На правах рукописи

Мисюра Наталья Евгеньевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ СЛОЖНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: **Берестова Светлана Александровна**
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Савелова Татьяна Ивановна**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», профессор кафедры «Прикладная математика», г. Москва

Килин Александр Александрович
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет», профессор кафедры теоретической физики, г. Ижевск

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российского университета дружбы народов», г. Москва

Защита диссертации состоится «04» декабря 2018 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.188.08, созданного на базе Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», по адресу: 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, 29, ауд. 423б.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (http://www.pstu.ru).

Автореферат разослан «___»____________2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент А.И. Швейкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование физико-механических процессов и инженерных сооружений часто связано с необходимостью создания геометрических моделей. С их помощью можно определить образ существующего или проектируемого объекта, провести соответствующий постановке задачи численный эксперимент и осуществить необходимые коррекции. Геометрической моделью в широком смысле называется совокупность формального описания исследуемого объекта и соответствующего ему визуального образа, представленного в пространствах различной размерности. Формальным описанием в связи с развитием современных методов компьютерного моделирования в первую очередь является численное моделирование геометрических объектов окружающего мира. При этом их многообразие создается с использованием базовых геометрических элементов: точки, линии и поверхности.

В последние годы появились и нашли широкое применение специализированные пакеты для компьютерного моделирования геометрических объектов, из которых наибольшее распространение на российском рынке получили *Ansys, Компас, Лира, AutoCAD, SolidWorks, Illustrator, CorelDraw*. Математический аппарат, используемый при создании этих пакетов, основан на численных методах задания объектов. Большой вклад в их разработку и описание внесли *Д. Роджерс, Дж. Адамс, М. Агастона, С. Кунс, Жан Галльера, Карл де Бур, Н.Н. Голованов, Г.В. Носовский, А.Т Фоменко, Е.А. Никулин.* Создание сложных геометрических моделей осуществляется с использованием группы преобразований, таких как сопряжение, пересечение, объединение, трансляция, вращение, деформация, масштабирование.

Для повышения точности, сокращения вычислительных затрат и алгоритмического удобства при компьютерном моделировании весьма эффективным инструментом являются аналитические методы. Они позволяют получить связь между параметрами объекта моделирования в аналитической форме, исследовать различные его свойства и анализировать их качественное поведение. Аналитическими методами описания геометрических объектов и их преобразований занимаются *R. M. Brannon, E. Kovacs, M. Behandish, С.Н. Кривошапко, В.Н. Иванов, Н.Р. Щербаков, П.Г. Доля* . Несмотря на первенство в исторической ретроспективе, как самостоятельное направление аналитическое моделирование геометрических объектов и их преобразований не так широко развито.

Существует отдельная группа специализированных математических пакетов компьютерной алгебры – *MatLab, Mathematica, Mathcad, Maple*, которые позволяют создавать геометрические модели, используя преимущества аналитического моделирования. Актуальным является развитие аппарата аналитического описания сложных геометрических объектов на основе преобразований, не зависимых от выбора системы координат. Это даст возможность создавать математические модели объектов и применять их как самостоятельные элементы при решении различных научных и прикладных задач.

Цель работы: создание комплекса универсальных методов аналитического описания сложных геометрических объектов, применимого для решения задач математического моделирования в различных областях.

Для достижения цели диссертационной работы решены следующие **задачи:**

1. Анализ существующих методов геометрического моделирования: гладкого сопряжения кривых и плоскостей; построения линейной перспективы плоских и объемных геометрических объектов; описания сферического движения твердого тела и операции поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного направления и положения.
2. Разработка метода аналитического описания гладкого сопряжения кривых и поверхностей в векторной форме и получение алгоритма построения поверхности сопряжения как самостоятельного объекта.
3. Разработка и реализация векторного алгоритма операции поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства.
4. Разработка метода аналитического описания и алгоритма построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов при произвольном задании плоскости проецирования и центра перспективы.
5. Построение нелинейной интерполяции кватернионов и на его основе получение аналитического описания плавного сферического движения абсолютно твердого тела.
6. Разработка комплекса прикладных программ для описания преобразований сложных геометрических объектов в пакетах компьютерной алгебры.

7.Демонстрация универсальности разработанных математических методов на примере компьютерного моделирования инженерных объектов и при решении естественно-научных задач.

Научная новизна:

1. Предложен метод для аналитического описания сложных геометрических объектов и преобразований, удовлетворяющий требованию их независимости от выбора системы координат.
2. Выполнено аналитическое описание гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей, получено аналитическое представление и компьютерная модель поверхности их сопряжения.
3. Разработан оригинальный метод аналитического построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов.
4. Впервые получено аналитическое описание плавного сферического движения твердого тела с использованием нелинейной интерполяции кватернионов.
5. Разработана система компьютерного моделирования для реализации рассмотренных в диссертационной работе аналитических методов преобразований сложных геометрических объектов.
6. Получено аналитическое описание динамической модели поверхности желоба горки или санной трассы и осуществлено ее компьютерное моделирование в пакете компьютерной алгебры Mathcad.

Достоверность результатов подтверждается соответствием представленных в работе результатов моделирования частным решениям, полученным другими исследователями, а также удовлетворительными результатами решения тестовых задач.

Практическая значимость работы состоит в возможности использовать разработанные аналитические методы в специализированных пакетах компьютерной алгебры, а также в широком их применении для описания высокотехнологичных инженерных объектов сложной геометрии, в том числе – с учетом геометрических, кинематических и динамических характеристик объекта моделирования. Разработан новый комплекс прикладных программ для компьютерного моделирования оболочек высотных зданий, архитектурных решений фасадов, поверхности желоба горки и санной трассы, а также текстуры поликристаллического материала.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новый универсальный комплекс аналитических методов описания сложных геометрических объектов и их преобразований для компьютерного моделирования: гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей; линейной перспективы одномерных и двумерных объектов при произвольном задании центра перспективы и плоскости проецирования; поворота геометрических объектов вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства; нелинейной интерполяции кватернионов для описания плавного сферического движения твердого тела.
2. Динамическая модель поверхности желоба горки или санной трассы при произвольном законе изменения перегрузки, заданной начальной скорости движения и с учетом конструктивных параметров горки.
3. Аналитический вид функции плавного пуска и торможения для её использования в задачах компьютерного моделирования движения механических систем.
4. Новый способ описания и компьютерной визуализации текстуры поликристаллических материалов, в том числе ортотропных материалов с кубической симметрией решетки с использованием статистических характеристик случайных распределений на группе SO(3) в параметрах ось-угол.

Апробация работы. Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на Всероссийских и Международных конференциях: XII Международной научно-практической конференции «Естественные и математические науки в современном мире» (Новосибирск, 2013), II Всероссийской научной школе-конференции студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Научные исследования и инновации в аэрокосмической технике и технологиях» (Пермь, 2013), Международной научно - практической конференции «Современный город: проектирование, строительство и развитие» (Екатеринбург, 2014), VIII Российской научно-технической конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций MRDMS» (Екатеринбург, 2014), межвузовском научном семинаре «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы», (Москва, 2014), Международном форуме и выставке высотного строительства FORUM RUSIA 100+ (Екатеринбург, 2014), Всероссийской научной конференции «Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций» к 50-летию кафедры «Динамика и прочность машин» (Пермь, 2015), Международной научной конференции «Textile Composites and Inflatable Structures» Structural Membranes (Барселона, 2015), Международной научной конференции «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций MRDMS) (Екатеринбург, 2016, 2018), XI Международной научной конференции «Полиномиальная Компьютерная Алгебра» (Санкт-Петербург, 2018).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах кафедры теоретической механики УрФУ, г. Екатеринбург (рук. д.ф.-м.н. С.А. Берестова), кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.т.н. А.Н. Аношкин), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н. П.В. Трусов); на семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН, д.т.н. В.П.Матвеенко), на тридцать девятом межвузовском научном семинаре «Геометрия и расчет тонких оболочек неканонической формы», Инженерная академия РУДН, г. Москва (рук. д.т.н. В.Н. Иванов).

Публикации. Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 14 публикациях, из них 6 статей опубликованы в журналах, рекомендованных для опубликования результатов диссертационных исследований по направлению 05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 2 статьи – в изданиях, индексируемых в международных базах цитирования Scopus; 4 статьи –в сборниках материалов конференций, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и/или Web of Science; получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и библиографического списка литературы. Диссертация содержит 121 машинописных страниц, 39 рисунков и 4 таблицы. Библиографический список включает 120 источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обсуждается актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи диссертационной работы. Аргументируются научная новизна полученных результатов и практическая значимость работы, достоверность полученных результатов и положения, выносимые на защиту.

В первой главе приведен подробный обзор ключевых особенностей основных направлений математического моделирования сложных геометрических объектов и их преобразований с целью поиска новых описаний для использования их в пакетах компьютерной алгебры. Рассмотрено два основных направления геометрического моделирования: методы численного моделирования, используемые в САПР и компьютерной графике, и аналитические методы. Представлен анализ существующих методов математического моделирования гладкого сопряжения и построения центральной проекции одномерных и двумерных объектов, методов описания поворота геометрических объектов, а также описание методов интерполяции кватернионов для задания сферического движения твердого тела. На основе обзора сделан вывод о целесообразности получения компактных и алгоритмически удобных аналитических описаний преобразований геометрических объектов. Аргументируется необходимость создания комплекса универсальных математических методов для аналитического описания сложных геометрических объектов, в основе которых лежит выполнение требований независимости от выбора системы координат и совместимости с существующими аналитическими представлениями объектов.

Во второй главе диссертационной работы представлен новый комплекс универсальных математических методов для выбранной группы геометрических преобразований. На всех этапах моделирования использовалось независимое от координатного базиса представление геометрических объектов и их преобразований. Формальный инструмент моделирования базируется на алгебре векторов и кватернионов. Основными компонентами решения являются векторные алгоритмы преобразований, алгебраический подход к решению векторных и матричных уравнений и аналитические методы построения кривых и поверхностей.

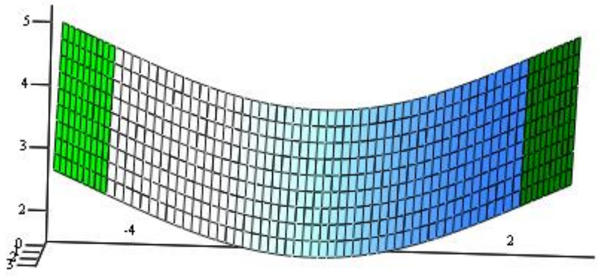

Рис.1. Поверхность гладкого сопряжения двух плоскостей, заданных единичными векторами нормали и фиксированными точками этих плоскостей

В основе метода *гладкого сопряжения двух пересекающихся плоскостей* лежит нахождение образующей поверхности сопряжения, которая определяется векторным полиномом пятой степени, удовлетворяющим условию гладкости второго порядка. Реализована визуализация поверхности гладкого сопряжения в системе компьютерной алгебры Mathcad (рис.1) как самостоятельного геометрического объекта.

Приведено решение задачи о *повороте геометрического объекта вокруг оси произвольного положения, проходящей через заданную точку пространства.* Представлена аналитическая формула поворота в векторном виде, отличная от известных наличием радиус-вектора $\boldsymbol{r_1}$ заданной точки пространства:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + (1 - \cos\vartheta)\big(\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1})\big) + \sin\vartheta\big(\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_1})\big),$$

где $\boldsymbol{l}$ – единичный вектор оси поворота, ϑ – угол поворота.

Предложена матричная запись этой формулы и выполнено сравнение алгоритма на ее основе с традиционным алгоритмом компьютерной графики, включающим последовательное умножение семи матриц – преобразований вращений вокруг координатных осей и последовательных трансляций. Численный эксперимент показал преимущество предлагаемой в работе геометрической модели поворота.

Метод *построения линейной перспективы* основан на построении алгоритма центрального проецирования в векторной форме. В результате центральная проекция пространственной линии $\boldsymbol{r_2} = \boldsymbol{r_2}(u)$ на произвольную плоскость и при произвольном выборе центра проецирования определяется соотношением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_1} + \frac{(\boldsymbol{r_3} - \boldsymbol{r_1}) \cdot \boldsymbol{n}}{(\boldsymbol{r_2}(u) - \boldsymbol{r_1}) \cdot \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r_2}(u) - \boldsymbol{r_1}),$$

где $\boldsymbol{r_1}$ – центр проецирования, $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к плоскости проекций, $\boldsymbol{r_3}$ – фиксированная точка картинной плоскости.

В основе метода *моделирования плавного сферического движения абсолютно твердого тела* лежит определение ориентации твердого тела с помощью кватернионов $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\boldsymbol{i_1} + \lambda_2\boldsymbol{i_2} + \lambda_3\boldsymbol{i_3}$ с единичной нормой $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Единичные кватернионы рассматриваются как четырехмерные векторы, которые задают положение точек на трехмерной единичной гиперсфере в четырехмерном пространстве.

В качестве примера была получена кратчайшая траектория в пространстве ориентаций, построение которой осуществлено набором дуг большого круга на поверхности единичной гиперсферы, соединяющих вершины правильного четырехмерного многогранника, вписанного в эту гиперсферу.

Для построения закона плавного движения твердого тела в работе получен оригинальный метод нелинейной интерполяции кватернионов с использованием функции плавного пуска и торможения

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{12}\left[1+\frac{t-t_k}{\sqrt{(t-t_k)^2}}\cdot\frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{(t_{k+1}-t)^2}}\right]\times\left\{\boldsymbol{\lambda}^{(k)}\frac{\sin[\vartheta_{k\,k+1}(1-f_k(t))]}{\sin\vartheta_{k\,k+1}}+\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)}\frac{\sin[\vartheta_{k\,k+1}f_k(t)]}{\sin\vartheta_{k\,k+1}}\right\},$$

$$f_k(t)=6\left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right)^5-15\left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right)^4+10\left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right)^3,$$

где $0\leq t\leq T$, $\vartheta_{k\,k+1}-$ длина дуги между вершинами правильного двадцатичетырехячейника в радианах, t_k- момент времени для соответствующего узла интерполяции.

Функция плавного пуска и торможения $f_k(t)$ определялась в виде полинома пятой степени, коэффициенты которого находились из условий:

$$f(0)=0, f(T)=1,\ \dot{f}(0)=0, \dot{f}(T)=0, \ddot{f}(0)=0, \ddot{f}(T)=0.$$

Аналитическое представление закона плавного сферического движения твердого тела осуществляется следующим преобразованием в используемой в пакетах компьютерной алгебры матричной форме:

$$\{r\}=[R(t)]\{r_0\},$$

где $[R(t)]$ – функциональная матрица, записанная через координаты единичного кватерниона $\boldsymbol{\lambda}(t)$, а $\{r_0\}$ – вектор-столбец, определяющий положение точки тела до преобразования поворота,

$$[R(t)]=\begin{pmatrix}1-2\lambda_2^2(t)-2\lambda_3^2(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_2(t)-2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 2\lambda_1(t)\lambda_3(t)+2\lambda_0(t)\lambda_2(t)\\ 2\lambda_1(t)\lambda_2(t)+2\lambda_0(t)\lambda_3(t) & 1-2\lambda_3^2(t)-2\lambda_1^2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t)-2\lambda_0(t)\lambda_1(t)\\ 2\lambda_1(t)\lambda_3(t)-2\lambda_0(t)\lambda_2(t) & 2\lambda_2(t)\lambda_3(t)+2\lambda_0(t)\lambda_1(t) & 1-2\lambda_1^2(t)-2\lambda_2^2(t)\end{pmatrix},$$

$$\{r_0\}=\{x_{01},\quad x_{02},\quad x_{03}\}^T.$$

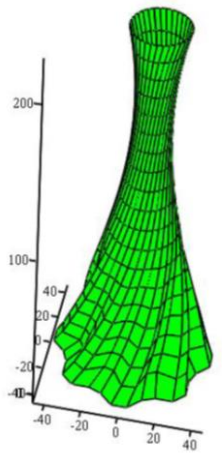

Рис.2. Визуализация математической модели оболочки высотного здания

В третьей главе диссертационной работы продемонстрировано применение разработанных математических моделей второй главы. На основе метода гладкого сопряжения, описанного во второй главе, выполнено *моделирование оболочки высотного здания* с вогнутым профилем с направляющей в виде полинома, коэффициенты которого выражены через девять конструктивных параметров.

Геометрической моделью служит кинематическая поверхность заметания, образованная вертикальным движением непрерывно изменяющегося фигурного каркаса. Профиль башни задает вогнутая направляющая кривая, которая определяется полиномом третей степени $R(z)$.

Геометрическая модель оболочки высотного здания (рис.2), образованная сопряжением двух поверхностей, представлена одним векторным равенством:

$$\boldsymbol{r}(z,t) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{(h-z)}{\sqrt{(h-z)^2}}\right)\boldsymbol{r}_1(z,t)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{(z-h)}{\sqrt{(z-h)^2}}\right)\boldsymbol{r}_2(z,t),$$

где $\{r_1(z,t)\} = \begin{pmatrix}(R(z)-a(R(z)-R(h))\sin^2 nt)\cos t\\ (R(z)-a(R(z)-R(h))\sin^2 nt)\,sin\,t\\ z\end{pmatrix}$, $\{r_2(z,t)\} = \begin{pmatrix}R(z)\cos t\\ R(z)\sin t\\ z\end{pmatrix}$,

$0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le z \le H$, H – высота объекта моделирования, h – высота до линии сопряжения поверхностей.

Моделирование архиграфического решения объектов городской среды с использованием линейной перспективы поверхности продемонстрировано на примере поэтапного создания плоского фасадного изображения с эффектом пространственной протяженности. При этом за основу выбирается велароидальная поверхность, направляющей для которой служат отрезки, ограничивающие фасад здания. Сам фасад при этом совпадает с картинной плоскостью линейной перспективы.

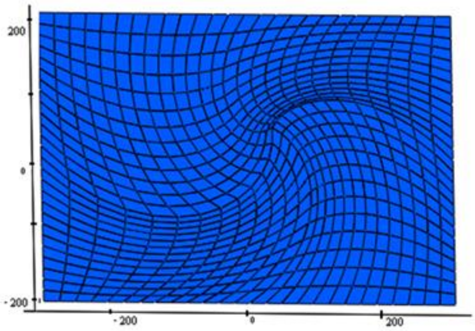

Рис.3. Линейная перспектива закрученной велароидальной поверхности

Для формирования трехмерной модели изображения используется поверхность, заданная в параметрической форме

$$\boldsymbol{r} = \left\{d\left(1-\frac{|u|}{a}\right)\left(1-\frac{|v|}{b}\right), u, v\right\}, -a \le u \le a, -b \le v \le b.$$

Произведено торсионное преобразование полученной поверхности и с учетом результатов второй главы визуализирована геометрическая модель фасадного изображения (рис.3) по полученному алгоритму центрального проецирования.

В четвертой главе продемонстрировано совместное применение предложенного метода поворота геометрического объекта с традиционными аналитическими методами описания геометрических объектов на примере построения *динамической модели поверхности горки и санной трассы*. Решение задачи выполняется последовательно. Осуществляется интегрирование уравнений Френе для частного случая, когда заданная кривая является линией откоса, характеризующейся постоянством отношения кривизны к кручению. Затем по известному закону изменения кривизны находится уравнение линии откоса. Для решения задачи моделирования виража горки или санной трассы решается динамическая задача нахождения осевой линии горки по заданному закону изменения перегрузки и выполняется геометрическое моделирование поверхности желоба.

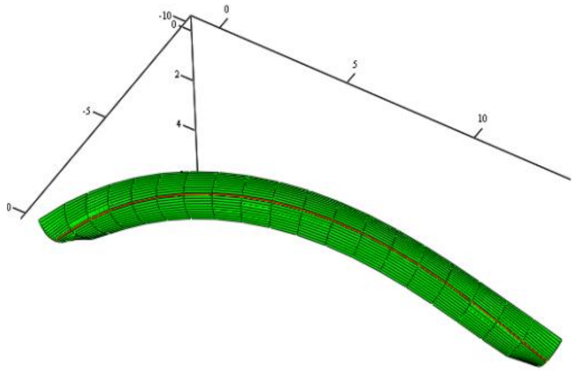

Рис. 4. Поверхность, образующая желоб на вираже, при заданном законе перегрузки

Направляющая кривая и поверхность желоба горки или санной трассы задается следующими параметрами: v_0 – скорость при входе в вираж, γ – уклон (угол между касательной к осевой линии и горизонтом), l – длина виража, r – радиус образующей (шпангоута), $\Pi(s)$ – закон изменения перегрузки.

Закон изменения перегрузки определяет суммарную реакцию поверхности желоба при движении тела массы m равенством

$$R(s) = \Pi(s) mg \sin\gamma, \quad \Pi(0) = \Pi(l) = 1.$$

Поверхность, определяющая форму желоба горки или санной трассы на вираже (рис.4), задается в следующем операторном виде:

$$\boldsymbol{r}'(s,u) = \boldsymbol{r}(s,u) + [\boldsymbol{L}(s)\boldsymbol{L}(s)(1-\cos\psi(s)) + \boldsymbol{L}(s)\sin\psi(s)](\boldsymbol{r}(s,u) - \boldsymbol{r}_{\text{н}}(s)),$$

где $0 \le s \le l, \quad -u^* \le u \le u^*$,

$\boldsymbol{r}(s,u) = \boldsymbol{r}_{\text{н}}(s) + (r\sin 2u\,\boldsymbol{n}(s) + 2r\sin^2 u\,\boldsymbol{b}(s)), \boldsymbol{r}_{\text{н}}(s) = \int_0^s \boldsymbol{\tau}(s)\,ds,$ оператору $\boldsymbol{L}(s)$ в произвольном ортогональном базисе соответствует кососимметрическая матрица, определяемая единичным вектором касательной, $\psi(s)-$ угол, определяющий поворот нормальной реакции $\boldsymbol{R}(s)$ вокруг вектора касательной при движении вдоль осевой линии горки, $\varphi(s)$ –угол поворота естественного трехгранника, $\cos\psi(s) = \frac{1}{\Pi(s)}, \sin\psi(s) = \frac{\sqrt{\Pi^2(s)-1}}{\Pi(s)}$,

$$\{\tau(s)\} = \begin{pmatrix} \sin\gamma\ \sin\varphi(s) \\ -\sin\gamma\ \cos\varphi(s) \\ \cos\gamma \end{pmatrix}, [L(s)] = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_3(s) & \tau_2(s) \\ \tau_3(s) & 0 & -\tau_1(s) \\ -\tau_2(s) & \tau_1(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

В пятой главе диссертационной работы продемонстрировано применение математического аппарата второй главы для нового геометрического представления текстуры поликристаллических материалов.

Описание случайных распределений на группе $SO(3)$ *в параметрах ось-угол* осуществляется для геометрического представления распределений кристаллографических осей текстурированных поликристаллических материалов. Смоделированы плотности равномерных и неравномерных распределений точек в параметрах ось-угол.

С использованием полученных плотностей численным методом осуществлены геометрические представления распределений ориентаций кристаллографических осей (рис.5).

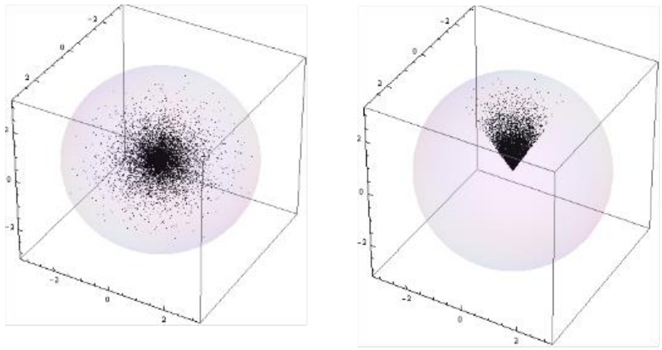

Рис.5. Геометрические представления распределения 10 000 точек в шаре радиуса π по нормальным законам

Выполнено геометрическое представление области изменения текстурных параметров $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (интегральных характеристик, описывающих преимущественную ориентацию кристаллографических осей) с учетом положительности весовых коэффициентов в соответствующей задаче усреднения при определении средних степенных взвешенных собственных значений оператора упругости текстурированного поликристалла. С использованием полученного во второй главе метода поворота геометрического объекта вокруг оси произвольного положения визуализированы участки конической поверхности и соответствующие им боковые поверхности области изменения текстурных параметров (рис.6). Адекватность геометрического представления области изменения текстурных параметров подтверждается разработанным алгоритмом визуализации текстурных состояний на основе данных натурного эксперимента (рис.6).

Предложен метод построения *траектории текстурных состояний алюминиевого сплава* (графической иллюстрации изменения текстуры) на основе данных по изменению параметров текстуры Δ_i на выходе из клетей непрерывной группы стана «2800» (рис.6).

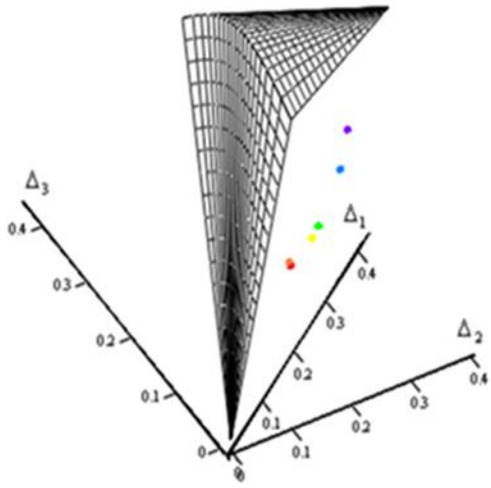

Рис.6. Формообразующие элементы поверхности, ограничивающие область изменения текстурных параметров, и текстурные состояния алюминиевого сплава на выходе из клетей непрерывной группы стана «2800»,
• – исходный раскат, • – 1 клеть, • – 2 клеть, • – 3 клеть, • – 4 клеть, • – 5 клеть

Аналитическое представление соответствующей траектории в линейной интерполяции имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Delta}(t) = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{2}\left[1 + \frac{t-t_k}{\sqrt{(t-t_k)^2}} \cdot \frac{t_{k+1}-t}{\sqrt{(t_{k+1}-t)^2}}\right] \cdot \left\{\mathbf{\Delta}^{(k)}\left(1 - \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right) + \mathbf{\Delta}^{(k+1)} \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right\},$$

где $\mathbf{\Delta}^{(k)} = \left\{\Delta_1^{(k)}, \Delta_2^{(k)}, \Delta_3^{(k)}\right\}$ – вектор текстурных параметров в узле интерполяции.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. С использованием алгебр векторов и кватернионов создан комплекс оригинальных аналитических моделей и методов для описания сложных геометрических объектов и их преобразований. В основе их разработки был положен единый подход к аналитическому описанию геометрических объектов, основанный на алгебраических преобразованиях без использования координатной формы записи. Это позволило получать итоговые результаты в компактной аналитической форме, алгоритмически удобной для работы в пакетах компьютерной алгебры и для построения новых математических моделей более высокого уровня.
2. Создан аналитический метод гладкого сопряжения кривых и плоскостей, обеспечивающих гладкость второго порядка. Поверхность сопряжения представлена аналитически как самостоятельный геометрический объект.

3. Получено аналитическое описание метода центрального проецирования для построения линейной перспективы одномерных и двумерных объектов без введения глобальной и локальной систем координат.

4. С использованием полученной в работе нелинейной интерполяции кватернионов разработан метод аналитического описания плавного сферического движения абсолютно твердого тела.

5. Создан комплекс прикладных программ для компьютерного моделирования сложных геометрических объектов и их преобразований в пакете компьютерной алгебры Mathcad, реализующий предложенные в работе аналитические методы. Результаты представлены в табличных или графических формах и визуализированы с помощью встроенного графического редактора.

6. Продемонстрировано практическое применение разработанных математических методов и комплекса прикладных программ при формообразовании оболочек высотных зданий и архиграфических решений фасадов.

7. В результате совместного применения разработанной модели поворота и существующих аналитических методов описания геометрических объектов создана динамическая модель поверхности желоба горки и санной трассы.

8. Показана эффективность общего подхода к аналитическому моделированию сложных геометрических объектов и их преобразований в новом геометрическом представлении изотропных и анизотропных распределений кристаллографических осей, текстурированных поликристаллических материалов и геометрического представления области изменения параметров текстуры. По результатам численных экспериментов выполнены иллюстрации модельных распределений и траектории текстурных состояний.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Жилин С.С., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Применение математического моделирования в архитектурном проектировании высотных зданий // УралНИИпроект РААСН. – 2014. – № 2. – С. 39–43. (**ВАК**)

2. Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Применение нормальных поверхностей в графическом дизайне и проектировании виражей горок и санных трасс // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 4. – С. 3 -9. (**ВАК**)

3. Берестова С.А., Копытов Н.П., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Структура оператора упругости поликристаллического материала. Тезисы докладов VIII

Российской научно-технической конференции "Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций". – Екатеринбург. – 2014. – С. 2.

4. Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Аналитический метод построения области возможного изменения текстурных параметров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – С. 31-42. (**ВАК**, **SCOPUS**)

5. Мисюра Н.Е., Жилин С.С. Алгоритм сопряжения участков гладких регулярных поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №2. – С. 1-7. (**ВАК**)

6. Berestova S.A., Zhilin S.S., Misyura N.E., Mityushov E.A. A Method for modelling an architectural drawing type solution for environmental objects using linear perspective on a flat surface // Mathematical Design & Technical Aesthetics. – 2015. – № 1 (3). – С. 11-23.

7. Berestova S.A., Belyaeva Z.V., Misyura N.E., Mityushov E.A. Invariant algorithms of spatial constructions elements forming and cutting // Proceedings of the 7th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, STRUCTURAL MEMBRANES. – 2015. – С. 401-412. (**SCOPUS, WEB OF SCIENCE**)

8. Митюшов Е.А., Берестова С.А., Мисюра Н.Е. Геометрические факторы анизотропии физико-механических свойств структурно-неоднородных материалов // Сборник тезисов докладов Всероссийской научной конференции "Проблемы деформирования и разрушения материалов и конструкций". – 2015. – С.71-72.

9. Berestova S.A., Misyura N.E., Mityushov E.A. Applying Gaussian Distributions on SO(3) for Modeling the Texture and Predicting the Properties of Texturized Polycrystalline Materials // Proceedings of the 10th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures (MRDMS). – 2016. – Vol. 1785. (**SCOPUS**)

10. Berestova S.A., Misyura N.E., Mityushov E.A., Shtang T.V. Smooth conjugation of two intersecting planes arbitrarily oriented in space // 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) IEEE Conference Publications. – 2016. – P. 1-4. (**WEB OF SCIENCE**)

11. Берестова С.А., Беляева З.В., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А., Рощева Т.А. Математические алгоритмы кроя развертывающихся элементов пространственных тонкостенных конструкций // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 6. – С. 26-30. (**ВАК**)

12. Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е., Берестова С.А. Плавное перемещение твердого тела в пространстве ориентаций по кратчайшей траектории через узлы однородной решетки на группе SO(3) // Вестник Удмуртского университета.

Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т. 27. – № 1. – С. 138-145. (**ВАК**, **SCOPUS**)

13. Берестова С.А., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Геометрия самонесущих покрытий на прямоугольном плане // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. – №4. – С. 15-18.

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

14. Берестова С.А., Митюшов Е.А., Мисюра Н.Е. Инвариантная геометрическая модель линейной перспективы (Линейная перспектива). – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017616156 от 02.06.2017.