

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет»

**А.В. Бабушкина, А.В. Бабушкин, Л.А. Свисткова**

## **МЕХАНИКА**

*Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебно-методического пособия*

Издательство  
Пермского национального исследовательского  
политехнического университета  
2025

УДК 531(072.8)

Б12

Рецензенты:

д-р техн. наук, ведущий инженер *С.М. Белобородов*  
(ООО «МИП “Прогноз РНМ”»);

канд. техн. наук, доцент *С.Э. Шаклеина*  
(Березниковский филиал Пермского национального  
исследовательского политехнического университета)

**Бабушкина, А.В.**

Б12      Механика : учеб.-метод. пособие / А.В. Бабушкина,  
А.В. Бабушкин, Л.А. Свисткова ; ФГАОУ ВО «Пермский  
национальный исследовательский политехнический уни-  
верситет». – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн.  
ун-та, 2025. – 77 с.

ISBN 978-5-398-03276-5

Представлены основные термины и определения по дисцип-  
лине; задания на выполнение индивидуальных расчетно-графи-  
ческих работ с типовыми примерами их решения; правила оформ-  
ления и требования к работам; вопросы для самопроверки.

Предназначено для самостоятельной работы студентов на-  
правления «Химические технологии и технологии материалов» по  
дисциплине «Механика».

УДК 531(072.8)

ISBN 978-5-398-03276-5

© ПНИПУ, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                                  | 4  |
| Правила оформления и требования к выполнению<br>индивидуальных расчетно-графических работ ..... | 6  |
| <i>Задача № 1</i><br>Определение реакций опор в плоских рамах.....                              | 7  |
| <i>Задача № 2</i><br>Структурный и кинематический анализ<br>плоского механизма .....            | 12 |
| <i>Задача № 3</i><br>Расчет плоской шарнирно-стержневой системы.....                            | 27 |
| <i>Задача № 4</i><br>Определение геометрических характеристик<br>плоских сечений .....          | 35 |
| <i>Задача № 5</i><br>Расчет вала на прочность и жесткость при кручении .....                    | 45 |
| <i>Задача № 6</i><br>Расчет двухопорной балки на прочность<br>при плоском изгибе .....          | 56 |
| Темы для самоконтроля .....                                                                     | 72 |
| Список рекомендуемой литературы .....                                                           | 75 |
| Приложение .....                                                                                | 76 |

## ВВЕДЕНИЕ

Данное учебно-методическое пособие является дополнительным информационным материалом для изучения дисциплины «Механика» в ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» и направлено на достижение планируемых результатов обучения (знать, уметь, владеть) рамках рабочей программы дисциплины «Механика».

Цель учебной дисциплины «Механика» – сформировать профессиональные компетенции и устойчивые представления в области механики, необходимые при разработке и эксплуатации технических изделий и элементов технологического оборудования.

Задачи учебной дисциплины:

- формирование знаний об основных разделах механики, гипотезах и моделях механики, границах их применения;
- изучение основных принципов проектирования технических объектов и методов расчета на прочность и жесткость типовых элементов технологического оборудования;
- формирование умений выполнения расчетов элементов технологического оборудования по критериям работоспособности и надежности;
- формирование навыков владения приемами проведения теоретических и экспериментальных исследований для решения инженерно-технических задач, связанных с оценкой прочности технологического оборудования.

Теоретическая часть рабочей программы дисциплины «Механика» включает в себя два учебных модуля: Модуль 1. Теоретическая механика; Модуль 2. Основы проектирования механизмов, узлов и деталей машин.

*Модуль 1. Теоретическая механика* включает в себя следующие темы:

Тема 1. Основные понятия теоретической механики: механическое движение и механическое взаимодействие; материальная точка и материальное тело; внутренние и внешние силы.

Тема 2. Статика: аксиомы статики; связи и их реакции; силы и момент силы, уравнения равновесия произвольной плоской системы сил: проекция силы на ось; момент силы относительно точки; пара сил, момент пары сил; теорема о моменте равнодействующей; теорема о параллельном переносе силы; приведение плоской системы сил к заданному центру; уравнения равновесия произвольной плоской системы сил.

Тема 3. Кинематика точки и твердого тела: координатный, векторный и естественный способы описания движения точки; определение скорости и ускорения; касательное и нормальное ускорение точки; поступательное и вращательное движение тела; скорости и ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси; плоскопараллельное движение.

Тема 4. Динамика точки: динамика поступательного и вращательного движения твердого тела; законы динамики; общие теоремы динамики точки; центр масс; момент инерции системы относительно оси.

Тема 5. Центр тяжести: центр параллельных сил; центр тяжести; координаты центров тяжести и способы их определения.

*Модуль 2. Основы проектирования механизмов, узлов и деталей машин* включает в себя следующие темы для изучения:

Тема 1. Машины и механизмы: основные понятия; классификация узлов и деталей машин общего назначения и их характеристика; общая классификация механизмов; анализ и синтез механизмов.

Тема 2. Обеспечение качества на этапах проектирования и конструирования изделий: требования, предъявляемые к изделиям; критерии качества при расчетах и проектировании изделий; причины отказа и потери работоспособности.

Тема 3. Основы моделирования механического поведения материалов и конструкций: основные понятия; реальная конструкция и расчетная схема; модели материала, формы тела, нагружения; основные гипотезы; виды расчетов изделий на прочность; продольные и поперечные деформации; коэффициент Пуассона; зависимость между напряжениями и деформациями; расчеты по допускаемым напряжениям и перемещениям.

## **ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

При выполнении индивидуальных расчетно-графических работ пояснительная и расчетная части оформляются рукописно (и/или машинописное оформление) на отдельных белых листах формата А4, с одной стороны, ориентация формата книжная, рамка: отступ от верхнего, правого, нижнего края страницы – 5 мм, от правого – 20 мм. Схема задачи и графическая часть к ней выполняется либо также на белых листах, либо на миллиметровке, формат листа А4. Количество расчетно-графических работ определяется преподавателем.

Решение задачи выполнять в следующем порядке:

1. Выписать полностью условие задачи с числовыми данными.
2. Вычертить схему к задаче в масштабе с указанием на ней численных значений заданных величин.

3. Необходимые вычисления представлять сначала в общем виде (обозначая все данные и искомые величины буквами), после чего вместо буквенных обозначений проставить их численные значения и найти результат (вычисленные значения должны быть округлены и взяты по ГОСТ).

4. Все расчеты в индивидуальных расчетно-графических работах производить в единицах СИ.

5. По результатам выполнения каждой расчетно-графической работы сформулировать и записать выводы.

Титульный лист расчетно-графической работы должен быть оформлен по образцу, представленному в приложении, с указанием своего варианта.

Расчетно-графические работы, оформленные небрежно и без соблюдения предъявляемых к ним требований, не рассматриваются и не засчитываются.

# Задача № 1

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР В ПЛОСКОЙ РАМЕ

### *Основные понятия и определения*

В теоретической механике рассматриваются тела, которые являются абсолютно твердыми. Если движение рассматриваемого тела другими телами не ограничивается, то такое тело можно назвать свободным, тогда ему можно придать другое положение в плоскости или в пространстве. В ином случае тело называется несвободным, а объекты, ограничивающие перемещения данного тела, – связями. Реакции связи – это силы, с которыми связи действуют на рассматриваемое тело. Реакции связи имеют вектор направления, они направлены в сторону противоположную перемещению тела.

Основные виды связей:

1. Гладкая поверхность – реакция  $\bar{R}_A$  гладкой поверхности всегда направлена по общей нормали к поверхности соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке, точке  $A$  (рис. 1.1).

2. Нить – это связь, которая реализована в виде гибкой нерастяжимой нити (рис. 1.2), в данном случае реакция  $\bar{R}_A$  натянутой нити направлена вдоль нерастяжимой нити к точке подвеса.

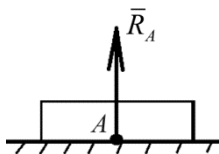


Рис. 1.1. Гладкая поверхность

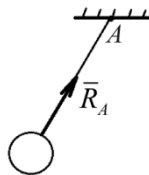


Рис. 1.2. Нить

3. Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опора. Реакция  $\bar{R}_A$  шарнирно-неподвижной опоры (рис. 1.3, а) проходит через ось шарнира и имеет произвольное направление в плоскости. Реакции  $\bar{R}_A$  раскладывается на две составляющие по осям

координат  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . Полная реакция опор определяется по формуле  $\bar{R}_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2}$ .

Шарнирно-подвижная опора приведена на рис. 1.3, б. Реакция  $\bar{R}_A$  такой опоры направлена по нормали к поверхности.

4. Стержневая опора. На рис. 1.4 представлен стержень  $AB$ , он закреплен на концах шарнирами – реакция стержня  $\bar{R}$  будет направлена вдоль оси стержня.

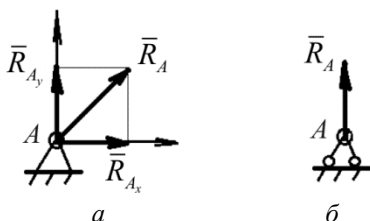


Рис. 1.3. Шарнирно-неподвижная и шарнирно-подвижная опоры

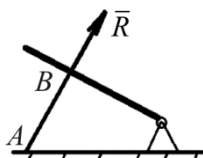


Рис. 1.4. Реакция опор – стержень

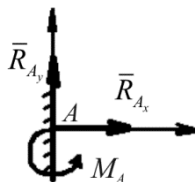


Рис. 1.5. Жесткая заделка

5. Жесткая заделка представлена на рис. 1.5. Реакции опор: неизвестная сила  $\bar{R}_A$  (две составляющие  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ ), расположенная в плоскости и момент  $\bar{M}_A$  вокруг точки  $A$ . Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки необходимо определить три неизвестные величины внутренних сил  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и  $M_A$ .

При решении задач на определение реакций опор в конструкциях необходимо составить уравнения равновесия. Имеется три формы записи уравнений для плоской системы сил:

| I                   | II<br>(если ось $OX$ не $\perp AB$ ) | III<br>(если точки $A, B, C \notin$ одной прямой) |
|---------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\sum F_{kx} = 0$   | $\sum F_{kx} = 0$                    | $\sum M_A(F_k) = 0$                               |
| $\sum F_{ky} = 0$   | $\sum M_A(F_k) = 0$                  | $\sum M_B(F_k) = 0$                               |
| $\sum M_A(F_k) = 0$ | $\sum M_B(F_k) = 0$                  | $\sum M_C(F_k) = 0$                               |

Для формы I для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю: 1) суммы проекций всех сил на каждую координатную ось; 2) сумма моментов сил относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил.

### ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. Зарисовать схему в масштабе. Выписать исходные данные по задаче.

2. Заменить действие связей реакциями.

3. Составить уравнения равновесия. Определить неизвестные реакции опор.

4. Составить проверочное уравнение.

Схема для решения задачи приведена на рис. 1.6. Исходные данные для решения задачи указаны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

| Цифра<br>шифра | Номер схемы | $F$ , кН | $P$ , кН | $m$ , кН·м | $\alpha$ , ° |
|----------------|-------------|----------|----------|------------|--------------|
|                | 1-я         | 2-я      | 3-я      | 4-я        | 5-я          |
| 1              | 1           | 35       | 2        | 10         | 10           |
| 2              | 3           | 5        | 1        | 7          | 15           |
| 3              | 2           | 55       | 2        | 8          | 20           |
| 4              | 4           | 30       | 3        | 5          | 25           |
| 5              | 5           | 40       | 4        | 5          | 30           |
| 6              | 7           | 20       | 3        | 16         | 35           |
| 7              | 6           | 10       | 6        | 12         | 40           |
| 8              | 8           | 35       | 4        | 16         | 45           |
| 9              | 10          | 60       | 2        | 17         | 50           |
| 0              | 9           | 25       | 30       | 7          | 55           |

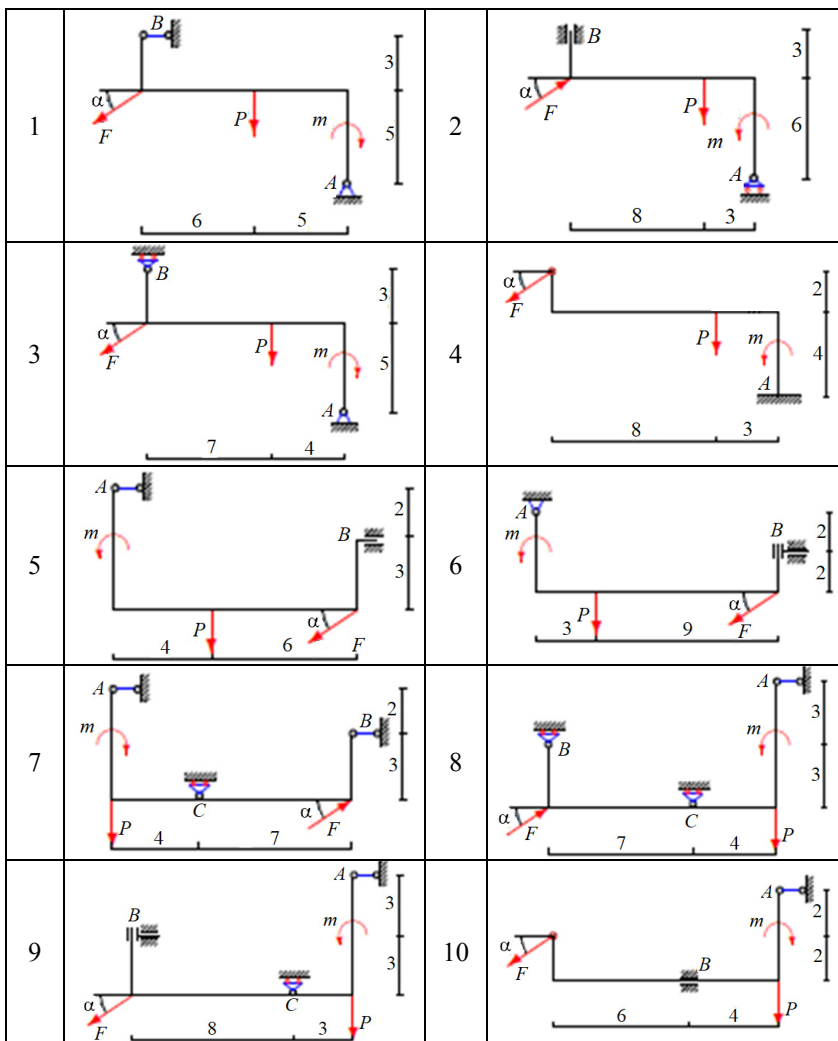


Рис. 1.6. Схемы плоских рам

### **Пример решения задачи**

Рама (на плоскости) имеет закрепление в заделке  $A$  (заделка скользящая) и опирается рама на шарнир  $B$  (подвижный) (рис. 1.7). На конструкцию рамы действуют внешние силы  $F = 10$  кН,  $P = 5$  кН

и внешний момент  $m = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$ . Задан угол расположения внешней силы относительно конструкции рамы  $\alpha = 36^\circ$ . Необходимо определить реакции опор рамы.

*Решение:*

1. Схему необходимо зарисовать в масштабе с указанием численных значений величин.

2. Выявить связи. В опоре  $A$  возникают две реакции опор: горизонтальная сила  $X_A$  и момент  $M_A$ . Реакция опоры  $B$  только вертикальная –  $Y_B$  (рис. 1.8).

3. Составить уравнения равновесия плоской системы сил и определить неизвестные величины реакций опор:

$$\sum X_i = 0; X_A + F \cdot \cos \alpha + P = 0; \sum Y_i = 0; Y_B - F \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_A = 0; M_A + 3Y_B + 2F \cos \alpha - 8F \sin \alpha + m - 3P = 0.$$

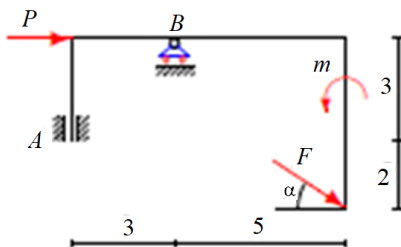


Рис. 1.7. Схема плоской рамы

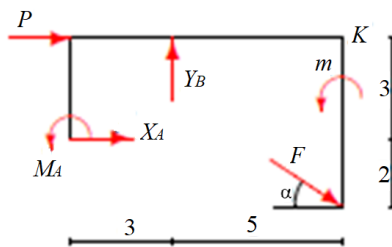


Рис. 1.8. Схема и реакции опор

Решить систему уравнений и найти  $Y_B = 6 \text{ кН}$ ,  $X_A = -13 \text{ кН}$ ,  $M_A = 17 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

4. Для проверки найденных реакций опор составить проверочное уравнение. Проверочное уравнение выбирается то, которое не было рассмотрено ранее при нахождении реакции опор, и то, в котором были учтены в уравнении все искомые неизвестные. В данной задаче лучше выбрать уравнение суммы момента всех сил относительно точки  $K$ , так как все реакции опор войдут в уравнение:  $\sum M_K = 0; M_A - 5Y_B + 3X_A + 5F \cos \alpha + m = 0$ . В результате подстановки значений в последнее уравнение получается  $0 = 0$ , это означает, что найденные значения реакций опор верны.

## **Задача № 2**

# **СТРУКТУРНЫЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА**

### *Основные понятия и определения*

Суть анализа плоского механизма состоит в определении кинематических и динамических свойств по заданной схеме механизма. Если рассматривать задачу синтеза, то ее можно определить как обратную к задаче анализа.

Теория рассматривает структуру механизмов и машин, кинематику механизмов, динамику машин и механизмов и синтез механизмов.

В современном мире для облегчения человеческого труда, а чаще всего и замены существуют специальные устройства, которые называются машинами. Такие устройства выполняют движения для преобразования энергии. Машины состоят из механизмов и деталей (элементов) машин. Механизм состоит из некоторой системы тел и преобразует движение одного или нескольких тел в требуемое движение других тел.

Механизмы состоят из звеньев. Звеном может быть одна деталь или несколько. Детали механизма изготавливаются отдельно. Все детали, входящие в звено, движутся как одно целое. Механизмы могут состоять из входного звена (звено соединено с двигателем), ему сообщается движение, далее идут промежуточные звенья, замыкает механизм выходное звено (соединено с рабочим органом) – звено, совершающее движение, для которого и предназначен весь механизм.

Если два взаимодействующих звена кинематической цепи образуют подвижное соединение, то такое соединение называют кинематической парой.

Каждое графическое изображение механизма заменяется структурной схемой. На схеме звенья условно изображаются фигурами и отрезками, а кинематические пары заменяют условными

схемами, согласно общепринятым правилам и обозначаются большими латинскими буквами.

Введем понятие «кинематическая схема». Это структурная схема, но построенная с соблюдением относительных размеров звеньев в выбранном масштабном режиме.

#### *Классификация кинематических пар:*

1. С 5-го по 1-й класс, в зависимости от количества уравнений связей.

2. Делятся на 1-, 2-, 3-, 4-, 5-подвижные, в зависимости от числа степеней свободы.

Если сложить порядок класса и подвижность кинематической пары, то в сумме получится число 6 (число степеней свободы свободного твердого тела в трехмерном пространстве).

3. По характеру движения кинематические пары бывают плоские (движение в плоскости, реализуют вращательное и поступательное движения) и пространственные.

4. По типу контакта элементов кинематические пары делятся на низшие и высшие. В низших парах элементами контакта являются поверхности, например поверхность сферы, цилиндра, плоскости. В высших парах элементами контакта являются точки и линии (например, кинематические пары зубчатого зацепления, кулачкового механизма).

Число степеней свободы кинематической пары  $W$  в относительном движении звеньев определяется по формуле  $W = 6 - D$ , где  $D$  – число связей, ограничений движений.

Если  $D = 6$ , то два звена жестко связаны – кинематическая пара отсутствует. Если  $D = 0$ , то два звена свободны друг от друга – кинематическая пара отсутствует. Поэтому степень подвижности кинематической пары  $D$  находится в пределах  $1 \leq D \leq 5$ .

Звенья соединяются между собой с помощью кинематических пар, тем самым образуется кинематическая цепь. Кинематическая цепь может быть плоской (на рис. 2.1, а все звенья движутся в одной или параллельных плоскостях) или пространственной (звенья описывают траектории, лежащие в пересекающихся плоскостях).

Механизмы бывают с низшими кинематическими парами и высшими. Чаще всего распространены механизмы с низшими кинематическими парами. К ним можно отнести винтовые, клиновые и рычажные. Примеры механизмов с высшими кинематическими парами – кулачковые, зубчатые, фрикционные, мальтийские и др.

Если звенья кинематической цепи образуют замкнутый контур, то такая цепь называется замкнутой (рис. 2.1, б), если контур не замкнут, то цепь называется открытой (см. рис. 2.1, а).

Механизм состоит из кинематической цепи, в которой есть стойка (неподвижное звено), входные, промежуточные и выходные звенья.

Движение всех звеньев, входящих в состав механизма, рассматривается по отношению к стойке, к неподвижному звену. Звенья, связанные со стойкой, образуют пары 5-го класса и передают на нее усилия и носят названия основных звеньев.

Рассмотрим пример плоского механизма – кривошипно-ползунный механизм (рис. 2.2). На рис. 2.2 обозначены звенья механизма: 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – ползун; 4 – стойка; а также обозначены кинематические пары: A, B, C. Точка O – неподвижная стойка.

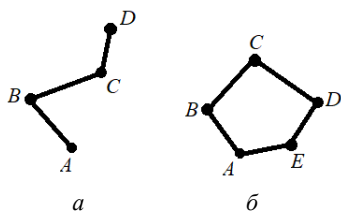


Рис. 2.1. Виды кинематических цепей

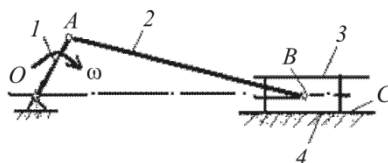


Рис. 2.2. Кривошипно-ползунный механизм

В теории машин и механизмов есть формула для определения степени подвижности пространственного механизма, которая учитывает все связи, формула называется Сомова – Малышева:

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - 1P_1,$$

где  $n$  – количество подвижных звеньев;  $P_i$  – количество кинематических пар  $i$ -го класса.

Если рассматривать плоский механизм, то формулу Сомова – Малышева можно преобразовать. В плоской цепи каждое звено имеет 3 степени свободы, так как на движение всех звеньев уже наложены три общие связи. Каждая кинематическая пара накладывает на относительное движение звеньев на три связи меньше, чем в пространстве. Все звенья системы имеют  $(6-3) \cdot n$  степеней свободы.

Формула Чебышева применима для плоского механизма и определяет степень его подвижности:

$$W = (6-3)n - (5-3)P_5 - (4-3)P_4 - (3-3)P_3$$

или  $W = 3n - 2P_5 - P_4$ .

Л.В. Ассуром был сформулирован следующий принцип: механизм может быть образован последовательным присоединением к одному или нескольким первичным механизмам (начальным звеньям) одной или нескольких кинематических цепей нулевой подвижности ( $W = 0$ ), но с учетом того, что каждая цепь должна быть подсоединена не менее чем к двум звеньям.

Также Л.В. Ассур сформулировал определение структурной группы Ассра (группа нулевой подвижности) – это кинематическая цепь, образованная только подвижными звеньями механизма, и подвижность ее при присоединении к стойке равна нулю ( $W = 0$ ).

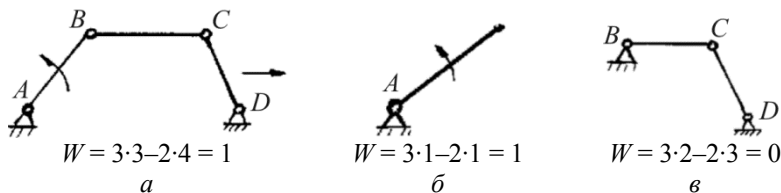


Рис. 2.3. Механизм (а), первичный механизм (б) и структурная группа Ассра (в)

На рис. 2.3, а представлен механизм, степень подвижности которого  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ . На рис. 2.3, б представлен первичный

механизм, он состоит из стойки и одного подвижного звена и обладает степенью подвижности  $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ . На рис. 2.3, в представлена структурная группа Ассура, у которой степень подвижности  $W = 0$ .

Число первичных механизмов равно числу степеней подвижности всего механизма. Если от механизма отделить первичный механизм (начальное звено), то освободившаяся кинематическая цепь будет иметь степень подвижности, равную нулю, если ее присоединить к стойке освободившимися звеньями. Кинематическая цепь, у которой степень подвижности равна нулю, получила название структурной группы Ассура.

Если степень подвижности группы Асура приравнять к 0, то число звеньев, входящих в состав групп Ассура, должно удовлетворять следующему соотношению:  $n = \frac{2}{3} P_5$ , т.е. число звеньев групп должно быть всегда четным.

Каждой группе Ассура можно присвоить класс, порядок и вид. Класс группы присваивается в зависимости от числа кинематических пар, входящих в замкнутый контур звеньев. Порядок группы – это число не присоединенных кинематических пар к основному механизму.

Механизм разделяют на возможные группы Ассура, при этом начинают процесс деления с наиболее удаленной группы от начального звена. Класс и порядок механизма присваивается по наивысшему классу и порядку группы, входящей в его состав.

Рассмотрим простые рычажные механизмы, состоящие из групп Ассура 2-го класса и второго порядка. Существует пять групп для плоских механизмов с низшими кинематическими парами (рис. 2.4).



Рис. 2.4. Плоские механизмы с низшими парами

Л.В. Ассур разработал структурную классификацию для плоских рычажных шарнирных механизмов (только с вращающимися парами). И.И. Артоболевский в дальнейшем усовершенствовал и дополнил эту классификацию с учетом поступательных кинематических пар.

Вид группы Ассура определяется в зависимости от того, какие кинематические пары входят в состав группы (вращательные или поступательные). На рис. 2.5 представлены виды групп 2-го класса (двухповодковые группы Ассура).

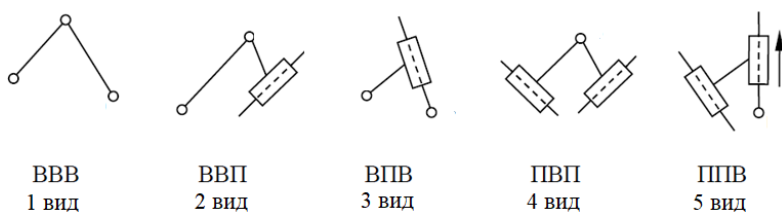


Рис. 2.5. Виды групп 2-го класса

Задачей кинематического анализа является изучение движения звеньев механизма вне зависимости от сил, действующих на них. По заданному закону движения ведущего звена определяют положения, угловые скорости и ускорения ведомых звеньев, а также перемещения, скорости, ускорения отдельных точек рассматриваемого механизма.

Кинематическое исследование схем механизмов можно проводить различными методами, например: аналитическими, графическими, графоаналитическими и экспериментальными.

Аналитические методы отличаются сложностью и трудоемкостью, для их реализации применяют электронно-вычислительные машины.

Графические методы можно разделить на метод построения кинематических диаграмм (графический) и метод планов скоростей и ускорений (графоаналитический).

Метод построения кинематических диаграмм основан на графическом изображении перемещений, скоростей или ускорений отдельных точек звеньев в функции времени или перемеще-

ний ведущего звена. Метод дает наглядное представление об изменении кинематических параметров во времени. Переход от графиков перемещений к графикам скоростей и ускорений производится путем графического дифференцирования, а обратно – графическим интегрированием.

Метод планов скоростей и ускорений позволяет определить скорости и ускорения любых точек механизма для любого момента времени, а также угловые скорости и угловые ускорения подвижных звеньев механизма.

Рассмотрим метод планов скоростей и ускорений для проведения кинематического анализа плоского рычажного механизма.

Графические планы скоростей и ускорений можно назвать векторными многоугольниками, у которых векторы абсолютных скоростей или ускорений выходят из одной точки-полюса. Они позволяют определить не только абсолютные скорости и ускорения точек, но и относительные скорости и ускорения точек звеньев в любом положении механизма.

### ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. Выбрать масштаб чертежа. На чертеже нанести неподвижные элементы кинематических пар механизма.

2. Провести структурный анализ механизма. Построить план положений каждой группы Ассура в соответствии с последовательностью образования ими механизма.

3. Построить план скоростей для заданного положения механизма. Определить линейные скорости всех точек звеньев механизма и угловые скорости звеньев механизма, совершающих вращательное движение.

4. Построить план ускорений для заданного положения механизма. Определить линейные ускорения всех точек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев механизма, совершающих вращательное движение.

Схема для решения задачи приведена на рис. 2.6. Размеры длин звеньев и угловые скорости ведущих звеньев указаны в табл. 2.1.

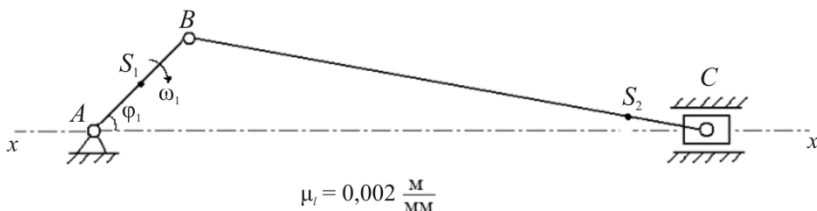


Рис. 2.6. Схема механизма

Таблица 2.1

| Цифра<br>шифра | $AB$ , м | $BC$ , м | $AS_1$ , м | $BS_2$ , м | $\varphi_1$ , ° | $\omega_1$ , рад/с |
|----------------|----------|----------|------------|------------|-----------------|--------------------|
|                | 1-я      | 2-я      | 3-я        | 4-я        | 5-я             | 6-я                |
| 1              | 0,02     | 0,17     | 0,01       | 0,145      | 45              | 22                 |
| 2              | 0,03     | 0,18     | 0,015      | 0,153      | 50              | 24                 |
| 3              | 0,04     | 0,19     | 0,02       | 0,162      | 55              | 26                 |
| 4              | 0,06     | 0,21     | 0,03       | 0,179      | 60              | 28                 |
| 5              | 0,07     | 0,22     | 0,035      | 0,187      | 65              | 30                 |
| 6              | 0,08     | 0,23     | 0,04       | 0,196      | 70              | 32                 |
| 7              | 0,09     | 0,24     | 0,045      | 0,204      | 65              | 34                 |
| 8              | 0,1      | 0,25     | 0,05       | 0,213      | 60              | 36                 |
| 9              | 0,11     | 0,26     | 0,055      | 0,221      | 55              | 38                 |
| 0              | 0,12     | 0,27     | 0,06       | 0,230      | 50              | 40                 |

### ***Пример решения задачи***

Провести структурный и кинематический анализ плоского шарнирного механизма. Исходные данные:  $l_{AB} = 0,05$  м,  $l_{BC} = 0,2$  м,  $l_{AS_1} = 0,025$  м,  $l_{BS_2} = 0,17$  м,  $\varphi_1 = 45^\circ$ ,  $\omega_1 = 88$  с<sup>-1</sup>.

*Решение:*

1. Выбрать масштаб чертежа и нанести неподвижные элементы кинематических пар механизма.

Изобразим на чертеже звено  $l_{AB}$  в виде отрезка  $AB$  длиной 25 мм (рис. 2.7). Тогда масштаб чертежа будет  $\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB} = \frac{0,05 \text{ м}}{25 \text{ мм}} = 0,002 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ .

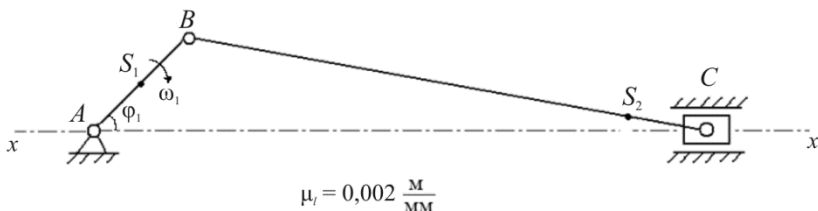


Рис. 2.7. Схема механизма в масштабе

Строим положение ведущего звена  $l_{AB}$  под заданным углом  $\varphi_1 = 45^\circ$  к оси  $OX$ .

Вычисляем длины отрезков  $BC$  в масштабе построения:

$$BC = l_{BC} / \mu_l = \frac{0,2}{0,002} = 100 \text{ мм.}$$

$$AS_1 = l_{AS_1} / \mu_l = \frac{0,025}{0,002} = 12,5 \text{ мм.}$$

$$BS_2 = l_{BS_2} / \mu_l = \frac{0,17}{0,002} = 85 \text{ мм.}$$

2. Провести структурный анализ механизма. Построить план положений каждой группы Ассур в соответствии с последовательностью образования ими механизма.

Проведем структурный анализ механизма. Построим планы положений каждой группы Ассур в соответствии с последовательностью образования ими механизма (рис. 2.8).

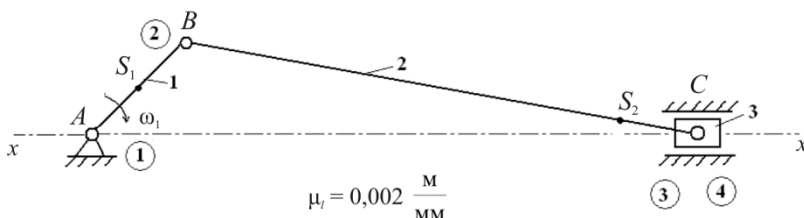
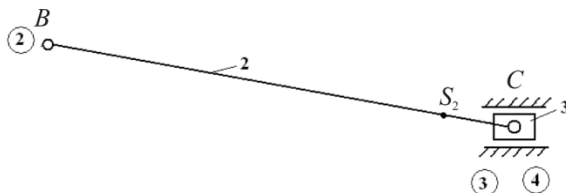


Рис. 2.8. Присвоение механизму звеньев и кинематических пар

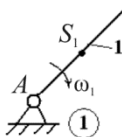
Обозначим звенья и кинематические пары (см. рис. 2.8). Определим степень подвижности механизма  $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$ . Определим

ведущее звено. В качестве начального звена принято звено 1. Структурно в состав механизма входят следующие группы:

а) группа Ассура 2-го класса, 2-го порядка, 2-го вида; степень подвижности группы  $W = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0$ ;



б) механизм 1-го класса; степень подвижности  $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ .



Формула строения механизма имеет вид  $I(1) \rightarrow II_2(2,3)$ .

3. Построить план скоростей для заданного положения механизма. Определить линейные скорости всех характерных точек звеньев механизма и угловые скорости звеньев механизма, совершающих вращательное движение.

Планы скоростей и ускорений механизма строятся после решения задачи о его положениях.

3.1. Определить скорость т.  $B$ .

Поскольку т.  $B$  принадлежит кривошипу, который совершает вращательное движение относительно неподвижной оси  $x-x$ , то модуль скорости т.  $B$  определяется по формуле

$$V_B = \omega_1 \cdot AB = 88 \cdot 0,05 = 4,4 \text{ м/с.}$$

Вектор скорости  $\vec{V}_B \perp AB$  и направлен в сторону  $\omega_1$ . Пусть отрезок  $pb$ , изображающий вектор скорости т.  $B$  на плане скоростей, равен 55 мм (рис. 2.9).

$$\begin{aligned} \text{Тогда масштаб плана скоростей равен } \mu_V &= \frac{V_B}{pb} = \frac{4,4}{55} = \\ &= 0,08 \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}}. \end{aligned}$$

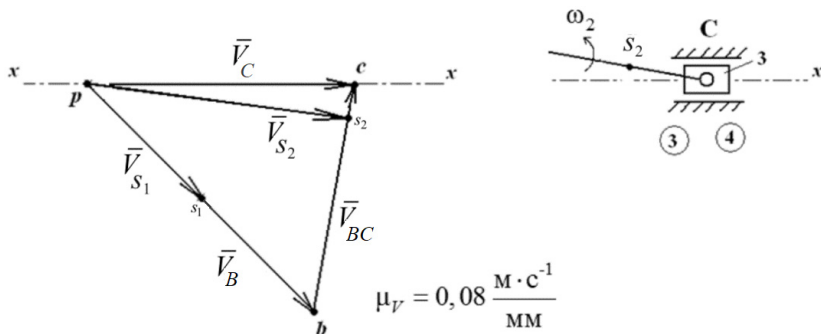


Рис. 2.9. План скоростей

### 3.2. Определить скорость т. $S_1$ .

Поскольку т.  $S_1$  принадлежит звену  $AB$ , положение т.  $s_1$  на плане скоростей можно определить по методу обхода точек.

$$\frac{AS_1}{AB} = \frac{ps_1}{pb}; \quad ps_1 = \frac{AS_1 \cdot pb}{AB} = \frac{0,025 \cdot 55}{0,05} = 27,5 \text{ мм.}$$

$$V_{s_1} = ps_1 \cdot \mu_V = 27,5 \cdot 0,08 = 2,2 \text{ м/с.}$$

Луч, вышедший из полюса  $p$  на т.  $s_1$ , изображает вектор скорости т.  $S_1$  (см. рис. 2.9).

### 3.3. Определить скорость т. $C$ .

Поскольку угловая скорость  $\omega_2$  неизвестна, то искомое уравнение скорости т.  $C$  должно быть найдено с помощью двух уравнений

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{BC},$$

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{x-x} + \vec{V}_{C_{x-x}}, \quad \text{при этом } \vec{V}_{C_{x-x}} = 0.$$

Поскольку звено 2 совершает плоское движение, состоящее из вращательной и поступательной частей, относительная скорость  $\vec{V}_{BC}$  определяется согласно вращательной части движения:

$$\vec{V}_{BC} = \omega_2 \cdot BC. \quad (1)$$

На плане скоростей из точки  $b$  проведем линию действия вектора скорости  $\vec{V}_{BC} \perp BC$  (см. рис. 2.9).

Поскольку звено 3 совершает прямолинейное поступательное движение относительно неподвижной оси  $x-x$ , вектор относительной скорости  $\vec{V}_{C-x}$  направлен параллельно данной оси.

На плане скоростей из точки  $p$  проведем линию параллельную оси  $x-x$  до пересечения с линией действия вектора скорости  $\vec{V}_{BC}$  и при их пересечении получаем т.  $c$  (см. рис. 2.9).

Отрезок  $pc$  на плане скоростей представляет собой вектор скорости  $\vec{V}_C$  в масштабе построения. Определим истинное значение абсолютной скорости т.  $C$ :

$$V_C = pc \cdot \mu_V = 45,9 \cdot 0,08 = 3,67 \text{ м/с.}$$

Вектор  $bc$  на плане скоростей изображает скорость точки  $C$  в относительном вращательном движении звена  $BC$  относительно точки  $B$ , т.е.  $\vec{V}_{BC}$ . Определим истинное значение скорости  $V_{BC}$ :

$$V_{BC} = bc \cdot \mu_V = 39,51 \cdot 0,08 = 3,2 \text{ м/с.}$$

3.4. Определить угловую скорость звена 2.

$$\text{Из уравнения (1) } \omega_2 = \frac{V_{BC}}{BC} = \frac{3,2}{0,2} = 16 \text{ с}^{-1}.$$

Для направления угловой скорости  $\omega_2$  необходимо вектор относительной скорости  $\vec{V}_{BC}$  параллельно перенести с плана скоростей в т.  $C$ . В направлении движения данной скорости относительно т.  $B$  направлен вектор угловой скорости  $\omega_2$  (см. рис. 2.9).

3.5. Определить скорость т.  $S_2$ .

Поскольку т.  $S_2$  принадлежит звену  $BC$ , положение точки  $s_2$  на плане скоростей определяется по методу обхода точек.

$$\frac{BS_2}{BC} = \frac{bs_2}{bc}; \quad bs_2 = \frac{BS_2 \cdot bc}{BC} = \frac{0,17 \cdot 39,51}{0,2} = 33,58 \text{ мм.}$$

Луч, вышедший из полюса  $p$  на т.  $s_2$ , изображает вектор скорости т.  $S_2$  (см. рис. 2.9), истинное значение которой  $V_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_V = 45,2 \cdot 0,08 = 3,6 \text{ м/с.}$

4. Построить план ускорений для заданного положения механизма. Определить линейные ускорения всех характерных то-

чек звеньев механизма и угловые ускорения звеньев механизма, совершающих вращательное движение.

#### 4.1. Определить ускорение т. $B$ .

Поскольку т.  $B$  принадлежит кривошпицу, который совершает вращательное движение относительно неподвижной оси  $x-x$ , то ускорение т.  $B$  определяется по формуле

$$\bar{\alpha}_B = \bar{\alpha}_{AB}^n + \bar{\alpha}_{AB}^\tau,$$

$$\alpha_{AB}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = 0, \text{ так как } \varepsilon_1 = (\omega_1)' = 0, \omega_1 = \text{const},$$

$$\alpha_B = \alpha_{AB}^n = \omega_1^2 \cdot AB = 88^2 \cdot 0.05 = 387,2 \text{ м/с}^2.$$

$\bar{\alpha}_{AB}^n \parallel AB$  в сторону от т.  $B$  к т.  $A$ .

Пусть отрезок  $ab$ , изображающий вектор ускорения  $\bar{\alpha}_{AB}^n$  на плане ускорений, равен 45 мм (рис. 2.10).

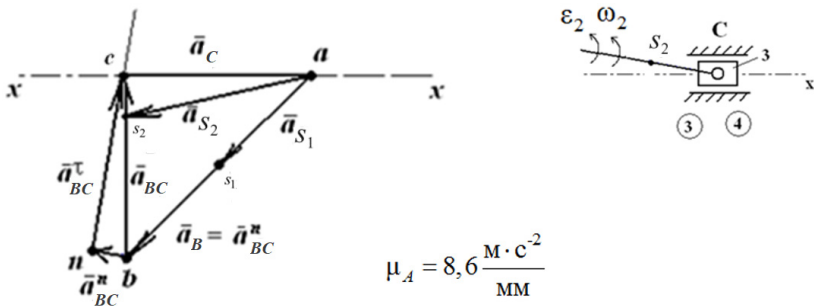


Рис. 2.10. План ускорений

Тогда масштаб плана ускорений равен  $\mu_A = \frac{\alpha_B}{ab} = \frac{387,2}{45} =$   
 $= 8,6 \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{мм}}.$

#### 4.2. Определить ускорение т. $S_1$ .

Поскольку т.  $S_1$  принадлежит звену  $AB$ , то положение т.  $S_1$  на плане ускорений определяется по методу обхода точек.

$$\frac{AS_1}{AB} = \frac{\alpha_{S_1}}{\alpha b}; \quad \alpha_{S_1} = \frac{AS_1 \cdot b}{AB} = \frac{0,025 \cdot 45}{0,05} = 22,5 \text{ мм.}$$

$$\alpha_{S_1} = \alpha_{S_1} \cdot \mu_A = 22,5 \cdot 8,6 = 193,5 \text{ м/с}^2.$$

Луч, вышедший из полюса  $\alpha$  на т.  $S_1$ , изображает вектор ускорения т.  $S_1$  (см. рис. 2.10).

#### 4.3. Определить ускорение т. $C$ .

Поскольку угловое ускорение  $\varepsilon_2$  неизвестно, то искомое уравнение ускорения т.  $C$  должно быть найдено с помощью двух уравнений:

$$\bar{\alpha}_C = \bar{\alpha}_B + \bar{\alpha}_{BC}^n + \bar{\alpha}_{BC}^\tau,$$

$$\bar{\alpha}_C = \bar{\alpha}_{x-x} + \bar{\alpha}_{Cx-x}; \text{ при этом } \bar{\alpha}_{x-x} = 0.$$

Поскольку звено 2 совершает плоское движение, состоящее из вращательной и поступательной частей, относительное ускорение  $\bar{\alpha}_{BC}$  разложим на нормальную и тангенциальную составляющие  $\bar{\alpha}_{AB}^n$  и  $\bar{\alpha}_{AB}^\tau$ .

$$\alpha_{BC}^n = \omega_2^2 \cdot BC = 16^2 \cdot 0,2 = 51,2 \text{ м/с}^2.$$

$$\bar{\alpha}_{BC}^n // BC \text{ от т. } C \text{ к т. } B.$$

Поэтому на плане ускорений от точки  $b$  откладывается отрезок  $bn$ , изображающий вектор ускорения  $\bar{\alpha}_{BC}^n$  (см. рис. 2.10). Длина отрезка  $bn$  на плане ускорений вычисляется следующим образом:

$$bn = \frac{\alpha_{BC}^n}{\mu_A} = \frac{51,2}{8,6} = 5,95 \text{ мм.}$$

Далее

$$\alpha_{BC}^\tau = \varepsilon_2 \cdot BC, \quad (2)$$

$$\bar{\alpha}_{BC}^\tau \perp BC.$$

Через точку  $n$  проводим направление ускорения  $\bar{\alpha}_{BC}^\tau$  — линию, перпендикулярную отрезку  $BC$ .

От полюса плана ускорений  $\alpha$  откладывается направление вектора ускорения  $\bar{\alpha}_{Cx-x}$  параллельно оси  $x-x$ . Точка пересече-

ние его с линией, проведенной перпендикулярно  $BC$ , дает точку  $c$ . Луч, вышедший из полюса  $\alpha$  на т.  $c$ , изображает вектор ускорения  $\bar{\alpha}_C$ . Действительная величина ускорения т.  $C$  найдется как

$$\alpha_C = \alpha c \cdot \mu_A = 32,2 \cdot 8,6 = 276,92 \text{ м/с}^2.$$

4.4. Определить угловое ускорение звена 2.

$$\text{Из уравнения (2)} \quad \varepsilon_2 = \frac{\alpha_{BC}^\tau}{BC} = \frac{nc \cdot \mu_A}{BC} = \frac{31,3 \cdot 8,6}{0,2} = 1345,9 \text{ с}^{-2}.$$

Для направления углового ускорения  $\varepsilon_2$  необходимо вектор относительного ускорения  $\bar{\alpha}_{BC}$  параллельно перенести с плана ускорений в т.  $C$ , в направлении движения данной скорости относительно т.  $B$  направлен вектор углового ускорения  $\varepsilon_2$  (см. рис. 2.10).

4.5. Определить ускорение т.  $S_2$ .

Поскольку т.  $S_2$  принадлежит звену  $BC$ , то положение т.  $S_2$  на плане ускорений определяется по методу обхода точек:

$$\frac{BS_2}{BC} = \frac{bs_2}{bc}; \quad bs_2 = \frac{BS_2 \cdot bc}{BC} = \frac{0,17 \cdot 31,8}{0,2} = 27,03 \text{ мм}.$$

Луч, вышедший из полюса  $\alpha$  на т.  $s_2$ , изображает вектор ускорения т.  $S_2$  (см. рис. 2.10), истинное значение которого составляет

$$\alpha_{s_2} = \alpha s_2 \cdot \mu_A = 32,47 \cdot 8,6 = 279,24 \text{ м/с}^2.$$

### Задача № 3

## РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

### *Основные понятия и определения*

Растяжение (сжатие) характеризует такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ .

Продольная сила имеет знак: она считается положительной, если вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если вызывает сжатие (направлена к сечению).

В произвольном сечении продольная сила численно равняется алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, действующих по одну сторону от взятого сечения.

При растяжении-сжатии в поперечном сечении возникает только нормальное напряжение и вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где  $N$  – продольная сила, Н;  $A$  – площадь поперечного сечения,  $\text{м}^2$ .

Условие прочности при растяжении-сжатии выражается формулой

$$\sigma = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma],$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение, Па.

Площадь поперечного сечения  $A$  определяется о формуле

$$A \geq \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]}.$$

При растяжении-сжатии возникают линейные деформации, они могут быть абсолютными (м) и относительными (%). Абсолютное удлинение стержня  $\Delta l$  при постоянных продольной силе и площади поперечного сечения в пределах каждого участка определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

где  $E$  – модуль упругости, Па;  $l$  – первоначальная длина стержня, м.

*Цель задачи* – рассчитать на прочность по допускаемым напряжениям статически определимую шарнирно-стержневую систему и определить перемещение узла  $A$ . Стержни изготовлены из стали Ст. 3: модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, допустимое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Форма поперечного сечения у 1-го стержня – двутавр, 2-го – круглое сечение.

Данные для расчета берутся из табл. 3.1, схема нагружения стержней приведена на рис. 3.1.

Таблица 3.1

| Цифры<br>шифра | $\alpha, ^\circ$ | $\beta, ^\circ$ | $\gamma, ^\circ$ | $P, \text{кН}$ | $l, \text{м}$ |
|----------------|------------------|-----------------|------------------|----------------|---------------|
|                | 1-я              | 2-я             | 3-я              | 4-я            | 5-я           |
| 1              | 30               | 60              | 30               | 300            | 1,5           |
| 2              | 40               | 80              | 35               | 400            | 1,6           |
| 3              | 45               | 70              | 40               | 500            | 1,7           |
| 4              | 50               | 75              | 45               | 600            | 1,8           |
| 5              | 55               | 65              | 50               | 700            | 1,9           |
| 6              | 35               | 55              | 55               | 800            | 2,0           |
| 7              | 60               | 50              | 60               | 350            | 2,1           |
| 8              | 65               | 45              | 25               | 250            | 2,2           |
| 9              | 70               | 40              | 20               | 450            | 2,3           |
| 0              | 75               | 35              | 15               | 650            | 2,4           |

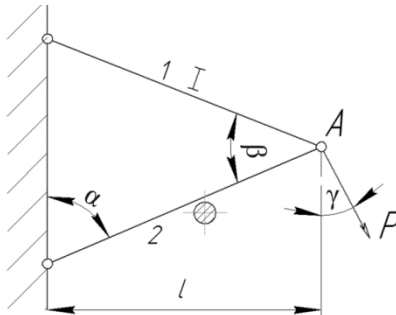


Рис. 3.1. Схема плоской шарнирно-стержневой системы

## ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. Вычертить в масштабе схему шарнирно-стержневой системы с указанием численных значений заданных величин на чертеже.
2. Рассмотрев условия равновесия узла  $A$ , определить усилия в стержнях 1 и 2.
3. Из условия прочности по допускаемым напряжениям вычислить требуемые площади поперечного сечения стержней 1 и 2.
4. Подобрать номер двутавра для стержня 1 (по ГОСТ Р 57837–2017) и диаметр стержня 2 (по ГОСТ 2590–2006).
5. Провести расчет на недогруз или перегруз для каждого из стержней. При необходимости переназначить номер двутавра для стержня 1, диаметр стержня 2, при изменении площади поперечного сечения стержней.
6. Определить абсолютную и относительную деформации подобранных стержней под действием заданной нагрузки.
7. Графически определить перемещение узла  $A$ .

## ***Пример решения задачи***

Рассчитать на прочность по допускаемым напряжениям статически-определимую шарнирно-стержневую систему и определить перемещение узла  $A$ . Расстояние от заделки до узла  $A$   $l = 1,4$  м, значение углов  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ,  $\gamma = 20^\circ$ , значение силы  $P = 260$  кН. Материал стержней: Ст. 3, модуль упругости  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа, допустимое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа.

*Решение:*

1. Вычертить в масштабе схему шарнирно-стержневой системы с указанием численных значений заданных величин на чертеже.
2. Рассмотрев условия равновесия узла  $A$ , определить усилия в стержнях 1 и 2.

В местах крепления стержней 1 и 2 возникают реакции опор, направленные вдоль оси стержня (рис. 3.2). Направление реакций опор выбираем произвольно. С учетом внешних сил и внутренних составим систему сходящихся сил, которые сходятся в одной точке – узле  $A$ .

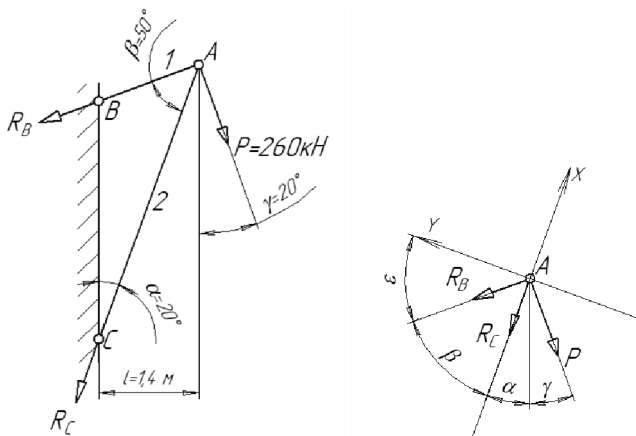


Рис. 3.2. Схема расположения усилий

Выберем оптимальные оси координат  $x$  и  $y$ , составим уравнения равновесия:

$$\sum F_i(x) = 0, \quad \sum F_i(y) = 0;$$

$$\sum F_i(x) = -R_C - P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_i(y) = -P \cdot \sin(\alpha + \gamma) + R_B \cdot \cos(\epsilon) = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) выражаем

$$R_B = \frac{P \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\epsilon)} = \frac{260 \cdot \sin(40^\circ)}{\cos(40^\circ)} = \frac{260 \cdot 0,643}{0,766} = 218,251 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1) выражаем

$$\begin{aligned} R_C &= -P \cdot \cos(\alpha + \gamma) - R_B \cdot \cos(\beta) = \\ &= -260 \cdot \cos(40^\circ) - 218,251 \cdot \cos(50^\circ) = \\ &= -199,172 - 140,289 = -339,461 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Под действием силы  $P$  стержень 1 испытывает растяжение, а стержень 2 испытывает сжатие.

$$R_B = N_1 = 218,251 \text{ кН (растяжение)},$$

$$R_C = N_2 = -339,461 \text{ кН (сжатие)}.$$

3. Из условия прочности по допускаемым напряжениям вычислить требуемые площади поперечного сечения стержней 1 и 2.

Условие прочности при растяжении-сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma],$$

где  $N$  – продольная сила, кН;  $A$  – площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>.

Из условия прочности определяем площади поперечных сечений:

$$A_1 \geq \frac{N_1}{[\sigma]} \geq \frac{218,251 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00136 \text{ м}^2 = 13,6 \text{ см}^2;$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} \geq \frac{339,461 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00212 \text{ м}^2 = 21,2 \text{ см}^2.$$

4. Подобрать номер двутавра для стержня 1 (по ГОСТ Р 57837–2017) и диаметр стержня 2 (по ГОСТ 2590–2006).

Для первого стержня площадь поперечного сечения  $A_1^{\text{ГОСТ}} = 14,7 \text{ см}^2$  – двутавр № 12.

У второго стержня круглое поперечное сечение. Зная площадь поперечного сечения  $A_2 = 21,2 \text{ см}^2$ , можно определить диаметр:

$$A_2 = \frac{\pi d^2}{4} = 0,00212 \text{ м}^2, \quad d^2 = \frac{4 \cdot A_2}{\pi} = \frac{4 \cdot 0,00212}{3,14} = 0,00270 \text{ м}^2.$$

$$d = \sqrt{0,00270} = 0,052 \text{ м} = 52 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 2590–2006  $d_{\text{ГОСТ}} = 52 \text{ мм} = 0,052 \text{ м}$ .

Определим площадь поперечного сечения с учетом значения диаметра по ГОСТу:  $A_2^{\text{ГОСТ}} = \frac{\pi d_{\text{ГОСТ}}^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,052^2}{4} = 0,00212 \text{ м}^2$ .

5. Провести расчет на недогруз или перегруз для каждого из стержней. При необходимости переназначить номер двутавра для стержня 1 и выбрать другой диаметр стержня 2, при изменении площади поперечного сечения стержней.

Недогруз разрешен в пределах до 10 %, перегруз – до 5 %.

Определим действительные напряжения:

$$\sigma_1^{\text{действ}} = \frac{N_1}{A_1^{\text{ГОСТ}}} = \frac{218,251}{0,00147} = 148,5 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2^{\text{действ}} = \frac{N_2}{A_2^{\text{ГОСТ}}} = \frac{339,461}{0,00212} = 160,1 \text{ МПа.}$$

Определим недогруз или перегруз стержней:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{148,5 - 160}{160} \cdot 100 \% = -7,2 \% \text{ (недогруз), в}$$

пределах допустимого значения (до 10 %).

$$\Delta\sigma_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ}} - [\sigma]}{[\sigma]} = \frac{160,1 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0,06 \% \text{ (перегруз), в}$$

пределах допустимого значения (до 5 %).

6. Определить абсолютную и относительную деформации подобранных стержней под действием заданной нагрузки.

Закон Гука  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , где  $E$  – модуль упругости материала,

$\varepsilon$  – относительная линейная деформация,  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , где  $\Delta l$  – абсолютная линейная деформация,  $l$  – длина стержня.

Определим относительную линейную деформацию:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^{\text{действ}}}{E} = \frac{148,5}{2,1 \cdot 10^5} = 7,071 \cdot 10^{-4}.$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2^{\text{действ}}}{E} = \frac{160,1}{2,1 \cdot 10^5} = 7,624 \cdot 10^{-4}.$$

Для определения абсолютной линейной деформации необходимо сначала определить длину каждого из стержней (рис. 3.3).

$$l_1 = \frac{l}{\cos \beta_1} = \frac{1,4}{\cos(20^\circ)} = \frac{1,4}{0,939} = 1,5 \text{ м,}$$

$$l_2 = \frac{l}{\cos \beta_2} = \frac{1}{\cos(\beta + \beta_1)} = \frac{1,4}{\cos(70^\circ)} = \frac{1,4}{0,342} = 4,1 \text{ м.}$$

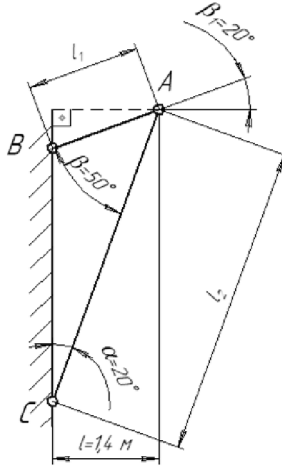


Рис. 3.3. Определение длин стержней

Определим абсолютную линейную деформацию:

$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \cdot l_1 = 7,071 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 0,00106 \text{ м} = 1,06 \text{ мм}$  — удлинение стержня, так как деформация растяжения.

$\Delta l_2 = \varepsilon_2 \cdot l_2 = 7,624 \cdot 10^{-4} \cdot 4,1 = 0,00313 \text{ м} = 3,13 \text{ мм}$  — укорочение стержня, так как деформация сжатия.

7. Графически определить перемещение узла *A*.

Под действием внешней силы стержень *A* переместился на некоторое расстояние (рис. 3.4). Определим его перемещение с помощью графоаналитического метода. Для этого необходимо задаться масштабом построения  $\mu_l$ . Масштаб построения — это отношение истинного значения параметра к отрезку длины на чертеже, тогда  $\mu_l = \frac{\text{Истина}}{\text{Отрезок}}$ . Пусть отрезок  $\Delta l_{1\text{черт}}$  на чертеже

изображает удлинение стержня 1 и равен 30 мм. Тогда  $\mu_l = \frac{\Delta l_1}{\Delta l_{1\text{черт}}} = \frac{\Delta l_1}{30\text{мм}} = \frac{0,00106}{30} = 3,53 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$ . Откладываем вдоль

оси стержня *l* отрезок  $\Delta l_{1\text{черт}}$  (в сторону растяжения).

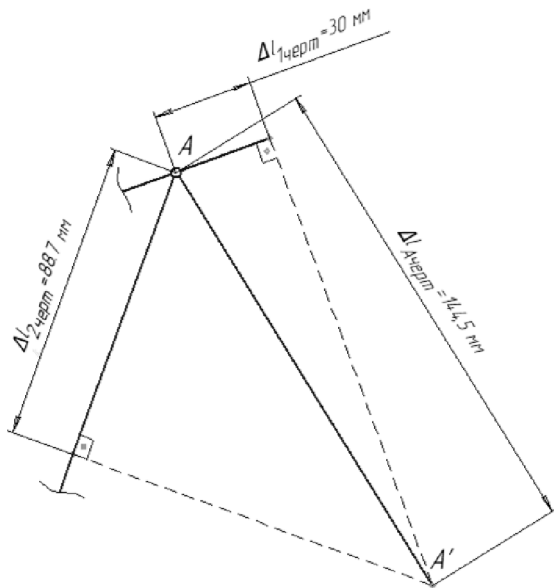


Рис. 3.4. Определение перемещения узла  $A$

Соответственно, можно определить длину отрезка  $\Delta l_{2\text{черт}} = \frac{\Delta l_2}{\mu_l} = \frac{0,00313}{3,53 \cdot 10^{-5}} = 88,7 \text{ мм}$ . Откладываем вдоль оси стержня 2 отрезок  $\Delta l_{2\text{черт}}$  (в сторону сжатия).

Восстанавливаем перпендикуляры к концам отрезков и на пересечении получаем точку  $A'$  (см. рис. 3.4). Соединив точки  $A$  и  $A'$ , получаем отрезок  $\Delta l_{A\text{черт}} = 144,5 \text{ мм}$ . Зная масштаб и длину отрезка, можно определить истинное значение перемещение узла  $A$ :

$$\Delta l_A = \Delta l_{A\text{черт}} \cdot \mu_l = 144,5 \cdot 3,53 \cdot 10^{-5} = 0,0051 \text{ м} = 5,1 \text{ мм}.$$

## Задача № 4

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

#### *Основные понятия и определения*

Проектирование конструкций с оптимальными формами и размерами сечений является одним из путей снижения веса и стоимости машин и сооружений. Сопротивление стержня различным видам деформирования часто зависит не только от его материала и размеров, но и от характера осевой линии, формы поперечных сечений и их ориентации.

В расчетах конструкций на механическую надежность очень часто приходится оперировать геометрическими характеристиками плоских фигур. Геометрические характеристики плоских сечений характеризуют размеры, форму, расположение поперечного сечения однородного по упругим свойствам деформируемого элемента конструкции.

Площадь сечения является одной из геометрических характеристик, используемых главным образом в расчетах на растяжение и сжатие. При проведении расчетов на сложное сопротивление, а также изгиб, кручение и устойчивость используются дополнительные геометрические характеристики, которые для стандартных форм сечений присутствуют в ГОСТах: статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления сечений, которые зависят не только от формы и размеров сечений, но и от положения осей и точек сечения, относительно которых они вычисляются.

Для плоской фигуры (рис. 4.1) наиболее часто рассматривают геометрические характеристики, приведенные далее.

Статические моменты плоского сечения:

$$S_x = A \cdot y_C, \quad S_y = A \cdot x_C,$$

где  $A$  – площадь фигуры,  $\text{м}^2$ ;  $x_C, y_C$  – координаты центра тяжести фигуры,  $\text{м}$ .

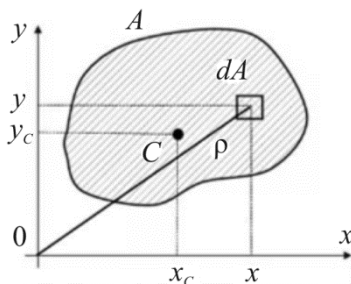


Рис. 4.1. К определению геометрических характеристик сечений

Координаты центра тяжести сложной плоской фигуры определяются по формулам:

$$x_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}, \quad y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i},$$

где  $A_i$  – площади отдельных частей фигуры,  $\text{м}^2$ ;  $x_i, y_i$  – координаты центра тяжести этих частей,  $\text{м}$  (для прокатных профилей приведены в ГОСТе).

Центральными осями называют оси, относительно которых статические моменты равны нулю. Центральные оси всегда проходят через центр тяжести фигуры. При выборе системы координат, если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то ее следует принять за одну из осей системы координат.

Осевые моменты инерции

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA,$$

где  $x, y$  – расстояния до соответствующих осей,  $\text{м}$ ;  $A_i$  – площадь фигуры,  $\text{м}^2$  (см. рис. 4.1).

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_A xy dA.$$

Для сложных сечений моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_{x_i}, \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_{y_i}, \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{x_i y_i}.$$

Главными осями инерции фигуры называются оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Если фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, то эта ось является главной осью.

При вычислении главных центральных моментов инерции сечения применяются формулы перехода от центральных осей к параллельным им (рис. 4.2):

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= J_{x_i} + a^2 \cdot A_i, \\ J_{y_c} &= J_{y_i} + b^2 \cdot A_i, \\ J_{x_c y_c} &= J_{x_i y_i} + a \cdot b \cdot A_i, \end{aligned}$$

где  $J_{x_i}, J_{y_i}$  – центральные моменты инерции,  $\text{м}^4$ ;  $J_{x_i y_i}$  – центробежный момент инерции,  $\text{м}^4$ ;  $a, b$  – расстояния между центральными осями и осями, им параллельными, относительно которых определяются моменты инерции,  $\text{м}$ .

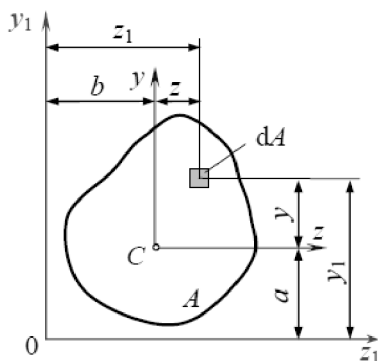


Рис. 4.2. Вычисление моментов инерции

Осевые моменты сопротивления сечения,  $\text{м}^3$ ,

$$W_x = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}}, \quad W_y = \frac{J_{y_c}}{x_{\max}},$$

где  $J_{x_c}$ ,  $J_{y_c}$  – главные центральные моменты инерции сечения,  $\text{м}^4$ ;  $y_{\max}$ ;  $x_{\max}$  – координаты наиболее удаленных точек сечения от главных центральных осей, м.

Главные моменты инерции

$$J_{\begin{smallmatrix} \text{max} \\ \text{min} \end{smallmatrix}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}.$$

Радиусы инерции находятся по формулам:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{\sum A_i}}, \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{\sum A_i}}.$$

где  $J_{\max}$ ,  $J_{\min}$  – наибольший и наименьший осевой момент инерции,  $\text{м}^4$ .

*Цель задачи* – для заданного плоского сечения определить положение главных центральных осей и вычислить основные геометрические характеристики.

### ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. Вычертить в масштабе схему сечения с указанием численных значений заданных величин на чертеже.
2. Определить координаты центра тяжести сечения и указать его положение на чертеже.
3. Определить моменты инерции относительно центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.
5. Вычислить моменты сопротивления относительно главных центральных осей и главные радиусы инерции.

На рис. 4.3 представлены варианты сечений. Размеры составных элементов и номера прокатных профилей указаны в табл. 4.1.

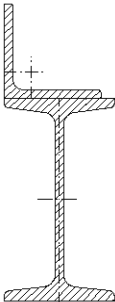
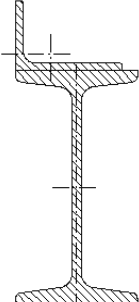
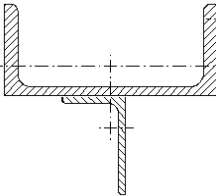
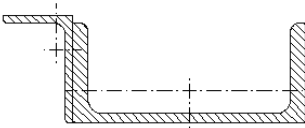
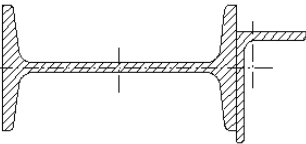
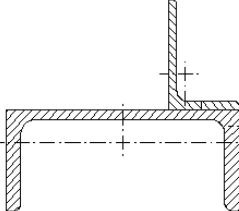
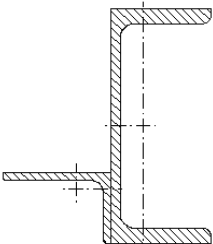
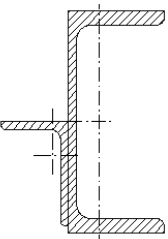
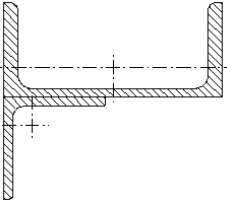
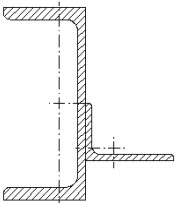
|   |                                                                                     |    |                                                                                     |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 |    | 2  |    |
| 3 |    | 4  |    |
| 5 |    | 6  |    |
| 7 |   | 8  |   |
| 9 |  | 10 |  |

Рис. 4.3. Варианты расчетных схем

Таблица 4.1

| Цифра<br>шифра | Схема | Номер швеллера<br>или двутавра | Размеры неравно-<br>полочного уголка | Размеры равнопо-<br>лочного уголка |
|----------------|-------|--------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
|                | 1-я   | 2-я                            | 3-я                                  | 4-я                                |
| 1              | 1     | 10                             | 40×30×5                              | 45×45×5                            |
| 2              | 2     | 12                             | 50×32×4                              | 50×50×6                            |
| 3              | 3     | 14                             | 70×45×5                              | 63×63×5                            |
| 4              | 4     | 16                             | 80×60×8                              | 70×70×6                            |
| 5              | 5     | 18                             | 100×63×7                             | 75×75×7                            |
| 6              | 6     | 22                             | 110×70×8                             | 80×80×10                           |
| 7              | 7     | 24                             | 140×90×10                            | 100×100×12                         |
| 8              | 8     | 27                             | 160×100×12                           | 120×120×10                         |
| 9              | 9     | 30                             | 180×110×10                           | 125×125×10                         |
| 0              | 10    | 36                             | 200×125×14                           | 140×140×9                          |

Сведения о геометрических характеристиках прокатных профилей необходимо взять из нормативах документов: ГОСТ Р 57837–2017 (двутавры), ГОСТ 8240–97 (швеллеры), ГОСТ 8509–93 (уголки равнополочные) и ГОСТ 8510–93 (уголки неравнополочные).

### ***Пример решения задачи***

Необходимо определить геометрические характеристики плоского сечения. Схема и размеры составных элементов и номера прокатных профилей приведены на рис. 4.4.

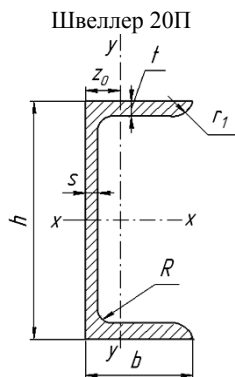
*Решение:*

1. Вычертить в масштабе схему сечения с указанием численных значений заданных величин на чертеже (рис. 4.5).

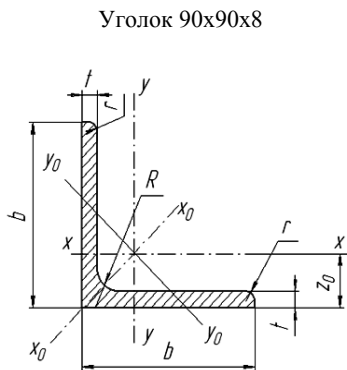
2. Определить координаты центра тяжести сечения. Выбрать расчетные оси для определения центра тяжести всего сечения, в качестве расчетных осей выбрать оси швеллера.

$$y_c = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + (-7,49) \cdot 13,39}{23,4 + 13,39} = -2,72 \text{ см},$$

где  $y_1$  – расстояние от расчетной оси  $x$  до оси  $x_1$ ,  $y_1 = 0$  см;  $y_2$  – расстояние от расчетной оси  $x$  до оси  $x_2$ ;  $y_2 = -(10 - 2,51) = -7,49$  см.



Основные размеры:  
 $h = 200$  мм;  $b = 76$  мм;  $s = 5,2$  мм;  
 $t = 9,0$  мм;  $R = 9,5$  мм;  $r_1 = 5,5$  мм;  
 $A = 23,4$  см<sup>2</sup>;  $J_x = 1520$  см<sup>4</sup>;  
 $J_y = 113$  см<sup>4</sup>;  $z_0 = 2,07$  см



Основные размеры:  
 $b = 90$  мм;  $t = 8$  мм;  $R = 10,0$  мм;  
 $r = 3,3$  мм;  $A = 13,39$  см<sup>2</sup>;  
 $J_x = J_y = 106,11$  см<sup>4</sup>;  
 $J_{xy} = -62,3$  см<sup>4</sup>;  $z_0 = 2,51$  см

Рис. 4.4. Схема и размеры составных элементов

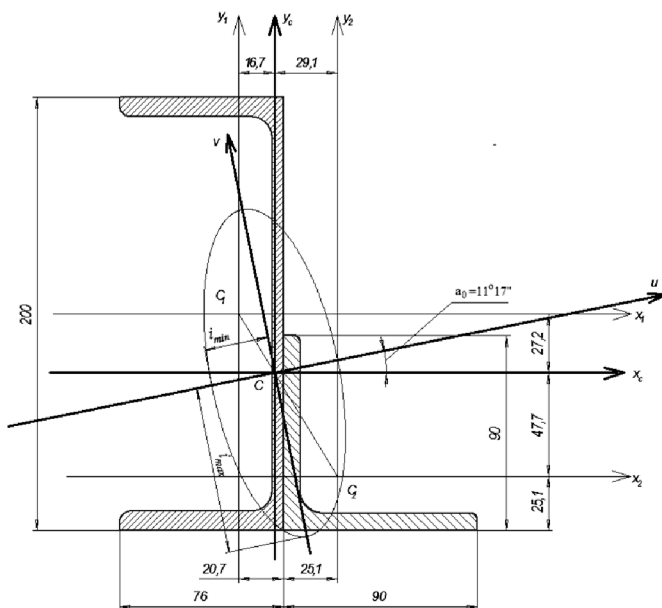


Рис. 4.5. Схема сечения, расположение главных центральных осей и эллипса инерции

$$x_c = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{0 + 4,58 \cdot 13,39}{23,4 + 13,39} = 1,67 \text{ см},$$

где  $x_1$  – расстояние от расчетной оси  $y$  до оси  $y_1$ ,  $x_1 = 0$  см;  $x_2$  – расстояние от расчетной оси  $y$  до оси  $y_2$ ,  $x_2 = 2,51 + 2,07 = 4,58$  см.

По полученным координатам  $x_c$  и  $y_c$  провести центральные оси составного сечения (см. рис. 4.5).

3. Определить моменты инерции относительно центральных осей.

$$J_{x_c} = J_{x_1} + a_1^2 A_1 + J_{x_2} + a_2^2 A_2,$$

где  $a_1$  – расстояние от центральной оси  $x_c$  до оси  $x_1$ ,  $a_1 = 2,72$  см;  $a_2$  – расстояние от центральной оси  $x_c$  до оси  $x_2$ ,  $a_2 = -(7,49 - 2,72) = -4,77$  см.

$$J_{x_c} = 1520 + 2,72^2 \cdot 23,4 + 106,11 + (-4,77)^2 \cdot 13,39 = 2103,89 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + b_1^2 A_1 + J_{y_2} + b_2^2 A_2,$$

где  $b_1$  – расстояние от центральной оси  $y_c$  до оси  $y_1$ ,  $b_1 = -1,67$  см;  $b_2$  – расстояние от центральной оси  $y_c$  до оси  $y_2$ ,  $b_2 = 4,58 - 1,67 = 2,91$  см.

$$J_{y_c} = 113 + (-1,67)^2 \cdot 23,4 + 106,11 + 2,91^2 \cdot 13,39 = 397,76 \text{ см}^4.$$

4. Определить положение главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.

Первоначально определить центробежный момент инерции относительно центральных осей:

$$\begin{aligned} J_{x_c y_c} &= J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 = \\ &= 0 + 2,72 \cdot (-1,67) \cdot 23,4 - 62,3 + \\ &+ (-4,77) \cdot 2,91 \cdot 13,39 = -354,45 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Затем определить положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-354,45)}{2103,89 - 397,76} = 0,416.$$

Вычислить угол  $2\alpha_0 = 22,56^\circ$ ;  $\alpha_0 = 11,28^\circ$ .

Положительный угол  $\alpha_0$  откладывается от центральных осей  $x_c$ ,  $y_c$  против часовой стрелки (см. рис. 4.5). Поскольку  $J_{x_c} > J_{y_c}$ , то поворот оси  $x_c$  производится до совмещения с главной осью  $U$  (ось max). Перпендикулярно оси максимум в этом же направлении проводится ось наименьшего главного момента инерции  $V$  (ось min).

Далее определим величину главных центральных моментов инерции:

$$\begin{aligned}
 J_{\max} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2}, \\
 J_U = J_{\max} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{2103,89 + 397,76}{2} + \\
 &+ \sqrt{\left(\frac{2103,89 - 397,76}{2}\right)^2 + (-354,45)^2} = 2174,6 \text{ см}^4; \\
 J_V = J_{\min} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2}\right)^2 + J_{x_c y_c}^2} = \\
 &= \frac{2103,89 + 397,76}{2} - \\
 &- \sqrt{\left(\frac{2103,89 - 397,76}{2}\right)^2 + (-354,45)^2} = 327,05 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Выполним проверку, используя свойство моментов инерции:

$$J_U + J_V = J_{x_c} + J_{y_c},$$

подставив соответствующие значения:

$$\begin{aligned}
 2174,6 + 327,05 &= 2103,89 + 397,76; \\
 2501,65 \text{ см}^4 &= 2501,65 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

5. Вычислить моменты сопротивления относительно главных центральных осей и главные радиусы инерции.

$$W_{x_c} = \frac{J_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{2103,89}{12,72} = 165,4 \text{ см}^3,$$

$$W_{y_c} = \frac{J_{y_c}}{x_{\max}} = \frac{397,76}{9,4} = 42,31 \text{ см}^3.$$

Вычислить главные радиусы инерции:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{J_{\max}}{F_1 + F_2}} = \sqrt{\frac{2174,6}{23,4 + 13,39}} = 7,69 \text{ см, значение отклады-}$$

вается на оси минимум  $V$ ;

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F_1 + F_2}} = \sqrt{\frac{327,05}{23,4 + 13,39}} = 2,98 \text{ см, значение отклады-}$$

вается на оси максимум  $U$ .

Построить эллипс инерции (см. рис. 4.5).

## Задача № 5

### РАСЧЕТ ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

#### *Основные понятия и определения*

Кручение – вид деформации, при котором в поперечных сечениях конструкции возникает один внутренний силовой фактор – это крутящий момент, обозначается символами  $M_z$  или  $M_{кр}$ .

При внешнем нагружении конструкции бруса (вала) парами сил возникает деформация кручения. Моменты этих пар сил обозначают  $M$  (в некоторых источниках  $T$ ) и принято называть скручивающими моментами (рис. 5.1, *а*). Например, момент пары сил реализуется в местах посадки полумуфт, цепных звездочек, зубчатых колес, ременных шкивов и др.

Величина крутящего момента  $M_{кр}$  определяется методом сечений. Если скручивающие внешние моменты известны, то  $M_{кр}$  в любом поперечном сечении вала будет численно равен алгебраической сумме внешних моментов относительно продольной оси вала, приложенных по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения (рис. 5.1, *б*).

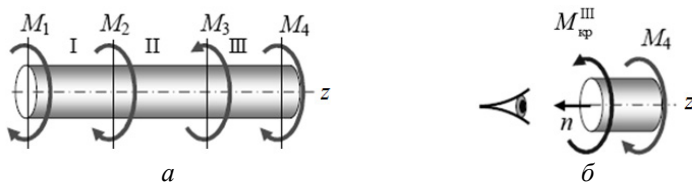
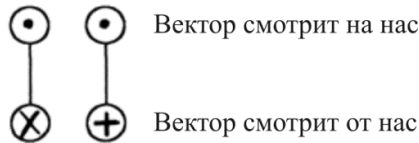


Рис. 5.1. Скручивающие внешние моменты (*а*) и правило знаков (*б*)

Если вал жестко зашлемлен, то начинать определение величины  $M_{кр}$  лучше всего со стороны свободного конца вала (необходимость определения реактивного момента в заделке будет отсутствовать). Необходимо тогда использовать следующее правило знаков для определения  $M_{кр}$ : если смотреть на отсеченную часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, то момент будет положителен в том случае, когда сумма внешних скручивающих моментов поворачива-

ет отсеченную часть по часовой стрелке, и отрицателен при повороте бруса в противоположном направлении.

Если изобразить действие внешнего скручивающего момента в плоскости, то схематично это реализуется следующим образом:



При изучении теории кручения бруса (чаще всего вала) круглого сплошного или кольцевого поперечного сечения вводятся следующие допущения:

1. Поперечные сечения бруса остаются плоскими и перпендикулярными оси вала и после деформации; сечения поворачиваются на некоторые углы вокруг оси (гипотеза плоских сечений – гипотеза Бернулли).

2. Поперечные сечения остаются круглыми и не искривляются, радиус сечений не увеличивается, не уменьшается.

3. Не изменяются расстояния между поперечными сечениями (продольная сила отсутствует).

Рассмотрим резиновую модель бруса, нанесем на ее поверхность систему продольных и поперечных линий. Поперечные линии не искривляются, расстояние между ними не изменяется (видно, что гипотеза плоских сечений подтверждается). При этом продольные линии обращаются в винтовые, однако имеется малое закручивание и перекос всех элементов одинаков, а значит, и напряжение одинаково (рис. 5.2, а).

Условие прочности при кручении:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где  $M_{кр}$  – момент кручения, Н·м;  $[\tau]$  – допускаемое напряжение при кручении, Па;  $W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления, м<sup>3</sup>

(для круга  $W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}$ ).

Касательное напряжение достигает своего максимального значения в точках, наиболее удаленных от центра, т.е. на краях сечения (рис. 5.2, б), а в центре сечения при этом касательное напряжение равно нулю.

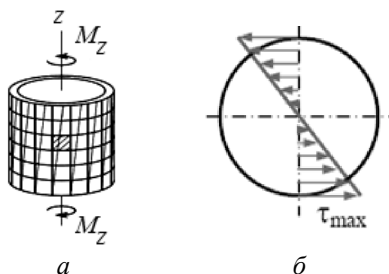


Рис. 5.2. Направление продольных и поперечных линий (а) и распределение касательных напряжений по поперечному сечению вала (б)

Чаще всего допускаемое касательное напряжение для стали принимают относительно нормального допускаемого напряжения, но с учетом коэффициентов:  $[\tau_k] = (0,55 \dots 0,60) \cdot [\sigma]$ . Но указанные значения допускаемых напряжений можно принимать лишь в случае чистого кручения. Распространены примеры, когда кроме кручения валы могут испытывать дополнительно деформацию изгиба. Тогда для обеспечения прочности вала допускаемое касательное напряжение принимают уже пониженным: например, для конструкционной углеродистой стали обычно  $[\tau_k] = 20 \dots 35$  МПа.

Условие жесткости при кручении:

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \leq [\theta],$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания, рад/м;  $[\theta]$  – допускаемый угол закручивания, рад/м;  $G$  – модуль упругости II рода (модуль сдвига), для сталей значение модуля сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа;  $J_p$  –

полярный момент инерции,  $\text{м}^4$  (для круглого сечения  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ).

Угол закручивания

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p},$$

где  $l$  – длина участка вала, м;  $G \cdot J_p$  – жесткость при кручении, Па·м<sup>4</sup>.

Взаимный угол закручивания определяется как алгебраическая сумма углов закручивания по участкам.

*Цель задачи* – по заданной мощности и частоте вращения вала из условий прочности и жесткости на кручение определить диаметры ступенчатого трансмиссионного вала.

Материал вала Ст3; модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа; допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2}$  рад/м.

Данные для расчета берутся из табл. 5.1, схема нагружения вала внешними нагрузками представлена на рис. 5.3.

Таблица 5.1

| Цифры шифра | Схема | $l$ , м | $P_1$ , Вт | $P_2$ , Вт | $P_3$ , Вт | $[\tau]$ , МПа | $n$ , об/мин |
|-------------|-------|---------|------------|------------|------------|----------------|--------------|
|             | 1-я   | 2-я     | 3-я        | 4-я        | 5-я        | 6-я            |              |
| 1           | 1     | 0,8     | 840        | 756        | 2100       | 80             | 40           |
| 2           | 2     | 1,0     | 1386       | 1323       | 2646       | 75             | 60           |
| 3           | 3     | 1,2     | 2016       | 2100       | 3024       | 70             | 80           |
| 4           | 4     | 0,6     | 2940       | 3150       | 3045       | 65             | 100          |
| 5           | 5     | 0,9     | 4032       | 4410       | 2898       | 60             | 120          |
| 6           | 6     | 1,4     | 5292       | 5880       | 6762       | 55             | 140          |
| 7           | 7     | 1,6     | 6384       | 7560       | 6384       | 50             | 160          |
| 8           | 8     | 1,8     | 7938       | 9450       | 3780       | 45             | 180          |
| 9           | 9     | 2,0     | 9660       | 11550      | 6300       | 40             | 200          |
| 0           | 10    | 0,7     | 12600      | 15120      | 6300       | 35             | 240          |

### ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. В масштабе начертить схему, указать числовые данные.
2. Определить значения внешних моментов  $T$ , передаваемых шкивами вала, если известны мощность  $P$  и частота вращения вала  $n$ .
3. По участкам составить уравнения внутренних крутящих моментов.

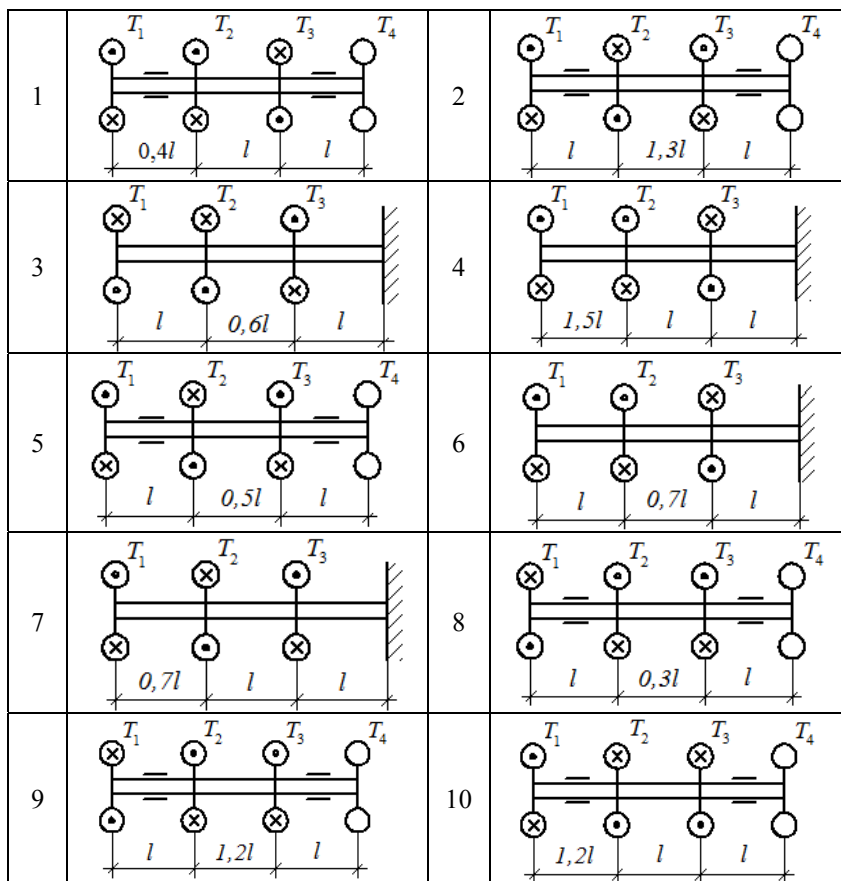


Рис. 5.3. Варианты расчетных схем

4. По участкам построить эпюру внутренних крутящих моментов.

5. Применив условие прочности, определить диаметр вала по участкам. Применить ГОСТ 6636–69 и результат округлить до ближайшего из ряда Ra40: 10, 10.5, 11, 11.5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 100, 105, 110, 120, 125, 130, 140, 150, 160 мм.

6. Применив условия жесткости, определить диаметр вала по участкам, с учетом допускаемого относительного угла закручивания (на 1 пог. м)  $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2}$  рад/м и модуля сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа. Применить ГОСТ 6636–69 и результат округлить до ближайшего из ряда Ra40.

7. Принять диаметр вала на каждом участке по наибольшему значению, которое получили из обоих условий прочности и жесткости. По полученным размерам построить в масштабе схему вала.

8. Рассчитать значение угла закручивания по каждому участку и определить взаимный угол закручивания концевых сечений.

### *Пример решения задачи*

Вал имеет круглое поперечное сечение, схема нагружения вала приведена на рис. 5.4. Применить условия прочности и жесткости и определить диаметры ступенчатого вала, учитывая, что мощности, передаваемые соответственно 1, 2 и 3 шкивами,  $P_1 = 6280$  Вт,  $P_2 = 10467$  Вт,  $P_3 = 2093$  Вт; частота вращения вала  $n = 200$  об/мин, допускаемый угол закручивания на единицу длины  $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2}$  рад/м, допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 45$  МПа, модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

*Решение:*

1. Вычертить схему с указанием числовых данных (см. рис. 5.4).

2. По заданной мощности  $P$  и частоте вращения вала  $n$  определить значения внешних моментов  $T$ , передаваемых шкивами вала по формуле

$$T \cdot \omega = P,$$

где угловая скорость вала  $\omega$  может быть выражена через известную частоту вращения:  $\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} = \frac{\pi \cdot n}{30}$ .

Таким образом, можно определить значения для внешних скручивающих моментов, передаваемых на вал:

$$T_1 = \frac{P_1 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{6280 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 300 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = \frac{P_2 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{10467 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 500 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = \frac{P_2 \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{2093 \cdot 30}{3,14 \cdot 200} = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

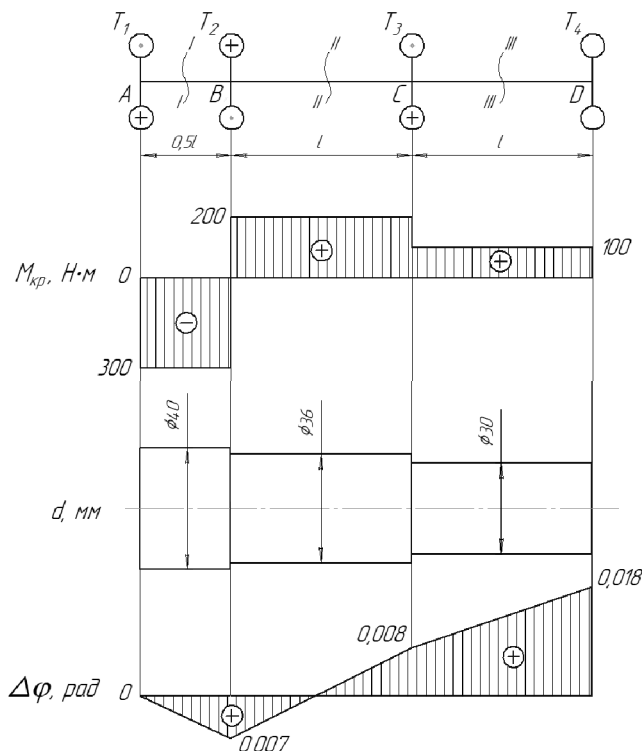


Рис. 5.4. Схема нагружения вала и эпюры

Неизвестный внешний момент  $T_4$  необходимо также найти. Для его нахождения применить уравнения равновесия для всего вала. Необходимо принять условное направление момента  $T_4$ : пусть оно будет совпадающим с направлением момента  $T_2$ . Тогда уравнение равновесия примет вид

$$-T_1 + T_2 - T_3 + T_4 = 0.$$

Решив уравнение, получим значение  $T_4$ :

$$T_4 = T_1 - T_2 + T_3 = 300 - 500 + 100 = -100 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Если в результате решения получается знак минус, то значит, что первоначальное направление скручивающего момента было выбрано неверно и на самом деле имеет направление вращения в противоположную сторону.

3. По участкам составить уравнения внутренних крутящих моментов.

$M_{кр}$  на каждом участке определяются по методу сечений с учетом правила знаков: если смотреть на отсеченную часть бруса со стороны внешней нормали к сечению, то момент будет положительным в том случае, когда сумма внешних скручивающих моментов поворачивает отсеченную часть по часовой стрелке, и отрицателен при повороте бруса в противоположном направлении.

Для этого слева направо будем проводить сечения на всех участках вала и рассмотрим равновесие соответствующих оставшихся левых частей.

В сечении I-I  $M_{кр1} = -T_1 = -300 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

В сечении II-II  $M_{кр2} = -T_1 + T_2 = -300 + 500 = 200 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

В сечении III-III  $M_{кр3} = -T_1 + T_2 - T_3 = -300 + 500 - 100 = 100 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

4. По участкам построить эпюру внутренних крутящих моментов.

Строим эпюру крутящих моментов  $M_{кр}$ . Для этого необходимо отложить по вертикальной оси значения моментов: положительные значения моментов отложить вверх по осевой линии, отрицательные – вниз (см. рис. 5.4).

5. Применив условие прочности, определить диаметр вала по участкам.

Условие прочности по допускаемому касательному напряжению при кручении  $[\tau]$ :

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \leq [\tau],$$

где  $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$  – полярный момент сопротивления для круглого

сечения, м<sup>3</sup>;  $d$  – диаметр вала, м  $\left( d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot [\tau]}} \right)$ .

Для каждого из участков диаметр вала составляет:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр1}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0324 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр2}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 200}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0283 \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр3}}{\pi \cdot [\tau]}} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 100}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} \geq 0,0225 \text{ м}.$$

Найденные значения диаметров необходимо округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда  $Ra40$ :  $d_1^{\text{ГОСТ}} = 34 \text{ мм}$ ,  $d_2^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$ ,  $d_3^{\text{ГОСТ}} = 24 \text{ мм}$ .

6. Применив условия жесткости, определить диаметр вала по участкам.

Если известны допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 1,75 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}$  и модуль сдвига  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , то расчет на жесткость вала ведется по относительному углу закручивания  $[\theta]$ :

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G \cdot J_p} \leq [\theta],$$

где  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции для круглого сечения,

м<sup>4</sup>;  $d$  – диаметр вала, м  $\left( d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \right)$ .

Для каждого из участков диаметр вала составляет:

$$d_1 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кр}1}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 300}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0384 \text{ м};$$

$$d_2 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кр}2}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 200}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0347 \text{ м};$$

$$d_3 \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{\text{кр}3}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 100}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} \geq 0,0292 \text{ м}.$$

Найденные значения диаметров необходимо округлить по ГОСТ 6636–69 до ближайшего значения из ряда Ra40:  $d_1^{\text{ГОСТ}} = 40 \text{ мм}$ ,  $d_2^{\text{ГОСТ}} = 36 \text{ мм}$ ,  $d_3^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$ .

7. Принять диаметр вала на каждом участке по наибольшему значению, которое получили из обоих условий прочности и жесткости. По полученным размерам построить в масштабе схему вала.

Учитывая полученные результаты из обоих условий (на прочность и жесткость), выбираем наибольшее значение диаметров для каждого участка и полученный результат также округляем до ближайшего значения из ряда по ГОСТ 6636–69:  $d_1^{\text{ГОСТ}} = 40 \text{ мм}$ ,  $d_2^{\text{ГОСТ}} = 36 \text{ мм}$ ,  $d_3^{\text{ГОСТ}} = 30 \text{ мм}$ . Построим схему вала в масштабе по полученным размерам (см. рис. 5.4).

8. Рассчитать значение угла закручивания по каждому участку и определить взаимный угол закручивания концевых сечений.

Значения абсолютных углов закручивания для каждого участка определяем по формуле  $\Delta\varphi = \frac{M_{\text{кр}} \cdot l}{G \cdot J_{\rho}}$ .

Рассчитаем значения полярных моментов инерции сечения для всех трех участков:

$$J_{\rho_1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,040^4}{32} = 2,51 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4;$$

$$J_{\rho_2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,036^4}{32} = 1,65 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4;$$

$$J_{\rho_3} = \frac{\pi d_3^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,034^4}{32} = 1,31 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4.$$

Далее определим углы закручивания на каждом участке:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{M_{\text{кр}_1} \cdot l_1}{G \cdot J_{\rho_1}} = \frac{-300 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 2,51 \cdot 10^{-7}} = -0,007 \text{ рад} - \text{угол поворо-}$$

та сечения  $B$  относительно сечения  $A$  (или угол закручивания участка  $AB$ ).

$$\Delta\varphi_2 = \frac{M_{\text{кр}_2} \cdot l_2}{G \cdot J_{\rho_2}} = \frac{200 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,65 \cdot 10^{-7}} = 0,015 \text{ рад} - \text{угол поворо-}$$

та сечения  $C$  относительно сечения  $B$  (или угол закручивания участка  $BC$ ).

$$\Delta\varphi_3 = \frac{M_{\text{кр}_3} \cdot l_3}{G \cdot J_{\rho_3}} = \frac{100 \cdot 1,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,31 \cdot 10^{-7}} = -0,010 \text{ рад} - \text{угол поворо-}$$

та сечения  $D$  относительно сечения  $C$  (или угол закручивания участка  $DC$ ).

Далее необходимо по заданию построить эпюру углов закручивания по длине всего вала. Для данной задачи выберем за начало координат крайний левый конец вала (сечение  $A$ ). В пределах каждого участка вала эпюра будет линейна, поэтому достаточно знать углы поворота только для граничных сечений участков.

В сечении  $A$  полный угол закручивания  $\Delta\varphi_A = 0$ .

В сечении  $B$  полный угол закручивания вала относительно сечения  $A$   $\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_1 = -0,007 \text{ рад}$ .

В сечении  $C$  полный угол закручивания вала относительно сечения  $B$   $\Delta\varphi_C = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_2 = -0,007 + 0,015 = 0,008 \text{ рад}$ .

В сечении  $D$  полный угол закручивания вала относительно сечения  $C$   $\Delta\varphi_D = \Delta\varphi_C + \Delta\varphi_3 = 0,008 + 0,010 = 0,018 \text{ рад}$ .

Эпюра полных углов закручивания ступенчатого вала показана на рис. 5.4.

## Задача № 6

### РАСЧЕТ ДВУХОПОРНОЙ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

#### *Основные понятия и определения*

Изгиб – вид деформации, при котором в поперечных сечениях конструкции возникают один или два внутренних силовых фактора – поперечная сила  $Q$  и/или изгибающий момент  $M_{изг}$ . Это внутренние силовые факторы, которые определяются при соблюдении следующих правил:

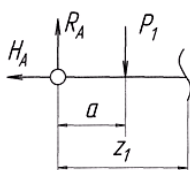


Рис. 6.1. Запись уравнений для определения поперечной силы и изгибающего момента

– поперечная сила в любом сечении балки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси балки;

– изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил,

расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести данного сечения (рис. 6.1).

Поперечная сила в сечении  $z_1$

$$Q_{z_1} = R_A - P_1,$$

где  $R_A$  – вертикальная составляющая реакции опор в точке  $A$ , Н;  
 $P_1$  – внешняя сила, Н.

Момент в сечении  $z_1$

$$M_{z_1} = R_A \cdot z_1 - P_1 \cdot (z_1 - a),$$

где  $z_1$  – расстояние до сечения, м;  $a$  – расстояние до внешней силы  $P_1$ , м.

Для записи уравнений и дальнейшего построения эпюр поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M_{изг}$  применяют следующие правила для их определения:

– поперечная сила  $Q$  считается положительной, если вызывающая ее внешняя сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по ходу часовой стрелки (рис. 6.2), и наоборот;

– изгибающий момент  $M_{изг}$  считается положительным, если балка под действием внешней силы относительно рассматриваемого сечения изгибается выпуклостью вниз (растянутые волокна внизу, а сжатые вверху) (см. рис. 6.2). Принятые правила знаков позволяют при построении эпюр  $Q$  и  $M_{изг}$  рассматривать любую часть балки.

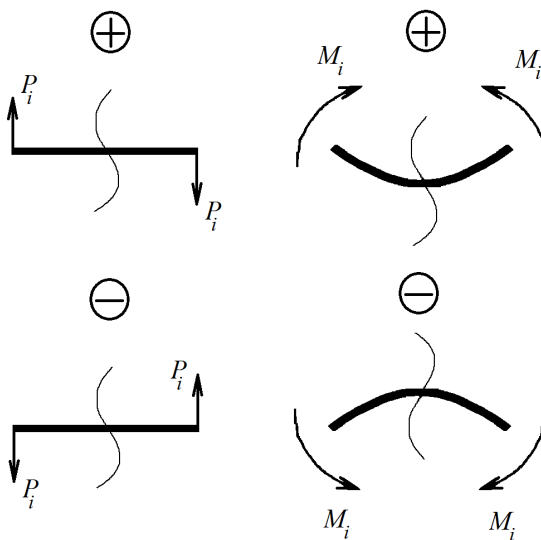


Рис. 6.2. Правило знаков для определения  $Q$  и  $M_{изг}$

*Особенности построения эпюр  $Q$  и  $M_{изг}$ .* При построении эпюр следует использовать дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом (рис. 6.3):

1. Если  $q = 0$  (нет равномерно распределенной нагрузки), эпюра поперечных сил прямолинейна, а эпюра изгибающих моментов – наклонная прямая.

2. Если  $q \neq 0$ , то эпюра  $Q$  – наклонная прямая,  $M_{\text{изг}}$  – квадратичная парабола (выпуклость навстречу нагрузке).

3. Если эпюра  $Q$  на участке меняет знак, т.е. пересекает нейтральную линию ( $Q = 0$ ), то на эпюре  $M_{\text{изг}}$  в этом же сечении наблюдается экстремум.

4. В сечении, где приложена сосредоточенная сила на схеме, на эпюре должен быть скачок на величину и в направлении этой силы, если шагать по эпюре слева направо.

5. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре изгибающих моментов должен быть скачок на величину этого момента.

6. По краям балки  $M_{\text{изг}} = 0$ , если отсутствует внешний момент.

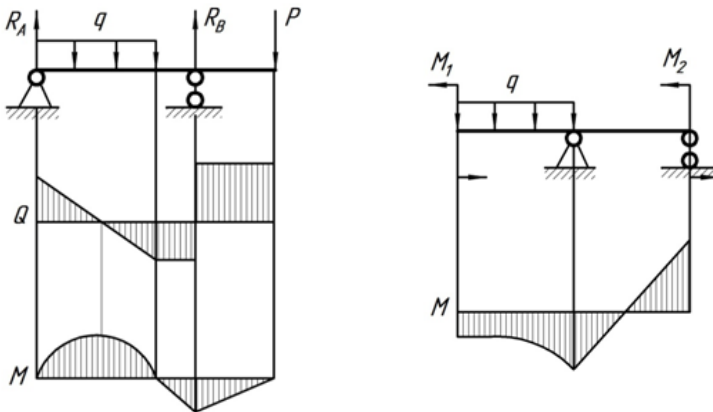


Рис. 6.3. Особенности построения эпюр  $Q$  и  $M_{\text{изг}}$

*Напряжения при изгибе.* В случае чистого изгиба поперечная сила равна нулю, и в поперечных сечениях балки отсутствуют касательные напряжения.

При чистом изгибе справедлива гипотеза Бернулли:

1. Поперечные сечения бруса также остаются плоскими и нормальными к оси и после деформации.

2. При деформации бруса между волокнами не возникают силы надавливания.

Рассмотрим резиновую модель бруса. Нанесем на ее поверхность систему продольных и поперечных линий. После деформации бруса можно обнаружить, что поперечные линии поворачиваются на некоторые углы и их параллельность нарушается, но они остаются прямолинейными (рис. 6.4). Верхние волокна бруса сжимаются, а нижние растягиваются. А вот длина волокон, которые лежат в нейтральном слое, не изменяется.

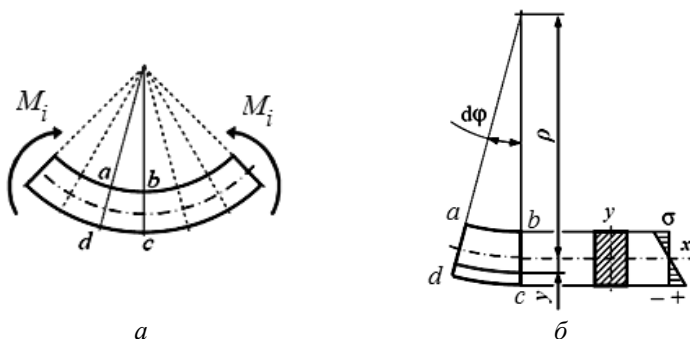


Рис. 6.4. Изгиб бруса: брус в деформированном состоянии (а); элемент бруса  $abcd$  в деформированном состоянии (б)

Можно определить деформацию любого волокна:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho},$$

где  $y$  – расстояние от нейтральной линии до волокна, в котором необходимо определить деформацию,  $\rho$  – радиус кривизны нейтральной линии.

Нормальное напряжение в любой точке сечения прямо пропорционально величине изгибающего момента и расстоянию точки от нейтральной линии и обратно пропорционально моменту инерции сечения относительно нейтральной оси:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y,$$

где  $M_x$  – изгибающий момент, Н·м;  $J_x$  – осевой момент инерции, м<sup>4</sup>.

Волокна, которые наиболее удалены от нейтральной оси, являются наиболее напряженными.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$  – момент сопротивления, м<sup>3</sup>;  $|M_x|$  – абсолютная величина изгибающего момента в опасном сечении, Н·м;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение материала балки, Па.

В случае поперечного изгиба, когда поперечная сила  $Q$  не равна нулю, то в сечении возникают, кроме нормальных напряжений, еще и касательные напряжения  $\tau$ .

Для определения касательных напряжений применяется формула Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot J_x},$$

где  $Q_y$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении, Н;  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно центральной оси, м<sup>3</sup>;  $b$  – ширина сечения на уровне исследуемой точки, м;  $J_x$  – момент инерции сечения относительно центральной оси, м<sup>4</sup>.

*Распределение нормальных и касательных напряжений по сечениям.* Для прямоугольного сечения  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  действуют в разных точках сечения:  $\sigma_{\max}$  – на периферии сечения, в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (на нейтральной линии  $\sigma = 0$ )  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A}$  – в центре, на нейтральной оси (рис. 6.5).

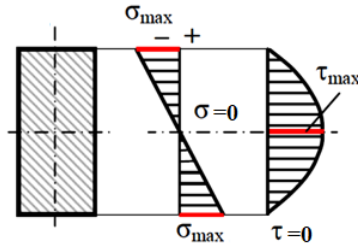


Рис. 6.5. Распределение напряжений для прямоугольного сечения

Для двутаврового сечения  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  действуют в разных точках сечения:  $\sigma_{\max}$  – на периферии сечения, в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси,  $\tau_{\max}$  – в центре, на нейтральной линии (рис. 6.6).

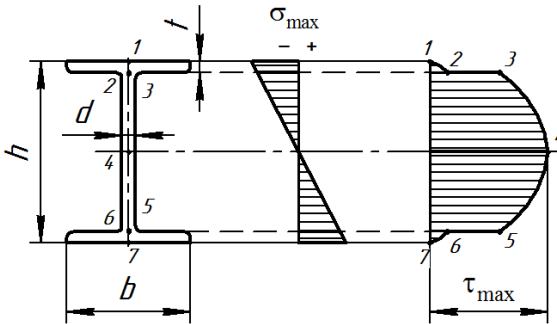


Рис. 6.6. Распределение напряжений для двутаврового сечения

Касательные напряжения в каждой точке сечения  $\tau = \frac{Q \cdot S_x}{J_x \cdot b}$  (статический момент площади для прямоугольника  $S_{x_1} = b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$ ):

$$\tau_1 = \tau_7 = 0; \quad \tau_2 = \tau_6 = \frac{Q \cdot S_{x1}}{J_x \cdot b}; \quad \tau_3 = \tau_5 = \frac{Q \cdot S_{x1}}{J_x \cdot d}; \quad \tau_4 = \tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\text{отс}}^x}{J_x \cdot d}.$$

Эпюра касательных напряжений имеет резкий скачок в уровне, соответствующем переходу от полки к стойке двутавра, так как ширина  $b$  полки двутавра значительно больше толщины  $d$  вертикальной стенки.

Условие прочности по касательным напряжениям:

$$\tau = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot J_x} \leq [\tau],$$

где  $[\tau]$  – допустимое касательное напряжение, Па.

Существуют рациональные формы сечения при изгибе (рис. 6.7). Выявив, что конструкция на нейтральной линии не нагружена, то в целях экономии и облегчения ее веса при изгибе следует выбирать такие сечения, у которых весь материал наиболее удален от нейтральной линии (см. рис. 6.7).

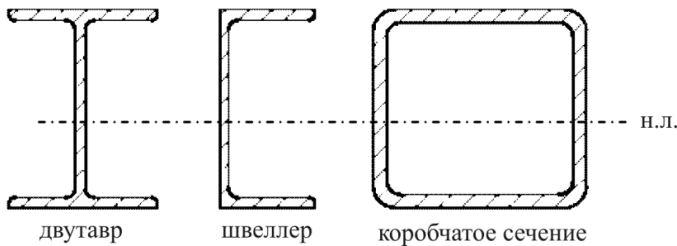


Рис. 6.7. Формы рациональных сечений при изгибе

*Цель задачи* – построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать прямоугольное сечение стальной балки из расчета на прочность по нормальным напряжениям. Данные для расчета приведены в табл. 6.1, а схема нагружения балки внешними нагрузками – на рис. 6.8.

### ***Содержание и порядок расчета задачи***

1. Вычертить в масштабе заданную схему балки с указанием размеров и величин нагрузок.
2. Определить опорные реакции и выполнить проверку правильности их определения.

Таблица 6.1

| Цифры<br>шифра | Схема | $a$ , м | $b$ , м | $c$ , м | $l$ , м | $q$ , кН/м | $P$ , кН | $M$ ,<br>кН·м | $\frac{h}{b}$ |
|----------------|-------|---------|---------|---------|---------|------------|----------|---------------|---------------|
|                | 1-я   | 2-я     |         |         |         | 3-я        | 4-я      | 5-я           | 6-я           |
| 1              | 1     | 0,4     | 0,7     | 3,0     | 11      | 1          | 5        | 6             | 1:1           |
| 2              | 2     | 0,5     | 0,8     | 2,8     | 10,5    | 2          | 6        | 8             | 2:1           |
| 3              | 3     | 0,6     | 0,9     | 2,6     | 10,0    | 3          | 7        | 10            | 3:1           |
| 4              | 4     | 0,7     | 1,0     | 2,4     | 9,5     | 4          | 8        | 12            | 3:2           |
| 5              | 5     | 0,8     | 1,1     | 2,2     | 9,0     | 5          | 9        | 14            | 4:1           |
| 6              | 6     | 0,9     | 1,2     | 2,0     | 8,5     | 6          | 10       | 16            | 5:2           |
| 7              | 7     | 1,0     | 1,3     | 1,8     | 8,0     | 7          | 11       | 18            | 2:1           |
| 8              | 8     | 1,1     | 1,4     | 1,6     | 7,5     | 8          | 12       | 20            | 1:1           |
| 9              | 9     | 1,2     | 1,5     | 1,4     | 7,0     | 9          | 13       | 22            | 4:1           |
| 0              | 10    | 1,3     | 1,6     | 1,2     | 6,5     | 10         | 14       | 24            | 3:2           |

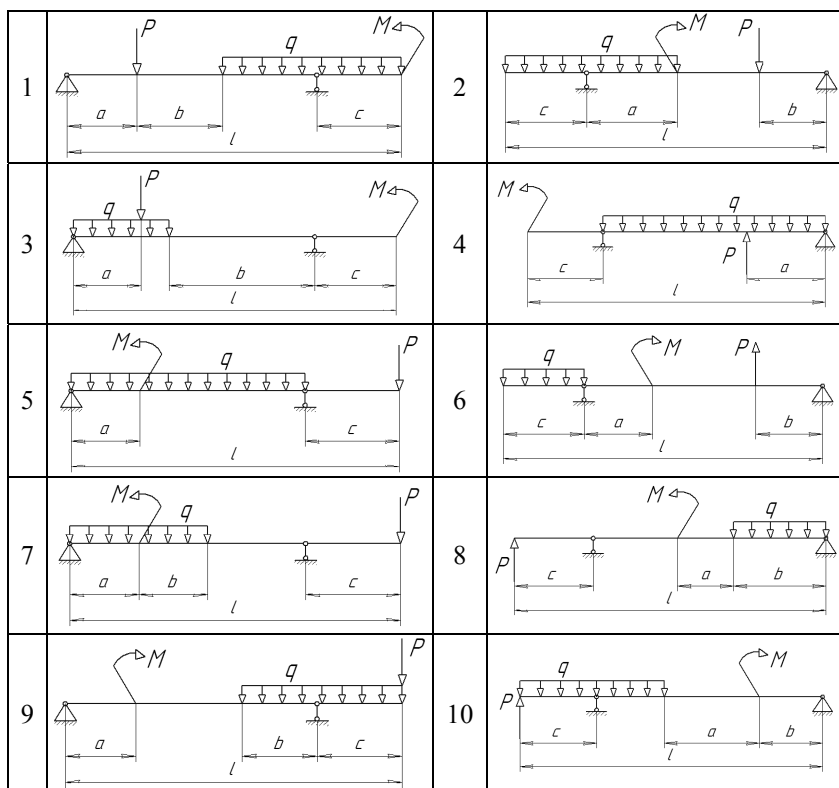


Рис. 6.8. Варианты расчетных схем

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов с обязательным составлением уравнений  $Q$ ,  $M$  для каждого участка.

4. Определить положение наиболее нагруженных сечений балки и отметить их на схеме.

5. Подобрать прямоугольное сечение из условия прочности при  $[\sigma] = 160$  МПа и заданном соотношении размеров сечения:

$\frac{h}{b}$ , где  $h$  – высота сечения;  $b$  – ширина сечения.

### Пример решения задачи

Стальная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена внешними нагрузками  $P = 4$  кН,  $M = 6$  кН·м,  $q = 2$  кН/м, длина участков  $a = 2$  м (рис. 6.9). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать прямоугольное сечение стальной балки из расчета на прочность по нормальным напряжениям, если известно, что  $\frac{h}{b} = 2$ . Допускаемое напряжение при изгибе  $[\sigma] = 160$  МПа.

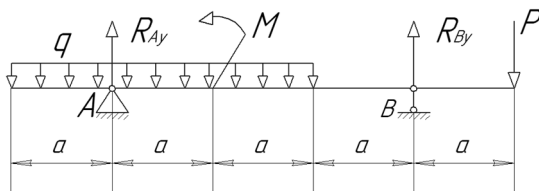


Рис. 6.9. Схема нагружения балки

*Решение:*

1. Вычертить схему с указанием числовых данных (см. рис. 6.9).
2. Определить опорные реакции, записать проверочное уравнение и убедиться в правильности найденных значений опорных реакций.

Горизонтальная реакция  $R_{B_x}$  в шарнирно-неподвижной опоре равна нулю:  $\sum F_z = 0$ ,  $R_{B_x} = 0$ .

Основные нагрузки располагаются по направлению оси  $y$ . Запишем уравнение суммы моментов от всех сил относительно точки  $A$ :

$$\sum M_A = 0, \quad q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - q \cdot 2a \cdot a + M + R_{B_y} \cdot 3a - P \cdot 4a = 0.$$

Из этого уравнения можно определить реакцию опор  $R_{B_y}$ :

$$R_{B_y} = \frac{-q \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot 2a^2 - M + P \cdot 4a}{3a} = 6,34 \text{ кН}.$$

Запишем уравнение суммы моментов от всех сил относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B = 0, \quad q \cdot 3a \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) - R_{A_y} \cdot 3a + M - P \cdot a = 0.$$

Из этого уравнения можно определить реакцию опор  $R_{A_y}$ :

$$R_{A_y} = \frac{q \cdot 3a \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right) + M - P \cdot a}{3a} = 9,66 \text{ кН}.$$

Проверка найденных реакций опор выполняется любым уравнением, которое ранее не рассматривалось. Используем уравнение суммы всех сил по оси  $y$ :  $\sum F_y = 0$ ,  $R_{A_y} + R_{B_y} - q \cdot 3a - P = 0$ . Подставив найденные значения реакций опор в проверочное уравнение, убедимся, что  $0 = 0$ . Это означает, что найденные значения реакций опор определены верно, направление реакций опор соответствует выбранному (рис. 6.10).

3. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов с обязательным составлением уравнений  $Q$ ,  $M$  для каждого участка.

Разобьем балку на 5 участков. Составим уравнения для каждого из участков для нахождения значений поперечной силы и изгибающего момента. Обход участков осуществляется либо слева направо, либо справа налево, или же часть участков взять с одной стороны, а оставшуюся часть участков – с другой стороны.

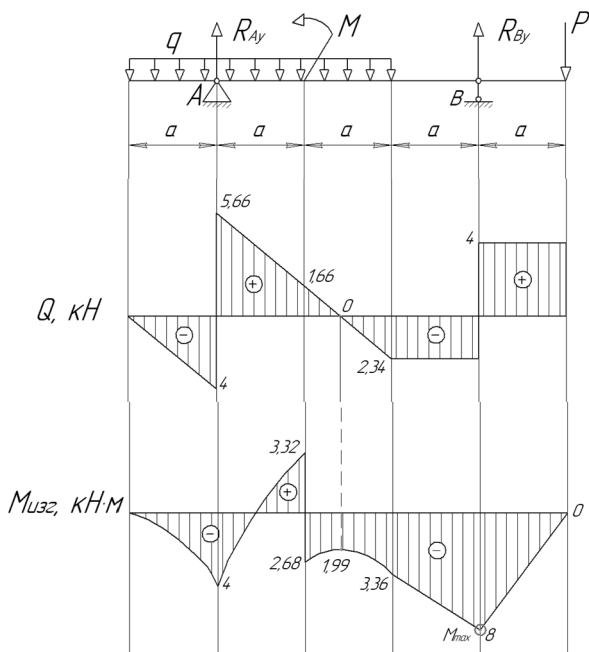
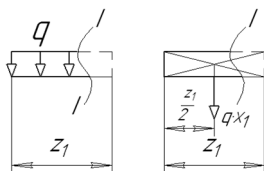


Рис. 6.10. Эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$

Составим уравнения для первых трех участков, сделав обход слева направо.

Участок I-I  $0 \leq z_1 \leq a$



$$Q_I = -q \cdot z_1 \Big|_0^a,$$

$$Q_{I(z_1=0)} = -q \cdot 0 = 0,$$

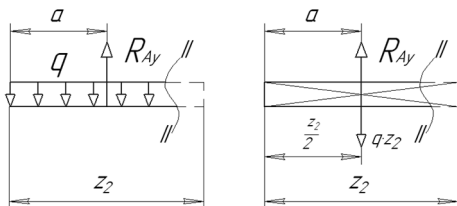
$$Q_{I(z_1=a=2)} = -q \cdot a = -4 \text{ кН.}$$

$$M_I = -q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} \Big|_0^a,$$

$$M_{I(z_1=0)} = -q \cdot 0 = 0,$$

$$M_{I(z_1=a=2)} = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II-II  $a \leq z_2 \leq 2a$



$$Q_{II} = \left( -q \cdot z_2 + R_{Ay} \right) \Big|_a^{2a},$$

$$Q_{II(z_2=a=2)} = -q \cdot a + R_{Ay} = 5,66 \text{ кН},$$

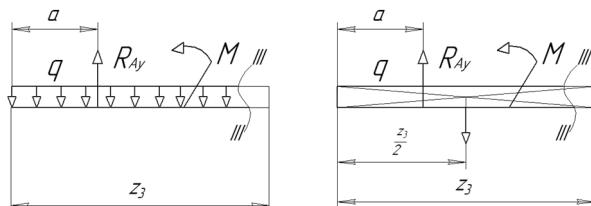
$$Q_{II(z_2=2a=4)} = -q \cdot 2a + R_{Ay} = 1,66 \text{ кН}.$$

$$M_{II} = \left( -q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2} + R_{Ay} \cdot (z_2 - a) \right) \Big|_a^{2a},$$

$$M_{II(z_2=a=2)} = -q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + R_{Ay} \cdot (a - a) = -4 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{II(z_2=2a=4)} = -q \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} + R_{Ay} \cdot (2a - a) = 3,32 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III-III  $2a \leq z_3 \leq 3a$



$$Q_{III} = \left( -q \cdot z_3 + R_{Ay} \right) \Big|_{a^2}^{3a},$$

$$Q_{III(z_3=2a=4)} = -q \cdot 2a + R_{Ay} = 1,66 \text{ кН},$$

$$Q_{III(z_3=3a=6)} = -q \cdot 3a + R_{Ay} = -2,34 \text{ кН.}$$

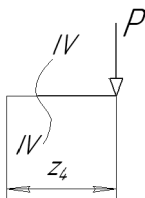
$$M_{III} = \left( -q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} + R_{Ay} \cdot (z_3 - a) - M \right) \Big|_{2a}^{3a},$$

$$M_{III(z_3=2a=4)} = -q \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} + R_{Ay} \cdot (2a - a) - M = -2,68 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{III(z_3=3a=6)} = -q \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} + R_{Ay} \cdot (3a - a) - M = -3,36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Составим уравнения для оставшихся двух участков, сделав обход справа налево.

Участок IV-IV  $0 \leq z_4 \leq a$



$$Q_{IV} = P \Big|_0^a,$$

$$Q_{IV(z_4=0)} = P = 4 \text{ кН},$$

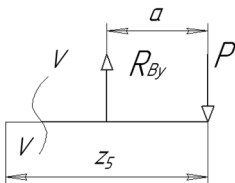
$$Q_{IV(z_4=a=2)} = P = 4 \text{ кН}.$$

$$M_{IV} = -P \cdot z_4 \Big|_0^a,$$

$$M_{IV(z_4=0)} = -P \cdot 0 = 0,$$

$$M_{IV(z_4=a=2)} = -P \cdot a = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок V-V  $a \leq z_5 \leq 2a$



$$Q_V = \left( P - R_{By} \right) \Big|_a^{2a},$$

$$Q_{V(z_5=a=2)} = P - R_{By} = -2,34 \text{ кН},$$

$$Q_{V(z_5=2a=4)} = P - R_{By} = -2,34 \text{ кН}.$$

$$M_V = \left( -P \cdot z_5 + R_{By} (z_5 - a) \right) \Big|_a^{2a},$$

$$M_{V(z_5=a=2)} = -P \cdot a + R_{By} (a - a) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_{V(z_5=2a=4)} = -P \cdot 2a + R_{By} (2a - a) = -1,99 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке III-III есть точка, где поперечная сила равна нулю. Это означает, что в этой точке балка испытывает чистый изгиб. В этой точке на эпюре моментов должен быть экстремум – минимум или максимум. Для его нахождения необходимо решить уравнение поперечной силы на участке III-III приравнять к нулю:

$Q_{III} = -q \cdot z'_3 + R_{Ay} = 0$ . Из этого уравнения определим величину  $z'_3$  – длина, при которой на эпюре моментов будет экстремум:

$$-q \cdot z'_3 + R_{Ay} = 0, \quad z'_3 = \frac{R_{Ay}}{q} = 4,83 \text{ м.}$$

Зная величину  $z'_3$ , можно опре-

делить значение момента на третьем участке в точке экстремума:

$$M_{III(z'_3=4,83)} = -q \cdot 4,83 \cdot \frac{4,83}{2} + R_{Ay} \cdot (4,83 - a) - M = -1,99 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным значениям для  $Q$  и  $M$  можно построить эпюры на каждом участке. Вверх откладываются положительные значения, вниз – отрицательные (см. рис. 6.10). По построенным эпюрам можно определить, правильно ли получено решение задачи, проверив правила построения эпюр, а именно дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом.

4. Определить положение наиболее нагруженных сечений балки и отметить их на схеме.

Для подбора размеров поперечного сечения балки необходимо определить опасное сечение балки, где действует наибольший изгибающий момент. Для этой задачи максимальное значение изгибаю-

щего момента соответствует точке  $B$ , где  $M_B = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ . Отметим опасное сечение на балке (см. рис. 6.10).

5. Подобрать прямоугольное сечение из условия прочности при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  и заданном соотношении размеров сечения

$$\frac{h}{b} = \frac{2}{1}, \text{ где } h - \text{высота сечения, м; } b - \text{ширина сечения, м.}$$

Условие прочности при поперечном изгибе записывается в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $|M_x|$  – абсолютная величина изгибающего момента в опасном сечении,  $\text{Н} \cdot \text{м}$ ;  $W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$  – осевой момент сопротивления для прямоугольного сечения,  $\text{м}^3$ ;  $[\sigma]$  – допускаемое напряжение материала балки,  $\text{Па}$ .

$$W_x = \frac{|M_x|}{[\sigma]} = \frac{8 \cdot 10^3}{160} = 50 \text{ см}^3 = 0,00005 \text{ м}^3. \text{ Соотношение высо-}$$

ты и ширины сечения  $\frac{h}{b} = 2$ . Выразив значения высоты  $h$  через  $h = 2b$ , получим:

$$0,00005 = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = \frac{2}{3} b^3,$$

$$b^3 = \frac{0,00005 \cdot 3}{2} = 0,000075 \text{ м}^3,$$

$$b = \sqrt[3]{0,000075} = 0,0422 \text{ м, а так как } h = 2b = 2 \cdot 0,0422 = 0,0844 \text{ м.}$$

Таким образом, размеры прямоугольного сечения составят  $42,2 \times 84,4 \text{ мм}$ . Данные значения являются минимально необходимыми для обеспечения прочности рассматриваемой балки. При отсутствии дополнительных условий расчетные размеры можно

округлить до целого значения в миллиметрах исключительно в большую сторону ( $h = 85$  мм,  $b = 43$  мм).

По ГОСТ 6636–69 нормальных линейных размеров выбираются ближайшие значения в сторону увеличения. Окончательные размеры прямоугольного сечения балки принимаем:  $h = 90$  мм,  $b = 45$  мм.

Стандартный ряд нормальных линейных размеров по ГОСТ 6636–69 от 1 до 1000 мм:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 58, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240, 245, 250, 260, 270, 280, 290, 300, ..., 990, 1000.

При расчетах размеров элементов конструкций по условиям прочности для промежуточных значений следует выбирать ближайшее большее значение из данного ряда.

## ТЕМЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Статика. Основные понятия статики. Система сил. Аксиомы статики.

2. Силы и их реакции. Равновесие системы сил. Проекция силы на ось. Пара сил. Система сходящихся сил.

3. Момент силы относительно центра (или точки). Пара сил. Момент пары сил. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.

4. Кинематика точки. Способы задания движения точки.

5. Вектор скорости точки. Вектор ускорения точки. Касательное и нормальное ускорение точки.

6. Поступательное и вращательное движение твердого тела. Вращательное движение твердого тела вокруг оси. Угловая скорость и угловое ускорение.

7. Основные понятия и определения теории механизмов и машин. Основные виды механизмов и их классификация.

8. Классификация кинематических пар по числу условий связи, низшие и высшие кинематические пары. Структурная формула кинематической цепи. Формулы Сомова – Малышева, Чебышева.

9. Принцип образования механизмов по Ассуру. Классификация механизмов по Ассуру – Артоболовскому.

10. Структурный анализ механизма. Порядок проведения.

11. Кинематический анализ механизмов с низшими кинематическими парами. Планы скоростей и ускорений. Порядок проведения.

12. Динамический и силовой анализ механизма. Основные задачи. Силы, действующие на механизм. Порядок проведения анализа.

13. Основные понятия сопротивления материалов: прочность, жесткость, устойчивость, упругость, пластичность, хрупкость. Виды испытаний материалов. Гипотезы и принятые допущения.

14. Основные модели надежности: модели формы, модели материала, модели нагружения, расчетная схема, модели разрушения.

15. Внешние и внутренние силы. Метод сечений для определения внутренних сил.

16. Виды деформаций. Деформации в точке. Линейные и угловые деформации.

17. Напряжения в точке. Нормальные и касательные напряжения.

18. Механические характеристики материала. Диаграмма одноосного растяжения упругопластичного материала. Экспериментальное определение модуля Юнга. Диаграммы растяжения и сжатия хрупких и пластичных материалов.

19. Центральное растяжение-сжатие. Определение продольных сил, напряжения и деформации, коэффициент Пуассона, модуль Юнга, закон Гука.

20. Геометрические характеристики плоских сечений. Статический момент сечения, осевые и полярный моменты инерции сечений, определение их для простых форм сечений и сложных.

21. Геометрические характеристики плоских сечений. Полярный и осевые моменты сопротивления для сечений простых и сложных форм. Центробежный момент инерции, главные центральные оси, радиусы инерции.

22. Условия прочности конструкции по допускаемым напряжениям и коэффициенту запаса прочности. Типы расчетов на прочность.

23. Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса, деформации при растяжении-сжатии. Закон Гука при растяжении-сжатии.

24. Напряжения и деформации при сдвиге. Закон Гука при сдвиге.

25. Напряжения и деформации стержня круглого поперечного сечения при кручении. Закон Гука при кручении. Расчеты на прочность и жесткость при кручении.

26. Виды изгиба. Определение внутренних усилий при изгибе. Деформации и напряжения при чистом изгибе. Особенности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

27. Механические передачи трением и зацеплением. Классификация. Области применения. Основные кинематические и силовые отношения в передачах.

28. Валы и оси. Назначение, материалы валов и осей. Классификация валов и осей. Критерии работоспособности и расчет валов и осей.

29. Упругие элементы. Муфты. Применение. Классификация.

30. Подшипники качения. Классификация. Система обозначения подшипников качения. Методика выбора подшипника качения.

31. Подшипники скольжения. Классификация. Характеристика.

32. Сварные соединения. Область применения. Классификация и разновидности сварных соединений (швов). Обозначения сварных швов. Расчет сварных соединений на прочность.

33. Шпоночные и шлицевые соединения. Область применения, классификация. Расчеты на прочность. Последовательность проверочного расчета шлицевых и шпоночных соединений.

34. Расчеты на прочность заклепочных соединений.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абадеев Э.М., Абрамова Н.А. Теоретическая механика: учеб. пособие. – Дубна: Гос. ун-т «Дубна», 2023. – 223 с.
2. Теоретическая механика: учеб. пособие / Е.В. Матвеева, М.А. Васечкин, Е.В. Литвинов, М.А. Акенченко; Воронеж. гос. ун-т инж. технологий. – Воронеж, 2023. – 51 с.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин: учеб. – 4-е изд. – М.: Альянс, 2014. – 639 с.
4. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин: учеб. пособие. – 3-е изд. – М.: Альянс, 2019. – 256 с.
5. Жилинский А.П., Файзулаев В.Н. Механика: учеб. пособие для всех направлений подготовки бакалавриата / Моск. техн. ун-т связи и информатики. – М., 2022. – 145 с.
6. Ладогубец Н.В., Лузик Э.В. Техническая механика. Теоретическая механика: учеб. пособие: в 4 кн. – 2-е изд., стер. – М.: Машиностроение, 2022. – 128 с.
7. Сопротивление материалов: учебник / П.А. Павлов, Л.К. Паршин, Б.Е. Мельников, В.А. Шерстнев, Б.Е. Мельникова. – 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – Кн. 1. – 556 с.
8. Агуленко В.Н., Тихомиров В.М. Сопротивление материалов: вопросы и ответы: учеб. пособие / Сиб. гос. ун-т путей сообщ. – Новосибирск, 2023. – 181 с.
9. Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С. Прикладная механика: учеб. – 2-е изд., стер. – М.: Машиностроение, 2022. – 576 с.
10. Абакумов А.Н., Захарова Н.В., Коновалов В.Е. Прикладная механика: учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. / Омск. гос. техн. ун-т. – Омск, 2018. – 156 с.
11. Гулиа Н.В., Клоков В.Г., Юрков С.А. Детали машин. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2022. – 416 с.
12. Детали машин и основы конструирования: учеб. пособие: в 2 ч. / Д.М. Караваев, В.А. Москалев, Е.В. Матыгуллина, Л.Д. Сиротенко. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Титульный лист

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ПНИПУ)

Аэрокосмический факультет

Кафедра механики композиционных материалов и конструкций

Направление: \_\_\_\_\_

Профиль: \_\_\_\_\_

Отчет по  
Расчетно-графическим работам  
по дисциплине «Механика»  
Вариант №000000

Студент гр. \_\_\_\_\_ И.О. Фамилия  
подпись

Проверил  
доцент  
канд. техн. наук  
\_\_\_\_\_ И.О. Фамилия  
подпись, дата, оценка

Пермь, 20\_\_ г.

Учебное издание

Бабушкина Анна Викторовна,  
Бабушкин Андрей Викторович,  
Свисткова Лариса Александровна

## МЕХАНИКА

*Учебно-методическое пособие*

---

Подписано в печать 17.03.2025. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 4,8. Тираж 19 экз. Заказ № 043.

---

Издательство Пермского национального  
исследовательского политехнического университета.  
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.  
Тел.: (342) 219-80-33

Отпечатано в типографии  
Издательства Пермского национального  
исследовательского политехнического университета.  
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.  
Тел.: (342) 219-80-33