				
$\lambda^{(9)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	0			
$\lambda^{(10)}$	$\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	0		
$\lambda^{(11)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	0	
$\lambda^{(12)}$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/3$	$\pi/3$	0

Из 39916800 маршрутов, соединяющих двенадцать выбранных вершин двадцатичетырехячейника, можно отобрать двенадцать кратчайших. В дальнейшем используется маршрут

$$1 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 4.$$

Как видно из таблицы 1, угловое расстояние между вершинами и соответствующими кватернионами в этом случае одинаковое и равно $\pi/3$.

Построение кратчайшей траектории в пространстве ориентаций осуществим набором дуг большого радиуса на поверхности единичной гиперсферы, соединяющих точки (i) и (j) . Для построения закона плавного сферического движения по соответствующей траектории выведем гладкую нелинейную интерполяцию кватернионов, которая является обобщением метода сферической линейной интерполяции (slerp) [57]

$$\lambda(t) = \frac{\sin[\vartheta_{ij}(1-f(t))]}{\sin \vartheta_{ij}} \lambda^{(i)} + \frac{\sin[\vartheta_{ij}f(t)]}{\sin \vartheta_{ij}} \lambda^{(j)}, 0 \leq t \leq T. \quad (2.4.1)$$

Здесь $\lambda(t)$ - единичные кватернионы, соответствующие точка дуги большого круга на поверхности единичной гиперсферы, которая соединяет точки (i) и (j) , T - временной интервал перемещения, $f(t)$ - весовая функция изменения угла между начальным и промежуточным кватернионом (рис. 2.8).

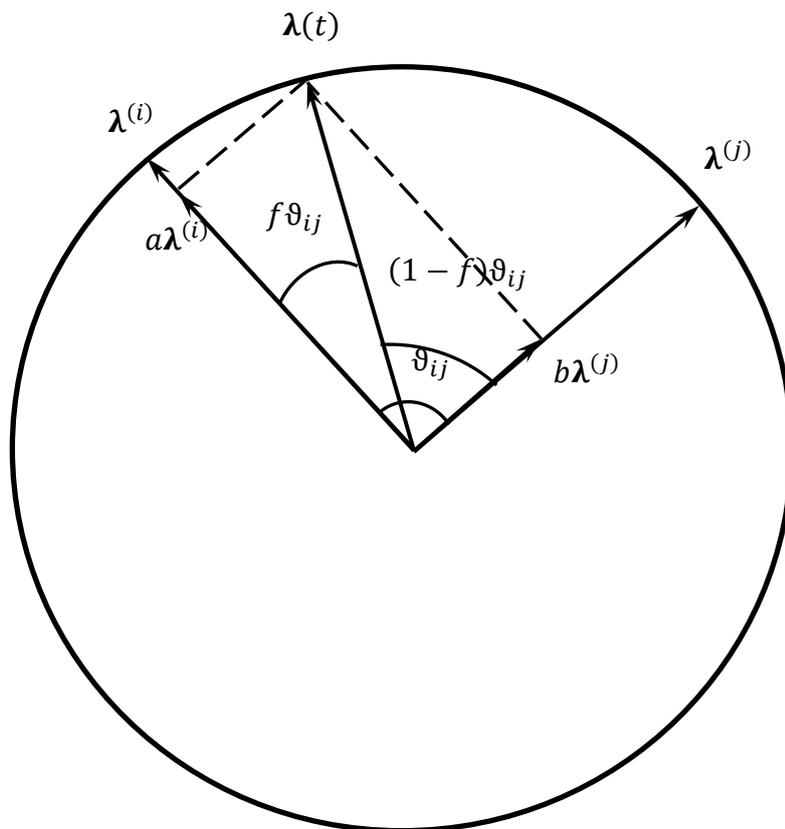


Рисунок 2.8. Условная схема интерполяции двух кватернионов точками дуги большого круга на единичной гиперсфере

На рисунке 2.8 дана геометрическая интерпретация формулы (2.4.1) суммы двух кватернионов с весовыми коэффициентами a и b :

$$a\lambda^{(i)} + b\lambda^{(j)} = \lambda.$$

Помножим обе части равенства на $\lambda^{(i)}$, затем на $\lambda^{(j)}$ и получим систему уравнений для определения весовых коэффициентов:

$$\begin{cases} a\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(i)} + b\lambda^{(j)} \cdot \lambda^{(i)} = \lambda \cdot \lambda^{(i)}, \\ a\lambda^{(i)} \cdot \lambda^{(j)} + b\lambda^{(j)} \cdot \lambda^{(j)} = \lambda \cdot \lambda^{(j)}. \end{cases}$$

По свойству скалярного умножения получаем

$$\begin{cases} a + b \cos \vartheta_{ij} = \cos f \vartheta_{ij}, \\ a \cos \vartheta_{ij} + b = \cos(1 - f) \vartheta_{ij}, \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a + b \cos \vartheta_{ij} = \cos f \vartheta_{ij}, \\ a \cos \vartheta_{ij} + b = \cos \vartheta_{ij} \cos f \vartheta_{ij} + \sin \vartheta_{ij} \sin f \vartheta_{ij}. \end{cases}$$

Для определения коэффициента b помножим первое равенство на $\cos \vartheta_{ij}$

$$\begin{cases} a \cos \vartheta_{ij} + b \cos^2 \vartheta_{ij} = \cos f \vartheta_{ij} \cos \vartheta_{ij}, \\ a \cos \vartheta_{ij} + b = \cos \vartheta_{ij} \cos f \vartheta_{ij} + \sin \vartheta_{ij} \sin f \vartheta_{ij}. \end{cases}$$

Вычтем из второго первое равенство и проведем преобразования:

$$\begin{aligned} b(1 - \cos^2 \vartheta_{ij}) &= \sin \vartheta_{ij} \sin f \vartheta_{ij} \Rightarrow b \sin^2 \vartheta_{ij} = \sin \vartheta_{ij} \sin f \vartheta_{ij} \Rightarrow b \sin \vartheta_{ij} \\ &= \sin f \vartheta_{ij}. \end{aligned}$$

Откуда

$$b = \frac{\sin f \vartheta_{ij}}{\sin \vartheta_{ij}}.$$

Для определения коэффициента a подставим полученное выражение для коэффициента b в первое равенство исходной системы уравнений и преобразуем его следующим образом

$$a + \frac{\sin f \vartheta_{ij}}{\sin \vartheta_{ij}} \cos \vartheta_{ij} = \cos f \vartheta_{ij} \Rightarrow$$

$$a = \cos f \vartheta_{ij} - \frac{\sin f \vartheta_{ij}}{\sin \vartheta_{ij}} \cos \vartheta_{ij} \Rightarrow a = \frac{\cos f \vartheta_{ij} \sin \vartheta_{ij} - \sin f \vartheta_{ij} \cos \vartheta_{ij}}{\sin \vartheta_{ij}}.$$

В результате получаем

$$a = \frac{\sin(1 - f)\vartheta_{ij}}{\sin \vartheta_{ij}}$$

Весовая функция плавного пуска и торможения $f(t)$ является безразмерной и должна удовлетворять определенным краевым условиям

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0; \\ 1, & t = T. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Для многих приложений её вид может удовлетворять дополнительным требованиям плавного пуска и торможения объекта управления. Прогресс в развитии современных автоматизированных производств и робототехники во многом определяется техническими возможностями создания синхронного управления многопараметрическими механическими системами, осуществляющими рабочую фазу движения по программе пуск-разгон-торможение-остановка.

По мере совершенствования систем сенсорного контроля при создании управляемых многопараметрических механических систем будут усиливаться бионические принципы.

Очевидно, что минимизация энергетических затрат в модели бионической робототехники должна обеспечиваться плавностью движения – «...движение, которому предоставляется течь, как требует сама бионическая природа движущегося органа, оказывается особенно плавным, легким и хорошо оформленным» [58].

Интуитивно понятный термин – «плавность» требует формализации. Определим его следующим образом:

Цикл движения механической системы, начинающийся из состояния покоя и оканчивающийся покоем, называется плавным, если в начальный и конечный момент движения, скорости и ускорения точек системы равны нулю, а точки системы перемещаются по регулярным траекториям.

Попытки описать плавные движения в интуитивных понятиях биомеханики движений человеческого тела с учетом предметного опыта каллиграфического письма, танцевальных движений и техники мультипликации (inbetweening) [58-60] хорошо согласуются с этим определением.

При этом, если обеспечение плавности движения живых организмов осуществляется за счет «...синергии, охватывающей всю мускулатуру и весь двигательный аппарат сверху донизу» [58], то в технических системах плавность и синхронность движения может быть достигнута созданием специального закона кинематического управления, который реализуется за счет программной синхронной работы соответствующих сервоприводов.

Пусть задана механическая система, имеющая s степеней свободы. Положение системы в произвольный момент времени определяется вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$, задающим точку на траектории движения в соответствующем конфигурационном пространстве. Плавное перемещение системы на интервале $[0, T]$ из положения \mathbf{q}_0 в положение \mathbf{q}_T ищется в виде векторного закона движения, описываемого полиномом пятой степени

$$\mathbf{q} = \mathbf{a}t^5 + \mathbf{b}t^4 + \mathbf{c}t^3 + \mathbf{d}t^2 + \mathbf{e}t + \mathbf{f}, 0 \leq t \leq T,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ – векторы неопределенных коэффициентов.

С учетом определения плавного движения, векторы неопределенных коэффициентов находятся по краевым условиям (2.4.2)

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}_T, \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0}.$$

С учетом краевых условий

$$\mathbf{f} = \mathbf{q}_0, \mathbf{e} = \mathbf{0}, \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

$$\begin{cases} \mathbf{a}T^5 + \mathbf{b}T^4 + \mathbf{c}T^3 = \mathbf{q}_T - \mathbf{q}_0, \\ 5T^5\mathbf{a} + 4T^3\mathbf{b} + 3T^2\mathbf{c} = \mathbf{0}, \\ 20T^3\mathbf{a} + 12T^2\mathbf{b} + 6T\mathbf{c} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Решение системы уравнений для определения векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ записывается равенством

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^5 & T^4 & T^3 \\ 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 \\ 20T^3 & 12T^2 & 6T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_t - \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/T^5 & -3/T^4 & 1/2T^3 \\ -15/T^4 & 7/T^3 & -1/T^2 \\ 10/T^3 & -4/T^2 & 1/2T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_t - \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Закон синхронного плавного перемещения системы из начального положения в конечное положение принимает вид

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + (\mathbf{q}_T - \mathbf{q}_0)f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$f(t) = 6\left(\frac{t}{T}\right)^5 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 10\left(\frac{t}{T}\right)^3. \quad (2.4.3)$$

Найденная безразмерная функция плавного пуска и торможения (2.4.3) может быть использована в качестве весовой функции при сферической нелинейной интерполяции кватернионов. Тогда закон изменения угла ϑ между положением (i) и положением (j) кватерниона в предложенной сферической нелинейной интерполяции кватернионов (2.4.1) записывается равенством

$$\vartheta(t) = \vartheta_{ij}f(t) = \vartheta_{ij} \left(6\left(\frac{t}{T}\right)^5 - 15\left(\frac{t}{T}\right)^4 + 10\left(\frac{t}{T}\right)^3 \right).$$

Непосредственная проверка показывает, что в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ выполняются равенства:

$$\dot{\vartheta} = 0, \ddot{\vartheta} = 0.$$

Таким образом перемещение, описываемое сферической интерполяцией двух кватернионов $\lambda^{(i)}$ и $\lambda^{(j)}$, будет плавным.

Для описания непрерывного плавного движения воспользуемся оригинальным алгебраическим представлением функции Хевисайда «ступенька вверх, ступенька вниз» [61-67]

$$H_{ab}(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{t-a}{\sqrt{(t-a)^2}} \frac{b-t}{\sqrt{(b-t)^2}} \right] = \begin{cases} 0, & -\infty < t < a, \\ 1, & a < t < b, \\ 0, & b < t < +\infty. \end{cases}$$

С учетом введенного представления функции Хевисайда возможно представление одним аналитическим выражением кусочно-непрерывной функции $\lambda(t)$ на интервале $t \in [0, T]$ по значениям кватернионов $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_n \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ следующей интерполирующей функцией $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left[1 + \frac{t-t_k}{\sqrt{(t-t_k)^2}} \cdot \frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{(t_{k+1}-t)^2}} \right] \left\{ \frac{\sin[\vartheta_{k,k+1}(1-f_k(t))]}{\sin \vartheta_{k,k+1}} \lambda^{(k)} + \frac{\sin[\vartheta_{k,k+1}f_k(t)]}{\sin \vartheta_{k,k+1}} \lambda^{(k+1)} \right\}, \quad (2.4.4)$$

$$f_k(t) = 6 \left(\frac{t-t_k}{(t_{k+1}-t_k)^2} \right)^5 - 15 \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^4 + 10 \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} \right)^3.$$

Для удобства аналитического представления закона плавного движения твердого тела в ориентационном пространстве по кратчайшей траектории перенумеруем вершины двадцатичетырехячейника и соответствующие им кватернионы по правилу:

$$1 \leftrightarrow 0, 12 \leftrightarrow 1, 11 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 3, 8 \leftrightarrow 4, 10 \leftrightarrow 5,$$

$$2 \leftrightarrow 6, 7 \leftrightarrow 7, 9 \leftrightarrow 8, 6 \leftrightarrow 9, 5 \leftrightarrow 10, 4 \leftrightarrow 11.$$

Тогда на интервале $t \in [0, T]$ по значениям кватернионов $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t_k)$ в определенных узлах t_k сетки $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$ и построена следующая интерполирующая функция $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{11} \left[1 + \frac{t - t_k}{\sqrt{(t - t_k)^2}} \cdot \frac{t_{k+1} - t}{\sqrt{(t_{k+1} - t)^2}} \right] \left\{ \lambda^{(k)} \sin \left[\frac{\pi}{3} (1 - f_k(t)) \right] + \lambda^{(k+1)} \sin \left[\frac{\pi}{3} f_k(t) \right] \right\}.$$

Функциональная матрица поворота, записанная через координаты кватерниона (2.4.4), имеет вид [36]:

$$[R(t)] = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_2^2(t) - 2\lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 1 - 2\lambda_3^2(t) - 2\lambda_1^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) \\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t) - 2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t) + 2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & 1 - 2\lambda_1^2(t) - 2\lambda_2^2(t) \end{pmatrix}$$

и закон плавного перемещения точек твердого тела в пространстве ориентаций записывается матричным преобразованием

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t)\mathbf{r}_0,$$

где $\{\mathbf{r}_0\} = \{x_{01}, x_{02}, x_{03}\}^T$ – радиус-вектор положения точки тела до преобразования поворота.

Данное преобразование может быть также записано в кватернионной форме

$$\mathbf{r} = \lambda(t)\tilde{\mathbf{r}}_0\lambda^{-1}(t),$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \{0, x_0, y_0, z_0\}$ – конвертированный в кватернион радиус-вектор точки тела в начальном ее положении.

Предложенный метод описания плавного сферического движения по кратчайшей траектории иллюстрируется с помощью 3D-анимации, выполненной с использованием компьютерной программы Mathcad [68]. На рисунке 10 последовательно представлены дискретные ориентации твердого тела соответствующие значениям кватернионов $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)}(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_{11} \in \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{11} = T\}$.

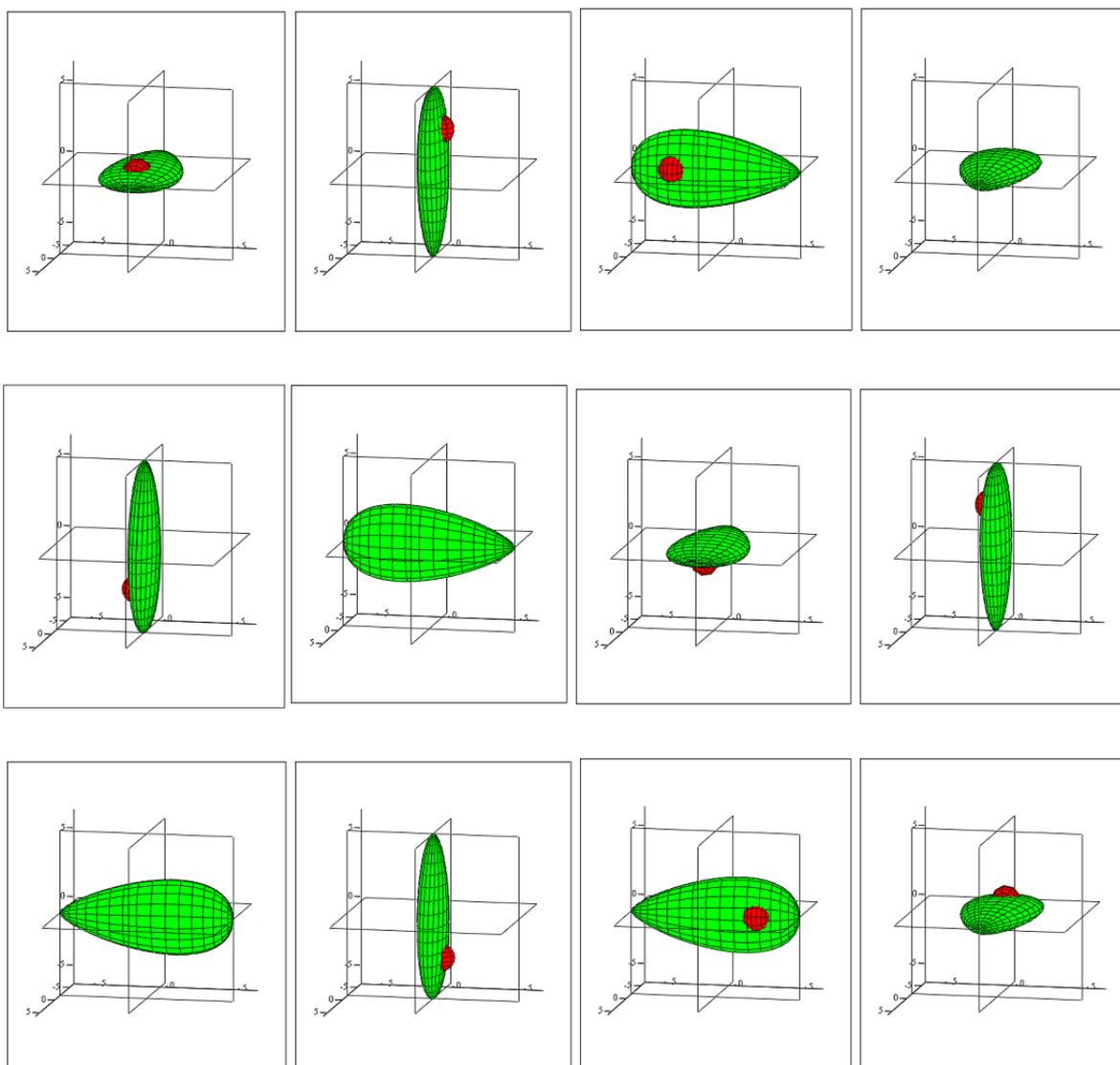


Рисунок 2.10. Кадры двенадцати ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, из анимации плавного движения по кратчайшей траектории [68]

Выводы по главе 2

1. Разработан новый математический метод моделирования гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей, реализуемый при помощи векторного полинома пятой степени при выполнении краевых условий специального вида. Метод иллюстрируется решением задачи гладкого сопряжения двух произвольным образом ориентированных плоскостей. Тестирование метода,

выполненное в пакете символьной математики Mathcad с помощью созданной программы компьютерного моделирования, демонстрирует адекватность предлагаемого подхода. В общей постановке метод может быть использован при проектировании корпусных деталей в машиностроительном производстве, а также фасадных систем в строительной практике.

2. Разработан векторно-матричный алгоритм построения линейной перспективы одномерных и двумерных геометрических объектов произвольного положения с произвольным выбором центра перспективы. Верификация метода выполнена с помощью созданной программы компьютерного моделирования для построения линейной перспективы спиральной кривой, наворачивающейся на каналовую поверхность эллиптического сечения, когда ось каналовой поверхности является параболой.

3. Разработан новый аналитический метод описания операции поворота геометрического объекта вокруг оси, проходящей через произвольную точку трехмерного пространства, и создана программа его реализующая. Эффективность оригинального алгоритма продемонстрирована в сравнении со стандартным алгоритмом поворота, реализующим данную процедуру в компьютерной программе Mathematica 7. Сравнение показало увеличение быстродействия в 11 раз.

4. Предложен новый метод описания плавного сферического движения твердого тела путем интерполяции кватернионов, задающих его дискретные повороты. Метод базируется на использовании полученной функции плавного пуска и торможения, представлении функции Хевисайда рациональными алгебраическими функциями и сферической нелинейной интерполяции кватернионов. Метод верифицируется созданной программой компьютерного моделирования анимации плавного сферического движения твердого тела по кратчайшей траектории через двенадцать узлов решетки на группе вращения $SO(3)$.

3. ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ И АРХИГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ФАСАДОВ

В третьей главе диссертационной работы демонстрируется применение разработанных математических моделей второй главы. Решаются задачи: формообразования оболочек высотных зданий и математического моделирования плоских фасадных изображений. На основе метода гладкого сопряжения, описанного во второй главе, выполняется моделирование оболочки высотного здания с вогнутым профилем и направляющей в виде полинома третьей степени. Предлагается архиграфическое решение средовых объектов с использованием полученного аналитического метода построения линейной перспективы.

3.1. Пример многопараметрического формообразования оболочек высотных зданий

В данном параграфе на примере проекта реконструкции Екатеринбургской телевизионной башни предлагается оригинальный метод формирования оболочки высотных зданий с вогнутым профилем на основе использования полиномиальной направляющей и концепции гладкого сопряжения плоскостей, предложенной во второй главе. При этом коэффициенты соответствующего полинома выражены через девять конструктивных параметров моделируемой оболочки башни.

Предварительно рассмотрен общий случай моделирования гладкого сопряжения поверхности вращения и поверхности переноса.

Пусть задан элемент поверхности переноса

$$\mathbf{r}_1 = \{R_1(z, \varphi) \cos \varphi, R_1(z, \varphi) \sin \varphi, z\}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq z_1$$

и элемент поверхности вращения

$$\mathbf{r}_2 = \{R_2(z) \cos \varphi, R_2(z) \sin \varphi, z\}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, z_1 \leq z \leq z_2.$$

Сопряжение элементов поверхностей $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(z, \varphi)$ и

$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(z, \varphi)$ осуществляется при выполнении условия

$$\mathbf{r}_1(z_1, \varphi) = \mathbf{r}_2(z_1, \varphi). \quad (3.1.1)$$

Сопряжение первого порядка гладкости обеспечивается при условии:

$$\left. \frac{\partial R_1}{\partial z} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{dR_2}{dz} \right|_{z=z_1}. \quad (3.1.2)$$

При выполнении дополнительного условия

$$\left. \frac{\partial^2 R_1}{\partial z^2} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{d^2 R_2}{dz^2} \right|_{z=z_1} \quad (3.1.3)$$

сопряжение поверхностей будет обладать свойством гладкости второго порядка.

Нетрудно убедиться, что эти условия выполняются, если функции $R_1(z, \varphi)$ и $R_2(z)$ заданы уравнениями:

$$R_1(z, \varphi) = -(R(z) - R(z_1))^n f(\varphi), \quad R_2(z) = R(z).$$

Здесь $R(z)$ – произвольная непрерывная дважды дифференцируемая функция. При $n = 1$ выполняется условие (3.1.1), при $n = 2$ выполняются условия (3.1.1) и (3.1.2), а при $n = 3$ выполняются условия (3.1.1) – (3.1.3).

Примером применения технологии математического дизайна при создании эскизных архитектурных проектов может служить реализация призового эскизного предложения реконструкции телевизионной башни г. Екатеринбурга (рис.3.1), выполненного в рамках Международного конкурса с участием более чем восьмидесяти ведущих зарубежных и Российских архитекторов.



Рисунок 3.1. Призовой проект реконструкции телебашни г. Екатеринбурга, 2013
ГОД

Концепция модели «Глобального маяка» включает создание узнаваемого образа традиционного маяка в виде ограниченной в основании конической башни с горловиной, несущей на своей вершине световое оборудование. Инструментами в ее создании вместо традиционного или виртуального карандаша являются аналитические выражения – формулы, которые связаны между собой в логической последовательности и формируют нужный образ.

Геометрической моделью высотного здания служит кинематическая поверхность заметания [2], образованная вертикальным движением непрерывно изменяющегося фигурного каркаса.

Возможности изменения этого каркаса, а также направляющей кривой, вдоль которой этот каркас движется, позволяет получать многообразие архитектурных форм, удовлетворяющих необходимым эстетическим и техническим требованиям.

С учетом целей редевелопмента башни в качестве образующей (фигурного каркаса) поверхности проектируемого здания выбрана плоская кривая, которая относится к классу – роза Гвидо Гранди [69].

Общее уравнение розы Гвидо Гранди в полярных координатах имеет вид:

$$r = R \sin \omega \varphi.$$

Задавая параметр $\omega = \frac{n}{d}$ (отношением натуральных чисел), можно получить замкнутые кривые, при определенных условиях превращающиеся в лепестковые цветы (рис.3.2) [70].

При моделировании формы башни было выбрано уравнение образующей в декартовых координатах [75]:

$$x(\varphi) = R(0) \sin^2(n\varphi) \cos \varphi,$$

$$y(\varphi) = R(0) \sin^2(n\varphi) \sin \varphi,$$

где $R(0)$ – максимальный радиус основания башни, n – количество граней

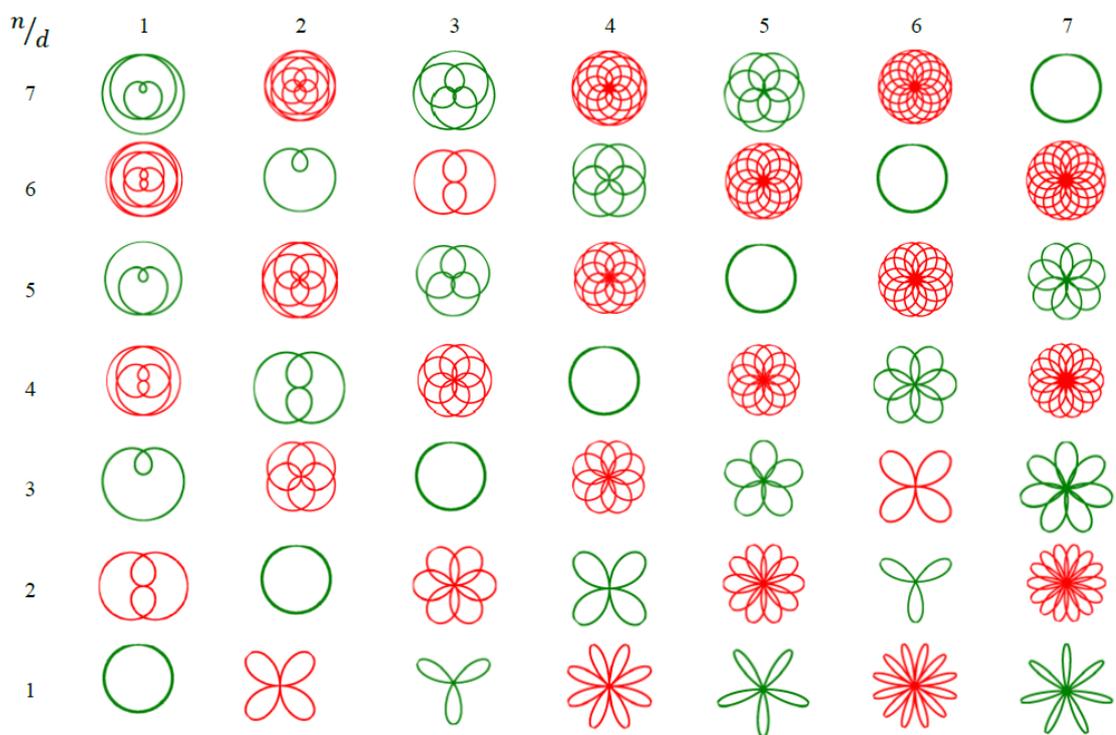


Рисунок 3.2. Разновидности плоских кривых класса – роза Гвидо Гранди в зависимости от параметра $\omega = \frac{n}{d}$, выполненная в системе компьютерной алгебры

Mathcad

Профиль башни задает вогнутая направляющая кривая, которая определяется полиномом третьей степени

$$R(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 – параметры математической модели, связанные с конструктивными параметрами башни следующими соотношениями:

$$a_0 = R(0),$$

$$a_0 + a_1H + a_2H^2 + a_3H^3 = R(H),$$

$$a_1 = -tg\gamma,$$

$$a_1 + 2a_2H_0 + 3a_3H_0^2 = 0.$$

Конструктивными параметрами Глобального маяка являются: 1. H – высота башни, 2. $R(0)$ – максимальный радиус основания, 3. n – количество граней, 4. $R(H)$ – радиус верхнего среза, 5. H_0 – высота до горловины, 6. γ – угол наклона касательной к образующей в основании башни. Для достижения требуемой архитектурной выразительности математическая модель дополняется параметром h – высотой плавного перехода от фигурного каркаса (7-ой конструктивный параметр), задающего форму горизонтального сечения башни, в окружность. Вводится так же параметр модели a – амплитуда волны фигурного профиля в основании башни (8-ой конструктивный параметр).

С учетом введенных параметров математической модели башни уравнения, задающие её поверхность, принимают вид:

$$x(z, t) = (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2(nt)) \cos t,$$

$$y(z, t) = (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2(nt)) \sin t, \quad 0 \leq z \leq h, 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$x(z, t) = R(z) \cos t,$$

$$y(z, t) = R(z) \sin t, \quad h \leq z \leq H, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Используя алгебраическое представление функции Хэвисайда [61], модель оболочки может быть представлена одним инвариантным равенством:

$$\mathbf{r}(z, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2}} \frac{(h-z)}{\sqrt{(h-z)^2}} \right) \mathbf{r}_1(z, t) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(z-h)}{\sqrt{(z-h)^2}} \frac{(H-z)}{\sqrt{(H-z)^2}} \right) \mathbf{r}_2(z, t),$$

где

$$\{\mathbf{r}_1(z, t)\} = \begin{pmatrix} (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2 nt) \cos t \\ (R(z) - a(R(z) - R(h)) \sin^2 nt) \sin t \\ z \end{pmatrix},$$

$$\{\mathbf{r}_2(z, t)\} = \begin{pmatrix} R(z) \cos t \\ R(z) \sin t \\ z \end{pmatrix}.$$

Введенные восемь параметров позволяют создать зрительный образ изящной конструкции, бережно наследующей (поглощающей) образ бывшей телебашни, удовлетворяющий необходимым эстетическим (образ маяка) и техническим требованиям.

Одним из современных специфических средств создания особой архитектурной выразительности при строительстве высотных зданий является придания им спиралевидной формы. При этом создается визуальный динамический эффект, ассоциирующийся в сознании наблюдателя с такими уникальными природными явлениями, как торнадо и тайфуны [71-73]. Дополняя математическую модель функцией $\gamma(z)$ – функцией изменения угла закручивания вокруг вертикальной оси, окончательное уравнение поверхности башни записываем равенством:

$$\mathbf{r}'(z, t) = \mathbf{T}(z)\mathbf{r}(z, t),$$

где

$$[\mathbf{T}(z)] = \begin{pmatrix} \cos \gamma(z) & -\sin \gamma(z) & 0 \\ \sin \gamma(z) & \cos \gamma(z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица торсионного преобразования [74].}$$

При постоянном погонном угле закручивания функция $\gamma(z)$ задается равенством $\gamma(z) = \frac{k\pi z}{H}$, где k – коэффициент закручивания (9-ый конструктивный параметр).

Выполнена визуализация оболочки башни (рис. 3.3) согласно предложенной математической модели при следующих конструктивных параметрах:

$$H = 220 \text{ м}; \quad R(0) = 45 \text{ м}; \quad n = 4; \quad R(H) = 15 \text{ м}; \quad H_0 = 100 \text{ м};$$
$$\gamma = \frac{\pi}{10}; \quad h = 0.6 \text{ м}; \quad a = 0,6; \quad k = 0,6.$$

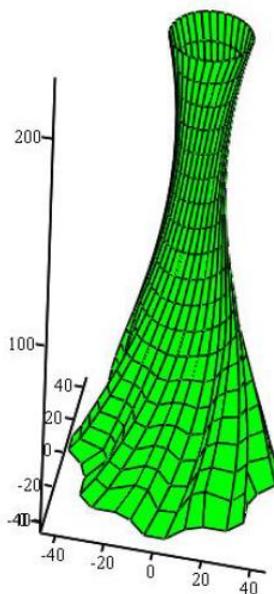


Рисунок 3.3. Визуализация математической модели оболочки башни, выполненная в системе компьютерной алгебры Mathcad

3.2. Пример моделирования архиграфического решения объектов городской среды

В данном параграфе с использованием аналитического метода построения линейной перспективы трехмерных объектов на произвольно расположенную плоскость получен алгоритм создания плоских фасадных изображений с объемными выразительными эффектами, что является новым средством математического дизайна – современного направления прикладной математики [76,77].

В качестве трехмерных объектов рассмотрим такие, которые можно получить с помощью суперпозиции линейчатых поверхностей.

Как известно, линейчатую поверхность можно классифицировать как кинематическую поверхность заметания, получаемую путем произвольного пространственного движения прямолинейной образующей [7]. Векторное уравнение линейчатой поверхности в параметрической форме имеет вид [11,82]

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}(u) + v \boldsymbol{\delta}(v).$$

Частным видом линейчатых поверхностей являются обобщенные цилиндры [79]

$$\mathbf{x}(u, v) = v \mathbf{p} + \mathbf{y}(u) \quad (\mathbf{y} \times \mathbf{p} \neq \mathbf{0}),$$

обобщенные конусы [80]

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{p} + v \mathbf{y}(u) \quad (v\mathbf{y} \times \mathbf{y}' \neq \mathbf{0}),$$

однополостные гиперболоиды [11,82]

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos u \\ b \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \pm v \begin{pmatrix} -a \sin u \\ b \cos u \\ c \end{pmatrix}$$

и гиперболические параболоиды (гипары) [11,82]

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} au \\ 0 \\ u^2 \end{pmatrix} \pm v \begin{pmatrix} a \\ \pm b \\ 2u \end{pmatrix}.$$

Линейчатые поверхности находят широкое применение в строительной практике. Наличие прямолинейной образующей позволяет создавать пространственные конструкции различных форм только с использованием

прямолинейных несущих элементов. Кроме того, наличие прямолинейной образующей предоставляет широкие возможности при решении технологических задач – формирование опалубки, если покрытие железобетонное, или изготовление непосредственно элементов конструкции, если она решетчатая. Методы геометрического моделирования пространственных строительных конструкций [11,81] могут быть с успехом распространены и на решение задач дизайна фронтонов современных зданий, которые в последние годы, благодаря современным технологиям проектирования и строительства, приобретают все более причудливые, но однотипные формы. Практически неисчерпаемых возможностей в придании зданиям уникального облика можно добиться их украшением путем архиграфического решения фасадов или созданием специальных структур остекления. Декоративные элементы могут создавать и объемную иллюзию в случае грамотного применения законов линейной перспективы. Перспективный способ изображения фигур основан на применении метода центрального проецирования, отличающимся хорошей наглядностью. Перспектива предмета соответствует (с некоторым приближением) тому, что видит человеческий глаз, т.е. она передает кажущиеся изменения величины и формы изображаемого предмета, вызванные его расположением и удаленностью от наблюдателя. Объясняется это тем, что процесс зрения в геометрическом отношении тождествен с операцией центрального проецирования.

Примером архиграфического решения фасадов с использованием линейной перспективы линейчатой поверхности служит оформление портика, создающего объемное его изображение, парадного подъезда здания Екатеринбургской городской думы (рис. 3.4). Примером структурного остекления с подчеркиванием реальной глубины фасада может служить здание торгового центра Массимилиано Фуксаса во Франкфурте (рис. 3.5).

Предлагается рассмотреть пример поэтапного создания архиграфического решения плоского фасада здания с использованием линейной перспективы велауроидальной поверхности, направляющими для которой служат отрезки,

ограничивающие фасад здания. Сам фасад при этом совпадает с картинной плоскостью линейной перспективы.

По классификации, представленной в работе [9], к велароидальным поверхностям относятся поверхности переноса на прямоугольном плане, получаемые движением образующей переменной кривизны. Класс велароидальных поверхностей был расширен путем включения поверхностей на произвольных планах, в частности, кольцевых [83,84]. Для формирования трехмерной модели изображения в дальнейшем используется линейчатая велароидальная поверхность, заданная следующими уравнениями в параметрической форме (рис.3.6) [85]:

$$\mathbf{r} = \left\{ d \left(1 - \frac{|u|}{a} \right) \left(1 - \frac{|v|}{b} \right), u, v \right\}, -a \leq u \leq a, -b \leq v \leq b. \quad (3.2.1)$$

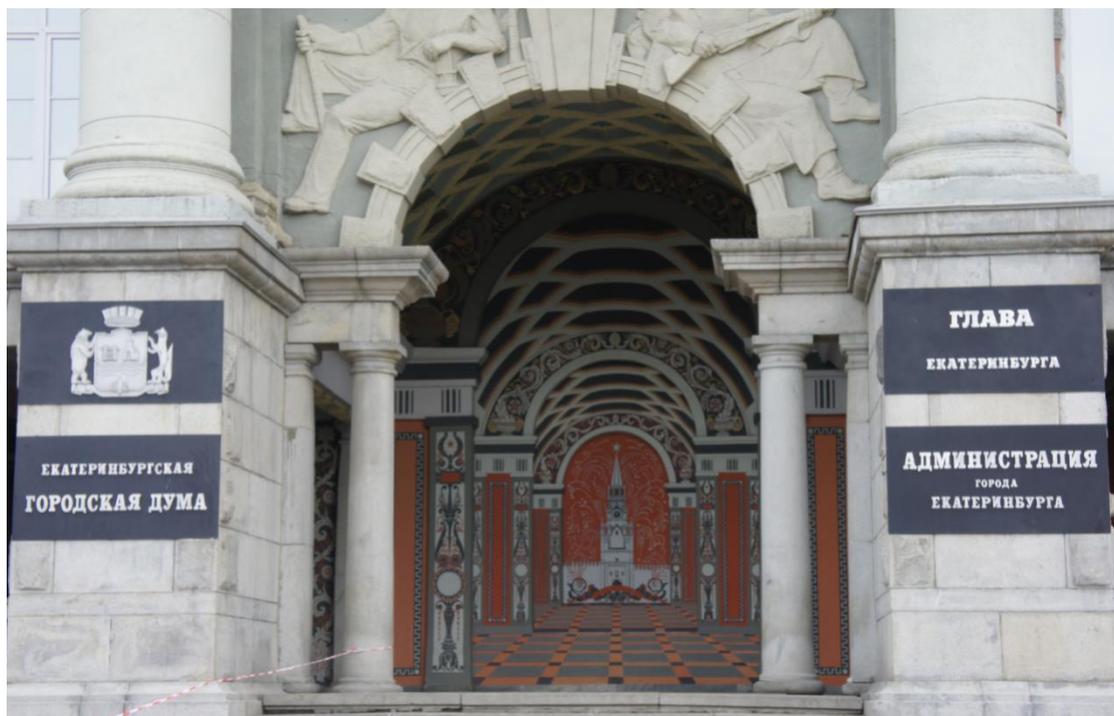


Рисунок 3.4. Оформление портика парадного подъезда здания Екатеринбургской городской думы

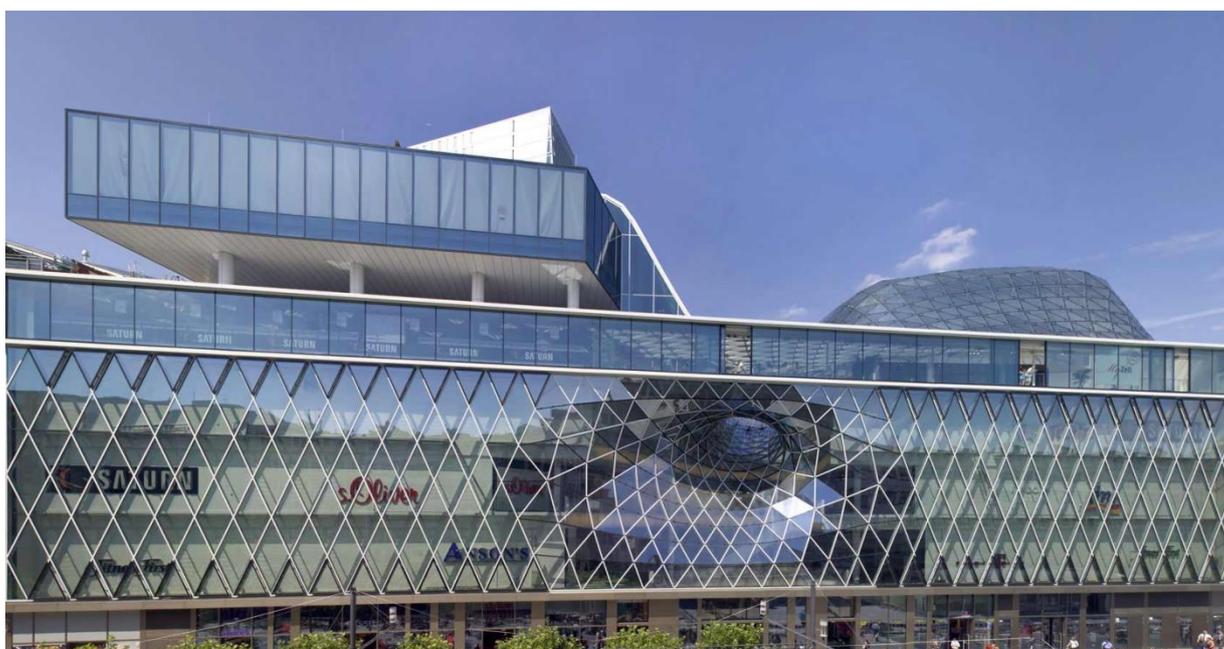


Рисунок 3.5. Фасад здания торгового центра Массимилиано Фуксаса во Франкфурте

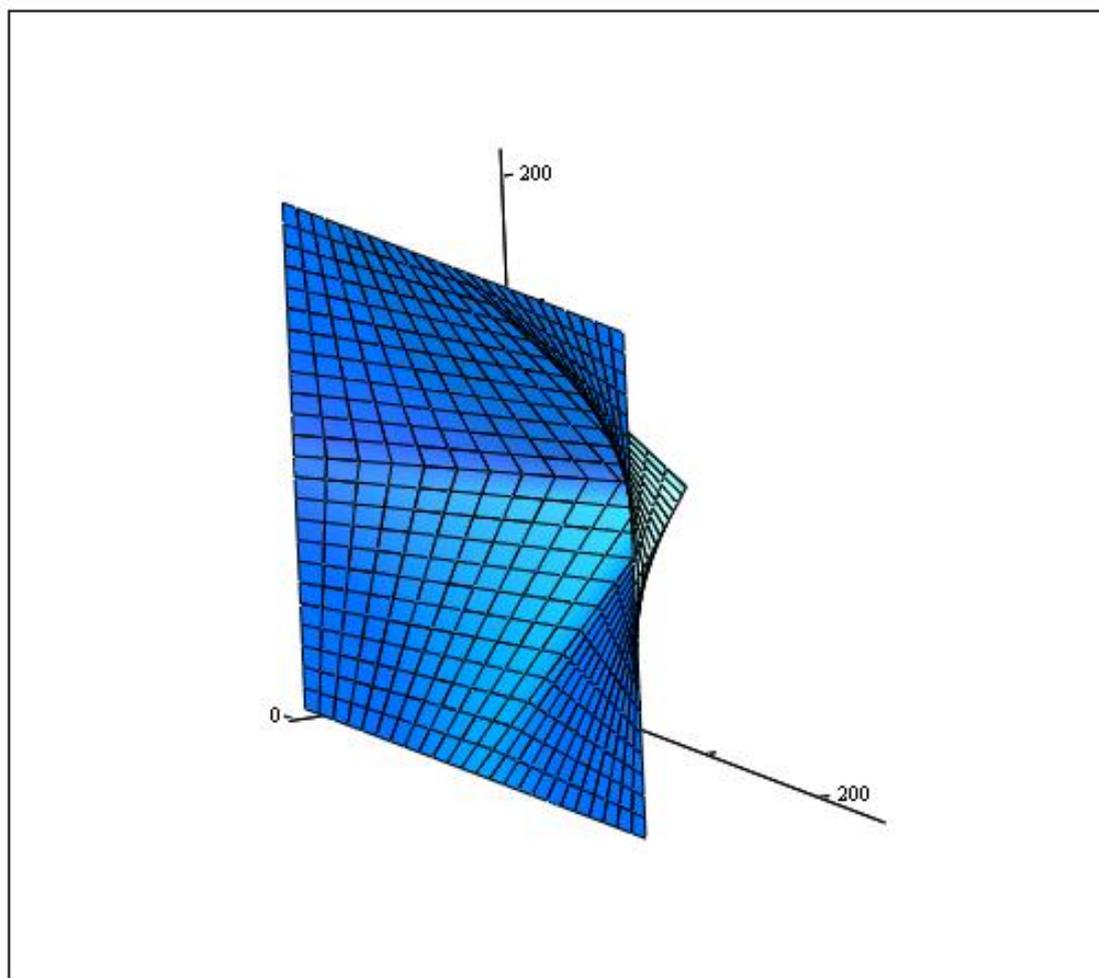


Рисунок 3.6. Трехмерная модель фасадного изображения, выполненная в системе компьютерной алгебры MathCad

Заданная уравнениями (3.2.1) велароидальная поверхность, является составной. Она образована четырьмя дважды линейчатыми поверхностями отрицательной гауссовой кривизны – четырьмя гипарами.

Возможно создание особой выразительности архиграфического решения и придание ему спиралевидной формы посредством торсионного формообразования [73]. Этот эффект достигается нелинейным преобразованием пространства с помощью матричного равенства [74]:

$$\mathbf{r}'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi(x) & -\sin \varphi(x) \\ 0 & \sin \varphi(x) & \cos \varphi(x) \end{pmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (3.2.2)$$

Здесь $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – вектор-столбец, задающий элемент трехмерной геометрической модели до его закручивания, $\mathbf{r}'(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – вектор-столбец, задающий структурный элемент архиграфического решения в окончательной композиции, $\varphi(x)$ - непрерывная функция, определяющая угол поворота произвольного сечения исходной трехмерной модели. При необходимости закручивания в противоположном направлении матрица торсионного преобразования транспонируется.

Функция $\varphi(x)$, обеспечивающая постоянный угол закручивания на каждую единицу глубины изображения, определяется равенством

$$\varphi = \frac{x}{d} \varphi^*, \text{ где } \varphi^* \text{ – полный угол закручивания.}$$

На рисунке 3.7 приведено изображение закрученной велароидальной поверхности при $\varphi^* = \pi$, получаемой путем подстановки соотношений (3.2.1) в формулу торсионного преобразования (3.2.2).

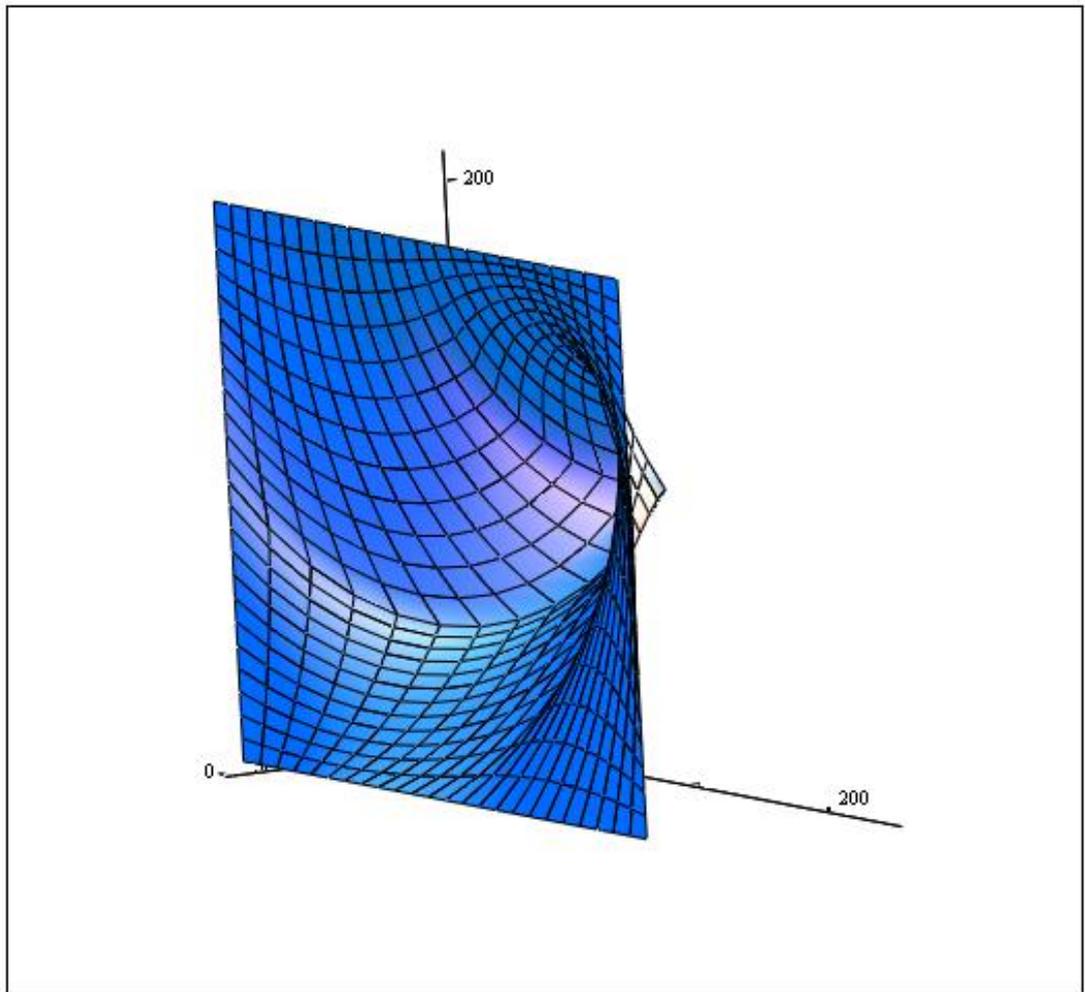


Рисунок 3.7. Трехмерная геометрическая модель велароидальной поверхности после торсионного преобразования, выполненная в системе компьютерной алгебры Mathcad

В основе алгоритмического построения линейной перспективы трехмерной геометрической модели лежит решение задачи о построении центральной проекции точки на произвольно расположенную плоскость.

С учетом результатов п.п.2.3. диссертационной работы при расположении центра перспективы в произвольной точке $C(x_c, y_c, z_c)$ фасадное изображение формируется по следующему алгоритму в координатной форме:

$$x' = x_c - \frac{x_c}{x(u, v) - x_c} (x(u, v) - x_c) = 0,$$

$$y' = y_c - \frac{x_c}{x(u, v) - x_c} (y(u, v) - y_c),$$

$$z' = z_c - \frac{x_c}{x(u, v) - x_c} (z(u, v) - z_c).$$

На рисунке 3.8 приведено архиграфическое решение фасада здания в виде линейной перспективы, закрученной велароидальной поверхности с точки зрения наблюдателя, находящегося на уровне основания здания напротив его правого угла на расстоянии, равном глубине изображения.

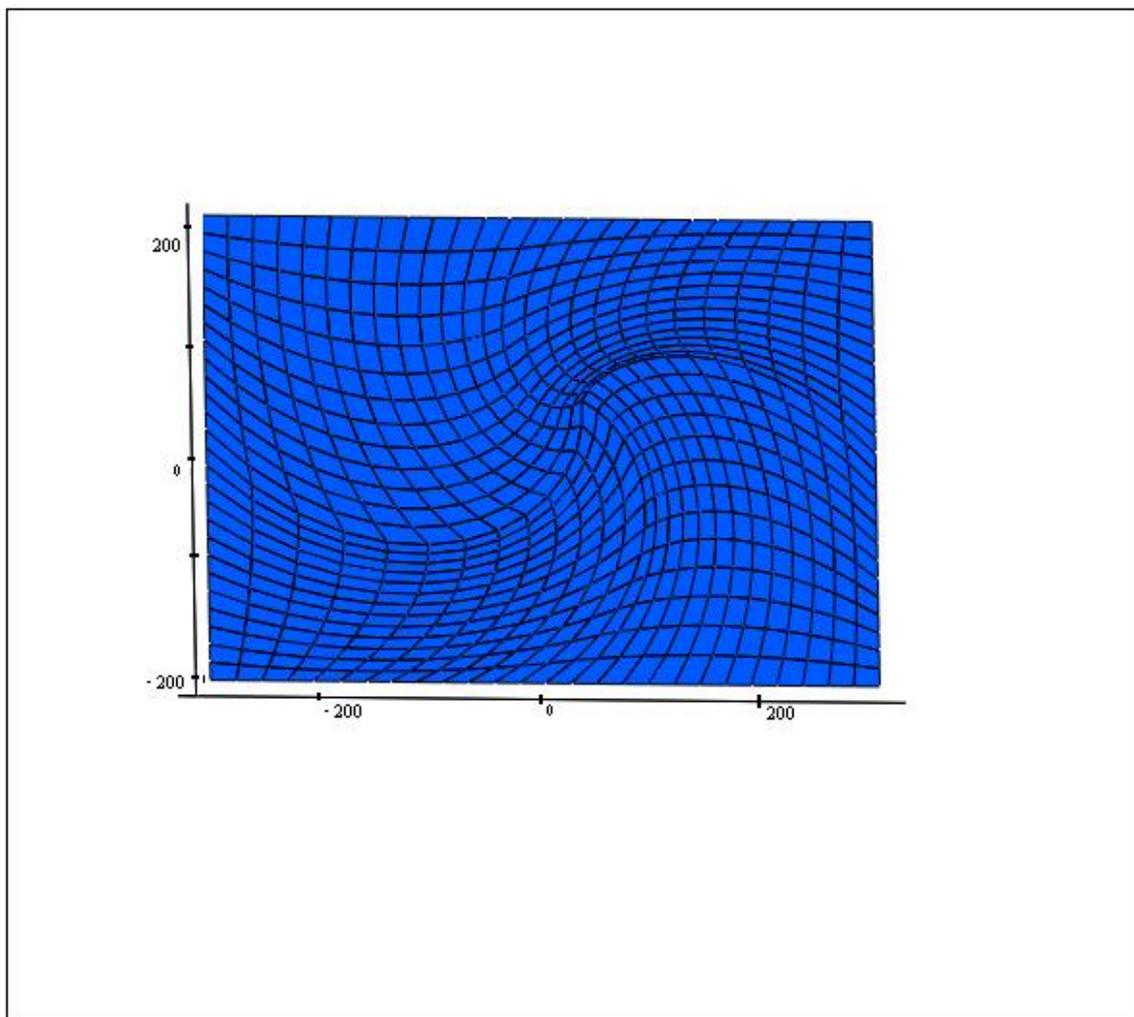


Рисунок 3.8. Линейная перспектива закрученной вейлероидальной поверхности, выполненная в системе компьютерной алгебры Mathcad

Сложный орнамент плоского графического изображения позволяет создать иллюзию пространственной протяженности этого изображения при произвольном выборе центра перспективы и плоскости проецирования. Данная модель может служить трафаретом для выполнения графических работ, расчету структур остекления и мозаики. Она предшествует рендерингу, который за счет дополнительных цветовых эффектов позволяет обеспечить полную иллюзию объемного изображения.

Выводы по главе 3

1. Разработан метод формирования оболочек высотных зданий с использованием полиномиальных образующих, который позволил создать естественные формы, интуитивно воспринимаемые человеком как гармоничные. Геометрическая модель высотного здания образована гладким сопряжением двух поверхностей. Математическая модель оболочки, формирующей облик здания содержит девять конструктивных параметров, путем варьирования которых можно изменять вид конструкции согласно требуемым эстетическим и техническим характеристикам. Создана программа компьютерного моделирования для визуализации и анимации математической модели оболочки высотного здания.

2. Разработан алгоритм поэтапного создания архиграфического решения фасадов зданий с использованием аналитического метода построения линейной перспективы и программы компьютерного моделирования. Графическое изображение формируется с помощью преобразования центрального проецирования в векторной форме и полученной в аналитическом виде велауроидальной поверхности. Это позволило выбрать произвольный центр перспективы и создать иллюзию объемного изображения, что придаст зданию уникальный облик.

4. ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТИ ВИРАЖА ГОРКИ ИЛИ САННОЙ ТРАССЫ

В четвертой главе диссертационной работы демонстрируется совместное применение аналитического метода поворота геометрического объекта, представленного во второй главе, и традиционных аналитических методов описания геометрических объектов для создания динамической модели поверхности виража горки или санной трассы. В качестве физической модели движения саней рассматривается движение материальной точки по гладкому желобу под действием силы тяжести с возможностью изменения закона перегрузки и при отсутствии силы трения [86]. Выполняется учет возникающих на вираже кратковременных регулируемых перегрузок. Желоб трассы задается кинематическим способом путем перемещения вдоль направляющей (оси) плоской образующей (шпангоута) переменной формы [87]. Плоскость шпангоута при движении остается ортогональной к оси трассы. Закон изменения формы и размеров образующей находится в зависимости от изменения кривизны по длине в плане и скорости на данном участке трассы [88].

4.1. Интегрирование уравнений Френе для линии откоса

Практически идеальной формы желоба на криволинейном участке трассы можно добиться путем использования в качестве осевой линии, так называемой линии откоса [89]. Линией откоса называется пространственная кривая, у которой отношение кривизны к кручению в каждой точке кривой постоянно. В данном параграфе для получения уравнения линии откоса реализуется инвариантный алгоритм интегрирования уравнений Френе [90].

Как известно [91] для любой пространственной кривой общего вида имеют место формулы Френе

$$\frac{d\tau}{ds} = k\mathbf{n}, \quad (4.1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \sigma\mathbf{b} - k\boldsymbol{\tau}, \quad (4.1.2)$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\sigma\mathbf{n}, \quad (4.1.3)$$

где $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ – единичные векторы естественного базиса, $k(s)$ и $\sigma(s)$ – кривизна и кручение кривой, а s натуральный параметр.

Известно также, что если заданы гладкие функции $k(s) > 0$ и $\sigma(s)$, $0 \leq s \leq s^*$, то с точностью до преобразований движения существует гладкая кривая $\mathbf{r}(s)$, для которой $k(s)$ и $\sigma(s)$ являются кривизной и кручением.

Интегрирование уравнений Френе является достаточно сложной задачей. Возможности их интегрирования, а также некоторые частные случаи их интегрирования при параметризации движения с помощью углов Эйлера и Крылова рассмотрены в работе [90]. В настоящей работе предлагается общий аналитический способ интегрирования системы уравнений (4.1.1 - 4.1.3) и получения явного вида пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ для частного случая, когда заданная кривая является линией откоса. Используем утверждение, что линией откоса [89] называется кривая, касательная к которой во всех точках сохраняет постоянный угол с некоторым направлением. Частным видом линии откоса является винтовая линия, у которой кривизна $k(s)$ и кручение $\sigma(s)$ постоянны. В общем случае, кривизна $k(s)$ линии откоса и ее кручение $\sigma(s)$ связаны соотношением:

$$\sigma(s) = ck(s), \quad k(s) > 0; c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.1.4)$$

Пусть некоторое направление в пространстве задано единичным вектором \mathbf{l} . Тогда, следуя определению линии откоса, находим (рис. 4.1)

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l} = \tau_l = \cos \gamma,$$

а из уравнения (4.1.1) следует

$$\frac{d\tau_l}{ds} = kn_l \Rightarrow n_l = 0.$$

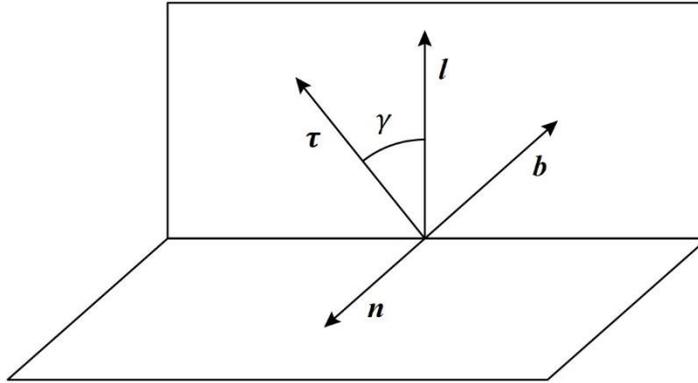


Рисунок 4.1. Ориентация естественного базиса

Это означает, что вектор \mathbf{n} остается во время движения перпендикулярным выбранному направлению и естественный базис вращается вокруг оси, заданной единичным вектором \mathbf{l} при движении вдоль линии откоса.

Из уравнения (4.1.3)

$$\frac{db_l}{ds} = -\sigma n_l \Rightarrow b_l = \text{const} \Rightarrow b_l = \sin \gamma.$$

Из уравнения (4.1.2)

$$\frac{dn_l}{ds} = \sigma b_l - k\tau_l \Rightarrow \sigma \sin \gamma - k \cos \gamma = 0.$$

Откуда с учетом соотношений (4.1.4) следует связь угла γ с параметром c

$$\frac{k}{\sigma} = \text{tg} \gamma, \left(\frac{k}{\sigma}\right)^2 = \frac{1 - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}, \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (k/\sigma)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Из перпендикулярности векторов $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} , а также из формулы Эйлера, следует, что

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \cdot \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} = k(s) + \boldsymbol{\tau} \cdot \left(\frac{d\varphi}{ds} \mathbf{l} \times \mathbf{n}\right) = 0,$$

где φ - угол поворота базисных векторов вокруг оси, заданной единичным вектором \mathbf{l} .

Т.е. :

$$k(s) = -\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{n}) \frac{d\varphi}{ds} = \sin \gamma \frac{d\varphi}{ds}.$$

Таким образом, угол поворота базисных векторов может быть найден по закону изменения кривизны линии откоса с помощью равенства

$$\varphi(s) = \frac{1}{\sin \gamma} \int_0^s k(s) ds.$$

Построение линии откоса $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ по заданному закону изменения кривизны $k(s)$ может быть выполнено с использованием различных алгоритмов. В частности, с помощью равенства [91]

$$\mathbf{r}(s) = \int_0^s \boldsymbol{\tau}(s) ds.$$

Изменение координат векторов естественного базиса можно определить, следуя методу (см. п. 2.2) описания поворота геометрического объекта в операторной форме, по формулам:

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \boldsymbol{\tau}_0 + ((1 - \cos \varphi(s))\mathbf{L}\mathbf{L} + \sin \varphi(s)\mathbf{L})\boldsymbol{\tau}_0,$$

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{n}_0 + ((1 - \cos \varphi(s))\mathbf{L}\mathbf{L} + \sin \varphi(s)\mathbf{L})\mathbf{n}_0,$$

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{b}_0 + ((1 - \cos \varphi(s))\mathbf{L}\mathbf{L} + \sin \varphi(s)\mathbf{L})\mathbf{b}_0.$$

Здесь оператору $\mathbf{L}(s)$ в произвольном ортогональном базисе соответствует кососимметрическая матрица L , определяемая единичным вектором заданного направления в пространстве, а вектору $\boldsymbol{\tau}_0$ в этом базисе соответствует единичный вектор – столбец, задающий начальное положение касательной.

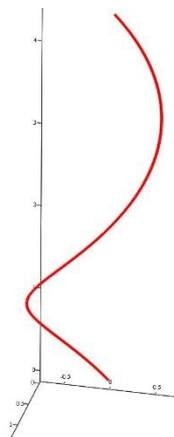
$$[L] = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$ – векторы-столбцы естественного базиса при $s = 0$.

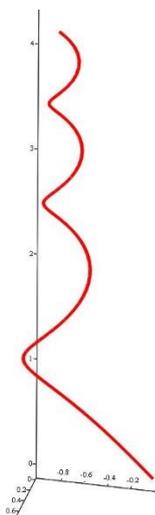
В качестве иллюстрации предлагаемого алгоритма выполнено построение линии откоса при трех законах изменения кривизны (рис. 4.2):

1) $k = a$, 2) $k = as$, 3) $k = b|\sin \omega s|$; $s \in [0, 2]$, $\mathbf{l} = \{0, 0, 1\}$
 $\boldsymbol{\tau}_0 = \{0, -\sin \gamma, \cos \gamma\}$, $\mathbf{n}_0 = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{b}_0 = \{0, \cos \gamma, \sin \gamma\}$, $a = 0,7$,

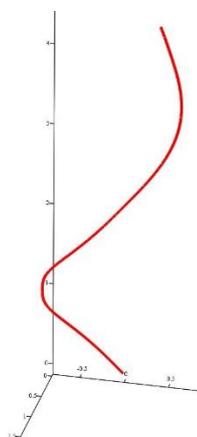
$$b = 1, \omega = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{4}.$$



а) при $k = a$,



б) при $k(s) = as$



в) при $k(s) = b|\sin \omega s|$

Рисунок 4.2. Линии откоса при трех законах изменения кривизны

Другой пример линии откоса с нулевой кривизной в граничных точках изображен на рисунке 4.3, полученный при следующем законе изменения кривизны и значениях параметров

$$k(s) = b|\sin \omega s| ; s \in [0,1], l = \{0,0,1\},$$

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \{0, -\sin \gamma, \cos \gamma\}, \boldsymbol{n}_0 = \{1,0,0\}, \boldsymbol{b}_0 = \{0, \cos \gamma, \sin \gamma\}, a = 0,7,$$

$$b = 1, \omega = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{2\pi}{5}.$$

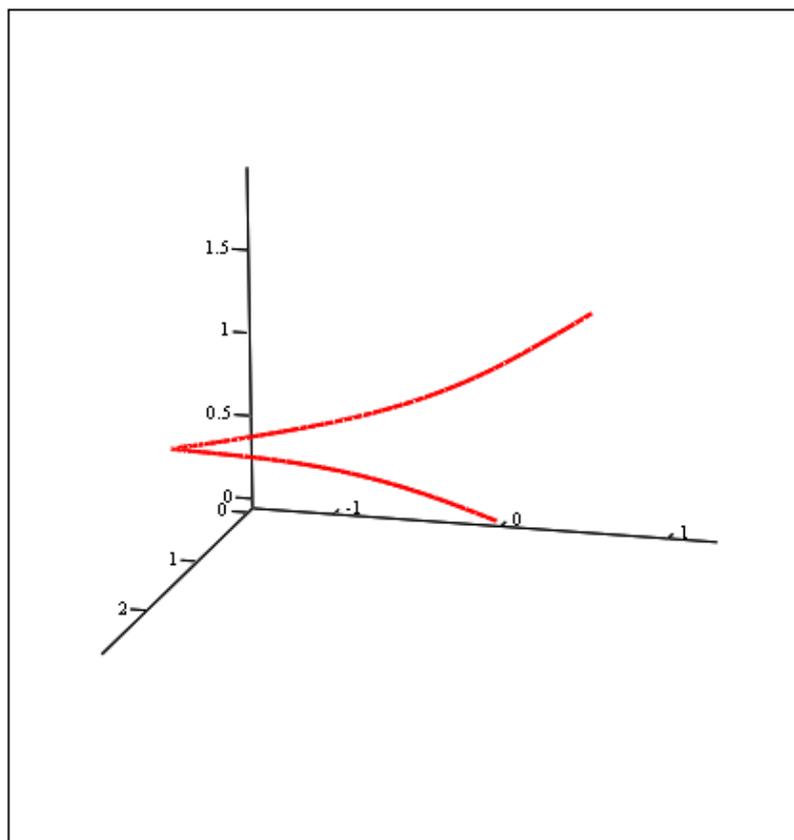


Рисунок 4.3. Линия откоса при законе изменения кривизны

$$k(s) = b|\sin \omega s| ; s \in [0,1]$$

Возможность задавать произвольный закон изменения кривизны и управлять формой гладкой кривой, включая возможность осуществления ее сопряжения с участками прямых линий, позволяет использовать этот алгоритм при проектировании виражей горок и санных трасс.

4.2. Динамический метод нахождения закона изменения кривизны осевой линии горки или санной трассы

В данном параграфе выполняется разработка математической модели динамического закона изменения кривизны линии откоса $k = k(s)$, моделирующей осевую линию горки или санной трассы. Суть моделирования заключается в построении осевой линии при движении вдоль которой под действием силы тяжести обеспечивается требуемый закон изменения перегрузки.

Следуя методу работы [92], рассмотрим движение несвободной материальной точки массы m , на которую наложена идеальная, голономная, стационарная и удерживающая связь, уравнение которой совпадает с уравнением линии откоса. Единичный вектор \mathbf{l} , определяющий положение линии откоса, направим вертикально вниз в направлении силы тяжести. Тогда уравнения движения материальной точки по линии откоса под действием силы тяжести в проекциях на главную нормаль и бинормаль принимают вид

$$\begin{cases} k(s)mv^2(s) = R_n(s), \\ 0 = R_b(s) + mg \sin \gamma, \end{cases}$$

где $R_n(s)$ и $R_b(s)$ – составляющие реакции наложенной на точку связи.

Суммарная реакция связи определяется равенством

$$\mathbf{R}(s) = R_n(s)\mathbf{n}(s) + R_b(s)\mathbf{b}(s),$$

$$|\mathbf{R}(s)| = \sqrt{(k(s)mv^2(s))^2 + (mg \sin \gamma)^2}. \quad (4.2.1)$$

Кроме того, по теореме об изменении кинетической энергии материальной точки

$$\frac{mv^2(s)}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^s m\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

Откуда, с учетом свойств линии откоса находим

$$v^2(s) = 2gs \cos \gamma + v_0^2. \quad (4.2.2)$$

Совместное использование уравнений (4.2.1) и (4.2.2) позволяет найти закон изменения кривизны $k = k(s)$ линии откоса по закону изменения суммарной реакции

$$k^2(s) = \frac{R^2(s) - (mg \sin \gamma)^2}{(mv^2(s))^2} \Rightarrow k(s) = \frac{\sqrt{R^2(s) - (mg \sin \gamma)^2}}{m(2gs \cos \gamma + v_0^2)} \quad (4.2.3)$$

Использование линии откоса в качестве осевой линии для виражей горок и санных трасс позволяет моделировать их форму по требуемым динамическим характеристикам комфорта и безопасности.

4.3. Моделирование направляющей кривой и поверхности желоба санной трассы

Поверхность желоба горки или санной трассы ищется как кинематическая поверхность заметания, получаемая движением образующей (шпангоута) вдоль направляющей кривой, являющейся линией откоса.

Математическая модель поверхности желоба определяется следующими параметрами: скорость при входе в вираж – v_0 , угол между касательной к осевой линии и вертикалью – γ , разность уровней точек входа в вираж и выхода из него – ($h = l \cos \gamma$, l – длина виража), радиус образующей (шпангоута) – r , а также параметрами закона изменения перегрузки – $\Pi(s)$.

Закон изменения перегрузки определяет суммарную реакцию поверхности при движении по гладкому желобу тела массы m равенством

$$R(s) = \Pi(s)mg \sin \gamma, \quad \Pi(0) = \Pi(l) = 1.$$

С учетом равенства (4.2.3) кривизна направляющей кривой находится по формуле

$$k(s) = \frac{\sin \gamma \sqrt{\Pi^2(s) - 1}}{2gs \cos \gamma + \frac{v_0^2}{g}}. \quad (4.3.1)$$

С использованием алгоритма, изложенного в п.4.1, при значениях параметров: $v_0 = 5 \text{ М/с}$, $\gamma = \frac{\pi}{10}$, $l=20\text{м}$ и при законе изменения перегрузки $\Pi(s) = 1 + \sin \frac{\pi s}{l}$ в качестве примера построена направляющая кривая для желоба горки или санной трассы (рис 4.4).

При выбранном законе изменения перегрузки ее максимальное значение достигается на половине пути проходимого виража.

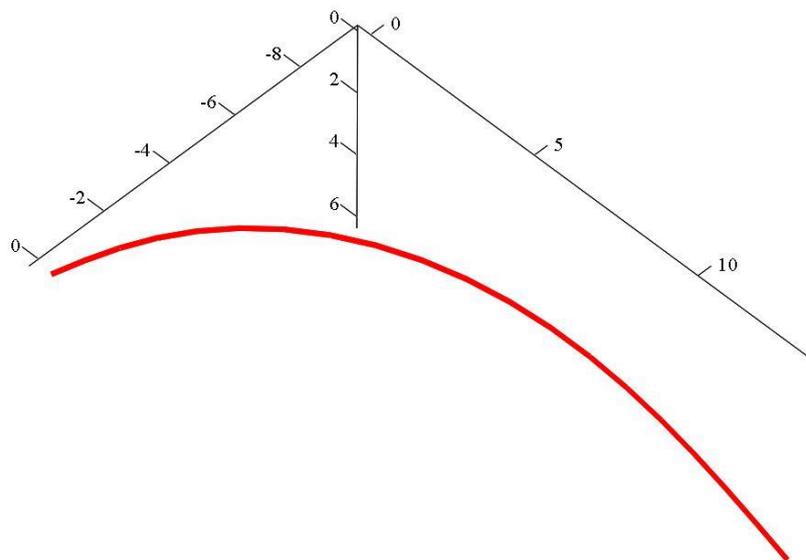


Рисунок 4.4. Направляющая кривая желоба горки или санной трассы при значениях параметров: $v_0 = 5 \text{ М/с}$, $\gamma = \frac{\pi}{10}$, $l=20\text{м}$ и законе изменения перегрузки

$$\Pi(s) = 1 + \sin \frac{\pi s}{l}$$

Используя найденную траекторию движения в качестве направляющей кривой, поверхность желоба ищем последовательно с применением алгоритма поворота геометрического объекта (п.п. 2.2). Сначала для найденной направляющей кривой находится нормальная поверхность с образующей в виде окружности заданного радиуса (в качестве образующей может быть использована и другая гладкая кривая, записанная в полярных координатах). Далее поверхность трансформируется так, чтобы центры кривизны образующей поверхности желоба во всех ее положениях при её движении находились на линиях действия суммарной реакции в каждый момент времени.

То есть поверхность желоба находится как кинематическая поверхность заметания при движении образующей в форме дуги окружности вдоль направляющей, которой является осевая линия горки. При этом образующая по мере движения вдоль направляющей поворачивается вокруг касательной к осевой линии горки таким образом, что центр окружности лежит на линии действия реакции поверхности горки.

Поверхность, определяющая форму желоба горки или санной трассы на вираже, задается операторным уравнением:

$$\mathbf{r}'(s, u) = \mathbf{r}(s, u) + (\mathbf{L}(s)\mathbf{L}(s)(1 - \cos \psi(s)) + \mathbf{L}(s) \sin \psi(s))(\mathbf{r}(s, u) - \mathbf{r}_H(s)),$$

$$0 \leq s \leq l, -u^* \leq u \leq u^*,$$

где

$$\mathbf{r}(s, u) = \mathbf{r}_H(s) + (r \sin 2u \mathbf{n}(s) + 2r \sin^2 u \mathbf{b}(s)),$$

$$\mathbf{r}_H(s) = \int_0^s \boldsymbol{\tau}(s) ds, \quad [\mathbf{L}(s)] = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_3(s) & \tau_2(s) \\ \tau_3(s) & 0 & -\tau_1(s) \\ -\tau_2(s) & \tau_1(s) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{\tau}(s)\} = \begin{pmatrix} \sin \gamma \sin \varphi(s) \\ -\sin \gamma \cos \varphi(s) \\ \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{n}(s)\} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(s) \\ \cos \varphi(s) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\{b(s)\} = \begin{pmatrix} -\cos \gamma \sin \varphi(s) \\ \cos \gamma \cos \varphi(s) \\ \sin \gamma \end{pmatrix}, \varphi(s) = \frac{1}{\sin \gamma} \int_0^s k(s) ds = \frac{1}{\sin \gamma} \int_0^s \frac{g \sin \gamma \sqrt{\Pi^2(s)-1}}{2gs \cos \gamma + v_0^2} ds.$$

Угол $\psi(s)$ определяет поворот нормальной реакции $\mathbf{R}(s)$ вокруг вектора касательной при движении вдоль осевой линии горки. При этом

$$\cos \psi(s) = \frac{R_b}{R} = \frac{mg \sin \gamma}{\sqrt{(k(s)m(2gs \cos \gamma + v_0^2))^2 + (mg \sin \gamma)^2}} = \frac{g \sin \gamma}{\sqrt{(k(s)(2gs \cos \gamma + v_0^2))^2 + g^2 \sin^2 \gamma}},$$

$$\sin \psi(s) = \frac{R_n}{R} = \frac{k(s)mv^2}{\sqrt{(k(s)m(2gs \cos \gamma + v_0^2))^2 + (mg \sin \gamma)^2}} = \frac{k(s)(2gs \cos \gamma + v_0^2)}{\sqrt{(k(s)(2gs \cos \gamma + v_0^2))^2 + (g \sin \gamma)^2}}.$$

С учетом полученной связи кривизны направляющей кривой и функции перегрузки (4.3.1), находим

$$\cos \psi(s) = \frac{1}{\Pi(s)}, \sin \psi(s) = \frac{\sqrt{\Pi^2(s) - 1}}{\Pi(s)}.$$

На рисунке 4.5 приведена поверхность, образующая желоб на вираже при начальной скорости $v_0 = 5 \text{ М/с}$, законе перегрузки $\Pi(s) = 1 + \sin \frac{\pi s}{l}$ и при следующих значениях параметров: $\gamma = \frac{\pi}{10}$, $l = 20 \text{ м}$, $r = 1.5 \text{ м}$, $u^* \leq \frac{\pi}{8}$.

На рисунке 4.6 приведены график изменения угла поворота реакции гладкого желоба при движении согласно выбранному в примере закону перегрузки и график изменения закона перегрузки.

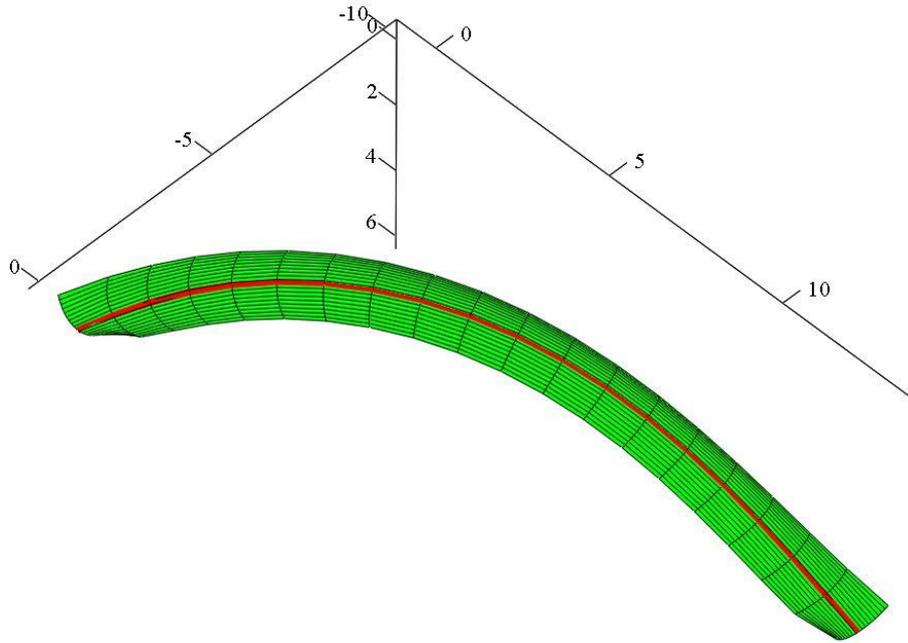


Рисунок 4.5. Поверхность желоба на вираже при начальной скорости $v_0 = 5 \text{ М/с}$ законе перегрузки $\Pi(s) = 1 + \sin \frac{\pi s}{l}$ и при следующих значениях остальных параметров: $\gamma = \frac{\pi}{10}, l = 20 \text{ м}, r = 1.5 \text{ м}, u^* \leq \frac{\pi}{8}$

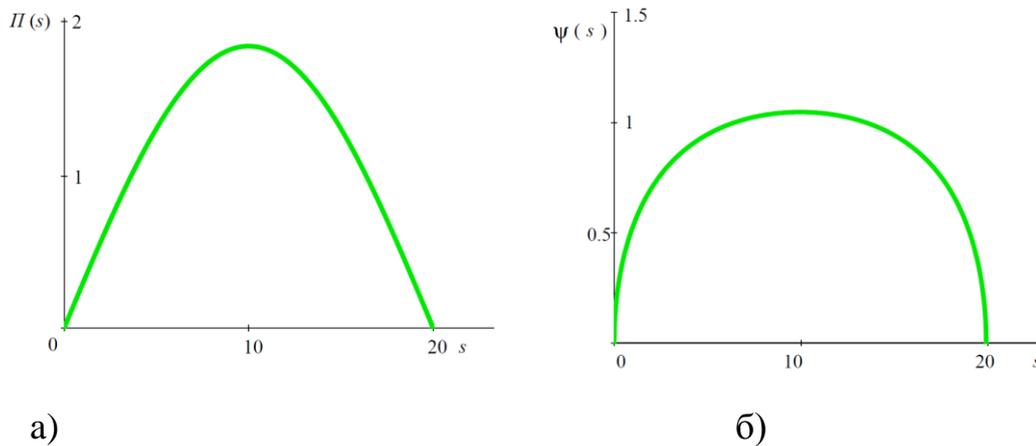


Рисунок 4.6. Графики закона изменения перегрузки, (а) и закона изменения угла поворота реакции гладкого желоба в нормальной плоскости в рад. (б)

По законам изменения перегрузки и угла поворота реакции можно исследовать свойства динамической модели, что подчеркивает преимущества аналитического моделирования. Так, к примеру, для заданного модельного закона

перегрузки ее максимальное значение достигается в середине виража, что видно на рисунке (рис. 4.6 (а)). При этом угол поворота реакции также достигает максимума на том же участке виража и в тот же момент времени.

Выводы по главе 4

1. Выполнено интегрирование уравнений Френе в векторной форме для линии откоса, которая характеризуется постоянством отношения ее кривизны к кручению. В результате получена функциональная зависимость ориентации базисных векторов естественного трехгранника от натурального параметра и уравнение линии откоса при произвольном законе изменения ее кривизны.
2. Разработана динамическая модель для построения осевой линии горки или санной трассы, позволяющая управлять законом изменения перегрузки при движении по линии откоса в гравитационном поле.
3. Продемонстрировано совместное применение математической модели поворота геометрического объекта вокруг оси произвольного положения, векторного алгоритма построения нормальных поверхностей и традиционных существующих аналитических моделей задания кинематических поверхностей заметания для решения задачи математического моделирования поверхности горки или санной трассы с учетом ее геометрических, кинематических и динамических характеристик.
4. Создан комплекс программ компьютерного моделирования линии откоса, осевой линии горки и трёхмерного образа пространственной конструкции поверхности желоба горки или санной трассы с учетом геометрических, кинематических и динамических характеристик соответствующего спортивного сооружения.
5. Созданный комплекс программ может быть использован для получения необходимых цифровых массивов при проектировании инженерных сооружений в виде координат точек узловых соединений её линейных, плоских и объёмных элементов, т.е. решать технологические задачи их производства. Высокотехнологичные аттракционы в виде летних, зимних и водных катальных

горок, а также тубинговые трассы расположены, как правило, в ограниченном пространстве. Это требует решения вопроса о повышении их безопасности. Одним из путей решения этой проблемы является создание противоуклонов с криволинейной осью, организация которых может быть также выполнена в рамках предложенной математической модели. Предлагаемая в работе модель в большей мере обеспечивает безопасное движение за счет динамического формообразования поверхности.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСА АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ОПИСАНИЮ ТЕКСТУРЫ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В пятой главе диссертационной работы осуществляется применение математического аппарата второй главы для нового геометрического представления текстуры поликристаллических материалов. С использованием параметризации ось-угол, получен аналитический метод геометрического моделирования случайных распределений на группе $SO(3)$ для описания текстуры поликристаллического материала. На основе полученных геометрических факторов, определяющих упругие свойства текстурированных поликристаллических материалов, реализован аналитический метод построения области, содержащей все возможные траектории текстурных состояний. Это позволяет по виду траектории текстурных состояний исследовать возможные изменения свойств поликристаллического агрегата при различных режимах его термомеханической обработки.

5.1. Описание случайных распределений на группе $SO(3)$ в параметрах ось-угол

В данном параграфе для геометрического представления распределений кристаллографических осей текстурированных поликристаллических материалов и получения количественной характеристики равномерного распределения подвижных осей в ограниченной области ориентационного пространства производится описание случайных распределений на группе $SO(3)$ в параметрах ось-угол.

При описании положения подвижных осей в ориентационном пространстве может быть использована различная параметризация. Один из наиболее распространенных подходов основан на использовании углов Эйлера (рис.5.1)

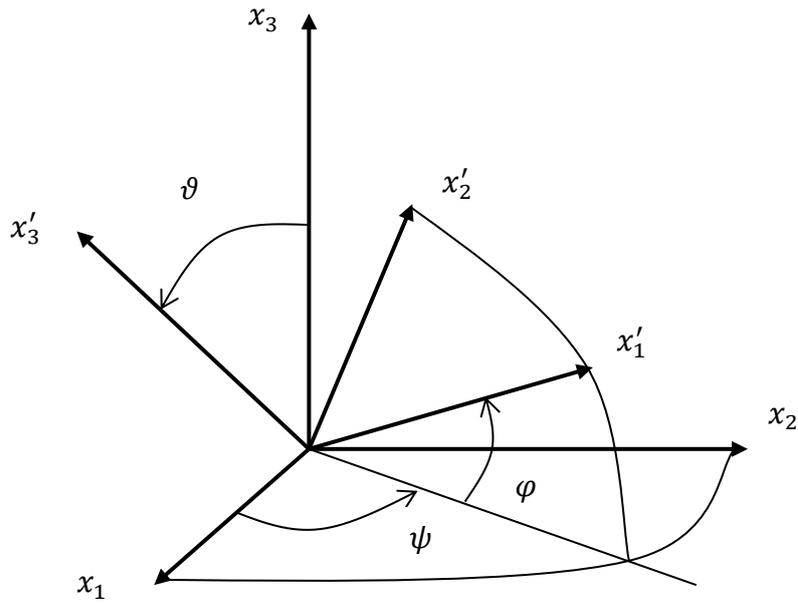


Рисунок 5.1. Определение положения подвижной системы координат с помощью углов Эйлера

В описании равновероятного распределения подвижных осей в пространстве ориентаций используется соответствующая плотность распределения этих углов, которая определяется равенством [93,94]:

$$f(\psi, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{8\pi^2} \sin\vartheta, \quad \begin{matrix} 0 \leq \psi \leq 2\pi, & 0 \leq \vartheta \leq \pi, \\ & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{matrix} \quad (5.1.1)$$

Параметризация вращения твердого тела, основанная на использовании углов Эйлера, позволяет получить распределение подвижных осей во всем эйлеровом пространстве, но не позволяет получить количественную характеристику равномерного распределения этих осей в его ограниченном объеме. Решение этой задачи может быть выполнено при кватернионной параметризации положения подвижных осей в ориентационном пространстве.

Положение подвижных осей может быть однозначно определено с помощью единичных кватернионов $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$, длина которых определяется как

длина вектора $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Они образуют группу $Sp(1)$ ($SO(3) \approx Sp(1)/\pm 1$).

При этом трехмерная сфера единичного радиуса S^3 двулистным образом накрывает группу $SO(3)$. Кватернионам λ и $-\lambda$ соответствует один и тот же элемент из $SO(3)$ [36]. Наглядной иллюстрацией этого служит получение плотности совместного распределения углов Эйлера (5.1.1) при равновероятном вращении твердого тела из равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы, выполненное в работе [55].

Как показано в работах [95,96] группу $SO(3)$ можно представить как совокупность поворотов на всевозможные углы $0 \leq \chi \leq \pi$ вокруг всевозможных осей, заданных всеми векторами единичной сферы $\omega(\alpha, \beta)$, где $0 \leq \alpha \leq \pi$ $0 \leq \beta \leq 2\pi$ (рис. 5.2).

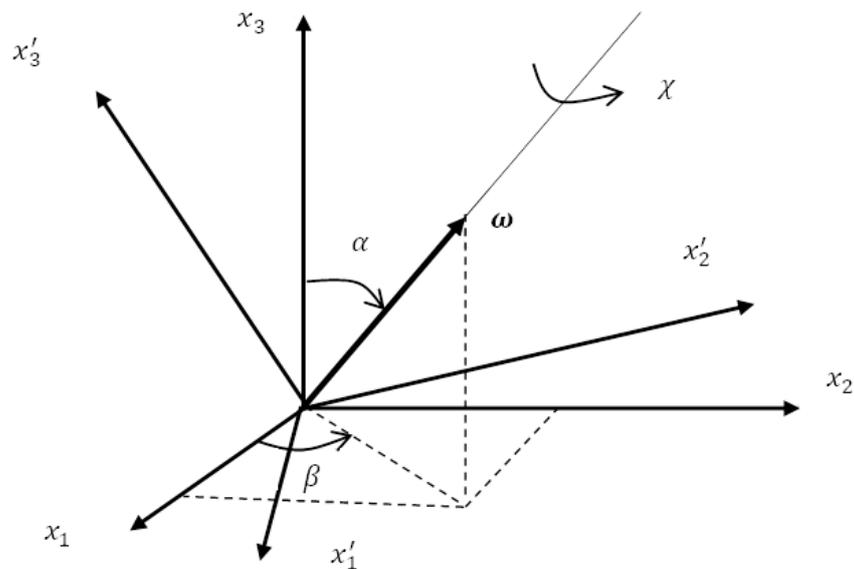


Рисунок 5.2. Определение положения подвижной системы координат с помощью параметров ось-угол

Совокупность всех таких вращений описывается как шар радиуса π в трехмерном евклидовом пространстве [96]. При этом следует иметь в виду, что на границе шара надо отождествить противоположные точки, так как вращение на угол π вокруг вектора ω совпадает с вращением на угол π вокруг вектора $-\omega$

(других совпадающих вращений на шаре нет). То есть отображение группы $SO(3)$ на шар радиуса π не является биективным, но для целей моделирования случайных распределений этот факт не служит препятствием, так как мера множества точек поверхности шара равна нулю.

Поворот подвижных осей с использованием параметров ось-угол задается кватернионом [54]

$$\lambda = \cos \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\chi}{2} \omega_1(\alpha, \beta) \mathbf{i}_1 + \sin \frac{\chi}{2} \omega_2(\alpha, \beta) \mathbf{i}_2 + \sin \frac{\chi}{2} \omega_3(\alpha, \beta) \mathbf{i}_3. \quad (5.1.2)$$

При этом равномерному распределению подвижных осей в ограниченном пространстве, характеризующимся областью ориентаций радиусом γ , соответствует однородный шар радиусом γ ($0 \leq \gamma \leq \pi$) в трехмерном евклидовом пространстве.

С использованием сферических координат положение точки в указанном шаре определяется равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= \chi \omega_1 = \chi \sin \alpha \cos \beta, \\ x_2 &= \chi \omega_2 = \chi \sin \alpha \sin \beta, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \chi \leq \gamma. \\ x_3 &= \chi \omega_3 = \chi \cos \alpha, \end{aligned}$$

Эти координаты каждой тройке углов χ, α, β ставят в соответствие точку внутри шара радиуса π , и этой точке отвечает свое положение подвижных осей, задаваемое кватернионом (5.1.2).

Плотность распределения углов χ, α, β соответствующая равномерному распределению подвижных осей может быть получена с использованием следующей теоремы [55]:

Теорема. Пусть функции $x_1(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $x_2(u_1, u_2, \dots, u_m)$, ..., $x_n(u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $(u_1, u_2, \dots, u_m) \in D$ определяют гладкую регулярную m -мерную поверхность в n -мерном евклидовом пространстве. Тогда плотность распределения значений параметров u_1, u_2, \dots, u_m , задающая равномерное распределение точек на этой поверхности, определяется функцией

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{\iiint_D \dots \int \sqrt{g} du_1 du_2 \dots du_m}, & (u_1, u_2, \dots, u_m) \in D; \\ 0, & (u_1, u_2, \dots, u_m) \notin D. \end{cases} \quad (5.1.3)$$

Здесь $g = \det(g_{ij})$ – определитель матрицы метрического тензора на поверхности

$$\|g_{ij}\| = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix},$$

где

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Генерируя значения параметров u_1, u_2, \dots, u_m по функции $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ с помощью обобщенного метода Неймана, получим равномерное распределение точек на поверхности.

Соотношение (5.1.3) является универсальным. В работе [55] этим методом получена плотность совместного распределения углов Эйлера (5.1.1) при равновероятном распределении подвижных осей в ориентационном пространстве вращения твердого тела из равномерного распределения точек на поверхности единичной гиперсферы.

Утверждение теоремы остается справедливым и в случае, когда $m = n$. То есть, когда задано гладкое отображение конечномерного пространства на себя. Получим плотность $f(\alpha, \beta, \chi)$ совместного распределения углов α, β, χ , реализующую равномерное распределение точек в шаре радиуса γ , а значит и равномерное распределение подвижных осей в ограниченном объеме ориентационного пространства. Формула (5.1.3) в этом случае принимает вид

$$f(\alpha, \beta, \chi) = \begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{\iiint_D \sqrt{g} d\alpha d\beta d\chi}, & (\alpha, \beta, \chi) \in D, D = [0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \chi \leq \gamma], \\ 0, & (\alpha, \beta, \chi) \notin D \end{cases}$$

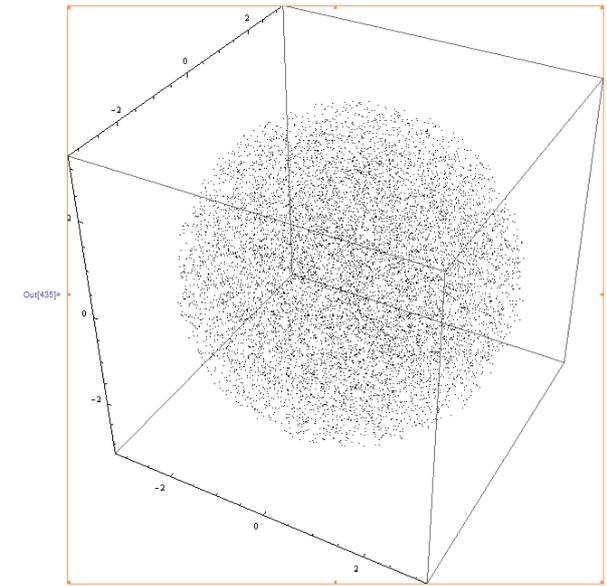
где $g = \chi^4 \sin^2 \alpha$ – определитель матрицы метрического тензора сферической системы координат.

После выполнения интегрирования находим

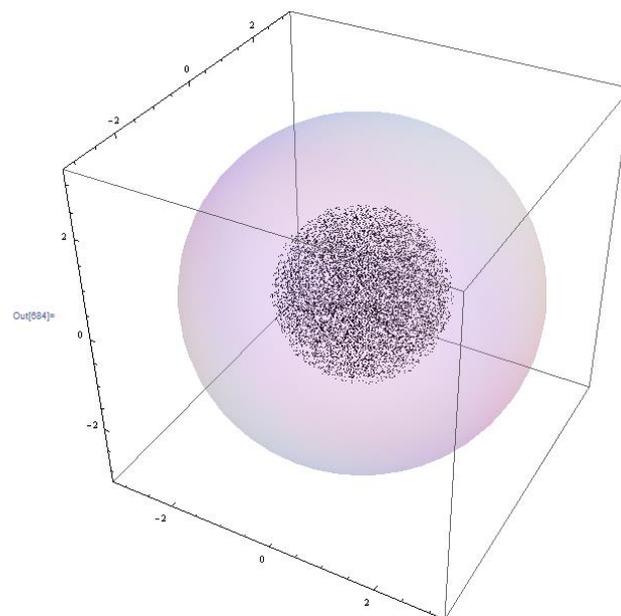
$$f(\alpha, \beta, \chi) = \begin{cases} \frac{3\chi^2 \sin \alpha}{4\pi\gamma^3}, & (\alpha, \beta, \chi) \in D, D = [0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \chi \leq \gamma], \\ 0, & (\alpha, \beta, \chi) \notin D. \end{cases}$$

Соответствующие этой функции распределения точек при значениях угла γ равных π и $\frac{\pi}{2}$, полученные в результате численного эксперимента в пакете Mathematica 7, представлены на рисунке 5.3. Оба распределения являются изотропными. При этом первое определено на всем ориентационном пространстве, а второе в его ограниченном объеме.

Рассмотренный метод генерации равновероятного распределения подвижных осей в параметрах ось-угол путем случайного заполнения точками шара радиуса π может быть реализован несмотря на то, что отображение группы $SO(3)$ на шар не является биективным. Это обусловлено тем, что вероятность попадания точек на поверхность шара равна нулю и соответствующих точек в получаемой выборке нет.



а) $\gamma = \pi$



б) $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Рисунок 5.3. Равномерное распределение 10000 точек в шаре

Очевидно, что неоднородному распределению точек в шаре соответствует некоторое неравномерное распределение подвижных осей.

Количественное описание такого распределения подвижных осей может быть осуществлено различными способами. В эйлеровом пространстве такое описание в задачах количественного описания текстуры поликристаллических материалов проводилось с использованием метода удельных объемов, функции распределения ориентации (ФРО) [97] и модельных представлений. В случае использования ФРО как правило выполняется ее представление рядом по обобщенным сферическим функциям. При этом ФРО показывает во сколько раз плотность данной ориентации у текстурированного материала больше, чем у соответствующего нетекстурированного. К модельным описаниям текстуры относятся работы, в которых ФРО записывается в виде одного из представлений нормального распределения на группе $SO(3)$ [98,99].

Плотность нормального распределения кристаллографических осей в параметрах ось-угол может быть представлена функцией

$$f(\alpha, \beta, \chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2} \sin \alpha}{4\pi \int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi},$$

где сферические углы α и β распределены равномерно

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2}, f(\beta) = \frac{1}{2\pi},$$

а угол χ имеет распределение с плотностью

$$f(\chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2}}{\int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi}.$$

Этому распределению соответствует «облако точек» в шаре радиуса π , плотность которого изменяется по нормальному закону по мере удаления от его центра. Частный случай моделирования непрерывного анизотропного распределения кристаллографических осей в параметрах ось-угол описывается плотностью

$$f(\alpha, \beta, \chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2} \sin \alpha}{2\pi(\cos \delta_1 - \cos \delta_2) \int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi},$$

где угол β распределен равномерно

$$f(\beta) = \frac{1}{2\pi},$$

для угла α принята плотность

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \delta_1 - \cos \delta_2},$$

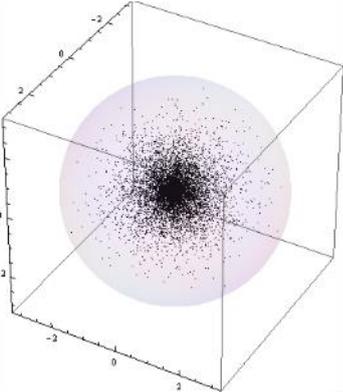
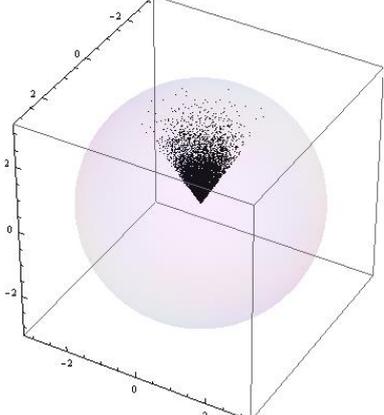
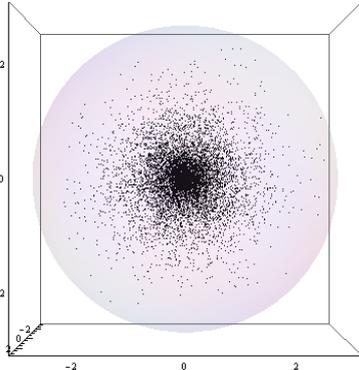
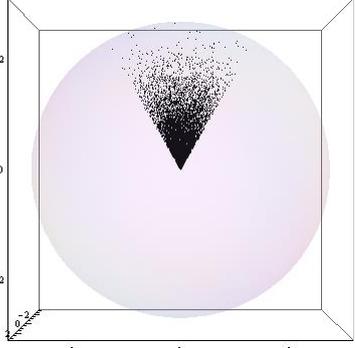
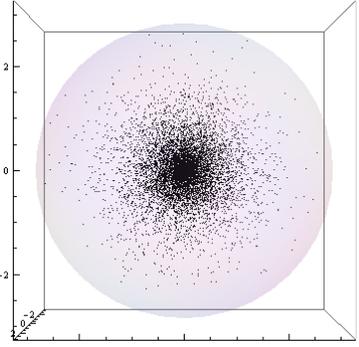
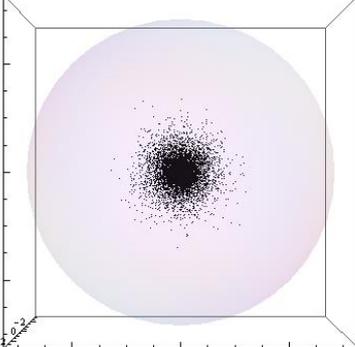
а угол χ имеет распределение с плотностью

$$f(\chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2}}{\int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi},$$

$$(\alpha, \beta, \chi) \in D, D = [\delta_1 \leq \alpha \leq \delta_2, 0 \leq \beta \leq 2\pi, 0 \leq \chi \leq \gamma].$$

Результаты численного эксперимента по построению «облака точек» в шаре радиуса π по этим плотностям представлены в таблице 2.

Таблица 2. Непрерывные изотропное и анизотропное распределения 10 000 точек в шаре радиуса π по нормальному закону

Точка обзора	$f(\alpha, \beta, \chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2} \sin \alpha}{4\pi \int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi}$ $\sigma = 0,5$	$f(\alpha, \beta, \chi) = \frac{e^{-\sigma\chi^2} \sin \alpha}{2\pi(\cos \delta_1 - \cos \delta_2) \int_0^\pi e^{-\sigma\chi^2} d\chi'}$ $\sigma = 0,5, \delta_1 = 0, \delta_2 = \frac{\pi}{4}, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$
{7,4,6}		
{5,0,0}		
{0,0,5}		

5.2. Геометрические факторы анизотропии упругих свойств текстурированных поликристаллов

В данном параграфе демонстрируется способ определения текстурных параметров, определяющих упругие свойства текстурированных поликристаллических материалов с кубической симметрией решетки при различном описании кристаллографической текстуры, включая ее описание через параметры ось-угол. Выполняется аналитическое построение области возможных изменений текстурных параметров.

Применение математических моделей высокого уровня [100], связывающих внутренние параметры материала с возникающей в процессе глубокой пластической деформации текстурой, позволяет научно обоснованно управлять анизотропией физико-механических свойств [101-109].

Как показано в исследованиях [110-112], многие физико-механические свойства макроскопически ортотропных текстурированных металлов и сплавов с кубической симметрией кристаллической решетки определяются текстурными параметрами, которые имеют вероятностно-геометрический смысл и определяются равенствами [113]

$$\Delta_i = \langle Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2 \rangle (i = 1,2,3), \quad (5.2.1)$$

где Q_{ij} - элементы матрицы направляющих косинусов, определяющих положение кристаллографических осей случайным образом ориентированных зерен поликристалла в лабораторной системе координат, связанной с ортотропным образцом; $\langle \dots \rangle$ - операция осреднения по представительному объему текстурированного поликристалла.

В предположении макроскопической однородности микронеоднородных сред, к каковым относятся текстурированные поликристаллы, у которых среднее по объему и по случайному ансамблю совпадают, текстурные параметры могут

быть найдены по известным плотностям распределения при различной параметризации положения подвижных осей

$$\Delta_i = \iiint_{000}^{2\pi 2\pi 2\pi} (Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2) f(\psi, \vartheta, \varphi) d\psi d\vartheta d\varphi,$$

$$\Delta_i = \iiint_{000}^{2\pi 2\pi 2\pi} (Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2) f(\alpha, \beta, \chi) d\alpha d\beta d\chi. \quad i = 1, 2, 3.$$

Матрица направляющих косинусов (поворота) может быть записана как непосредственно через углы Эйлера [36]

$$\|Q_{ij}\| = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \psi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \psi \sin \varphi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \cos \psi \cos \varphi & \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

так и в кватернионом представлении [36]

$$\|Q_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_2 \\ 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_0\lambda_3 & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2\lambda_2\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_1 \\ 2\lambda_1\lambda_3 + 2\lambda_0\lambda_2 & 2\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_0\lambda_1 & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.2)$$

а с учетом равенства (5.2.2) и через параметры ось-угол

$$\left(\lambda_0 = \cos \frac{\chi}{2}, \lambda_1 = \sin \frac{\chi}{2} \sin \alpha \cos \beta, \lambda_2 = \sin \frac{\chi}{2} \sin \alpha \sin \beta, \lambda_3 = \sin \frac{\chi}{2} \cos \alpha \right),$$

$$\|Q_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2\cos^2 \frac{\chi}{2} + 2\sin^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 1 & \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \alpha \sin 2\beta + \sin \chi \cos \alpha & \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin 2\alpha \cos \beta - \sin \chi \sin \alpha \sin \beta \\ \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \alpha \sin 2\beta - \sin \chi \cos \alpha & 2\cos^2 \frac{\chi}{2} + 2\sin^2 \frac{\chi}{2} \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - 1 & \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin 2\alpha \sin \beta + \sin \chi \sin \alpha \cos \beta \\ \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin 2\alpha \cos \beta + \sin \chi \sin \alpha \sin \beta & \sin^2 \frac{\chi}{2} \sin 2\alpha \sin \beta - \sin \chi \sin \alpha \cos \beta & 2\cos^2 \frac{\chi}{2} + 2\sin^2 \frac{\chi}{2} \cos^2 \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

Текстурные параметры (5.2.1) под названием ориентационные факторы впервые были введены в работе [113] для установления количественной связи кристаллографической текстуры с упругим свойствами металлических материалов,

имеющих объемно-центрированную и гранецентрированную симметрию кристаллической решетки. В дальнейшем давались и другие названия этих параметров – инварианты анизотропии, интегральные характеристики текстуры, параметры деформационной анизотропии, отражающие их математическую и физическую сущность [114,115].

В общем случае возможная анизотропия ортотропного текстурированного поликристалла с кубической симметрией структуры определяется некоторой областью определения текстурных параметров. Для геометрического представления области определения текстурных параметров, воспользуемся декартовой системой координат, в которой вдоль каждой оси откладывается значение соответствующего текстурного параметра. Множеству текстурных состояний поликристаллического агрегата соответствует некоторая замкнутая область. Эта область может быть построена аналитически, исходя из следующих ограничений [116]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 2\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1\Delta_2 - \Delta_2\Delta_3 - \Delta_3\Delta_1} &\leq 1, \\ 0 \leq \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, 0 \leq \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, 0 \leq \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Эти равенства вытекают из условия положительности весовых коэффициентов в соответствующей задаче усреднения – определении средних степенных взвешенных собственных значений оператора упругости текстурированного поликристалла [117,118].

Инвариантность этих неравенств относительно циклической перестановки индексов означает, что искомая область, построенная в декартовой системе координат $O\Delta_1\Delta_2\Delta_3$, имеет ось симметрии третьего порядка, одинаково наклоненную к декартовым осям.

Переходя в первом уравнении системы (5.2.3) к равенству

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - 2\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - \Delta_1\Delta_2 - \Delta_2\Delta_3 - \Delta_3\Delta_1} = 1,$$

и выполняя тождественные преобразования, находим

$$3(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2) - 6(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_2\Delta_3 + \Delta_3\Delta_1) + 2(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) - 1 = 0. \quad (5.2.4)$$

Уравнение (5.2.4) задает коническую поверхность, и искомая область находится путем построения линий пересечения этой поверхности с плоскостями, определяемыми тремя последними неравенствами системы (5.2.3) методом «сканирования» [82]. Дальнейшее построение всех элементов кусочно-гладкой поверхности, ограничивающей область изменения текстурных параметров, может быть выполнено путем перехода к цилиндрическим координатам с использованием векторно-матричного алгоритма.

На первом этапе, полагая в уравнении (5.2.4): $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, определяются координаты вершины конуса

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \frac{1}{3}.$$

Далее находятся координаты пересечения конической поверхности с осью $O\Delta_1$: $\Delta_1 = \frac{2}{3}$, и угол α при вершине конической поверхности

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}. \quad (5.2.5)$$

Уравнение конической поверхности в цилиндрической системе координат (рис. 5.3.) может быть представлено в следующей инвариантной форме ме:

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \mathbf{n} s + \mathbf{l}(\varphi) \rho(s),$$

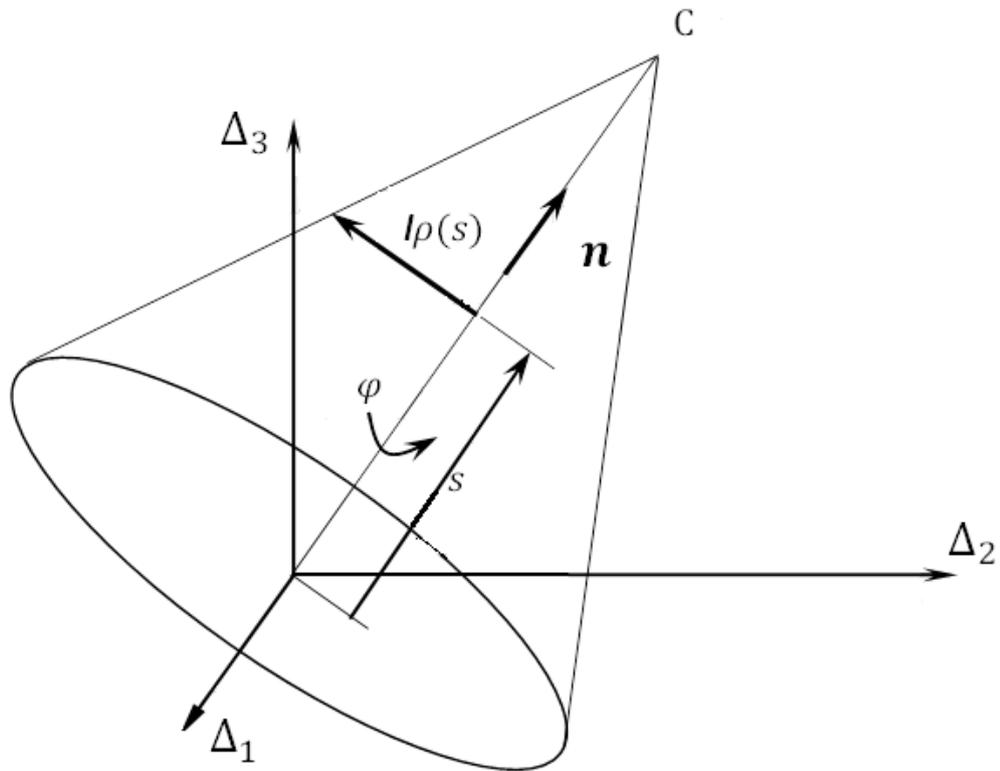


Рисунок 5.3. Схема векторного построения конической поверхности

где $\{n\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ – единичный вектор, определяющий положение оси конуса,

$l(\varphi) = A l(0)$ – азимутальный вектор при произвольном значении полярного угла φ , ортогональный вектору n ,

$\{l(0)\} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ – лежит в плоскости, проходящей через ось конической

поверхности и ось $O\Delta_1$., A – оператор поворота на угол φ вокруг вектора n , которому в произвольном ортогональном базисе соответствует матрица:

$$[A] = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -n_z \sin \varphi & n_y \sin \varphi \\ n_z \sin \varphi & \cos \varphi & -n_x \sin \varphi \\ -n_y \sin \varphi & n_x \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\rho(s) = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} - s \right) \operatorname{tg} \alpha - \text{полярный радиус.} \quad (5.2.6)$$

После выполнения тождественных преобразований находится вид азимутального вектора $\mathbf{l}(\varphi)$

$$\{\mathbf{l}(\varphi)\} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

а с учетом равенства (5.2.6) находится функция $\rho(s)$

$$\rho(s) = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - s \right). \quad (5.2.7)$$

В итоге уравнение конической поверхности, ограничивающей область изменения текстурных параметров, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \cos \varphi - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \end{pmatrix} \rho(s), \quad (5.2.8)$$

где $0 \leq s \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Для определения линии пересечения плоскости $\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 = 0$ и конической поверхности выполняется переход к цилиндрическим координатам в уравнении этой плоскости с помощью соотношения (5.2.6)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}s - \frac{4}{\sqrt{6}}\cos\varphi\rho(s) = 0.$$

Откуда после подстановки соотношения (5.2.8.) получаем зависимость параметра s от угла φ для точек линии пересечения конической поверхности и плоскости

$$s(\varphi) = \frac{8\cos\varphi}{\sqrt{2} + 8\sqrt{3}\cos\varphi}.$$

Путем подстановки этой функции в уравнение конуса (5.2.8) находится векторное уравнение линии пересечения плоскости с конической поверхностью

$$\{r(\varphi)\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} s(\varphi) + \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \end{pmatrix} 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - s(\varphi) \right).$$

Уравнение в операторной форме первого участка конической поверхности

$$r_{k1}(v, \varphi) = r(\varphi)(1 - v) + r_C v, \quad \{r_C\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Два оставшихся участка конической поверхности находятся преобразованием поворота первого участка грани на углы $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ вокруг оси симметрии с помощью уравнений согласно п. 2.2.

$$\mathbf{r}_{к2}(v, \varphi) = \mathbf{r}_{к1}(v, \varphi) + \left(\mathbf{L}\mathbf{L} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + \mathbf{L} \sin \frac{2\pi}{3} \right) \mathbf{r}_{к1}(v, \varphi),$$

$$0 \leq v \leq 1, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$\mathbf{r}_{к3}(v, \varphi) = \mathbf{r}_{к1}(v, \varphi) + \left(\mathbf{L}\mathbf{L} \left(1 - \cos \frac{4\pi}{3} \right) + \mathbf{L} \sin \frac{4\pi}{3} \right) \mathbf{r}_{к1}(v, \varphi),$$

$$0 \leq v \leq 1, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

где

$$[\mathbf{L}] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение первой боковой грани области распределения текстурных параметров имеет вид

$$\mathbf{r}_{\delta 1}(v, \varphi) = \mathbf{r}(\varphi)v, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Две другие боковые грани области распределения текстурных параметров, ограничивающие область изменения текстурных параметров, получаются преобразованием поворота первой боковой грани на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг оси симметрии с помощью уравнений п.2.2.

$$\mathbf{r}_{\delta 2}(v, \varphi) = \mathbf{r}_{\delta 1}(v, \varphi) + \left(\mathbf{L}\mathbf{L} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} \right) + \mathbf{L} \sin \frac{2\pi}{3} \right) \mathbf{r}_{\delta 1}(v, \varphi),$$

$$0 \leq v \leq 1, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

$$\mathbf{r}_{63}(v, \varphi) = \mathbf{r}_{61}(v, \varphi) + \left(LL \left(1 - \cos \frac{4\pi}{3} \right) + L \sin \frac{4\pi}{3} \right) \mathbf{r}_{61}(v, \varphi),$$

$$0 \leq v \leq 1, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

Поверхности, заданные уравнениями $\mathbf{r}_{к1} = \mathbf{r}_{к1}(v, \varphi)$ и $\mathbf{r}_{61} = \mathbf{r}_{61}(v, \varphi)$, изображены на рисунке 5.4.

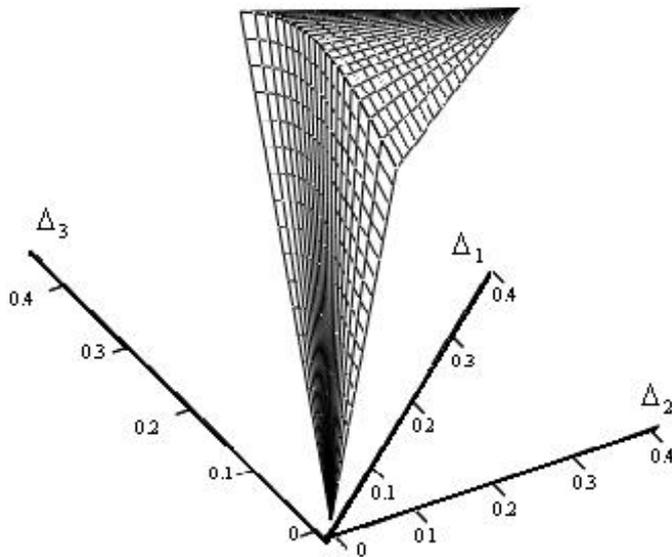


Рисунок 5.4. Формообразующие элементы поверхности, ограничивающие область изменения текстурных параметров

5.3. Траектория текстурных состояний при непрерывной горячей прокатке алюминиевого сплава

Как известно, различные режимы термомеханической обработки приводят к изменению текстуры металлического материала, что сопровождается изменением соответствующих текстурных параметров. Это изменение позволяет в общем случае построить траекторию текстурных состояний, которая не будет выходить за

границы найденной области изменения текстурных параметров. При этом каждой точке траектории соответствует определенная анизотропия как упругих, так и пластических свойств. В работе [119] в рамках решения задачи получения в металле эффективной пластической анизотропии было выполнено исследование трансформации кристаллографической текстуры в процессе непрерывной горячей прокатки алюминиевого сплава в 5-клетевом стане «2800» и выполнен расчет соответствующих текстурных параметров (табл.3).

Таблица 3. Изменение параметров текстуры Δ_i на выходе из клеток непрерывной группы стана «2800»

Номер клетки	Толщина подката мм	Текстурные параметры Δ_i		
		Δ_1	Δ_2	Δ_3
Исходный раскат	52	0,13	0,118	0,147
1	27,7	0,136	0,12	0,147
2	14,07	0,147	0,158	0,164
3	7,97	0,15	0,16	0,184
4	5,09	0,186	0,192	0,242
5	3,0	0,216	0,205	0,282

Эволюция текстурных состояний при прокатке алюминиевого сплава в 5-клетевом стане непрерывной прокатки представлена изменением положений соответствующих точек в найденной области возможных значений текстурных параметров (рис. 5.5).

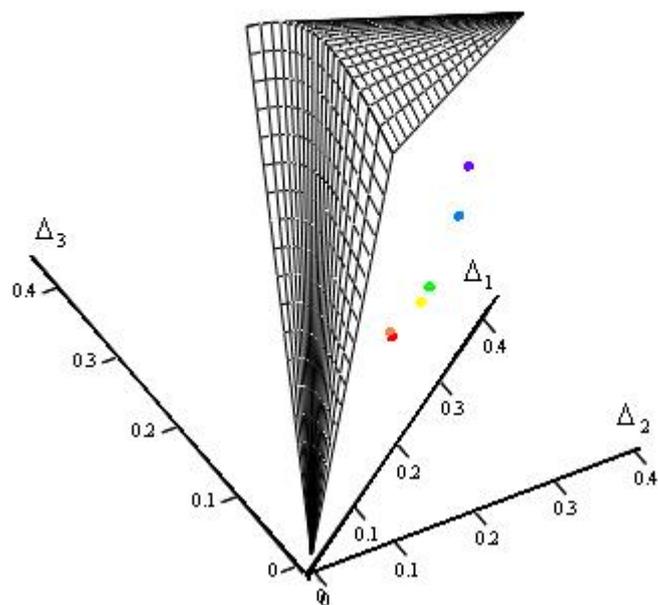


Рисунок 5.5. Траектория текстурных состояний на выходе из клеток непрерывной группы стана «2800», • – исходный раскат, • – 1 клеть, • – 2 клеть, • – 3 клеть, • – 4 клеть, • – 5 клеть

Если ввести в рассмотрение вектор $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$, то с использованием описанной в п. 2.4 функции Хевисайда на отрезке $t \in [0, T]$ по значениям текстурных параметров $\Delta^{(k)} = \Delta^{(k)}(t_k)$ в узлах t_k сетки $\Delta_5 \in \{t_0 = 0 < t_1 \dots < t_5 = T\}$ может быть построена траектория текстурных состояний. В случае линейной интерполяции ее вид определяет функция $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^5 \left[1 + \frac{t - t_k}{\sqrt{(t - t_k)^2}} \frac{t_{k+1} - t}{\sqrt{(t_{k+1} - t)^2}} \right] \left\{ \Delta^{(k)} \left(1 - \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \right) + \Delta^{(k+1)} \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \right\}.$$

Соответствующее изменение анизотропии упругих свойств при прокатке алюминиевого сплава иллюстрирует трансформация указательной поверхности модуля Юнга, представленная на рисунок 5.6.

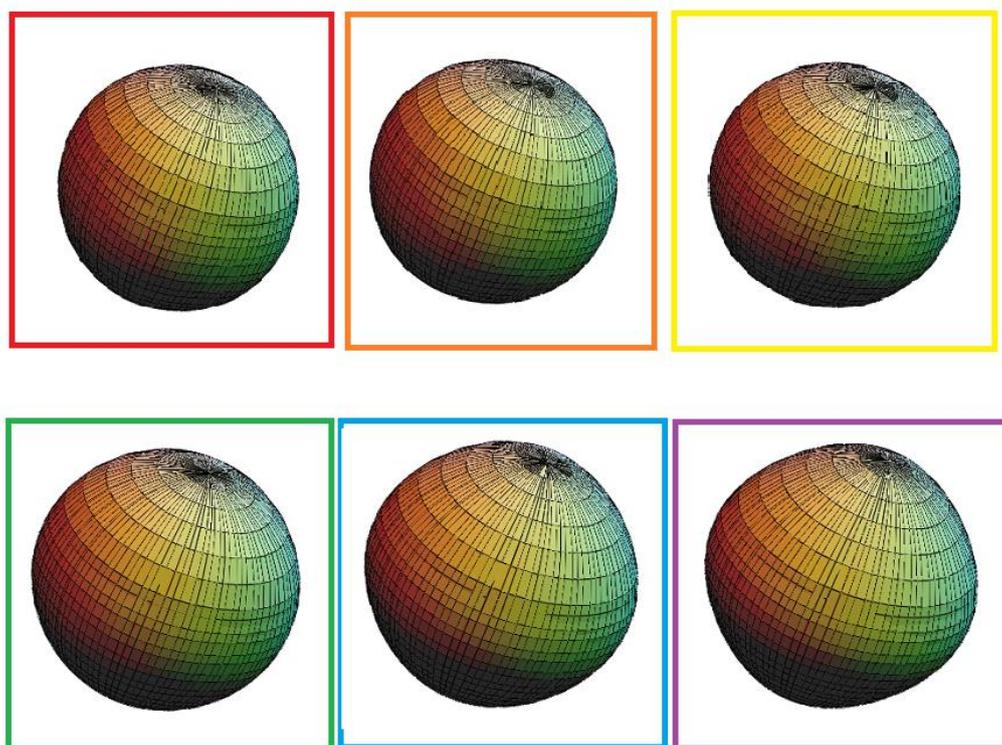


Рисунок 5.6. Трансформация указательной поверхности модуля Юнга прокатке алюминиевого сплава на выходе из клеток непрерывной группы стана «2800», • – исходный раскат, • – 1 клеть, • – 2 клеть, • – 3 клеть, • – 4 клеть, • – 5 клеть

Незначительное отклонение формы указательной поверхности от сферической свидетельствует о незначительном изменении анизотропии упругих свойств на всех этапах металлургического передела, что обусловлено слабой анизотропией соответствующих монокристаллов данного сплава.

Таким образом для текстурированных поликристаллических материалов с кубической симметрией структуры найдены в аналитической форме границы области изменения текстурных параметров, являющихся интегральными характеристиками текстуры и определяемых с помощью косвенных или прямых методов текстурного анализа. Показано, что эволюция текстуры на различных стадиях термомеханической обработки металлических материалов может быть геометрически представлена траекторией текстурных состояний. При этом каждой точке траектории соответствует уникальное анизотропное состояние, которое может быть охарактеризовано известными соотношениями между константами анизотропии соответствующих физико-механических свойств и текстурными параметрами. Предложенный подход может быть использован при решении задач целенаправленного достижения комплекса требуемых технологических или конструкционных свойств полуфабрикатов и изделий из металлических материалов с ОЦК и ГЦК структурами [120]. Достаточно перспективна возможность установления связи рассмотренных в данной работе текстурных параметров с коэффициентами функции распределения ориентации (ФРО), широко используемой в современных методах количественного текстурного анализа. В рамках данного подхода возможно решение принципиально новой важной в теоретическом и практическом плане задачи – построение границ области возможного изменения трёх значимых коэффициентов разложения ФРО.

Выводы по главе 5

1. Показана возможность применения предложенного общего подхода аналитического моделирования сложных геометрических объектов на примере оригинального способа геометрического представления текстуры поликристаллического материала.

2. Найдены статистические характеристики случайных распределений на группе $SO(3)$ в виде совместной плотности распределения параметров ось-угол. Показано, что соответствующие распределения могут быть использованы для описания текстуры поликристаллических материалов с кубической симметрией решетки.

3. Разработаны новые математические методы описания текстуры поликристаллического материала и конструирования области изменения текстурных параметров поликристаллических материалов с кубической симметрии решётки и алгоритм построения траектории текстурных состояний для проверки адекватности геометрической модели области изменения текстурных параметров на основе данных независимого натурального эксперимента. Показано, что траектория полностью лежит в найденной области изменения параметров текстуры. Так же показано, что увеличение степени деформации сопровождается движением точки на траектории текстурных состояний вдоль оси симметрии области изменения текстурных параметров.

4. Найдены функции плотностей равномерных изотропных распределений кристаллографических осей поликристаллических материалов на всем ориентационном пространстве и в его ограниченном объеме, выраженные через параметры ось-угол. Найдены функции плотностей нормальных изотропных и анизотропных распределения кристаллографических осей в текстурированных поликристаллических материалах через параметры ось-угол.

Заключение

В рамках единого подхода создан универсальный комплекс методов аналитического описания сложных геометрических объектов и их преобразований для компьютерного моделирования в пакетах компьютерной алгебры: гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей, обеспечивающего гладкость сопряжения второго порядка, с возможностью задания произвольных точек сопряжения; линейной перспективы одномерных и двумерных объектов для произвольного задания центра перспективы и плоскости проецирования; поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства; нелинейной интерполяции кватернионов для описания плавного сферического движения твердого тела.

В основу создания комплекса аналитических методов был положен принцип независимости описаний геометрических объектов и их преобразований от выбора системы координат, моделирование осуществлялось в алгебраической форме без использования координатной формы записи. Это позволило получать итоговые результаты в компактной аналитической форме удобной для работы в пакетах компьютерной алгебры и для построения математических моделей более высокого уровня.

Демонстрируется преимущество предложенного подхода к геометрическому моделированию в решении научных и инженерных задач путем совместного использования разработанных и существующих аналитических методов.

Осуществлено практическое применение разработанных аналитических методов для решения задач формообразования оболочек и архиграфических решений фасадов высотных зданий.

Продемонстрирована универсальность разработанного комплекса методов в создании динамической модели поверхности желоба горки или санной трассы при произвольном законе изменения перегрузки, заданной начальной скорости движения с учетом конструктивных параметров горки. Также демонстрируется эффективность общего подхода к аналитическому моделированию сложных геометрических объектов и их преобразований в новом геометрическом

представлении изотропных и анизотропных распределений кристаллографических осей, текстурированных поликристаллических материалов и геометрического представления области изменения параметров текстуры. По результатам численных экспериментов выполнены иллюстрации модельных распределений и траектории текстурных состояний.

Созданы системы компьютерного моделирования для численной интерпретации и геометрической визуализации всего комплекса разработанных аналитических методов, реализованные в пакетах компьютерной алгебры Mathcad и Mathematica. Результаты представлены в табличных, графических формах и визуализированы с помощью встроенных графических редакторов.

Литература

1. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир. – 2001. – 604 с.
2. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. —М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М. – 2016. – 400 с.
3. Голованов Н.Н., Носовский Г.В., Фоменко А.Т. Компьютерная геометрия. – М.: Академия. – 2006. – 512 с.
4. Рекомендации. САПР. Типовые методы геометрического моделирования объектов проектирования. Р 50-34-87 // М: Государственный комитет СССР по стандартам, 1988, дата введения 01.01.1989, дата актуализации 01.12.2013, 113 с.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. – Изд. 6-е, М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ» . – 2013. — 336 с.
6. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики / Е.А. Никулин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
7. Кривошاپко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». – 2010. – 560 с.
8. Иванов В.Н., Наср Юнес Аббуши. Архитектура и конструирование оболочек в форме волнистых, зонтичных и каналовых поверхностей Иоахимсталя // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2002. – № 6.– С. 21-24.
9. Кривошاپко С.Н., Иванов В.Н. Классификация циклических поверхностей// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2006. – № 2. – С. 25-34.
10. Иванов В.Н. Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2007. – № 4. – С. 5-10.
11. Митюшов Е.А., Беяева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций. – LAP Lambert Academic Publishing. – 2011. – 134 р.

12. Н.Р. Щербаков, А.А. Щеголева Моделирование поверхностей зубьев контактирующих деталей гипоидной передачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2017. – № 48 – С. 30-35.
13. S.N.Krivoshapko, V.N. Ivanov Encyclopedi of Analytical Surfaces / Springer International Publishing Switzerland. – 2015. – 751p.
14. Куреннов Д.В., Партин А.С. Алгоритм гладкого сопряжения поверхностей // Программные продукты и системы. – 2009. – №3 – С. 62-64.
15. Игнатъев Ю.Г., Агафонов А.А. Проективная геометрия и методы изображений. Учебное пособие. – Казань: Казанский университет. – 2014. – 114с.
16. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. Ред. Норден А.П. – М.: Гостехиздат. – 1956. – С.429-430.
17. Лаптев Г. Ф., Элементы векторного исчисления: Учебное руководство. – М.: Наука. – 1975. – 336 с
18. Сидоренко Л. Компьютерная графика и геометрическое моделирование: Учебное пособие. – СПб.: Питер. – 2009. – 224с.
19. Тюкачев Н.А., Илларионов И.В., Хлебостроев В. Программирование графики в Delphi. СПб, БХВ-Петербург. – 2008, 784 с.
20. Представление матрицы поворота // [электронный ресурс] – URL https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0_%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%BE%D1%80%D0%BE%D1%82%D0%B0 – (01.10.2017)
21. Формула Родрига // [электронный ресурс] – URL https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula – (01.10.2017)
22. Голубев Ю.Ф. Теоретическая механика. – Из-во МГУ. – 2000. –719 с.
23. Представление матрицы поворота в терминах матричной экспоненты https://en.wikipedia.org/wiki/Axis%E2%80%93angle_representation#Exponential_map_from_so.283.29_to_SO.283.29 – (01.10.2017)
24. Emod Kovacs Rotation about an arbitrary axis and reflection through an arbitrary plane / Annales Mathematicae et Informaticae. – 2012 – p.175-186

25. Rebecca M. Brannon A review of useful theorems involving proper orthogonal matrices referenced to threedimensional physical space / Physics and Mechanics Sandia National Laboratories Albuquerque, NM 87185-0820. – 2002. – 190 p.

26. Shoemake K.: Animating rotation with quaternion curves.// In: Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques // SIGGRAPH. – 1985. – pp. 245–254.

27. Rifkat I. Nabiyeu, Rushan Ziatdinov. A mathematical design and evaluation of Bernstein-Bézier curves' shape features using the laws of technical aesthetics // Mathematical Design & Technical Aesthetics. – 2014. – Vol. 2. – № 1. – pp. 6-13.

28. История тентовой архитектуры// [электронный ресурс] — URL <http://www.tentmax.ru/information/history/> — (15.09.2013).

29. Пашин В.М. Оптимизация судов //Л.: Судостроение. – 1983. – 296с.

30. Базилевский, Ю.С. Проектирование формы корпуса судна / Ю.С. Базилевский, Н.А. Вальдман, И.О. Мизин, Г.В. Савинов // Журнал Судостроение. – 1996. – №1 – С. 3-7.

31. Карпов, П.П. Аналитическое описание судовых обводов / Исследования по вопросам повышения эффективности судостроения и судоремонта //Владивосток: ДВГТУ. – 2006. – Выпуск 46 – С. 160 - 164.

32. Битюков Ю.И., Калинин В.А., Токсанбаев М.С., Литвинов В.Б. Создание модели поверхности вентиляторной лопадки для перспективного двигателя нового поколения // Авиационная промышленность. – 2007. – №2. – С. 7-11.

33. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р. Изометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по базовым критериям плавности // Наукові праці Донецького національного технічного університету, серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка», Донецк, ДонНТУ. – 2009. – вып. 10 (153) – С.131-145.

34. Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А.; Штанг Т.В., Smooth conjugation of two intersecting planes arbitrarily oriented in space // 2nd International

Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) IEEE Conference Publications. – 2016. – pp. 1 - 4.

35. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми знаниями из алгебры. – М.: «Наука» . – 1968. – 903с.

36. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. // Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» . – 2001. – 384с.

37. Крутиков С.Л. Базовые инерционные параметры манипуляционных роботов // Мехатроника и робототехника М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2011. – №1. – С. 28-45

38. Херн Д., Бейкер М. П. Компьютерная графика и стандарт. – OpenGL Киев: Вильямс. – 2005 . – 1168 с.

39. Ляшков А.А. Геометрическое и компьютерное моделирование формообразования поверхностей и деталей// Омск: ОмГТУ. – 2013 . – 89 с.

40. Матрица поворота // [электронный ресурс] – URL https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix – (09.08.2017)

41. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. – СПб: Нестор. – 2001. – 276 с.

42. Представление осевого угла вращения // [электронный ресурс] – URL https://en.wikipedia.org/wiki/Axis_angle_representation#Exponential_map_from_so.283.29_to_SO.283.29 – (08.08.2017)

43. Кватернионы и вращение пространства // [электронный ресурс] – URL https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D1%82%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BE%D0%BD%D1%8B_%D0%B8_%D0%B2%D1%80%D0%B0%D1%89%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2%D0%B0 – (10.08.2017)

44. Берестова С.А., Беляева З.В., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А., Рощева Т.А. Математические алгоритмы кроя разворачивающихся элементов пространственных

тонкостенных конструкций // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 6. – С. 26-30.

45. Хорн, Роджер, Ч. Джонсон Матричный анализ // Перевод с англ. Х. Д. Икрамова и др.; Под ред. Х. Д. Икрамова. – М. : Мир. – 1989. –655 с

46. Соболев Н.А. Общая теория изображений. – Архитектура – С. – 2004. – 672с.

47. Данченко Л.В., Керн Т.А. Развитие теории перспективы как средства визуализации архитектурного объекта // Известия казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2011. – № 3.– С. 33-38.

48. Обиралов, А. И. , Лимонов А. Н. Гаврилова Л. А. Фотограмметрия и дистанционное зондирование. – М. КолосС. – 2006. – 335с.

49. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. – М.: Физматлит. – 2006. – 512 с.

50. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов. – Прикладная математика и механика, т.67. – 2003. – вып.2 – С.244-255.

51. Хилл Ф., Программирование компьютерной графики. – «Питер» . – 2002. – 1088с.

52. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – М.: МЦНМО. – 2002. – 40с.

53. Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела. – Учебное пособие МФТИ, Москва. – 2000. – 64 с.

54. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела. – Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 39. – 23 с.

55. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – т.25, № 1. – с. 29-35.

56. Выпуклый регулярный 4-многогранник <https://en.wikipedia.org/wiki/24-cell> .

57. Shoemake K.: Animating rotation with quaternion curves.// In: Proceedings of the 12th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques // SIGGRAPH. – 1985. – pp. 245–254.
58. Бернштейн Н. А. Очерки по физиологии движений и физиологии активности.— М. Наука. – 1966. – 496 с.
59. Огаркова А. Уроки каллиграфии // [электронный ресурс] – URL <http://kalligrafinja.ru/lesson/urok-4-chast-2-uprazhneniya-sdvoennym-karandashom.html> – (07.08.2017)
60. Четыре составляющих плавного движения // [электронный ресурс] – URL http://www.valsis.ru/index.php?option=com_content&view=article&id=77&Itemid=142 – (08.08.2017)
61. Mityushov E. A., Misyura N.E. Exact representation of the unit step function through algebraic functions. // [электронный ресурс] – URL <http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1796>. – (09.08.2017)
62. Kanwal R. P. Generalized Functions: /Theory and Technique, 2nd ed. Boston, MA: Birkhäuser. – 1998. – 462 p.
63. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (Eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / 9th printing. New York: Dover. – 1972. – 1046 p.
64. Bracewell, R. Heaviside's Unit Step Function, $H(x)$. The Fourier Transform and Its Applications// 3rd ed. New York: McGraw-Hill. – 2000. – pp. 61-65.
65. Spanier, J. ,Oldham, K. B. The Unit-Step $u(x-a)$ and Related Functions. // An Atlas of Functions. Washington, DC: Hemisphere. – 1987. – pp. 63-69.
66. Heaviside Step Function // [электронный ресурс] — URL <http://mathworld.wolfram.com/HeavisideStepFunction.html> – (10.08.2017)
67. Sullivan J., Crone L., Jalickee J Approximation of the Unit Step Function by a Linear Combination of Exponential Functions//Journal of. Approximation Theory, 28. – 1980 – pp. 299 - 308

68. Мисюра Н.Е. , Митюшов Е.А. , Жилин С.С. Анимация двенадцати ориентаций твердого тела, равномерно заполняющих ориентационное пространство, из анимации плавного движения по кратчайшей траектории // [электронный ресурс]. — URL https://www.youtube.com/watch?v=_k00jJIBqWY. — (15.09.2017).

69. Савёлов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применение. Справочное руководство. – М.: URSS. – 2010. – с. 296.

70. Мисюра Н.Е., Берестова С.А. Математическое моделирование в дизайне и архитектуре малых форм // Сборник статей XII международной научно-практической конференции Естественные и математические науки в современном мире // Новосибирск СибАк. – 2013. — С. 83-92.

71. Коротич М.А. Композиционное развитие высотной архитектуры// Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ РААСН. – 2010 – № 4, – с. 96-101.

72. Коротич М.И. Торсионное и фрактальное формообразование в архитектуре// [электронный ресурс] – URL: http://www.raasn.ru/persons/o_arch/korotich.htm – (20.07.2017).

73. Santiago Calatrava Эффект торнадо в архитектуре // [электронный ресурс] – URL <http://www.chicagoarchitecture.info/Building/357/The-Chicago-Spire.php&usg> – (01.11.2013).

74. Мисюра Н.Е., Жилин С.С. Матрицы торсионных преобразований // Сборник статей XII международной научно-практической конференции Естественные и математические науки в современном мире // Новосибирск СибАк. – 2013. – С 92 -102.

75. Жилин С.С., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Применение математического моделирования в архитектурном проектировании высотных зданий // УралНИИпроект РААСН. – 2014. – № 2. С. 39–43.

76. Henry J. Cowan, Science and Building: Structural and Environmental Design in the Nineteenth and Twentieth Centuries. – New York, Wiley. – 1978. – 374 p.//перевод – Коуэн Г.Дж./ Строительная наука 19-20 вв. // Проектирование

сооружений и систем инженерного оборудования. – М.: Стройиздат. – 1982. – 359 с.

77. Mei Seen Wo, Gobithaasan R. U., Kenjiro T. Miura. Log-Aesthetic Magnetic Curves and Their Application for CAD Systems // Mathematical Problems in Engineering, Volume. – 2014. –16 p.

78. Ruled Surface // [электронный ресурс]. – URL [http://mathworld.wolfram.com/RuledSurface.html] – (29.04.2017).

79. Generalized Cylinder // [электронный ресурс]. – URL http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedCylinder.html (29.04.2017).

80. Generalized Cone // [электронный ресурс]. – URL http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedCone.html – (29.04.2017).

81. Иванов В.Н. Геометрия и формообразование нормальных поверхностей с семейством плоских координатных линий// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011. –№4 . – С. 6 -14.

82. Митюшов Е.А., Митюшова Л.Л. Математические основы компьютерной геометрии: учеб. пособие // Екатеринбург: УГТУ-УПИ. – 2007. – 61 с.

83. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD. /A Practical Guide (5th edition), Morgan-Kaufmannю. – 2002. – 521 pp.

84. Кривошапко С.Н., Шамбина С.Л. Исследование поверхностей велароидального типа с двумя семействами синусоид на кольцевом плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4. – С. 9-12.

85. Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Геометрия самонесущих покрытий на прямоугольном плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. –№4. – С. 15-18.

86. Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Применение нормальных поверхностей в графическом дизайне и проектировании виражей город и санных трасс // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 4. – С. 3 -9.

87. Очень крутые горки // Сооружения и индустрия спорта. Sports Facilities. – 2010. – №1. С. 34-41.
88. Аристова Л.В. Физкультурно-спортивные сооружения /Быкова Г.И. Голубинский А.П. Жура Ю.Г. Климентьев Н.А. Кондратенков А.Н Кузьмичева Е.В. Лось Е.М. Макарова И.И. Машинский В.А. Мезенцева Н.Б. // [электронный ресурс] – URL <http://userdocs.ru/sport/41425/index.html?page=40> – (10.07.2017).
89. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии, Изд.5, испр. –М.: Издательство ЛКИ. – 2008. – 432 с.
90. Космодемьянский В.А. О движении трехгранника Френе / Сборник научно-методических статей: Теоретическая механика, Выпуск 28 –М.: Издательство Московского университета. – 2012. – С.53-62.
91. М.М. Постников. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. – М.: Наука. – 1979. – 312 с.
92. Митюшов Е.А., Рощева Т.А. Об одной задаче механики несвободной материальной точки //Международный сборник научных трудов. Механика, вып.4, БГУТ, Гомель. – 2010. – С.116-120.
93. Волков С.Д., Клинских Н.А. О распределении постоянных упругости в квазиизотропных поликристаллах // Доклады академии наук СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 565-568.
94. Miles R.E. On random rotations in// Biometrika. – 1965. – V. 52 (3-4). – P. 636-639.
95. Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения. – УМН, 1952. – том 7, выпуск 1(47) . – С. 3-117.
96. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. – Московский центр непрерывного математического образования. – 2002. – 40 с.
97. Bunge H.J. Texture Analysis in Materials Science Mathematical Methods // Helga and Hans-Peter Bunge Wolfratshausen. – 2015. – 595p.

98. Савелова Т.И., Иванова Т.М., Сыпченко М.В. Применение нормальных распределений на группе $SO(3)$ в текстурном анализе. – М.: НИЯУ МИФИ, Монография. – 2010. – 104 с.
99. Сыпченко М.В. Математическое моделирование функции распределения ориентации по кристаллографическим ориентировкам на группе $SO(3)$ // Дис. канд. физ. – мат. наук: 05.13.18/ Сыпченко Мария Владимировна – М. – 2010. – 123 с.
100. Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И. Моделирование эволюции структуры поликристаллических материалов при упругопластическом деформировании // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ. - матем. Науки, Изд-во Казанского ун-та, Казань. – 2010. – №4 – С. 225-237.
101. Ашихмин В.Н. Определение эффективных упругих свойств поликристаллов методом вычислительного эксперимента // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2010. – №4 – С. 5-16.
102. Jöchen K., Böhlke T., Fritzen F. Influence of the crystallographic and the morphological texture on the elastic properties of fcc crystal aggregates // Solid State Phenomena Trans Tech Publications. – 2010. – Vol. 160 – pp. 83-86.
103. Bohlke T., Jochen K., Piat R., Langhoff T., Tsukrov I., Reznik B. Elastic properties of pyrolytic carbon with axisymmetric textures // TECHNISCHE MECHANIK. – 2010. – Vol.30 – pp. 343-353.
104. Skrzypek S.J., Ratuszek W., Bunsch A., Witkowska M., Kowalska J., Goły M., Chruściel K. Crystallographic texture and anisotropy of electrolytic deposited copper coating analysis // Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering. – 2010. – Vol.43/1. – pp. 264-268.
105. Kenfaui D., Chateigner D., Gomina M., Noudem J. Texture, mechanical and thermoelectric properties of $Ca_3Co_4O_9$ ceramics // Journal of Alloys and Compounds. – 2010. – pp. 472-479.
106. Sheng G., Bhattacharyya S., Zhang H., Chang K., Shang S., Mathaudhu S., Liu Z., Chen L. Effective elastic properties of polycrystals based on phase-field description // Materials Science and Engineering A. – 2012. – pp. 67-71.

107. Stebner A.P. Brown D.W., Brinson L.C. Young's modulus evolution and texture-based elastic–inelastic strain partitioning during large uniaxial deformations of monoclinic nickel–titanium// *Acta Materialia*. – 2013. – Vol. 61 – pp. 1944-1956.

108. Bohlke T., Langhoff T., Piat R. Bounds for the Elastic Properties of Pyrolytic Carbon//*Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. – 2009. – pp.431-434.

109. Lobos M., Böhlke T. Materials design for the anisotropic linear elastic properties of textured cubic crystal aggregates using zeroth-, first- and second-order bounds /*International Journal of Mechanics and Materials in Design*. / [электронный ресурс] – URL <http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10999-014-9272-z#page-1> – (18.07.2017) .

110. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. Анизотропия физических свойств металлов //М.: Металлургия. – 1985. –137 с.

111. Митюшов Е.А., Гельд П.В., Адамеску Р.А. Обобщенная проводимость и упругость макроднородных гетерогенных материалов //М.: Металлургия. – 1985. – 145 с.

112. Михеев, В. А., Зайцев В. М. Анизотропные материалы // [электронный ресурс] электрон. учеб. пособие // Минобрнауки России, гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т), Самара. – 2012. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM).

113. Адамеску Р.А., Митюшов Е.А, Митюшова Л.Л, Юшков В.И. Ориентационные факторы анизотропии упругих свойств металлов с кубической решеткой //Физика металлов и металловедение. – 1985. – т. 60, №5 – С. 993-999.

114. Adamesku R.A. et al. Invarianten der Anisotropie elastischer Eigenschaften von texturierten kubischen Metallen //*Zeitschrift fur Metallkunde*. – 1985. – №11. – pp 747-749.

115. Брюханов А.А, Гохман А.Р. Расчётный метод определения текстурных параметров тензорных свойств кубически и гексагональных металлов //Заводская лаборатория. – 1987. – т.53, №1. – С. 24-26.

116. Одинцова Н.Ю. Математическая и физическая структура поликристаллических упругих тел // Автореф. дис. на соиск. учен.степ. к.ф.-м.н.: специальность 01.02.04 Механика деформируемого твердого тела // Одинцова

Надежда Юрьевна; Ин-т механики сплошных сред УрО РАН.– Екатеринбург. – 2003. – 16 с.

117. Berestova S.A., Mityushov E.A., Odintsova N.Yu. Effective elastic properties of textured cubic polycrystals //Texture and Microstructure. – 2002. – Vol.35(2), pp. 99-111.

118. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Трансформация указательных поверхностей упругих свойств текстурированных материалов // Пермь. Математическое моделирование систем и процессов. – 2006. – №14. – С. 142-146.

119. Гречников Ф.В., Арышенский В.Ю. Феноменологические и кристаллографические основы формирования заданной анизотропии свойств при прокатке высокотекстурованных алюминиевых лент //Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2002. – №1. – С. 68-77.

120. Арышенский Ю.М., Гречников Ф.В., Арышенский В.Ю. Получение рациональной анизотропии в листах. – М.: Металлургия. – 1987. – 141с.