

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет»**

### **ПРОГРАММА**

**вступительного испытания по специальной дисциплине по программе подготовки  
научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре**

**Научная специальность** 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

**Направленность (профиль)  
программы аспирантуры** Механика биоматериалов

**Выпускающая(ие) кафедра(ы)** Динамика и прочность машин (ДПМ)

Руководитель программы:  
научный руководитель  
НИЛ МБМУ



В.В. Зильбершмидт

Пермь 2023

**1. Дисциплины, включенные в программу вступительных испытаний в аспирантуру:**

- 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление (математический анализ)
- 1.2. Дифференциальные уравнения
- 1.3. Функциональный анализ
- 1.4. Уравнения математической физики
- 1.5. Теория вероятности и математическая статистика
- 1.6. Теоретическая механика
- 1.7. Физика
- 1.8. Механика сплошных сред
- 1.9. Теория упругости
- 1.10. Теория пластичности и ползучести
- 1.11. Теория вязкоупругости
- 1.12. Теория колебаний, устойчивость
- 1.13. Динамика машин и упругих систем
- 1.14. Механика разрушения
- 1.15. Экспериментальная механика
- 1.16. Вычислительная механика и численные методы
- 1.17. Оптимизация и оптимальное управление
- 1.18. Обработка результатов экспериментальных исследований

## **2. Содержание учебных дисциплин**

### **2.1. Дифференциальное и интегральное исчисление (математический анализ)**

2.1.1. Дифференцирование сложной функции.

2.1.2. Интегрируемые типы иррациональных выражений.

2.1.3. Интеграл по фигуре.

2.1.4. Теоремы Грина, Гаусса-Остроградского, Стокса.

### **2.2. Дифференциальные уравнения**

2.2.1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах; интегрирующий множитель.

2.2.2. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами, структура решения, способы решения.

### **2.3. Функциональный анализ**

2.3.1. Операции над множествами. Свойства счетных множеств и множеств мощности континуума. Сравнение множеств по мощности.

2.3.2. Определение и примеры метрических пространств. Непрерывные отображения метрических пространств.

2.3.3. Понятие меры и интеграла Лебега в евклидовом пространстве. Определение линейного функционала и оператора, основные свойства и примеры (линейность, непрерывность, норма оператора).

2.3.4. Линейные ограниченные операторы, пространство линейных ограниченных операторов.

### **2.4. Уравнения математической физики**

2.4.1. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

2.4.2. Задача распространения тепла в стержне. Вывод уравнения. Граничные и начальные условия. Построение решения задачи распространения тепла в однородном стержне, на концах которого задана температура.

## **2.5. Теория вероятности и математическая статистика**

2.5.1. Классическое распределение вероятности. Аксиоматическое построение теории вероятностей. Сигма-алгебра событий. Аксиомы А.Н. Колмогорова, простейшие следствия из этих аксиом.

2.5.2. Теория оценивания. Точечные оценки и требования, предъявляемые к этим оценкам. Интервальные оценки.

2.5.3. Статистические гипотезы. Виды. Основные определения. Критерий согласия Хи-квадрат (Пирсона).

## **2.6. Теоретическая механика**

2.6.1. Условие равновесия твердого тела.

2.6.2. Уравнения Лагранжа.

2.6.3. Законы динамики твердого тела.

## **2.7. Физика**

2.7.1. Диффузия в газах и конденсированных средах. Закон Фика.

2.7.2. Теплопроводность. Закон Фурье.

2.7.3. Теплоемкость газа. Адиабатический процесс.

2.7.4. Волновые явления (интерференция, дифракция, поляризация).

2.7.5. Статистико-физическое рассмотрение термодинамической системы и распределения Максвелла-Больцмана и Гиббса.

2.7.6. Уравнения электро- и магнитостатики, их смысл.

2.7.7. Уравнения электро- и магнитодинамики, их смысл.

## **2.8. Механика сплошных сред**

2.8.1. Лагранжев и эйлеров подходы к описанию движения сплошной среды. Переход от координат Эйлера к координатам Лагранжа и обратно.

2.8.2. Тензоры деформации и напряжений.

2.8.3. Тензоры деформации Коши-Грина и Альманси, геометрический смысл компонент этих тензоров. Малые деформации и малые вращения среды. Условия совместности деформаций, формулы Чезаро.

- 2.8.4. Интегральная и дифференциальная форма законов сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии.
- 2.8.5. Законы динамики сплошной среды в локальной форме.
- 2.8.6. Законы термодинамики сплошной среды в локальной форме.
- 2.8.7. Термодинамика сплошной среды. Работа, количество тепла, внутренняя энергия, температура и энтропия термодинамической системы. Первый и второй законы термодинамики.
- 2.8.8. Определяющие соотношения теории пластического течения.
- 2.8.9. Определяющие соотношения и уравнения движения жидкостей.
- 2.8.10. Определяющие соотношения и уравнения равновесия упругого тела.
- 2.8.11. Типы сил в механике сплошной среды: внешние и внутренние силы, массовые и поверхностные силы. Теория напряженного состояния, тензоры напряжений Коши и Пиолы-Кирхгофа. Геометрическая интерпретация напряженного состояния: круги Мора. Простейшие виды напряженных состояний.

## **2.9. Теория упругости**

- 2.9.1. Теория напряжений. Определение тензора напряжений, уравнения движения и равновесия в произвольной криволинейной и декартовой системе координат. Симметрия тензора напряжений. Определение главных направлений и напряжений. Инварианты тензора напряжений. Шаровой тензор и девиатор.
- 2.9.2. Теория деформаций. Тензор больших и малых деформаций и представление его в произвольной криволинейной и декартовой системе координат. Инварианты, главные значения и направления. Уравнения совместности.
- 2.9.3. Физические уравнения теории упругости. Линейно упругое тело Гука. Анизотропные, ортотропные и изотропные материалы. Связь тензора напряжений и деформаций в форме Коши и Грина. Закон Гука для изотропного и анизотропного твердого тела. Тензор упругих модулей. Упругие модули изотропного тела, их механический смысл. Влияние упругой симметрии на форму записи обобщенного закона Гука. Потенциальная энергия упругого деформирования.
- 2.9.4. Постановка основных задач теории упругости. Полная система уравнений теории упругости. Теорема существования и единственности решения. Прямая и обратная задача. Решение задач в перемещениях и напряжениях. Уравнения совместности в напряжениях для изотропного тела (уравнения Бельтрами-Митчела).
- 2.9.5. Общие теоремы теории упругости и вариационные принципы. Теорема Клапейрона. Теорема Бетти. Теорема о минимуме потенциальной энергии деформаций (вариационный принцип Лагранжа). Теорема о минимуме дополнительной энергии (вариационный принцип Кастильяно).

2.9.6. Методы решения пространственных задач эластостатики. Действие сосредоточенной силы в неограниченной упругой среде. Тензор фундаментальных решений Грина. Задача Буссинеска.

2.9.7. Теория тонких упругих пластин и оболочек. Основные гипотезы. Деформация срединной поверхности. Внутренние усилия и моменты. Граничные условия. Постановка задач теории пластин и оболочек. Безмоментная теория.

2.9.8. Приближенные методы решения задач теории упругости. Прямой, обратный и полуобратный методы решения. Смягчение граничных условий. Принцип Сен-Венана и использование его для решения задач изгиба и кручения призматических стержней и контактных задач. Уменьшение размерности задачи. Осесимметричные и плоские задачи. Использование дополнительных гипотез (например, гипотезы Кирхгофа-Лява для задач деформирования пластин и оболочек).

2.9.9. Отдельные классы задач теории упругости. Задачи кручения призматических стержней - возможность использования различных методов решения: с помощью функции депланации, Прандтля, мембранной аналогии, теории функций комплексного переменного, вариационных методов. Задачи изгиба призматических стержней. Теория гибких стержней. Решение в форме Тимошенко и в общем виде. Кинематические и физические соотношения. Новые результаты решения в рамках теории упругости по сравнению с сопротивлением материалов. Плоские задачи теории упругости. Плоскодеформированное и плосконапряженное состояние. Обобщенное плоское деформированное состояние. Основные уравнения. Решение плоских задач с помощью функции напряжений Эри. Краевая задача для функции напряжений. Нахождение функции напряжений в виде алгебраических или тригонометрических рядов. Применение теории функций комплексного переменного к решению плоских задач, метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили. Примеры решений. Плоские задачи в криволинейной системе координат. Задачи о клине и определении поля напряжений полуплоскости под действием сосредоточенной нагрузки (задача Фламана). Осесимметричные задачи теории упругости. Задача осесимметричного деформирования толстостенной трубы или диска (задача Ляме). Расчет вращающихся дисков. Температурные задачи теории упругости. Закон Дюамеля-Неймана. Система основных уравнений термоупругости. Методы решения задач термоупругости. Решение трехмерных задач теории упругости через гармонические функции. Основные подходы и классы задач (задачи Буссинеска, контактные задачи).

2.9.10. Нелинейные задачи теории упругости. Отличия от линейных задач.

2.9.11. Динамические задачи теории упругости. Задачи распространения волн в упругих средах. Уравнения движения в форме Ламе. Типы упругих волн в неограниченной изотропной среде. Продольные и поперечные волны. Плоские гармонические волны. Коэффициенты отражения и прохождения. Поверхностные волны Рэлея. Волны Лява. Волны в упругом стержне. Собственные частоты упругих тел. Формула Рэлея.

## **2.10. Теория пластичности и ползучести**

2.10.1. Основные эффекты, наблюдаемые в макроэкспериментах по неупругому деформированию металлов и сплавов (зуб текучести, эффект Портвена – Ле Шателье, эффект Баушингера, эффект Пойнтинга – Свифта).

- 2.10.2. Кристаллографическая система координат, кристаллографические обозначения, стереографические проекции.
- 2.10.3. Полиморфные превращения, твердые растворы, химические соединения, электронные соединения, металлические связи.
- 2.10.4. Точечные, линейные, поверхностные и объемные дефекты кристаллической решетки. Краевые и винтовые дислокации, дисклинации. Дислокационные субструктуры. Физические механизмы процессов неупругого деформирования.
- 2.10.5. Пластическое деформирование твердых тел и основные гипотезы, принимаемые для его описания. Предел текучести. Остаточные деформации. Остаточные напряжения. Предельное состояние и предельная нагрузка. Определение верхней и нижней границ для предельной нагрузки
- 2.10.6. Поверхности текучести, их свойства. Критерии текучести: Треска-Сен-Венана и Мизеса, их геометрическая интерпретация и физический смысл. Законы упрочнения. Постулаты пластичности. Принцип градиентальности. Принципы максимума.
- 2.10.7. Деформационная теория пластичности: три гипотезы, определяющие уравнения, записанные через полную и через пластическую деформацию; связь между полной, упругой и пластической деформациями; связь между интенсивностями этих деформаций; перестроение единой кривой, построенной в координатах "интенсивность напряжений - интенсивность полных деформаций", в координаты «интенсивность напряжений - интенсивность пластических деформаций», работа упруго-пластической деформации; упругая разгрузка, остаточные напряжения.
- 2.10.8. Теория пластического течения: три гипотезы, определяющие уравнения, написанные через скорости (приращения) пластических деформаций и через скорости (приращения) полных деформаций; различие между приращением интенсивности деформаций и интенсивностью приращения деформаций; логарифмические деформации и их связь с интенсивностью приращения деформаций; постулат Друккера и ассоциированный закон течения; условия упрочнения; поверхность нагружения.
- 2.10.9. Аналитические решения пластических задач: труба под внутренним давлением, ПДС, идеально упругопластический материал, деформационная теория; труба под внутренним давлением, ПДС, упругопластический линейно упрочняющийся материал, деформационная теория; совместное растяжение и кручение тонкостенной трубы (теория течения); кручение призматического тела за пределом упругости. Предельное состояние при кручении. Поверхность напряжений как поверхность естественного ската.
- 2.10.10. Общие методы решений задач теорий пластичности: методы дополнительных нагрузок (напряжений), деформаций и переменных параметров упругости и деформационной теории пластичности; методы дополнительных напряжений и радиального возврата в теории пластического течения; направления сноса на поверхность текучести.
- 2.10.11. Метод линий скольжения: тензор напряжений, среднее напряжение, главные напряжения (величина, направление), максимальные касательные напряжения (величина, направление) для плоского деформированного состояния; соотношения для напряжений, линий скольжения; граничные условия для напряжений; поля скоростей, уравнение Гейрингера; труба под внутренним давлением (решение задачи). Уравнения пластического

плоского деформированного состояния для напряжений. Свойства линий скольжения. Задача Прандтля о вдавливании штампа. Кинематические уравнения.

2.10.12. Упругопластические волны в стержне. Ударное нагружение. Волна разгрузки. Остаточные деформации.

2.10.13. Основные экспериментальные факты о ползучести: прямая и обратная ползучесть, релаксация. Влияние скорости нагружения. Изохронные кривые ползучести.

2.10.14. Общий вид определяющих соотношений теории ползучести и их конкретизация для теории старения, течения и упрочнения; механические модели сложных сред (упругой, вязкой, жесткопластической и упруго-пластической без упрочнения и с упрочнением, вязкопластической, среды Фойхта и Максвелла); исследование моделей.

## **2.11. Теория вязкоупругости**

2.11.1. Линейная теория вязкоупругости. Механические модели вязкоупругих тел. Упругий и вязкий элементы, модель Максвелла, описание релаксации. Модель Фойхта, описание деформаций ползучести. Модель Кельвина - стандартное вязкоупругое тело; времена релаксации и ползучести; описание ползучести, релаксации и последствия.

2.11.2. Теория Больцмана-Вольтерры, запись в виде интегральных уравнений второго рода и с использованием свертки Стильтьеса. Описание ползучести и релаксации, функции и ядра ползучести и релаксации, связь между ними, слабосингулярные ядра. Уравнения линейной вязкоупругости в случае сложного напряженного состояния. Аппроксимация ядер ползучести и релаксации, требования к функциям влияния. Экспоненциальные ядра, спектр времен релаксации. Степенные ядра, ядро А. Р. Ржаницына, отыскание их резольвент.

2.11.3. Температурно-временная аналогия. Влияние температуры на вязкость. Приведенное (модифицированное) время. Термореологически простое тело. Функция температурного сдвига. Формула Вильямса-Ланделла-Ферри. Экспресс испытания материалов. Обобщенная кривая ползучести.

2.11.4. Комплексный модуль, модуль накопления и модуль потерь, их зависимость от частоты гармонических колебаний. Связь мощности диссипации с модулем потерь.

2.11.5. Методы решения краевых задач линейной теории вязкоупругости. Постановка квазистатических краевых задач, изотропные, анизотропные, стареющие и нестареющие материалы. Принцип Вольтерры. Структура решений основных краевых задач теории упругости. Метод аппроксимации А.Л. Ильюшина; функция связной ползучести, ее аналитическое и экспериментальное определение. Метод численной реализации упругих решений. Метод переменных модулей. Методы интегральных преобразований. Метод пошагового интегрирования.

2.11.6. Нелинейная вязкоупругость. Подобие кривых ползучести. Уравнение Лидермана-Розовского. Подобие изохронных кривых ползучести. Уравнение Ю.Н. Работнова. Уравнения Фреше-Вольтерры, главная кубичная теория Ильюшина-Огибалова. Метод последовательных приближений.



2.11.7. Основы механики полимерных композитов. Эффективные модули, гипотезы Фойхта и Рейсса. Эффективные характеристики однонаправленных и многослойных композитов.

## **2.12. Теория колебаний, устойчивость**

2.12.1. Уравнения Лагранжа второго рода для голономных и неголономных систем. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы. Диссипативная функция Рэля. Функция Гамильтона. Принцип Гамильтона-Остроградского.

2.12.2. Системы с одной степенью свободы. Методы составления уравнений движения (закон Ньютона, метод Лагранжа, принцип Гамильтона-Остроградского). Свободные колебания. Амплитуда, частота, период. Влияние сил вязкого трения на характер движения. Декремент затухания. Вынужденные колебания для случая гармонической и произвольно изменяющейся по времени силы. Резонанс, коэффициент динамичности, биения, влияние сил сопротивления.

2.12.3. Системы с конечным числом степеней свободы. Методы составления уравнений движения. Малые собственные колебания консервативных систем. Собственные частоты и формы колебаний, их свойства. Ортогональность собственных форм. Главные (нормальные) координаты. Влияние сил трения на динамические характеристики системы. Приближенные методы определения низшей частоты (метод Рэля, последовательных приближений, формула Донкерлея и др.). Приближенные методы определения высших частот. Оценки приближенных значений частоты. Вынужденные колебания для случая гармонической и произвольно изменяющийся по времени силы. Резонанс. Влияние сил вязкого сопротивления. Гаситель колебаний.

2.12.4. Колебания систем с бесконечным числом степеней свободы (с распределенными параметрами). Уравнения продольных, крутильных и изгибных колебаний упругих стержней. Виды граничных условий. Функции Крылова. Свободные колебания. Собственные формы и их свойства. Вынужденные колебания стержней (прямой метод решения, метод нормальных координат, метод разложения в ряд по собственным формам). Влияние продольной силы на изгибные колебания стержня. Уравнения колебаний упругих пластин и оболочек. Пространственные формы и частоты колебаний элементов конструкций на примерах пластин, оболочек и трехмерных тел. Колебания пластин на примере прямоугольной пластины: уравнение колебаний и краевые условия. Определение собственных частот и форм. Вынужденные колебания.

2.12.5. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Метод функций Ляпунова. Критерии устойчивости линейных систем. Устойчивость периодических решений. Определение областей неустойчивости.

2.12.6. Параметрические колебания в механических системах. Сущность явления. Параметрический резонанс. Отстройка от резонансов. Уравнение Хилла. Уравнение Матье. Диаграмма Айкаса-Стретта. Предельные состояния при колебаниях.

2.12.7. Нелинейные колебания систем. Методы малого параметра, Крылова—Боголюбова, Ван-дер-Поля, линеаризации, метод гармонического баланса. Свободные нелинейные колебания. Скелетная кривая. Вынужденные колебания нелинейной системы при гармоническом возбуждении. Автоколебательные системы. Предельные циклы и их устойчивость.

## **2.13. Динамика машин и упругих систем**

2.13.1. Динамика машин (колебания элементов конструкций). Построение математической модели реальной конструкции. Метод динамических жесткостей и динамических податливостей. Уравнения продольных, крутильных и изгибных колебаний упругих стержней. Поперечные колебания стержней с сосредоточенными массами и упругими опорами. Колебания неразрезанных балок со многими опорами. Колебания балок (мостов) под действием подвижной нагрузки. Учет влияния температуры. Действие ударной нагрузки. Колебания дисков и турбинных лопаток. Колебания вращающихся валов с дисками. Влияние различных факторов (податливость опор, форма сечения вала, гироскопические эффекты, сила тяжести, различные виды трения) на критические скорости. Влияние эксцентриситета и анизотропных свойств на динамические характеристики вращающейся системы.

2.13.2. Виброизоляция машин, приборов и аппаратуры. Активная и пассивная виброизоляция с учетом диссипации энергии в системе. Каскадная виброизоляция. Виброакустика машин. Источники и траектории виброакустических волн. Методы виброакустической защиты машин.

2.13.3. Вариационные принципы в теории свободных колебаний. Свойства собственных частот и форм упругих систем. Методы определения собственных частот и форм упругих систем (вариационные, численные, конечных элементов). Вынужденные и затухающие колебания упругих систем.

2.13.4. Упругие волны в неограниченной упругой среде. Волны расширения и волны сдвига. Дисперсионные уравнения. Фазовая и групповая скорости. Поверхностные волны Релея. Основы решения задач аэрогидроупругости – постановка задач и методы анализа.

2.13.5. Ударные нагрузки. Определение коэффициентов динамичности при ударе. Защита от ударных воздействий.

## **2.14. Механика разрушения**

2.14.1. Понятие о разрушении и прочности тел. Общие закономерности и основные типы разрушения. Концентраторы напряжений. Критерии разрушения. Критерии длительной и усталостной прочности. Коэффициент запаса.

2.14.2. Дефекты в кристаллических материалах и их роль в упрочнении и разрушении. Механизмы пластической деформации. Теории деформационного упрочнения. Влияние типа кристаллической решетки, химического состава и структуры на сопротивление деформации. Разрушение конструкционных материалов. Феноменологические теории разрушения. Дислокационные модели процесса разрушения. Переход от вязкого разрушения к хрупкому. Влияние различных факторов на вязко-хрупкий переход. Физические критерии разрушения. Карты разрушения. Типичные фрактограммы. Усталость материалов. Диаграмма усталостного разрушения и основные критерии усталости. Физические модели усталостного разрушения. Влияние различных факторов на циклическую прочность.

2.14.3. Введение в механику разрушения. Трещины в конструкции. Теория Гриффитса-Орована. Напряжения при вершине трещины. Энергетический и силовой подходы в механике разрушения. Вязкость разрушения и критические коэффициенты интенсивности напряжений, методы их определения. Применение критериев механики разрушения для оценки несущей способности материалов и конструкций. Механика разрушения и усталость. Кинетическая диаграмма усталостного разрушения и новые критерии циклической прочности.

2.14.4. Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины в упругом теле. Энергетический подход Гриффитса. Силовой подход в механике разрушения. Эквивалентность подходов в случае хрупкого разрушения. Формула Ирвина.

2.14.5. Двумерные задачи о трещинах в упругом теле. Коэффициенты интенсивности напряжений, методы их вычисления и оценки.

2.14.6. J-интеграл Эшелби-Черепанова-Райса и его инвариантность. Вычисление потока энергии в вершину трещины.

2.14.7. Локализованное пластическое течение у вершины трещины. Модель трещины Леонова-Панасюка-Дагдейла с узкой зоной локализации пластических деформаций.

2.14.8. Классические теории прочности: наибольших нормальных напряжений, наибольших продольных деформаций, наибольших касательных напряжений, энергетический критерий прочности, теория предельных состояний. Достоинства, недостатки, область применения. Обобщение классических критериев на случай сложного напряженного состояния, анизотропные материалы и т. д.

2.14.9. Длительная прочность. Предел длительной прочности. Кривая длительной прочности. Длительная прочность полимерных материалов. Критерий Бейли, принцип линейного суммирования повреждений. Теория длительной прочности А.А.Ильюшина, тензор повреждений и меры повреждений. Эффект "отдыха" и "залечивания" повреждений.

## **2.15. Экспериментальная механика**

2.15.1. Методы и средства экспериментальных исследований в механике твердого деформируемого тела. Метод электротензометрии (виды тензорезисторов, схемы их размещения для одноосных и двухосных НДС, мостовая схема измерения, тензорезисторные преобразователи перемещений, сил, давлений, вибраций). Метод хрупких покрытий для исследования полей главных напряжений (канифольные, оксидные, эмалевые покрытия, область их применения). Метод координатных сеток (прямоугольные, касательные, окружные и комбинированные сетки, область их применения). Метод муаровых полос для измерения линейных и угловых перемещений на поверхности. Метод фотоупругости. Принцип действия прямого полярископа и кругового. Изохромы (полосы) и изоклина. Методы их разделения с помощью "белого" света, синхронного вращения анализатора и поляризатора, введения 1/4 волновых пластинок. Методы разделения на разности главных напряжений (метод, использующий измерение поперечных деформаций; метод наклонного просвечивания путем поворота относительно оси одного из главных напряжений, определяемых значением угла изоклины, вариационно-разностный метод решения уравнения равновесия задачи для ПНС (способ разности касательных напряжений). Метод оптически чувствительных покрытий и соответствующие схемы полярископов.

2.15.2. Теория подобия и моделирования. Виды соответствий (простое подобие, аффинное, функциональное, операторное и область их применения). Методы определения масштабов физического моделирования. Метод анализа известных функциональных связей (уравнений) явления. Полное и приближенное моделирование. Частные случаи моделирования ПНС, действия массовых сил, кинематического и динамического подобия. Определение масштабов моделирования на основе теории размерностей, основанной на  $\pi$ -теореме. Формулировка  $\pi$ -теоремы. Индикаторы и критерии подобия. Основные теоремы подобия.

2.15.3. Математические методы планирования последовательности экспериментальных исследований. Схема эксперимента. Объект исследования (черный ящик). Параметры оптимизации. Методы построения обобщенного параметра оптимизации, Факторы. Выбор области эксперимента. Условия, которым должны удовлетворять вышеперечисленные понятия. Математическая модель, аппроксимирующая результаты эксперимента и условия ее выбора. Основные стратегии экспериментального определения экстремума целевой функции эксперимента. Метод Гаусса-Зейделя; градиентные методы; метод крутого восхождения. Полный факторный эксперимент (ПФЭ). Матрица ПФЭ. Методы ее построения и ее свойства. Определение коэффициентов математической модели (уравнения регрессии) при ПФЭ. Определение погрешности при проведении эксперимента по повторным опытам на нулевом уровне и погрешности коэффициентов уравнения регрессии. Определение значимости коэффициентов по "t"-критерию. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ) для построения линейной модели, аппроксимирующей неизвестную поверхность параметра оптимизации. Дробные реплики. Генерирующее соотношение, определяющее с каким из эффектов взаимодействия факторов смешан дополнительный фактор. Определяющий контраст и его применение для построения оценок неизвестных истинных коэффициентов модели. Обработка результатов ПФЭ и ДФЭ. Определение статистической значимости коэффициентов уравнения. Проверка адекватности линейной модели и участка истинной поверхности отклика по критерию Фишера и действия в случае неадекватности.

## **2.16. Вычислительная механика и численные методы**

2.16.1. Аппроксимация функций. Интерполирование одномерных функций: интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа, погрешность интерполирования, сходимость интерполяционного процесса, интерполяционный полином Эрмита, сплайн-аппроксимация, кубический сплайн. Многомерное интерполирование. Приближение функций: среднеквадратическое приближение, метод наименьших квадратов, наилучшее равномерное приближение, тригонометрическая интерполяция, дискретное преобразование Фурье, численный гармонический анализ.

2.16.2. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Методы Рунге-Кутты для решения задачи Коши.

2.16.3. Метод конечных разностей. Основные понятия. Сетки и сеточные функции. Аппроксимация дифференциальных операторов. Понятие разностной схемы. Устойчивость и сходимость разностной схемы. Методы оценки устойчивости разностных схем для дифференциальных уравнений в частных производных. Методы построения разностных схем. Требования к разностным схемам. Интегро-интерполяционный метод. Вариационно-разностный метод. Разностные схемы для нестационарных задач. Явные и неявные разностные схемы. Анализ устойчивости, теорема Неймана. Многомерные задачи. Метод переменных направлений. Схема с факторизованным оператором. Метод установления.

Достоинства и недостатки метода конечных разностей. Типичные разностные схемы для параболических, эллиптических и гиперболических уравнений. Метод конечных разностей для дифференциальных уравнений теории упругости.

2.16.4. Вариационный принцип минимума полной потенциальной энергии упругого тела. Методы Рэлея-Ритца и Бубнова-Галеркина в задачах минимизации функционала полной потенциальной энергии.

2.16.5. Метод взвешенных невязок. Классификация методов взвешенных невязок (прямая, слабая, обратная формулировки). Аппроксимация непрерывными базисными функциями. Аппроксимация с помощью взвешенных невязок. Метод Галеркина. Аппроксимация решений дифференциальных уравнений. Естественные граничные условия. Естественные граничные условия для уравнения теплопроводности. Методы граничного решения. Метод взвешенных невязок для систем дифференциальных уравнений. Решение плоской задачи теории упругости. Естественные граничные условия для задачи теории упругости. Достоинства и недостатки метода взвешенных невязок.

2.16.6. Метод конечных элементов. Конечно-элементная аппроксимация. Понятие конечного элемента. Локально определенные базисные функции. Конечно-элементная аппроксимация решений дифференциальных уравнений. Простейший треугольный элемент (симплекс-элемент). Осесимметричный линейный треугольник. Билинейный прямоугольник. Линейный тетраэдр. Формирование глобальных матриц системы конечных элементов, учет граничных условий. Разрешающие соотношения метода конечных элементов для пространственной конечно-элементной дискретизации. Разрешающие соотношения МКЭ для пространственно-временной конечно-элементной аппроксимации.

2.16.7. Вариационные методы построения конечно-элементных соотношений. Вариационные принципы теории упругости (Лагранжа, Кастилиано). Обобщенный вариационный принцип. Вариационное уравнение Лагранжа и вариационный принцип в теории пластичности; связь между ними; неотрицательность второй вариации и выпуклость функционала Лагранжа для деформационной теории пластичности. МКЭ; реализация методов дополнительных напряжений (формулировка в полных величинах и в приращениях) и переменных параметров упругости; системы разрешающих уравнений. Методы верхней и нижней оценки; общие положения; пример применения метода верхней оценки в задаче о плоской протяжке; понятие о разрыве скоростей деформаций при этом. Вариационная формулировка задачи теплопроводности. Построение конечно-элементных соотношений для задач теории упругости вариационным методом. Конструирование естественных вариационных принципов, задача стационарной теплопроводности. Метод Ритца. Множители Лагранжа. Штрафные функции. Метод наименьших квадратов.

2.16.8. Нелинейная лагранжева интерполяция в МКЭ для упругой среды: треугольные и прямоугольные элементы. Совместные и несовместные элементы. Согласование напряжений. Элементы с эрмитовой интерполяцией. Изопара-метрические элементы. Численное интегрирование: квадратурные формулы Ньютона-Котеса, оценка их погрешности, квадратурные формулы Гаусса. Кратные интегралы, прямое произведение одномерных квадратурных формул. Применение в МКЭ.

2.16.9. Решение пространственных задач теории упругости методом конечных элементов. Линейный тетраэдр. Полуаналитический МКЭ.

2.16.10. Динамические задачи. Матричное уравнение движения. Матрица масс. Решение задач на собственные колебания МКЭ. Разложение движения по формам собственных колебаний. Численные методы определения собственных частот и форм колебаний



элементов конструкций (вариационная формула Релея и методы Ритца и Бубнова, Галеркина, метод конечных элементов в сочетании с методами парабол и методом обратных итераций, методы динамических податливостей и жесткостей).

2.16.11. Метод конечных элементов для пластин и оболочек.

2.16.12. Метод граничных элементов. Метод функций влияния. Прямой и непрямо́й МГЭ в одномерных задачах: задача о потенциальном течении и задача об изгибе балки. Двумерные задачи теории упругости. Фундаментальные сингулярные решения. Граничные интегральные уравнения непрямо́го МГЭ. Дискретизация непрямо́го МГЭ. Прямой МГЭ: граничные интегральные уравнения и дискретизация.

2.16.13. Сравнительная характеристика методов конечных разностей, конечных и граничных элементов: достоинства и недостатки.

2.16.14. Метод характеристик в двумерных задачах теории пластичности. Область влияния и область зависимости решения гиперболической краевой задачи.

2.16.15. Метод переменных параметров упругости для решения упругопластической задачи

2.16.16. Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы. Метод Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений. Матричная форма метода Гаусса. Теорема об LU-разложении. Метод прогонки. Метод квадратного корня. Компактная схема метода Гаусса. Обусловленность СЛАУ. Каноническая форма итерационных методов решения СЛАУ. Метод простой итерации. Метод Зейделя. Метод релаксации. Итерационная схема с чебышевским набором параметров. Численные методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Итерационные методы, общая схема двухслойных нестационарных итерационных методов, сходимость. Принцип сжимающих отображений. Методы релаксации, Ньютона.

2.16.17. Численные методы в алгебраической задаче на собственные значения. Численные методы отыскания корней характеристического уравнения: простых итераций, секущих, парабол, Ньютона. Условия сходимости итерационных методов. Метод вращений решения полной проблемы собственных значений. Методы прямых и обратных итераций.

## **2.17. Оптимизация и оптимальное управление**

2.17.1. Основные понятия и определения. Постановка задачи оптимизации и условия существования решения. Критерии оптимизации, параметры проектирования, ограничения в задачах оптимизации.

2.17.2. Минимизация функции одной переменной, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Классический метод решения задачи. Численные методы минимизации функции одной переменной. Теорема Вейерштрасса об условиях сходимости минимизирующей последовательности. Методы половинного деления, золотого сечения, Фибоначчи, условия сходимости. Метод ломаных. Свойства выпуклых функций. Методы Ньютона и касательных.

2.17.3. Минимизация функций многих переменных. Необходимые и достаточные условия существования экстремума для гладкой задачи без ограничений. Гладкая задача с ограничениями типа равенств, правило множителей Лагранжа. Задачи с ограничениям типа

равенств и неравенств: выпуклые задачи, теорема Куна-Таккера. Градиентные методы минимизации функций многих переменных. Методы проекции градиента и условного градиента. Методы поиска Нелдера-Мида и Хука-Дживса. Методы штрафных функций для решения задач с ограничениями.

2.17.4. Линейное программирование, стандартные формы представления задач линейного программирования, их геометрическая интерпретация. Геометрический метод решения задач линейного программирования с однотипными условиями. Симплекс-метод решения задач линейного программирования в канонической форме.

2.17.5. Двойственные задачи и методы решения.

2.17.6. Оптимальное управление. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина и его связь с принципом Лагранжа. Численные методы оптимального управления, их классификация. Методы Рунге и Эйлера. Методы Галеркина и Канторовича.

2.17.7. Динамическое программирование. Принцип оптимальности Беллмана. Дискретное динамическое программирование. Задачи с запаздыванием.

2.17.8. Многокритериальные задачи оптимизации. Постановка многокритериальной задачи. Некорректность постановки. Способы сведения многокритериальной задачи к однокритериальной. Обобщенные критерии оптимальности.

2.17.9. Парето-оптимизация. Численные методы построения Парето-множества.

2.17.10. Критерии оптимизации в задачах механики. Основные типы ограничений. Оптимизация формы конструкций. Анализ чувствительности к изменениям конструктивных параметров.

## **2.18. Обработка результатов экспериментальных исследований**

2.18.1. Основные понятия и задачи прикладной статистики. Классификация ошибок эксперимента. Случайная изменчивость. События и их вероятности. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность.

2.18.2. Действия над случайными событиями. Вероятностное пространство. Алгебра событий. Независимые и зависимые события. Условная вероятность. Теорема умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

2.18.3. Случайные величины. Случайная величина как измеримая функция. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция распределения случайной величины, ее свойства. Функция плотности распределения, ее свойства. Числовые характеристики распределения вероятности: моменты и квантили. Математическое ожидание и дисперсия, их свойства. Асимметрия и эксцесс, их свойства. Наиболее употребительные квантили. Независимые и зависимые случайные величины. Коэффициенты ковариации и корреляции, их свойства. Основные законы распределения вероятности для одномерных случайных величин, их свойства и области применимости: нормальное распределение, показательное распределение, распределение хи-квадрат, распределение Стьюдента, распределение Фишера, распределение Пуассона, биномиальное распределение и схема испытаний Бернулли.

2.18.4. Выборки и их характеристики. Выборка, ее свойства и характеристики. Вариационный ряд. Цензурированные выборки. Эмпирическая функция распределения. Выборочные моменты. Сходимость случайных величин. Закон больших чисел и его следствия. Теоремы Бернулли и Чебышева.

2.18.5. Проверка статистических гипотез по идентификации законов распределения. Простые и сложные гипотезы. Альтернативные гипотезы. Критические события. Уровни значимости. Ошибки первого и второго рода. Критерии согласия, требования к ним. Критерии согласия Колмогорова и омега-квадрат для простой гипотезы. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона для простой гипотезы. Критерии согласия для сложной гипотезы. Методы оценивания параметров распределения: метод моментов, метод наибольшего правдоподобия. Модифицированные статистики Колмогорова и омега-квадрат, их свойства и методика проверки гипотез. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона для сложной гипотезы. Проверка нормальности. Критерий согласия для распределения Пуассона. Другие критерии согласия.

2.18.6. Практические задачи обработки данных эксперимента. Построение доверительных интервалов для оценок математического ожидания и дисперсии. Случай неизвестного вида закона распределения вероятности. Использование знаний о виде закона распределения анализируемой величины.

2.18.7. Однофакторный анализ. Постановка задачи. Непараметрические критерии однородности. Оценивание эффектов обработки. Дисперсионный анализ.

2.18.8. Двухфакторный анализ. Связь задач однофакторного и двухфакторного анализа. Аддитивная модель данных двухфакторного эксперимента при независимом действии факторов. Непараметрические критерии проверки гипотез об отсутствии эффектов обработки. Двухфакторный дисперсионный анализ.

2.18.9. Линейный регрессионный анализ. Модель линейного регрессионного анализа. Стратегии, методы и проблемы регрессионного анализа. Простая линейная регрессия. Непараметрическая линейная регрессия.

2.18.10. Нелинейное оценивание. Модели нелинейного регрессионного анализа. Используемые методы оценивания неизвестных параметров. Логистическая регрессия. Регрессия экспоненциального типа. Разрывная регрессия.

2.18.11. Введение в анализ временных рядов и прогнозирование. Основные задачи анализа временных рядов. Классификация временных рядов. Основные характеристики временных рядов. Стационарные временные ряды. Параметрические модели временных рядов. Детерминированная и случайная составляющие временного ряда. Тренд, сезонная и циклические составляющие. Модели тренда, его подбор и прогнозирование. Выделение сезонной компоненты. Проблемы сглаживания временных рядов. Линейные модели временных рядов: авторегрессии 1-го, 2-го,  $p$ -го порядка. Процессы скользящего среднего. Комбинированные процессы авторегрессии - скользящего среднего.



### **3. Рекомендуемая литература, информационные ресурсы**

#### **1. Дифференциальное и интегральное исчисление (математический анализ)**

1.1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1.2.М., Интеграл-Пресс, 2005 г. – 415 с.

1.2. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие / под ред. Б. П. Демидовича. - М. : Астрель : АСТ, 2006. - 495 с.

#### **2. Дифференциальные уравнения**

2.1. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения: учеб.пособие - Изд. 3-е,стер. - СПб.:Лань, 2008. – 288 с.

2.2. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник для вузов / Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. ; ред. Зарубин В. С., Крищенко А. П. - 4-е изд., испр. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. - 347 с.

#### **3. Функциональный анализ**

3.1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 570 с.

3.2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.

#### **4. Уравнения математической физики**

4.1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. – 660 с.

4.2. Михлин С.Г. Курс математической физики: учебник для вузов.- СПб: Лань, 2002. – 464 с.

#### **5. Теория вероятности и математическая статистика**

5.1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие для вузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров .— 5-е изд., стер .— Москва : КНОРУС, 2010 .— 480 с.

5.2. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.- 543с.

#### **6. Теоретическая механика**

6.1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики. Т.1: статика и кинематика. Т.2: динамика: в 2 т./Н.В. Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р. Меркин . – СПб. : Лань, 2008. - 736 с.

6.2. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник для вузов /С.М. Тарг. – 13 изд.стер. – М.: Высш. Шк. 2009. - 416 с.

## **7. Физика**

7.1. Грабовский, Р.И. Курс физики. – М.: Лань, 2002. – 608 с.

7.2. Савельев И. В. Курс общей физики в 3 т.– М.: Лань, 2007. – 3 т.

## **8. Механика сплошных сред**

8.1. Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. Учебник для вузов. – ИПМ РАН: Под ред. Д. М. Климова. — М.: Наука, 2000. — 214 с.

8.2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. М.: Машиностроение, 1987. 440 с.

8.3. Колтунов М.А., Кравчук А.С., Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. М.: Высшая школа. 1983. 349 с.

8.4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.

8.5. Повх И.Л. Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1976. 504 с.

8.6. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Москов. ун-т, 2004. Т.1.- 528 с.

8.7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Москов. ун-т, 2004. Т.2.- 560 с.

8.8. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

8.9. Трусов П.В., Келлер И.Э. Теория определяющих соотношений. Курс лекций. Ч.1. Общая теория / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1997. 98 с.

## **9. Теория упругости**

9.1. Амен-Заде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1971. 287 с.

9.2. Дарков А. В., Шапиро Г. С. Сопrotивление материалов. М.: Высшая школа, 1984. 324 с.

9.3. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 431 с.

9.4. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек (2-е издание). М.: Наука, 1976

9.5. Грабовский, Р.И. Курс физики. – М.: Лань, 2002. – 608 с.

9.6. Колмогоров Г. Л. Вариационные методы в теории пластин и оболочек: Учеб. пособие /Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1976. 21 с.

9.7. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

9.8. Новацкий В. К. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

9.9. Новацкий В. К. Вопросы термоупругости. М.: Мир, 1962.

9.10. Писаренко Г.С. Сопrotивление материалов. Киев: Наукова думка, 1975. 426 с.

- 9.11. Пригоровский Н.И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений. М.; Машиностроение, 1983. 248 с.
- 9.12. Савельев И. В. Курс общей физики в 3 т.– М.: Лань, 2007. – 3 т.
- 9.13. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей. М.: Машиностроение, 1978
- 9.14. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.; Наука, 1966. 635 с.
- 9.15. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир. 1988. 343 с.

## **10. Теория пластичности и ползучести**

- 10.1. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.
- 10.2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М.: Физматлит, 2002.
- 10.3. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969, 420 с..
- 10.4. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400с.
- 10.5. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справоч. пособие. Киев: Наукова думка, 1981. 380 с.
- 10.6. Полухин П.И., Горелик С. С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. М.: Металлургия. 1982. 584 с.
- 10.7. Радаев Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006
- 10.8. Новацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.

## **11. Теория вязкоупругости**

- 11.1. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- 11.2. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 276 с.

## **12. Теория колебаний, устойчивость**

- 12.1. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 416 с.
- 12.2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972.
- 12.3. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 412 с.
- 12.4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М: Физматлит, 1963.
- 12.5. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976.

12.6. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. М.: Машиностроение, 1967.

12.7. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение. 1985. 346 с.

12.8. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. М.: Машиностроение, 1966

### **13. Динамика машин и упругих систем**

13.1. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004.

13.2. Халфман Р.Л. Динамика. М.: Наука, 1972.

### **14. Механика разрушений**

14.1. Колмогоров Г.Л., Аликин В.Н. Критерии прочности и оценка механической надежности конструкций машиностроения: Учеб. пособие / Перм. гос. техн. ун-т, Пермь, 1993. 124 с.

14.2. Херцберг Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов: Пер. с англ. М.: Металлургия, 1989. 576 с.

14.3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

### **15. Экспериментальная механика**

15.1. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.; Наука, 1976. 279 с.

15.2. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. М.: Мир, 1980. 610 с.

15.3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 448 с.

15.4. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справочник. Киев: Наукова думка, 1981. 520 с.

### **16. Вычислительная механика и численные методы**

16.1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М., Стройиздат, 2005.

16.2. Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В., Численные методы. Решения задач и упражнения. М., Дрофа, 2009. – 393 с.

16.3. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 404 с.

16.4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов : учебник для вузов / В. М. Вержбицкий .— 3-е изд., стер .— Москва : Высш. шк., 2009 .— 840 с.

- 16.5. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики : учебное пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон. — 6-е изд., стер. — СПб : Лань, 2007. — 664 с.
- 16.6. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. — М.: Изд-во АСВ, 2009. - 360 с.
- 16.7. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. М., Мир, 1975. — 511 с.
- 16.8. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
- 16.9. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 398 с.
- 16.10. Оден Дж., Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: 2006.
- 16.11. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
- 16.12. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 589 с.
- 16.13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979, 392 с.

#### **17. Оптимизация и оптимальное управление**

- 17.1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 384 с.
- 17.2. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации: Учеб. Для вузов /Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.— М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003.— 440 с.
- 17.3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
- 17.4. Мажид К.И. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Высшая школа, 1979. 239 с.
- 17.5. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.

#### **18. Обработка результатов экспериментальных исследований**

- 18.1. Боровиков В.П., Боровиков И.П. STATISTICA -Статистический анализ и обработка данных в среде Windows. М.: Инф.-изд. Дом «Филинь», 1998. 608 с.
- 18.2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 576 с.
- 18.3. Герасимович А.И. Математическая статистика. М.: Высшая школа, 1983. 279с.
- 18.4. Степнов М.Н. Статистические методы обработки результатов механических испытаний: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 232 с.
- 18.5. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. /Под ред. В.Э.Фигурнова. М.: Инфра-М, 1998. 528 с.

## Пример экзаменационного билета

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

**«Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет»**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой ДПМ

\_\_\_\_\_ В.П. Матвеевко

Вступительные испытания по специальной дисциплине,  
соответствующей научной специальности

Механика деформируемого твердого тела

*Наименование научной специальности*

## ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

1. Теория гибких стержней. Уравнения Кирхгоффа-Лява и Тимошенко. Кинематические и физические соотношения.
2. Вынужденные и параметрические колебания нелинейных систем. Предельные состояния при колебаниях. Отстройка от резонансов.
3. Скорость высвобождения энергии при продвижении трещины в упругом теле. Энергетический подход Гриффитса. Силовой подход в механике разрушения. Эквивалентность подходов в случае хрупкого разрушения. Формула Ирвина.