На правах рукописи

Шимановский Владимир Александрович

РАЗРАБОТКА, ОБОСНОВАНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2024

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет».

Научный руководитель:	**Иванов Владимир Николаевич**, кандидат физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Телегин Александр Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (НИУ)», филиал в г. Миассе, кафедра «Автоматика», профессор
	Лукин Алексей Вячеславович, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», Высшая школа механики и процессов управления, доцент
Ведущая организация:	ФГБУН Федеральный исследовательский центр «Саратовский научный центр РАН», г. Саратов

Защита диссертации состоится «25» июня 2024 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета Пермского национального исследовательского политехнического университета Д ПНИПУ.01.19 по адресу: 614990, Пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, ауд. 423,
тел: (342) 237-84-61; факс: (342) 237-84-87.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» (https://pstu.ru).

Автореферат разослан «14» мая 2024 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д ПНИПУ.01.19,
кандидат физико-математических наук Е. Л. Кротова

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Математическое моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике. Особую актуальность математическое моделирование приобретает при проектировании и расчёте поведения сложных технических систем, таких как управляемые космические аппараты, роботы, транспортные средства, изделия гражданского и специального машиностроения. Математическая модель, адекватно отражающая состояние и эволюцию системы, позволяет значительно сократить время испытаний нового образца, затраты на их организацию, оценить целесообразность внесения тех или иных конструктивных изменений, прогнозировать поведение системы в зависимости от вариаций конструкции и условий её применения, получить данные о параметрах, которые трудно измерить в эксперименте (например, реакции, усилия в шарнирах, ускорения в различных точках), провести оптимизацию параметров узлов системы.

Для широкого класса технических систем при построении математической модели в качестве расчётной схемы выбирают систему абсолютно твёрдых тел (СТТ), соединённых с помощью идеальных, голономных или неголономных, стационарных или нестационарных связей. Требование адекватности модели приводит к необходимости увеличивать число тел или подсистем, на которые разбивается механическая система, что приводит к практической невозможности получения полных уравнений движения (УД) с помощью методов классической механики, связанных с составлением и дифференцированием кинетической, потенциональной энергий, функции Гамильтона или энергии ускорений. Кроме того, с ростом размерности математической модели увеличивается время моделирования.

Разнообразие схем конструкций механических систем требует разработки общего подхода к их математическому моделированию, а также создания универсальных комплексов программ, которые могли быть применены для исследования как существующих, так и проектируемых технических систем. Такие комплексы программ должны предоставлять возможность создавать математические модели, требуемые для различных задач проектирования, адекватно описывать перемещения узлов конструкции в широком диапазоне изменения конструктивных параметров, включать в себя вычислительные алгоритмы, имеющие близкую к линейной зависимость временных затрат от размерности механической системы.

Большой вклад в развитие и популяризацию ориентированных на применение ЭВМ методов математического моделирования СТТ внесли следующие учёные: Е. А. Арайс, В. Г. Бойков, В. В. Величенко, А. Ф. Верещагин, М. К. Вукобратович, А. С. Горобцов, Ф. М. Диментберг, В. А. Коноплёв, А. И. Лурье, Д. Ю. Погорелов, А. И. Телегин, T. R. Kane, E. J. Haug, P. E. Nikravesh, W. O. Schiehlen, A. A. Shabana, J. Wittenburg и др.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в предыдущие годы по адаптации методов классической механики к численным методам исследования СТТ, приведших к созданию универсальных комплексов программ, таких как ADAMS, EULER, FRUND, MBDyn, RecurDyn, SIMULIA, UM, исследования в этой области нельзя считать завершёнными. Универсализм существующих комплексов программ обладает определёнными недостатками, к которым можно отнести их высокую стоимость, ограниченность набора типов взаимодействия между телами, снижение быстродействия при увеличении сложности математической модели. Применение зарубежного программного обеспечения в настоящее время дополнительно ограничивается требованиями импортозамещения. Это вынуждает инженеров разрабатывать собственные специализированные программы для моделирования процессов функционирования вновь создаваемых конструкций. Кроме того, необходимость сокращения сроков проектирования, усложнение задач, решаемых инженерами при создании новой техники, требует новых алгоритмов, ускоряющих расчёты динамического поведения технических систем. Поэтому разработка машинно-ориентированных методов создания математических моделей СТТ, которые могут быть применены в инженерной практике, а также соответствующего программного обеспечения является одной из важных проблем современного математического моделирования.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что развитие компьютерных методов формирования математических моделей технических систем, допускающих идеализацию в виде СТТ, является актуальной проблемой. Используемые в этих методах алгоритмы из различных разделов математики (линейной алгебры, векторного анализа, вычислительной математики и др.) требуют дальнейшей детальной проработки и усовершенствований.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является систематизация методов построения математических моделей СТТ, анализ преимуществ и недостатков существующих подходов и на его основе разработка собственных эффективных алгоритмов, ориентированных на численные исследования и снижающих трудоёмкость компьютерного моделирования.

Для достижения цели работы были поставлены следующие задачи:

– на основе единого подхода провести классификацию различных способов построения математических моделей СТТ;

– вывести матричную форму УД СТТ со структурой дерева с голономными идеальными связями в гамильтоновых переменных, удобную для численного моделирования;

– разработать алгоритмы разрешения УД СТТ относительно старших производных, позволяющие ускорить вычислительный процесс компьютерного моделирования;

– провести анализ и сравнение временны́х затрат различных алгоритмов формирования УД СТТ и разрешения их относительно старших производных;

– предложить алгоритм выбора оптимального метода моделирования в зависимости от характеристик механической системы: количества тел, числа степеней свободы в шарнирах и структуры взаимосвязей;

– создать инструментарий для автоматизации построения математических моделей СТТ;

– разработать комплекс программ моделирования динамики механических систем с отделяющимися частями.

Методология и методы исследования. Работа выполнена в соответствии с общими положениями теории математического моделирования, принципов системного подхода. В качестве основного аппарата исследования использованы методы теоретической механики (кинематики и динамики твёрдого тела, динамики голономных механических систем), матрично-геометрические методы в механике, методы линейной алгебры и вычислительной математики.

Научная новизна.

1. Выведена новая форма УД СТТ в гамильтоновых переменных, отличающаяся расширенным составом переменных состояния, рекуррентной структурой и ориентированная на численное моделирование. Обосновано место этих уравнений среди существующих УД СТТ.

2. Разработан новый итерационный алгоритм разрешения УД СТТ с положительно определённой матрицей системы относительно старших производных, в котором в качестве предобусловливателя используется приближение к обратной обобщённой матрице инерции.

3. Разработан новый алгоритм приведения расширенных форм УД СТТ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в нормальной форме, отличающийся применением симметричного $L^{\mathrm{T}}DL$-разложения.

4. Проведены анализ и сравнение вычислительной трудоёмкости различных подходов к моделированию СТТ. Указаны условия, при которых тот или иной метод оказывается наиболее

эффективным.

5. Впервые предложена методика выбора оптимального метода формирования уравнений движения и приведения их к нормальной форме ОДУ в зависимости от структуры СТТ, числа тел и типов шарниров.

Теоретическая значимость. Разработан комплекс методов и алгоритмов, повышающих эффективность компьютерного моделирования. Сформулированы и обоснованы рекомендации по выбору оптимального подхода к формированию математических моделей сложных механических систем. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть применены при разработке средств программного обеспечения компьютерного моделирования новых технических систем.

Практическая значимость. Созданные инструментальные средства позволяют формировать в различных формах УД СТТ и генерировать программы их численного моделирования. Предложенные математические модели и численные алгоритмы реализованы в виде комплекса программ, который используется при проектировании новых изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы» (г. Пермь).

Положения, выносимые на защиту:

1. Новая матричная форма уравнений движения систем связанных твёрдых тел со структурой дерева, записанная относительно обобщённых и декартовых скоростей, обобщённых и декартовых импульсов.

2. Итерационный алгоритм приведения системы дифференциальных уравнений с положительно определённой матрицей к нормальной форме, необходимой для использования стандартных подпрограмм интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Алгоритм разрешения уравнений движения систем связанных твёрдых тел, записанных в форме системы дифференциально-алгебраических уравнений, основанный на $L^{\mathrm{T}}DL$-разложении и факторизации Холецкого.

4. Теоретические оценки вычислительных затрат существующих и разработанных соискателем численных алгоритмов моделирования СТТ, которые включают в себя формулы для вычисления количества арифметических операций в зависимости от структуры системы, числа тел и типов шарниров.

5. Комплекс программ моделирования механических систем с переменной кинематической структурой.

Достоверность и обоснованность результатов. Основные научные результаты диссертации получены на основе фундаментальных положений теоретической механики, линейной алгебры и теории численных методов. Все представленные в работе численные алгоритмы строго обоснованы доказательством теорем о сходимости. Теоретические результаты подтверждены сравнительными вычислительными экспериментами и для тестовых примеров совпадают с результатами исследований других авторов, а также верификацией комплекса программ по результатам стендовых и предварительных испытаний опытных изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы».

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: EUROMECH Colloquium 495. Advances in simulation of multibody system dynamics (Bryansk, 18–21 Februaty 2008); Международной конференции «Шестые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 23–27 июня 2008 г.); Международной конференции «Седьмые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 20–24 июня 2011 г.); Международной конференции «Восьмые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 25–28 июня 2013 г.); XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 19–24 августа 2019 г.); XXVIII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2–5 октября 2019 г.); Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 15–19 июня 2020 г.); X Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) (Якутск, 16–20 июля 2023 г.); XXXII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках», (Пермь, 4–7 октября 2023 г.).

Работа полностью представлена и обсуждена на семинарах кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий ПГНИУ (рук. доц. В. Н. Терпугов), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (рук. проф. П.В. Трусов), кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ (рук. доц. П.В. Писарев), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеенко).

Результаты диссертационной работы внедрены в практику работы ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ПАО «Мотовилихинские заводы». Материалы диссертационной работы используются в семестровом курсе «Компьютерное моделирование систем твёрдых тел», читаемом на механико-математическом факультете ПГНИУ магистрантам первого года обучения направления «Механика и математическое моделирование».

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 38 печатных работах, среди которых 6 статей в рецензируемых журналах из списков ВАК, WoS и SCOPUS, 6 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, 8 статей в российских периодических изданиях, 10 статей в сборниках трудов конференций и 9 тезисов докладов.

Личный вклад автора. Все представленные в диссертации результаты получены автором лично или с его непосредственным участием. Постановка задачи выполнена научным руководителем при участии соискателя. Вывод новой формы УД СТТ выполнен лично автором при участии научного руководителя. Разработка и теоретическое обоснование алгоритмов формирования УД СТТ, приведения их к нормальной форме ОДУ, реализация алгоритмов в виде программ для ЭВМ, проведение численных экспериментов и анализ результатов вычислений осуществлялись лично автором. Разработка математических моделей одного класса изделий машиностроения с переменной кинематической структурой выполнена автором совместно с группой соавторов. Лично автором выполнены описание данного класса механических систем, синтез уравнений движения и реализация алгоритмов их решения в виде комплекса программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка и приложений. Работа изложена на 177 страницах, содержит 26 рисунков и 16 таблиц. Библиографический список включает 207 наименований.

Содержание работы

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В **первой главе** рассматриваются методы формирования УД механических систем, расчётная схема которых может быть представлена в виде связки абсолютно твёрдых тел.

В начале главы приводится анализ научных достижений в области математического моделирования СТТ. Основной упор делается на исследования, ориентированные на использование вычислительной техники. Проанализированы преимущества и недостатки существующих методов и их реализаций с точки зрения их общности и вычислительной эффективности.

В диссертационной работе предполагается, что кинематическая структура СТТ открытая, а реализуемые в шарнирах кинематические связи удерживающие, голономные и идеальные. Если в технической системе присутствуют неидеальные или неголономные связи, то в инженерной практике традиционно используется метод замены этих связей силовым взаимодействием.

Пронумеруем тела и шарниры системы таким образом, чтобы для любого тела в графе системы номер предшествующего ему (родительского) тела был меньше, а шарниру, связывающему i-е тело с предшествующим, присвоим номер i. Пусть κ_i — номер родительского тела для i-го; $\mathcal{P}_i$ — упорядоченное множество индексов шарниров, являющихся элементами пути между нулевым и i-м телами; $\mathcal{S}_i$ — множество индексов тел, для которых i-е тело является родительским; $\mathcal{D}_i$ — множество индексов тел, образующих поддерево с корнем в теле i; $i = 1, 2, \ldots, N$, где N — число тел в системе.

Для описания кинематики СТТ в работе введена нижняя треугольная блочная матрица S, названная *матрицей кинематической структуры*, в каждой строке которой только два ненулевых блока: единичная матрица на главной диагонали и матрица сдвига и вращения

$$C_i = \begin{bmatrix} G_i & -G_i\tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, N$$

со знаком минус в столбце, соответствующему родительскому телу, где G_i — матрица направляющих косинусов между системами координат родительского и дочернего тел, $\tilde{\rho}_i$ — кососимметрическая матрица векторного произведения с компонентами — координатами полюса системы координат i-го тела в системе координат родительского тела.

С использованием матрицы кинематической структуры S удалось записать УД СТТ в компактной матричной форме:

$$\begin{bmatrix} M & -S^{\mathrm{T}} & 0 \\ -S & 0 & A \\ 0 & A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w} \\ R \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{ac} \\ -\hat{\mathrm{w}}^{cr} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где M — блочно-диагональная матрица инерции СТТ; A — матрица касательных локальных базисов пространства возможных перемещений тел; w — вектор абсолютных декартовых ускорений тел; $\ddot{q}$ — вектор обобщённых ускорений; R — вектор реакций связей в шарнирах; F^{ac} — вектор активных, центробежных и гироскопических сил; $\hat{\mathrm{w}}^{cr}$ — вектор составляющих кориолисовых, центробежных и относительных ускорений тел системы, не зависящих от обобщённых ускорений.

Дифференциально-алгебраические уравнения (1) представляют собой замкнутую систему линейных уравнений относительно обобщённых ускорений, декартовых ускорений тел и реакций в шарнирах. Они состоят из трёх групп уравнений: уравнений динамики в форме Ньютона—Эйлера, кинематических уравнений, записанных в проекциях на оси связанных с телами систем координат, и уравнений, следующих из принципа идеальности связей.

В работе построены рекуррентные формулы, предназначенные для автоматизированного компьютерного формирования УД СТТ в форме (1) из простейших основных блоков, которые описывают структуру, масс-инерционные, геометрические и кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров).

Показана связь УД СТТ (1) с классическими уравнениями Лагранжа. Для этого использованы проекционные методы. Исключение из расширенной системы УД реакций связей с использованием касательного подпространства возможных перемещений приводит к уравнениям движения в обобщённых координатах (уравнениям Лагранжа второго рода),

$$A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}MTA\,\ddot{q} = A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}(F^{ac} - MT\hat{\mathrm{w}}^{cr}), \tag{2}$$

а проектирование на ортогональное подпространство возможных перемещений и исключение обобщённых ускорений — к уравнениям Лагранжа первого рода

$$\begin{bmatrix} M & -S^{\mathrm{T}}Z \\ -Z^{\mathrm{T}}S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^{ac} \\ -Z^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{w}}^{cr} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $T = S^{-1}$ — обратная матрица к матрице кинематической структуры; Z — матрица ортогональных локальных базисов пространства возможных перемещений тел системы ($A^{\mathrm{T}}Z = 0$, $Z^{\mathrm{T}}A = 0$); λ — вектор множителей Лагранжа ($R = Z\lambda$).

Матрица T является нижней унитреугольной матрицей. В работе получены рекуррентные формулы вычисления её элементов без использования операции обращения матрицы. Кроме того, получены формулы для производных матрицы кинематической структуры и обратной к ней матрицы, не требующие дифференцирования элементов этих матриц:

$$\dot{S} = \Omega^{\mathrm{T}}S - S\,\Omega^{\mathrm{T}}, \quad \dot{T} = \Omega^{\mathrm{T}}T - T\Omega^{\mathrm{T}},$$

где $\Omega = \mathrm{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N)$, $\Omega_i = \left[\begin{smallmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{smallmatrix}\right]$, v_i, ω_i — линейная и угловая декартовы скорости i-го тела. Эти свойства использовались для вывода новых форм записи УД СТТ.

Заметим, что полученные явные матричные формы уравнений Лагранжа второго и первого рода не требуют трудоёмких операций составления кинетической энергии системы и дальнейшего её дифференцирования.

Кроме того, в данной главе выведена новая матричная форма УД СТТ со структурой дерева в гамильтоновых переменных:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} M & -S^{\mathrm{T}} & 0 \\ -S & 0 & A \\ 0 & A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{v} \\ p^* \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{\mathrm{v}}^r \\ p \end{bmatrix}, \\ \dot{p} = (\dot{A}^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}\Omega)p^* + A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}F^a, \end{gathered} \tag{4}$$

где F^a — вектор активных сил; v — вектор декартовых скоростей тел системы; $\hat{\mathrm{v}}^r$ — вектор относительных скоростей тел системы, не зависящих от обобщённых скоростей; p^* — вектор декартовых импульсов составных тел; p — вектор обобщённых импульсов (импульсов Пуассона); $\dot{q}$ — вектор обобщённых скоростей.

Уравнения (4) состоят из двух групп уравнений. Первая из них, представляющая кинематические соотношения, образует линейную систему с симметричной блочной разреженной матрицей коэффициентов относительно обобщённых скоростей, декартовых скоростей и импульсов. Вторая группа разрешена относительно производных обобщённых импульсов.

Приведены два способа редукции этой формы УД к системам уравнений, содержащих меньшее число неизвестных. Эти способы состоят в проектировании уравнений (4) на касательное и ортогональное подпространства возможных перемещений механической системы. В первом случае получаем явную матричную форму уравнений Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}MTA)^{-1}\left(p - A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}MT\hat{\mathrm{v}}^r\right), \\ \dot{p} &= (\dot{A}^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}\Omega)T^{\mathrm{T}}MT(A\dot{q} + \hat{\mathrm{v}}^r) + A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}F^a, \end{aligned} \tag{5}$$

а во втором — систему дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) относительно обобщённых импульсов, декартовых скоростей и множителей Лагранжа

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} M & -S^{\mathrm{T}}Z \\ -Z^{\mathrm{T}}S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{\mathrm{T}}A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}p \\ -Z^{\mathrm{T}}\hat{\mathrm{v}}^r \end{bmatrix}, \\ \dot{p} = \left(\dot{A}^{\mathrm{T}} - A^{\mathrm{T}}\Omega\right)\left(Z\lambda + A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}p\right) + A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}F^a. \end{gathered} \tag{6}$$

Преимущества УД СТТ в гамильтоновых переменных: все уравнения разрешены относительно $\dot{p}$ и имеют рекуррентную структуру, не требуется вычислять ускорения тел, для интегрирования можно использовать методы, разработанные для канонических уравнений.

Уравнения (1) – (6) образуют полный набор УД СТТ, отличающихся количеством и составом переменных. Заметим, что пары уравнений (1) и (4), (2) и (5), (3) и (6) содержат одинаковые матричные структуры. Следовательно, для их разрешения относительно интегрируемых переменных можно использовать одинаковые алгоритмы.

Во **второй главе** рассмотрены вопросы разрешения относительно старших производных УД СТТ в форме уравнений Лагранжа второго и первого рода (2) и (3), а также редуцированных уравнений в импульсах Пуассона (5) и (6).

Уравнения Лагранжа второго рода и уравнения Гамильтона представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно обобщённых ускорений и обобщённых скоростей, соответственно, с общей матрицей системы $\boldsymbol{M} = A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}MTA$, правой частью $\boldsymbol{Q} = A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}(F^{ac} - MT\hat{\mathrm{w}}^{cr})$ для уравнения (2) и $\boldsymbol{Q} = p - A^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}MT\hat{\mathrm{v}}^{r}$ для уравнения (5). В случае уравнений Лагранжа первого рода и соответствующих уравнений в импульсах для определения ускорений и скоростей необходимо вначале составить уравнения для нахождения множителей Лагранжа. В обоих случаях получаем СЛАУ с матрицей $\boldsymbol{H} = Z^{\mathrm{T}}SM^{-1}S^{\mathrm{T}}Z$:

$$\left(Z^{\mathrm{T}}SM^{-1}S^{\mathrm{T}}Z\right)\lambda = Z^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathrm{w}}^{cr} - SM^{-1}F^{ac}\right), \tag{7}$$

$$\left(Z^{\mathrm{T}}SM^{-1}S^{\mathrm{T}}Z\right)\lambda = Z^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathrm{v}}^{r} - SM^{-1}S^{\mathrm{T}}A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}p\right). \tag{8}$$

Таким образом, во всех случаях задача сводится к решению СЛАУ с симметричными положительно определёнными матрицами. В зависимости от топологической структуры СТТ эти матрицы имеют различную степень разреженности.

Для решения СЛАУ с разреженной матрицей системы предложена блочная версия метода квадратных корней (метода Холецкого), учитывающая структуру разреженности. В основе метода лежит $L^{\mathrm{T}}L$-разложение матрицы системы. Например, для уравнений Лагранжа второго рода (2) матрица L определяется совокупностью формул:

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \mathrm{cholesky}\Big[\boldsymbol{M}_{ii} - \sum_{k\in\mathcal{D}_i} L_{ki}^{\mathrm{T}}L_{ki}\Big], && i = N,\dots,1, \\ L_{ij} &= L_{ii}^{-\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{M}_{ij} - \sum_{k\in\mathcal{D}_i} L_{ki}^{\mathrm{T}}L_{kj}\Big), && j \in \mathcal{P}_{\kappa_i}. \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь функция cholesky$[\boldsymbol{M}]$ означает вычисление множителя Холецкого для матрицы $\boldsymbol{M}$. При наличии $L^{\mathrm{T}}L$-разложения матрицы $\boldsymbol{M}$ решение уравнения (2) получается последовательным применением следующих формул:

$$\begin{aligned} x_i &= L_{ii}^{-\mathrm{T}}\Big(\boldsymbol{Q}_i - \sum_{k\in\mathcal{D}_i} L_{ki}^{\mathrm{T}}x_k\Big), && i = N,\dots,1, \\ \ddot{q}_i &= L_{ii}^{-1}\Big(x_i - \sum_{j\in\mathcal{P}_{\kappa_i}} L_{ij}\ddot{q}_j\Big), && i = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{10}$$

Алгоритм (9)–(10) отличается от стандартного алгоритма Холецкого тем, что в нем внешний цикл работает в обратном направлении от N до 1, а внутренние циклы перебирают только ненулевые блоки. Аналогичный алгоритм используется для решения систем уравнений (5), (7) и (8).

Доказано, что применение этого алгоритма к матрицам $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ не приводит к их заполнению. Если матрица системы сильно разрежена, то число арифметических операций в этом алгоритме стремиться к линейному закону роста в зависимости от числа тел в системе.

Кроме того, для решения СЛАУ с плотно заполненными матрицами системы разработан итерационный алгоритм, используемый совместно с алгоритмами численного интегрирования соответствующих УД. Метод является модификацией алгоритма Пауэлла—Бройдена минимизации квадратичной функции. Особенностью его является то, что помимо нахождения решения системы вычисляется матрица H, обратная к матрице системы, которая используется на следующем шаге численного интегрирования для улучшения начального приближения и начального направления поиска. Для решения уравнения (2) на k-ой итерации этого алгоритма последовательно вычисляются:

$$r^{(k)} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{M}\ddot{q}^{(k)} = \boldsymbol{Q} - A^{\text{т}}T^{\text{т}}MTA\,\ddot{q}^{(k)}, \quad H^{(k+1)} = H^{(k)} + \alpha\, u\, u^{\text{т}}, \quad \ddot{q}^{(k+1)} = \ddot{q}^{(k)} + \beta\, u, \tag{11}$$

где

$$u = H^{(k)}r^{(k)}, \quad \alpha = \Big(u^{\text{т}}(r^{(k-1)} - r^{(k)})\Big)^{-1}, \quad \beta = 1 + \alpha\, u^{\text{т}}r^{(k)}.$$

В начале итерационного процесса полагаем, что обратная к $\boldsymbol{M}$ матрица $H^{(0)}$ равна её оценке на предыдущем шаге интегрирования, $\ddot{q}^{(0)} = H^{(0)}\boldsymbol{Q}$, $r^{(-1)} = \boldsymbol{Q}$. Итерации прекращаются при выполнении неравенства $r^{(k+1)^{\text{т}}}r^{(k+1)} < \varepsilon^2_{\text{абс}}$, где $\varepsilon_{\text{абс}}$ — допустимое абсолютное отклонение. Заметим, что в алгоритме используются рекуррентные формулы вычисления антиградиента $r^{(k)}$, которые не требуют трудоёмкой процедуры вычисления элементов обобщённой матрицы инерции $\boldsymbol{M}$. С точностью до обозначений формулы (11) используются для решения уравнений (5), (7) и (8).

Доказано, что предложенный итерационный алгоритм сходится за конечное число шагов, не превосходящих ранга матрицы возмущений $\Delta\boldsymbol{M}$ на шаге интегрирования. В практических задачах ранг матрицы возмущений $\Delta\boldsymbol{M}$ много меньше числа обобщённых координат n, что гарантирует быструю сходимость алгоритма. Таким образом, вычислительные затраты приведения УД СТТ к нормальной форме ОДУ с плотно заполненными матрицами системы снижаются с кубического до квадратичного закона, в зависимости от числа степеней свободы в механической системе.

В **третьей главе** рассматриваются методы разрешения УД СТТ (1) и (4). Особенностью этих систем является то, что они являются СЛАУ относительно своих групп переменных с блочно-квазитрёхдиагональными симметричными матрицами систем, которые не являются положительно определёнными.

Для разрешения таких систем разработан рекуррентный алгоритм, основанный на $L^{\text{т}}DL$-разложении матрицы системы, где матрица D является диагональной с элементами равными 1 и -1. Для системы (1) прямой ход ($i = \overline{N,1}$) этого алгоритма реализуется с использованием следующих формул:

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + \sum_{j\in\mathcal{S}_i} C_j^{\text{т}}H_jC_j,\\ F_i^* &= F_i^{ac} + \sum_{j\in\mathcal{S}_i} C_j^{\text{т}}h_j, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered} H_j = M_j^* - U_j^{\text{т}}U_j, \qquad h_j = F_j^* - H_j\hat{\mathrm{w}}_j^{cr} - U_j^{\text{т}}u_j,\\ U_j = L_j^{-\text{т}}A_j^{\text{т}}M_j^*, \qquad u_j = L_j^{-\text{т}}A_j^{\text{т}}F_j^*,\\ L_j = \text{cholesky}\left[A_j^{\text{т}}M_j^*A_j\right], \end{gathered}$$

а обратный ход ($i = \overline{1,N}$) — формулами:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= L_i^{-1}\big(u_i - U_i(C_i\,\mathrm{w}_{\kappa_i} + \hat{\mathrm{w}}_i^{cr})\big),\\ \mathrm{w}_i &= C_i\,\mathrm{w}_{\kappa_i} + A_i\ddot{q}_i + \hat{\mathrm{w}}_i^{cr},\\ R_i &= M_i^*\mathrm{w}_i - F_i^*. \end{aligned} \tag{13}$$

Алгоритм (12)–(13) можно отнести к группе методов, которые восходят к работам А. Ф. Верещагина (1974), W. W. Armstrong (1979), R. Featherstone (1983). Эти методы характеризуются линейным ростом числа арифметических операций в зависимости от количества тел в механической системе. С этой точки зрения, при большом числе тел в системе алгоритмы разрешения уравнений, содержащих избыточное число переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования УД в обобщённых координатах и их последующего разрешения. Использование факторизации Холецкого позволило на 20–25% уменьшить общее время интегрирования УД по сравнению с несимметричным гауссовым разложением, используемым в работах А. Ф. Верещагина. Для уравнений в гамильтоновых переменных алгоритм имеет аналогичный вид.

В **четвёртой главе** для каждого метода компьютерного моделирования динамики СТТ, рассмотренного в первых трёх главах диссертации, построена теоретическая оценка зависимости числа операций с плавающей точкой (флопов), требуемых на каждом шаге численного интегрирования УД, от количества тел в механической системе, её кинематической структуры и числа степеней свободы в шарнирах. В оценку включены затраты на вычисление кинематических характеристик, формирование УД в матричном виде и разрешение их относительно групп независимых переменных.

С помощью полученных формул выполнен анализ вычислительной сложности этих методов для различных классов механических систем. Методом парных сравнений были выделены наиболее эффективные методы: 1) формирование уравнений Лагранжа второго рода методом составных тел и разрешение их разреженным методом Холецкого (CBM); 2) составление уравнений Лагранжа первого рода и разрешение их разреженным методом Холецкого (LGR); 3) итерационный алгоритм разрешения уравнений Лагранжа второго рода (ITR); 4) разрешение расширенных систем уравнений методом $L^{\mathrm{T}}DL$-разложения (DEC).

Были выделены два основных параметра, характеризующих структуру графа СТТ и влияющих на вычислительную сложность алгоритмов. Один характеризует глубину дерева ($\eta_i = \sum_{j\in\mathcal{P}_i} n_j$), другой — его разветвлённость ($\mu_i = m_i + \sum_{j\in\mathcal{S}_i} m_j$), где n_i — число степеней свободы в i-м шарнире; $m_i = 6 - n_i$ — количество удерживающих связей. Для подсчёта флопов в итерационном алгоритме был введён параметр k — среднее число итераций на шаге интегрирования. Теоретические оценки вычислительных затрат методов сведены в табл. 1.

Таблица 1

Метод	**Вычислительная трудоёмкость (число флопов)**
CBM	$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\eta_i^3}{3}+\frac{17\eta_i^2}{2}+\frac{109\eta_i}{6}+222+42n_i\,\mathrm{card}(\mathcal{P}_i)\right)-\sum_{i=2}^{N}\left(\frac{\eta_{\kappa_i}^3}{3}+\frac{17\eta_{\kappa_i}^2}{2}+\frac{109\eta_{\kappa_i}}{6}-205\right)$
LGR	$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\mu_i^3}{3}+\frac{17\mu_i^2}{2}+\frac{361\mu_i}{6}+420\right]-\sum_{i=2}^{N}\left[\frac{m_i^3}{3}+\frac{5m_i^2}{2}+\frac{m_i}{6}\right]-48$
ITR	$2n^2+37n+405N-145+(4n^2+33n+135N-96)\,k$
DEC	$\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{n_i^3}{3}+\frac{39n_i^2}{2}+\frac{1105n_i}{6}+864\right)-(84n_1+660)$

Теоретические оценки эффективности алгоритмов синтеза УД механических систем и их разрешения относительно старших производных были подтверждены вычислительными экспериментами на примерах моделирования динамики механических систем, отличающихся числом тел, кинематической структурой и количеством степеней свободы в шарнирах системы. На рис. 1 и 2 приведены графики зависимостей времени интегрирования от числа тел в системе для двух типов структур взаимосвязей («звезда» и «цепочка») и двух типов шарниров. Графики

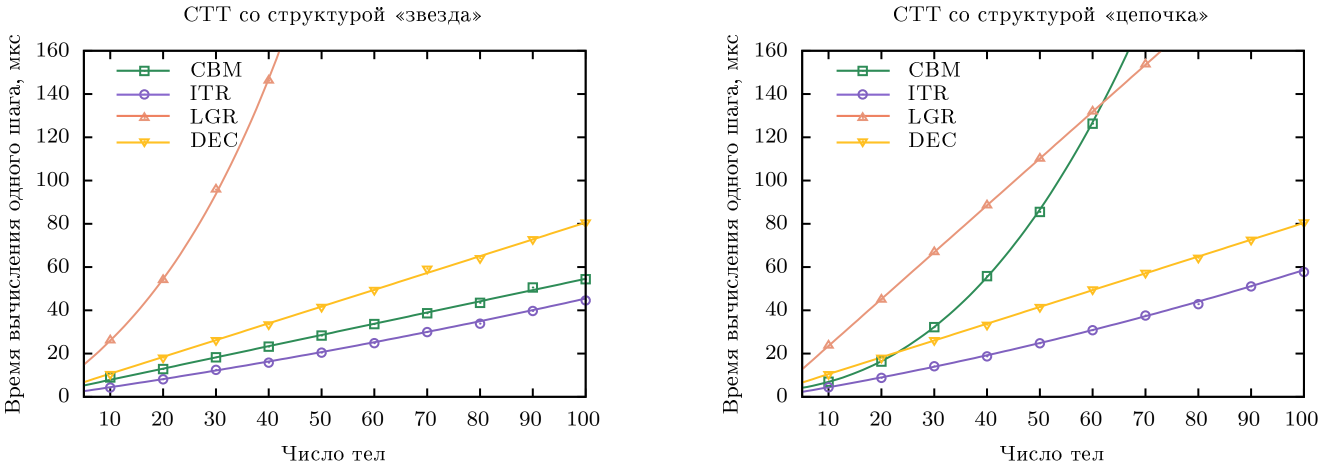

Рис. 1. Зависимость времени интегрирования от числа тел для систем с вращательными шарнирами

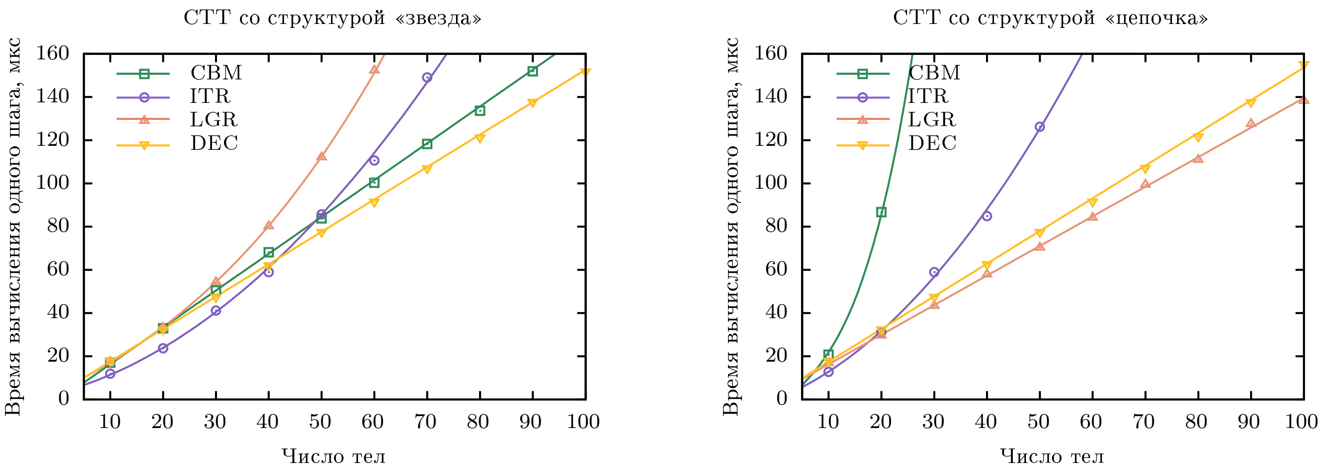

Рис. 2. Зависимость времени интегрирования от числа тел для систем с шаровыми шарнирами

демонстрируют, что в той или иной ситуации каждый из выбранных методов может оказаться значительно эффективнее остальных.

В связи с вышесказанным был разработан алгоритм выбора оптимального метода в зависимости от характеристик механической системы: количества тел, числа степеней свободы в шарнирах и структуры взаимосвязей. С помощью этого алгоритма построены диаграммы, которые наглядно демонстрируют преимущества того или иного метода моделирования динамики СТТ (рис. 3).

На рис. 3 изображены диаграммы выбора эффективных методов моделирования динамики СТТ, топологическая структура которых может включать в себя различное число закреплённых на базовом теле цепочек тел одинаковой длины. На каждой диаграмме по вертикальной оси отложено количество цепочек из твёрдых тел, а по горизонтальной оси — их длина. Кроме того, на каждой диаграмме изображены изолинии числа тел в системе. Из диаграмм видно, что для механических систем с малым числом степеней свободы в шарнирах и с короткими кинематическими цепочками наименьшие вычислительные затраты у метода CBM. С ростом длин цепочек меньшие затраты начинает показывать метод DEC, причём, чем больше степеней свободы в шарнирах, тем раньше это происходит. Метод LGR выигрывает у этих методов только в случае систем с трёхстепенными и четырёхстепенными шарнирами. При этом его эффективность проявляется при одновременном увеличении числа и длины ветвей в механи-

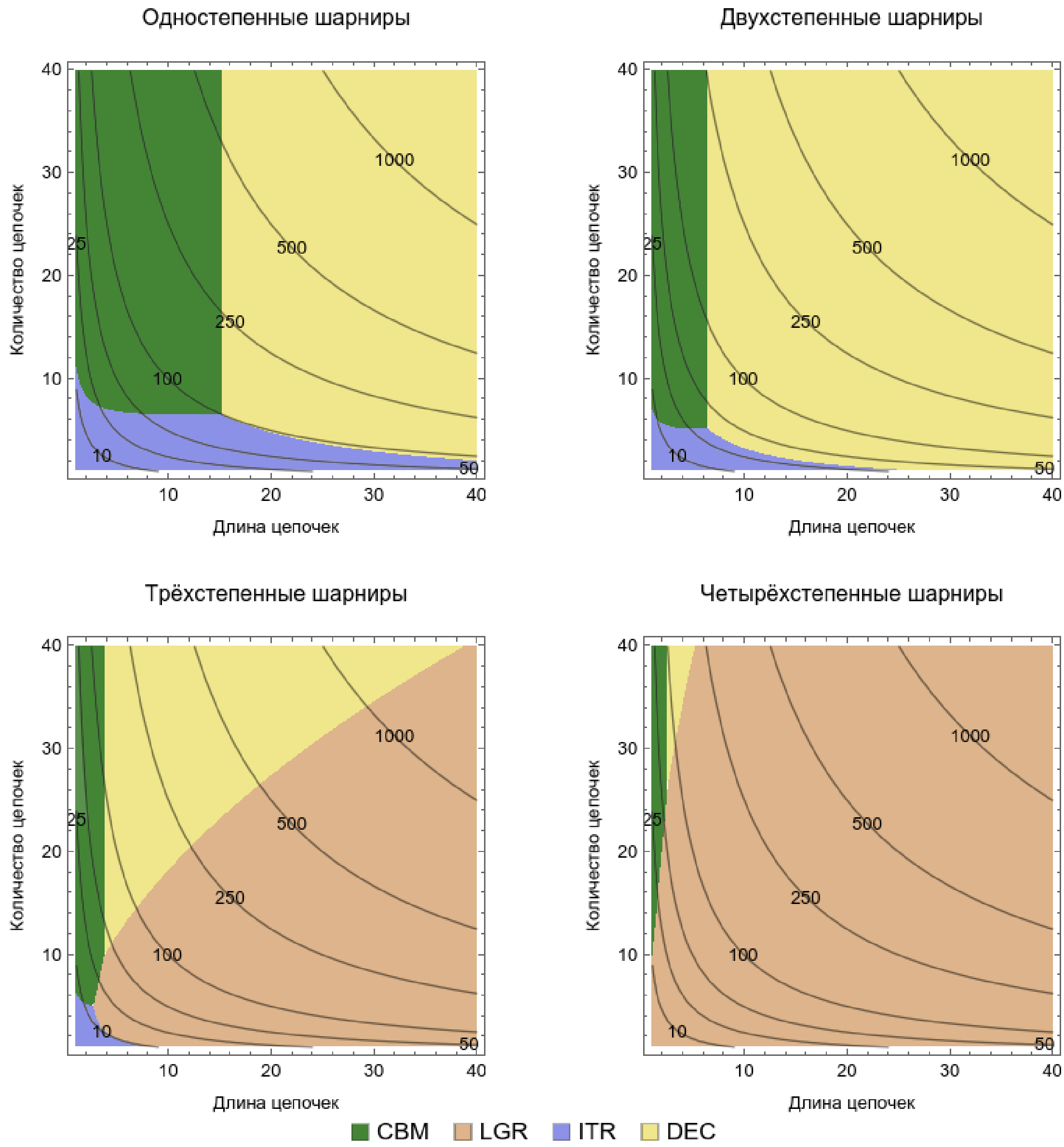

Рис. 3. Диаграммы выбора эффективного метода моделирования

ческой системе. Метод ITR показывает лучшие результаты по сравнению с методами CBM и DEC при небольшом числе степеней свободы в шарнирах и малой разветвлённости системы. Полученные в этой главе формулы и диаграммы, с помощью которых можно прогнозировать временные затраты различных методов моделирования всевозможных СТТ, позволяют инженеру правильно сориентироваться в выборе лучшего подхода к компьютерному моделированию при проектировании новых технических устройств.

В **пятой главе** представлен комплекс программ для моделирования динамики изделий машиностроения, математические модели которых могут быть представлены СТТ. Отличительной особенностью данного комплекса программ является то, что весь процесс функционирования механической системы разбивается на определённое число временных отрезков (этапов), на которых она может иметь разные кинематические структуры. В основу комплекса программ легли разработанные в диссертации математические методы и численные алгоритмы моделирования динамики СТТ.

Основу комплекса программ образует библиотека подпрограмм Dynamica90, которая используется для описания механической системы с переменной кинематической структурой, синтеза УД в различных формах, их численного решения и представления результатов моделирования. Подпрограммы написаны на языке САВ Maxima.

В рамках совместных работ с ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы» разработан комплекс программ D90, предназначенный для моделирования динамики, оптимизации системы управления и идентификации одного класса СТТ с отделяющимися элементами. Программа написана на языке программирования Fortran 95. Интерфейс программы использует функции библиотеки Win32 API. Расчётные модули комплекса программ D90 были сгенерированы с помощью библиотеки Dynamica90.

Программа D90 предназначена: для определения положения статического равновесия изделия в походном положении и после отработки углов наведения; расчёта динамических характеристик в процессе функционирования с учётом пространственной структуры, наличия электрических, гидравлических силовых приводов и систем управления ими; расчёта газодинамического воздействия отделяющихся элементов на неизменяемую часть изделия.

В целом программа делится на три основных блока: блок выбора модели и цели моделирования, задания параметров конкретного изделия; расчётный блок; блок обработки и представления результатов расчётов в виде таблиц и графиков.

Комплекс программ был верифицирован на основе экспериментальных данных. Настройка параметров математических моделей проводилась по результатам стендовых испытаний опытных изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы». Адекватность математических моделей проверялась с помощью сравнения экспериментальных данных, полученных при натурных испытаниях, с результатами численного моделирования полного цикла динамического функционирования ряда изделий. Среднее относительное отклонение результатов численного моделирования от данных наблюдений не превышало 12 процентов.

На комплекс программ получено пять свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

В **Заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Выведена новая форма УД СТТ в гамильтоновых переменных, которая отличается расширенным составом переменных и рекуррентной структурой. В отличие от классических уравнений Гамильтона вычислительная трудоёмкость компьютерного моделирования с использованием этих уравнений растёт по линейному закону в зависимости от числа тел в механической системе.

2. Предложен новый подход к классификации УД СТТ со структурой дерева на основе матрицы кинематической структуры. Классификация включает в себя шесть форм записи УД СТТ в лагранжевых и гамильтоновых переменных.

3. Разработан итерационный алгоритм разрешения уравнений движения с положительно определённой матрицей системы относительно старших производных, предназначенный для использования совместно со стандартными методами интегрирования ОДУ, который в отличие от классических прямых методов решения СЛАУ, таких как Гаусса или Холецкого, обеспечивает квадратичную вычислительную сложность алгоритма и в связи с этим многократно уменьшает вычислительные затраты при моделировании СТТ с малым числом ветвлений в графе системы.

4. Разработан алгоритм приведения расширенных форм уравнений движения систем тел со структурой дерева к системам обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме, отличающийся применением симметричного $L^{\mathrm{T}}DL$-разложения. Использование этого метода позволило на 20-25% уменьшить общее время моделирования по сравнению с традиционным подходом, основанным на методе А. Ф. Верещагина.

5. Проведены анализ и сравнение вычислительной трудоёмкости различных подходов к моделированию СТТ. Указаны условия при которых тот или иной метод оказывается наиболее

эффективным. В работе предложен алгоритм и даны рекомендации по выбору оптимального метода формирования уравнений движения и их разрешения в зависимости от структуры системы, числа тел и типов шарниров.

6. Разработана библиотека подпрограмм «Dynamica90» для описания механической системы, построения уравнений движения в различных формах и генерации программ численного моделирования.

7. Разработан комплекс программ D90, предназначенный для моделирования динамики, оптимизации управления и идентификации параметров одного класса технических систем с отделяющимися элементами.

Публикации по теме диссертации

Основные публикации

1. Классификация моделей систем твёрдых тел, используемых в численных расчётах динамического поведения машиностроительных конструкций / Иванов В. Н., Домбровский И. В., Шимановский В. А., Набоков Ф. В. и Шевелёв Н. А. // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 2. — С. 139–155.
2. Иванов В. Н., Полосков И. Е., Шимановский В. А. Математические модели систем связанных твёрдых тел в импульсах Пуассона // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 10-3. — С. 493–499.
3. Шимановский В. А. Метод компьютерного моделирования динамики систем связанных твёрдых тел // Фундаментальные исследования. — 2017. — № 8-1. — С. 104–109.
4. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Численные методы формирования и решения уравнений движения в импульсах Пуассона систем твёрдых тел со структурой дерева // Современные наукоёмкие технологии. — 2017. — № 10. — С. 13–18.
5. Ivanov V., Shimanovskiy V. Matrix Equations of the Motion of Multibody Systems with a Tree Structure in Hamiltonian Variables // Journal of Applied and Computational Mechanics. — 2023. — Vol. 9, no. 4. — P. 1107–1121.

Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661787 Российская Федерация. Моделирование динамики механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90) : № 2015615714 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661788 Российская Федерация. Моделирование влияния упругих свойств грунта на динамику механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90grunt) : № 2015615716 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
8. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661789 Российская Федерация. Идентификация математической модели механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90ident) : № 2015615718 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский,

Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.

9. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661790 Российская Федерация. Моделирование системы стабилизации колебаний механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами с предварительной компенсацией возмущений (D90komp) : № 2015615721 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661791 Российская Федерация. Построение оптимального управления динамическим поведением механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90opt) : № 2015615724 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.

Прочие публикации

11. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщенных координатах // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. — Пермь, 2005. — Вып. 37. — С. 188–201.
12. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Использование итерационных алгоритмов разрешения уравнений движения механических систем при их численном интегрировании // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — № 4 (4). — С. 28–38.
13. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Методы составления уравнений движения систем связанных твердых тел в декартовых координатах // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. — Пермь, 2007. — Вып. 39. — С. 248–262.
14. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Применение итерационных методов для разрешения уравнений движения систем связанных твердых тел // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 4 (20). — С. 109–116.
15. Бячков А. Б., Иванов В. Н., Шимановский В. А. Классификация форм уравнений динамики систем твердых тел со структурой дерева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — № 7 (33). — С. 21–25.
16. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Уравнения движения систем связанных твёрдых тел в канонических переменных // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — № 2 (21). — С. 76–82.
17. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Программа расчёта динамики системы твёрдых тел с переменной структурой «Dymamica90» // Хроники объединённого фонда электронных ресурсов «Наука и образование». — 2014. — Т. 1, № 1 (56). — С. 34.
18. Шимановский В. А. Эффективное разложение матрицы масс системы многих тел с разветвлённой древовидной структурой взаимосвязей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2018. — № 4 (43). — С. 37–44.
19. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Анализ вычислительной эффективности матричных уравнений движения систем твёрдых тел со структурой дерева в гамильтоновых переменных // Инженерный вестник Дона. — 2023. — № 8. — С. 162–178.