

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»
Кафедра общей физики

Д.В.Баяндин

Специальные разделы физики

*Конспект лекций по курсу
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика»*

Издательство
Пермского национального исследовательского
политехнического университета
2017

УДК 53(07):378
Б55

Специальные разделы физики: конспект лекций по курсу / Д.В. Баяндин. – Пермь : Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2017. – 145 с.

Курс "Специальные разделы физики" посвящен вопросам построения и исследования свойств математических моделей сложных физических явлений. Прежде всего, это явления, описываемые дифференциальными уравнениями, как правило, в частных производных. Особый интерес представляют целые классы явлений из различных областей физики, математическое описание которых единообразно.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика».

УДК 53(07):378

Печатается по решению кафедры общей физики протокол № 1 от 01.09. 2017

Рецензент
канд. физ.-мат. наук, доцент *В.И. Колесниченко*
(Пермский национальный исследовательский
политехнический университет)

© ПНИПУ, 2017

Содержание

Введение	4
Раздел 1. Колебания в системах с двумя и более степенями свободы	5
1.1. Свободные колебания в системах с двумя степенями свободы	5
1.2. Вынужденные колебания в системах с двумя и более степенями свободы	14
1.3. Фильтры механические и электрические	16
Раздел 2. Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных (ДУЧП)	23
2.1. Классификация ДУЧП	23
2.2. Краевая задача. Граничные и начальные условия	26
Раздел 3. ДУЧП гиперболического типа: волновые явления	29
3.1. Волны в однородных распределенных системах (бесконечное число степеней свободы)	29
3.2. Принцип суперпозиции и поэтапное решение сложных задач	33
3.3. Волны в системах со многими степенями свободы. Дисперсия и дисперсионные соотношения	34
3.4. Волны в системах со многими степенями свободы (окончание)	42
3.5. Волны в пространственнеоднородных системах. Собственные функции и их полный набор	46
3.6. Колебания с конечной амплитудой	50
Раздел 3а. Метод Фурье разделения переменных для уравнений гиперболического типа	53
3а.1. Этап 1: общее решение однородного уравнения с однородными граничными и произвольными начальными условиями	53
3а.2. Вид решений для струны с двумя закрепленными концами	58
3а.3. Вид решений для струны со свободным концом	61
3а.4. Этап 2: учет начальных условий	62
3а.5. Этап 3: неоднородное уравнение с нулевыми граничными и начальными условиями	64
3а.6. Этап 4: неоднородные граничные условия; общая постановка первой краевой задачи	65
Раздел 4. ДУЧП параболического типа: явления переноса	68
4.1. Явления переноса: классификация, характеристики, законы	68
4.2. Нестационарное уравнение теплопроводности. Учет движения среды	78
4.3. Краевая задача для ДУЧП параболического типа	81
4.4. Скин-эффект при высокочастотном токе в металле	85
Раздел 4а. Метод Фурье разделения переменных для уравнений параболического типа	89
4а.1. Этап 1: общее решение однородного уравнения с однородными граничными и произвольными начальными условиями	89
4а.2. Этап 2: учет начальных условий	92
4а.3. Этап 3: неоднородное уравнение с нулевыми граничными и начальными условиями	94
4а.4. Этап 4: неоднородные граничные условия; общая постановка первой краевой задачи	97

Раздел 5. Уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости	99
5.1. Уравнения движения идеальной жидкости	99
5.2. Некоторые частные соотношения динамики идеальной жидкости	103
5.3. Уравнения динамики вязкой жидкости	106
5.4. Закон подобия и безразмерные критерии подобия. Устойчивость решений и бифуркации	108
Раздел 5а. Решение задач гидродинамики	114
5а.1. Задачи динамики идеальной жидкости	114
5а.2. Течение Куэтта в плоском слое	126
5а.3. Течение Пуазейля в плоском слое	129
5а.4. Течение Пуазейля в круглой трубе	133
5а.5. Пограничный слой. Уравнения Прандтля	136
5а.6. Задача Блаузиуса и метод последовательных приближений Швеца	139

Введение

Изложенный в данном учебном пособии материал посвящен вопросам построения и исследования свойств математических моделей сложных физических явлений. Прежде всего, это явления, описываемые дифференциальными уравнениями, как правило, в частных производных. Особый интерес представляют целые классы явлений из различных областей физики, математическое описание которых единообразно. Пример такого рода в элементарной физике – дифференциальные уравнения гармонических, затухающих и прочих колебаний, имеющие одинаковый вид для самых различных механических и электромагнитных колебательных систем. В данном курсе спектр классов явлений, имеющих единую математическую модель, существенно расширен.

Определенное место уделено также методам решения построенных дифференциальных уравнений. Соответствующие блоки материала оформлены как примеры решения задач (разделы 3а, 4а, 5а). Таким образом, пособие содержит материал лекционных и практических занятий.

Раздел 1. Колебания в системах с двумя и более степенями свободы

1.1. Свободные колебания в системах с двумя степенями свободы

1. Приведем примеры систем с двумя степенями свободы:

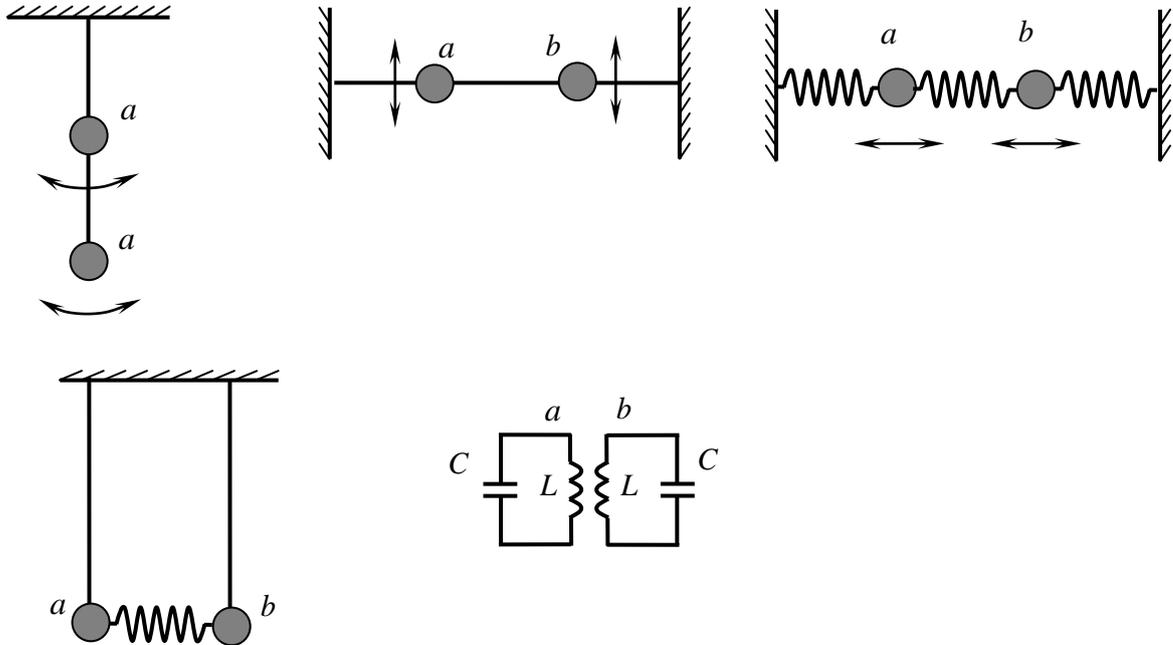


Рис. 1.1

В таких системах движение в общем случае может выглядеть очень сложно, не похоже на привычные гармонические колебания. Однако поскольку имеется две степени свободы, можно выделить две нормальные моды (гармоники). Тогда в общем случае движение будет представлять собой суперпозицию этих мод. Каждая мода ведет себя как обычное гармоническое колебание, поэтому для тел a и b можно записать:

$$\begin{aligned}\psi_a &= A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \\ \psi_b &= B \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).\end{aligned}$$

где $\psi_{a,b}$ – смещение тел a или b от положения равновесия.

Свойство мод: для всех тел системы реализуется единая частота и одинаковые начальная и мгновенная фазы колебаний, в частности, все тела одновременно проходят положение равновесия.

Уравнения для 1-ой моды будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\psi_a &= A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01}), \\ \psi_b &= B_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01});\end{aligned}\tag{1.1}$$

а для 2-ой моды:

$$\begin{aligned}\psi_a &= A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02}), \\ \psi_b &= B_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02});\end{aligned}\tag{1.2}$$

То есть ψ_a и ψ_b отличаются только амплитудными коэффициентами A и B :

$$\frac{\psi_a}{\psi_b} = \frac{A_1}{B_1} = const_1, \quad \frac{\psi_a}{\psi_b} = \frac{A_2}{B_2} = const_2$$

Общее решение будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_a = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01}) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02}) \\ \psi_b = B_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01}) + B_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02}) \end{cases}\tag{1.3}$$

2. Рассмотрим для начала известную из элементарного курса физики систему с двумя степенями свободы (двумерный гармонический осциллятор), в которой груз движется по двумерной траектории – так называемые фигуры Лиссажу.

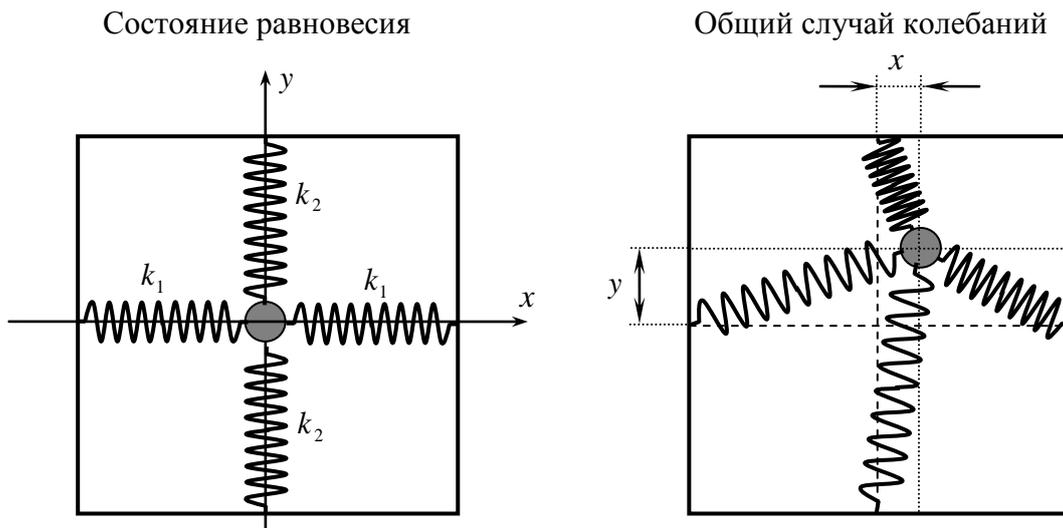


Рис. 1.2

Начало координат системы XOY свяжем с положением равновесия груза; ось x направим вправо, ось y – вверх.

Введем следующие обозначения:

$$\psi_a \equiv x, \quad \psi_b \equiv y.$$

Колебания по оси x соответствуют 1-ой моде, по y – второй моде (рис. 1.3).

Рассмотрим сначала смещение только вдоль оси x .

Колебания первой моды для горизонтальных пружин – продольные, а для вертикальных – поперечные, то есть чувствительные к собственной длине пружин.

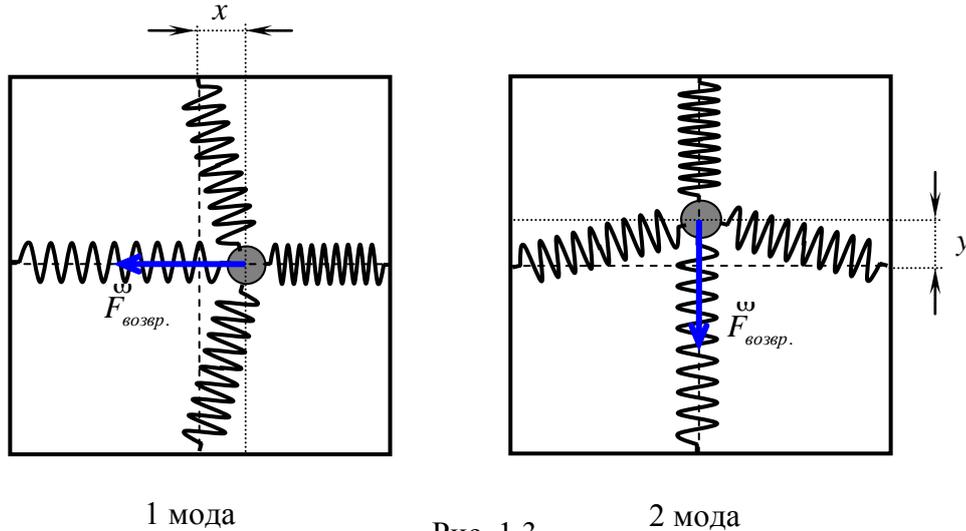


Рис. 1.3

Фигуры Лиссажу получаются только в случае, когда работает одна пара пружин для каждой моды, поэтому примем, что в положении равновесия пружины не деформированы (собственная длина пружин равна половине размера области).

Для шарика возвращающая сила, создаваемая горизонтальными пружинами, будет равна:

$$F_{\text{возвр}} = -2 \cdot k_1 \cdot x;$$

Для описания влияния вертикальных пружин обозначим через l_0 собственную длину пружины, а через l – длину деформированной пружины.

Тогда $l^2 = l_0^2 + x^2$, или иначе $l^2 - l_0^2 = x^2$:

Оценим изменение длины вертикальной пружины Δl при первой моде колебаний:

$$(l - l_0) \cdot (l + l_0) = x^2, \text{ или } \Delta l \cdot 2 \cdot l_0 = x^2, \text{ откуда}$$

$$\Delta l = \frac{x^2}{2 \cdot l_0},$$

При малых колебаниях x^2 мало, так что

$$\Delta l \ll x.$$

Деформация вертикальных пружин пропорциональна x^2 , и поэтому их вкладом в возвращающую силу можно пренебречь, как малыми добавками по сравнению с x -составляющей.

Уравнения для 1-ой и 2-ой моды запишем в виде:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = -2 \cdot k_1 \cdot x \\ m \cdot \ddot{y} = -2 \cdot k_2 \cdot y \end{cases} \quad (1.4)$$

Решения этих дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} x = A_x \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_{01}) \\ y = A_y \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_{02}) \end{cases}, \quad (1.5)$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{2 \cdot k_1}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{2 \cdot k_2}{m}.$$

Как дифференциальные уравнения, так и их решения записаны независимо для x и y составляющих, т.е. две моды “не завязаны” друг на друга, в отличие от решения (1.3). Это связано с удачным выбором системы координат. При другом варианте системы координат (см. рис. 1.4) уравнение движения и решение не будут выглядеть просто.

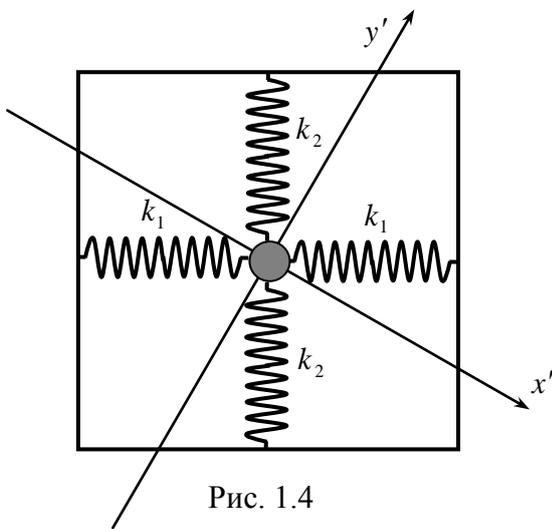


Рис. 1.4

Такие координаты не являются оптимальными, и решения (моды) в этой системе координат были бы “завязаны” друг на друга. Координаты, в которых уравнения для мод оказываются не зависящими друг от друга, будем называть нормальными координатами. Нормальным координатам соответствуют нормальные моды. В координатах, не являющихся нормальными, уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -a_{11} \cdot x - a_{12} \cdot y \\ \ddot{y} = -a_{21} \cdot x - a_{22} \cdot y \end{cases}, \quad (1.6)$$

где коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} имеют смысл квадратов частот, а решения этих уравнений – вид (1.3).

Таким образом, колебания системы с двумя степенями свободы удобно рассматривать в нормальных координатах, однако нормальные координаты *не всегда являются очевидными*, что будет показано в п.3.

3. Рассмотрим линейную колебательную систему, состоящих из 2-х грузов и 3-х пружин (рис. 1.5).

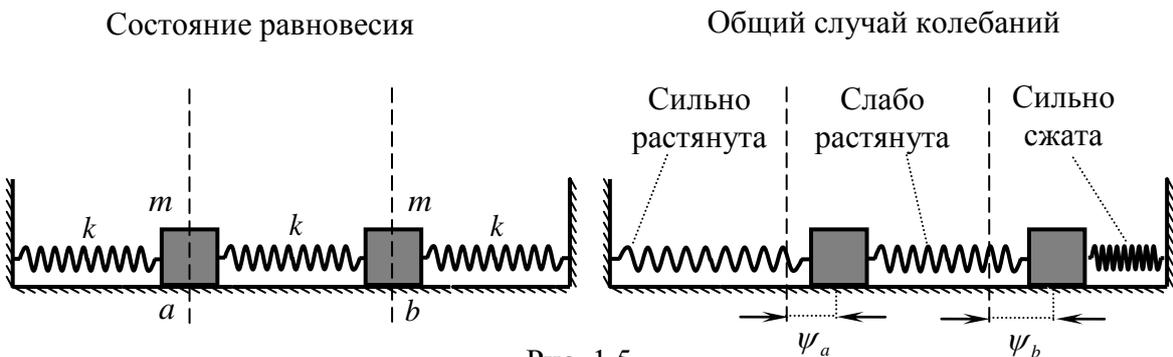


Рис. 1.5

В соответствии со свойствами мод движение тел должно происходить с одинаковыми частотами. Очевидны два особенных случая, которые как раз и являются модами.

Поскольку центральная пружина не деформирована, возвращающая сила для каждого тела создается только одной пружиной, поэтому:

$$\psi_a = \psi_b, \quad \omega_1^2 = \frac{k}{m}; \quad (1.7)$$

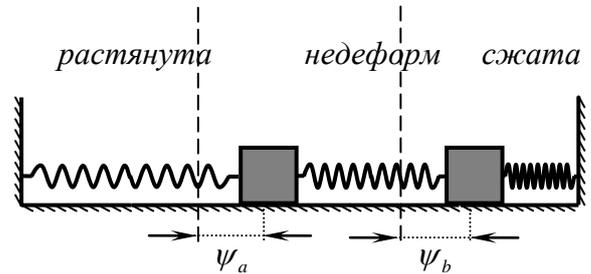


Рис. 1.6 а

Поскольку центральная пружина сжата вдвое сильнее, чем растянуты крайние, то:

$$\psi_a = -\psi_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3 \cdot k}{m}; \quad (1.8)$$

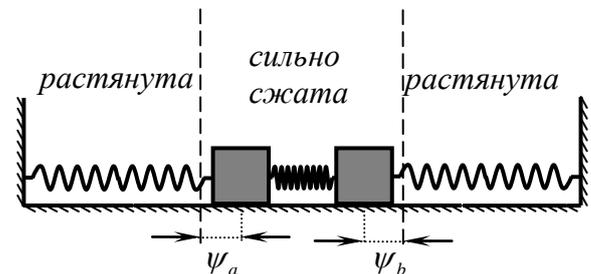


Рис. 1.6 б

Вернемся к общему случаю (Рис. 1.5) и запишем для него дифференциальные уравнения колебаний:

для 1-го груза:

$$m \cdot \ddot{\psi}_a = -k \cdot \psi_a + k \cdot (\psi_b - \psi_a) \quad (1.9)$$

для 2-го груза:

$$m \cdot \ddot{\psi}_b = -k \cdot (\psi_b - \psi_a) - k \cdot \psi_b \quad (1.10)$$

Эти уравнения зависят друг от друга, поэтому их решение имеет вид (1.3). Однако можно найти такие координаты ψ , в которых уравнения “расцепятся”. Тем самым мы перейдем к нормальным координатам, которым соответствуют уже полученные нормальные моды. Введем нормальные координаты следующим образом:

$$\psi_1 = \frac{\psi_a + \psi_b}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_a - \psi_b}{2}. \quad (1.11)$$

Сложим уравнения (1.9) и (1.10):

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot (\psi_a + \psi_b) = -k \cdot (\psi_a + \psi_b)$$

и, разделив полученное уравнение на 2, получим уравнение для первой моды:

$$m \cdot \ddot{\psi}_1 = -k \cdot \psi_1 \quad (1.12).$$

Вычтем из уравнения (1.9) уравнение (1.10):

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot (\psi_a - \psi_b) = -3 \cdot k \cdot (\psi_a - \psi_b)$$

и, разделив полученное уравнение на 2, получим уравнение для второй моды:

$$m \cdot \ddot{\psi}_2 = -3 \cdot k \cdot \psi_2 \quad (1.13).$$

Из уравнений (1.12) и (1.13) следует, что квадраты частот для первой и второй мод действительно отличаются в 3 раза (см. (1.7) и (1.8)). Итак, мы сумели подобрать такие координаты, что уравнения “расцепились”. Значит, эти координаты являются нормальными и им соответствуют нормальные моды. Смысл нормальных координат в этом случае таков:

- ψ_1 – смещение центра масс системы,
- ψ_2 – деформация центральной пружины.

Однако, в некоторых случаях нормальные координаты не только сложно «увидеть», но и сложно понять их физический смысл.

4. Рассмотрим колебания в связанных LC-цепочках.

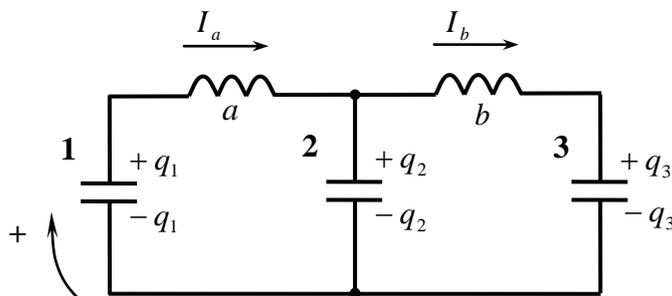


Рис. 1.7

Если проводить аналогию с механической системой, то индуктивности L в электромагнитной системе соответствует масса m , величине обратной емкости $1/C$ соответствует жесткость пружины k_0 .

Выберем направление положительного обхода контура по часовой стрелке. Также выберем для тока в катушках индуктивности направление слева направо. На верхней обкладке конденсатора сосредоточен заряд $+q$, а на нижней $-q$. Емкости конденсаторов и индуктивности катушек будем считать одинаковыми.

Рассмотрим влияние токов на заряды конденсаторов:

Для 1-го конденсатора:

$$\frac{dq_1}{dt} = -I_a, \text{ т.е. ток способствует разрядке.}$$

Для 3-го конденсатора:

$$\frac{dq_1}{dt} = I_b, \text{ т.е. ток способствует зарядке.}$$

Для 2-го конденсатора:

$$\frac{dq_2}{dt} = I_a - I_b.$$

Для катушек a и b запишем 2-ое правило Кирхгофа. С учетом соотношения $C = q/U$:

$$L \frac{dI_a}{dt} = U_1 - U_2 = \frac{q_1}{C} - \frac{q_2}{C}, \quad (1.14)$$

$$L \frac{dI_b}{dt} = U_2 - U_3 = \frac{q_2}{C} - \frac{q_3}{C}, \quad (1.15)$$

Запишем уравнения относительно токов. Для этого возьмем производные по времени от уравнений (1.14) и (1.15). Токи в данном случае аналогичны смещению ψ в механическом случае.

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt} (q_1 - q_2) = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) = \frac{1}{C} \cdot (-I_a - (I_a - I_b)),$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{d}{dt} (q_2 - q_3) = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_3}{dt} \right) = \frac{1}{C} \cdot ((I_a - I_b) - I_b),$$

или

$$L \frac{d^2 I_a}{dt^2} = -\frac{1}{C} \cdot I_a + \frac{1}{C} \cdot (I_b - I_a), \quad (1.16)$$

$$L \frac{d^2 I_b}{dt^2} = \frac{1}{C} \cdot (I_a - I_b) - \frac{1}{C} \cdot I_b; \quad (1.17)$$

Эти уравнения аналогичны уравнениям для механической системы (см. (1.9) и (1.10)), поэтому воспользуемся известным результатом. Существует 2 моды решения:

- 1) токи в контурах текут «синхронно», заряд на втором конденсаторе равен нулю:

$$I_a = I_b, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{LC}, \quad (1.18)$$

- 2) токи текут в противофазе, т.е. заряд на втором конденсаторе вдвое больше, чем на первом и третьем:

$$I_a = -I_b, \quad \omega_2^2 = \frac{3}{LC}. \quad (1.19)$$

Общее решение будет представлять собой суперпозицию этих двух мод с произвольными коэффициентами.

Системы в пунктах 3 и 4 обладают одинаковой пространственной симметрией и имеют аналогичные моды.

5. Рассмотрим колебания связанных математических маятников.

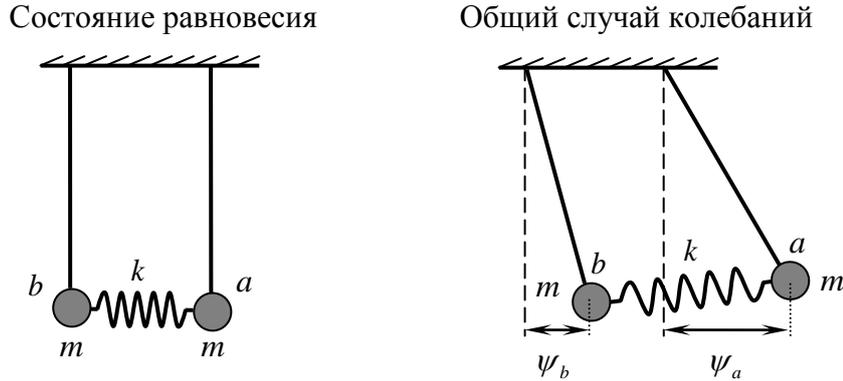


Рис. 1.8

Масса каждого шарика m , стержни невесомые длиной l . В общем случае движение каждого маятника представляет собой суперпозицию двух мод.

Отличительная особенность этой системы от рассмотренных пп.2–4 состоит в том, что возвращающая сила $F_{возвр}$ создается двумя механизмами: силой тяжести и силой упругости.

Из второго закона Ньютона имеем для маятника a :

$$m\ddot{\psi}_a = -\frac{mg}{l} \cdot \psi_a - k(\psi_a - \psi_b), \quad (1.20)$$

для маятника b :

$$m\ddot{\psi}_b = -\frac{mg}{l} \cdot \psi_b - k(\psi_b - \psi_a), \quad (1.21)$$

где $(\psi_a - \psi_b)$ – деформация пружины.

Разделив уравнения (1.20) и (1.21) на m , получим систему:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_a = -\frac{g}{l} \cdot \psi_a - \frac{k}{m}(\psi_a - \psi_b) \\ \ddot{\psi}_b = -\frac{g}{l} \cdot \psi_b - \frac{k}{m}(\psi_b - \psi_a) \end{cases}, \quad (1.22)$$

Эти уравнения оказываются связанными, поэтому решать их сложно. Для упрощения задачи перейдем к нормальным координатам (нормальным модам).

Введем нормальные моды, как и в п.3, следующим образом:

$$\psi_1 = \frac{\psi_a + \psi_b}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_a - \psi_b}{2}, \quad (1.11)$$

Сложив уравнения в системе (1.22), получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -\frac{g}{l}(\psi_a + \psi_b) + 0,$$

Вычитая уравнения в системе (1.22), получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a - \psi_b) = -\frac{g}{l}(\psi_a - \psi_b) - \frac{k}{m}(2\psi_a - 2\psi_b),$$

Разделив эти уравнения на 2, получим новые уравнения для мод:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi_1, \quad (1.23)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\frac{g}{l}\psi_2 - \frac{2k}{m}\psi_2 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\psi_2 \quad (1.24)$$

Теперь уравнения независимы друг от друга.

Частота 1-ой моды ω_1 определяется только силой тяжести:

$$\frac{g}{l} = \omega_1^2, \quad (1.25)$$

а частота 2-ой моды ω_2 – силой тяжести и силой упругости:

$$\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} = \omega_2^2, \quad (1.26)$$

Рассмотрим вид этих мод.

1 мода: $\psi_a = \psi_b$, пружина не деформирована, т.к. в уравнении (1.23) нет упругого слагаемого.

2 мода: $\psi_a = -\psi_b$, пружина деформируется обоими маятниками симметрично.

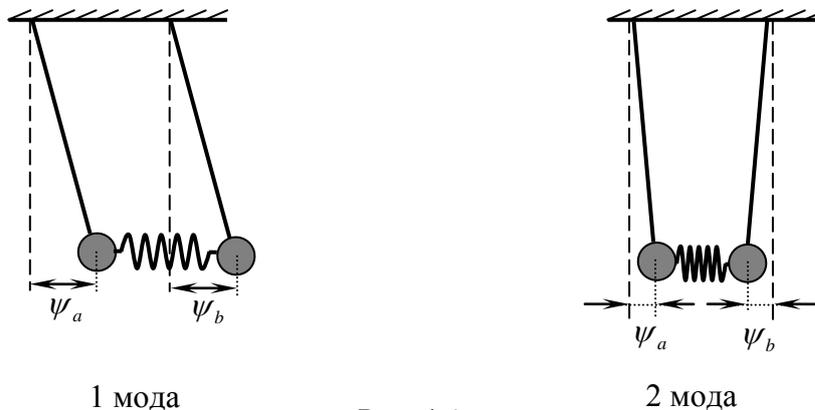


Рис. 1.9

Дифференциальные уравнения для 1-ой и 2-ой моды позволяют записать их решения:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}), \\ \psi_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}). \end{aligned}$$

Т.е. действительно, каждая нормальная мода ведет себя как гармонический осциллятор с той или иной частотой.

Для смещений самих маятников из (1.11) получим:

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2.$$

Тогда:

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}), \quad (1.27)$$

(т.е. смещение первого маятника – это суперпозиция 1-ой и 2-ой мод), а

$$\psi_b = \psi_1 - \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02}). \quad (1.28)$$

Закон движения каждого маятника представляет собой суперпозицию нормальных мод. Следовательно, движение каждого маятника может иметь вид биений.

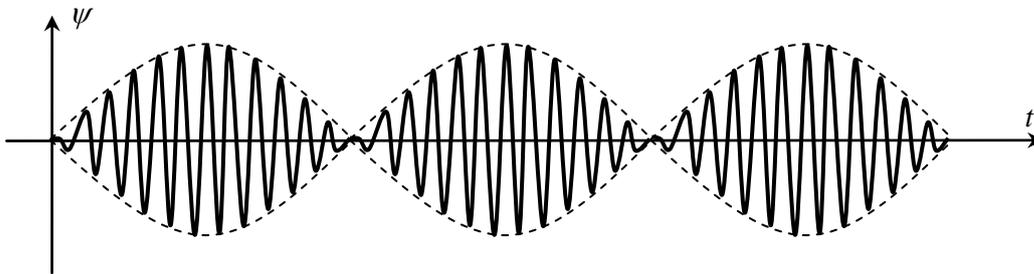


Рис. 1.10

Биения, как известно, возникают при сложении колебаний с близкими частотами. Для этого в нашей системе можно подобрать малые значения k и большие m .

1.2. Вынужденные колебания в системах с двумя и более степенями свободы

1. Рассмотрим колебания связанных маятников, но в случае, когда на один из маятников действует внешняя периодическая сила.

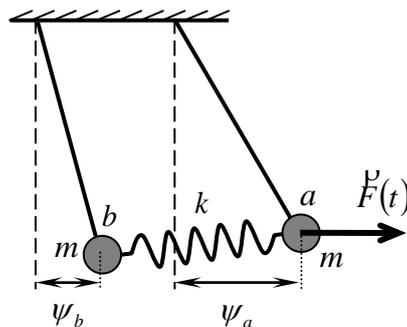


Рис. 1.11

В общем случае в такой системе имеется трение, которое можно характеризовать коэффициентом затухания β . Для каждого из маятников запишем второй закон Ньютона и поделим получившиеся уравнения на массу. Тогда уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{\psi}_a = -\frac{g}{l} \cdot \psi_a - \frac{k}{m} \cdot (\psi_a - \psi_b) - 2\beta \cdot \dot{\psi}_a + \frac{F_m}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.29)$$

$$\ddot{\psi}_b = -\frac{g}{l} \cdot \psi_b - \frac{k}{m} \cdot (\psi_b - \psi_a) - 2\beta \cdot \dot{\psi}_b, \quad (1.30)$$

где $\beta = \frac{\alpha}{2m}$ – коэффициент затухания,

α – коэффициент вязкости,

F_m – амплитудное значение внешней вынуждающей силы,

ω – частота вынуждающей силы.

Отметим, что внешняя вынуждающая сила присутствует только в уравнении (1.29) для груза a . Система этих уравнений сложна, т.к. уравнения зависимы друг от друга. Для упрощения перейдем к нормальным координатам (нормальным модам) в соответствии с (1.11):

$$\psi_1 = \frac{\psi_a + \psi_b}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_a - \psi_b}{2},$$

Сложив уравнения (1.29) и (1.30), получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a + \psi_b) = -\frac{g}{l} \cdot (\psi_a + \psi_b) - 2\beta \cdot \frac{d}{dt}(\psi_a + \psi_b) + \frac{F_m}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.31)$$

Вычитая уравнения (1.29) и (1.30) друг из друга, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_a - \psi_b) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right) \cdot (\psi_a - \psi_b) - 2\beta \cdot \frac{d}{dt}(\psi_a - \psi_b) + \frac{F_m}{m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.32)$$

где $\frac{g}{l} = \omega_1^2$, где ω_1 – частота первой моды,

$\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} = \omega_2^2$, где ω_2 – частота второй моды.

Теперь внешняя вынуждающая сила присутствует в обоих уравнениях для нормальных мод, поскольку обе моды порождены, в конечном счете, этой силой.

Перепишем эти уравнения для нормальных мод:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2\psi_1 - 2\beta \cdot \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.33)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2\psi_2 - 2\beta \cdot \frac{d\psi_2}{dt} + \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.34)$$

Каждая мода ведет себя как единый осциллятор, на который действует внешняя вынуждающая сила $F/2$.

2. Выясним как зависят амплитуды колебаний маятников a и b от частоты внешней вынуждающей силы.

Данная система может входить в резонанс, который имеет два пика. Пары уравнений, определяющих ψ_1 и ψ_2 , соответствуют уравнения для смещений маятников a и b :

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2.$$

Моды ψ_1 и ψ_2 имеют разные частоты, поэтому резонансная кривая первого маятника имеет 2 максимума.

Моды ψ_1 и ψ_2 , как видно из их дифференциальных уравнений (1.33) и (1.34) должны иметь резонанс при $\omega \approx \omega_1$ и $\omega \approx \omega_2$, поэтому резонансные кривые будут иметь вид, изображенный на следующих графиках:

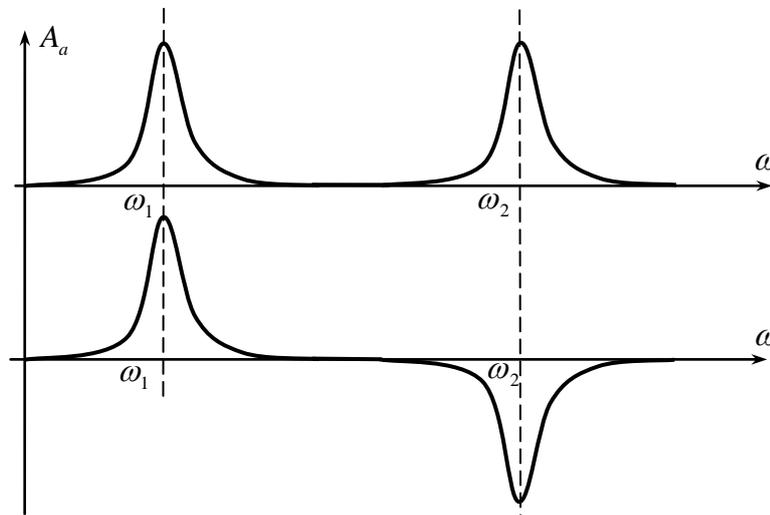


Рис. 1.12

Отрицательная часть графика для маятника b показывает, что его колебания происходят в противофазе с колебаниями первого. Все вышеуказанные результаты можно получить строго, из записанных выше дифференциальных уравнений.

1.3. Фильтры механические и электрические

1. Рассмотрим систему, имеющую N степеней свободы. Эта система имеет и N независимых мод (нормальных мод). В общем случае движение происходит в виде суперпозиции этих мод.

Высокие частоты

Пусть на систему действует внешняя вынуждающая сила $F(t)$, равная:

$$F(t) = F_m \cos(\omega \cdot t),$$

где ω – частота внешней вынуждающей силы, вообще говоря, переменная.

Обозначим $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ – частота 1-ой, 2-ой, 3-й, ... моды.

Пусть вначале частота ω мала, затем мы ее увеличиваем. По мере увеличения частоты система будет то входить в резонанс, то выходить из него. Т.е. по мере увеличения ω система будет входить в резонанс N раз тогда, когда ω будет приближаться к $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и т.д., причем движение в состоянии резонанса будет соответствовать i -ой моде при $\omega \approx \omega_i$.

При переходе от одной моды к другой, фазы движения элементов меняются. Наконец, при условии $\omega > \omega_N$, мы перейдем через высшую резонансную частоту. Выясним поведение системы в этом случае:

При условии $\omega \approx \omega_N$, все соседние элементы движутся в противофазе. Если $\omega > \omega_N$, то структура моды сохраняется, но резонанса уже не будет, т.е. амплитуды у разных элементов будут разные по величине, меньшие резонансной.

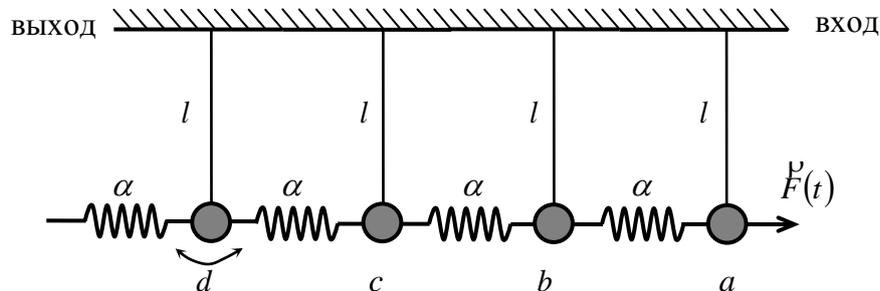


Рис. 1.13

Назовем *входом* точку, к которой прикладывается сила $F(t)$. По мере удаления от входа амплитуда колебаний будет уменьшаться. На выходе движение будет существенно ослабленным.

Попытаемся объяснить это качественно.

Для каждого шарика запишем 2-ой закон Ньютона:

$$m\ddot{x} = F_{\text{возвр}}, \quad (1.35)$$

Поскольку $x \sim \cos$, то:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x,$$

Тогда уравнение (1.35) переписется в виде:

$$-m\omega^2 x = F_{\text{возвр}},$$

Отсюда видно, что

$$\omega^2 \sim \frac{F_{\text{возвр}}}{mx},$$

Все элементы в рамках одной моды движутся с одинаковой частотой $\omega = const$, следовательно:

$$\frac{F_{возвр}}{m\dot{x}} = const. \quad (1.36)$$

Для шарика a возвращающая сила зависит от следующих параметров:

$$F_{возвр a} \sim mg, k\psi, F(t). \quad (1.37)$$

Рассмотрим возвращающую силу для произвольного шарика i :

$$F_{возвр i} \sim mg, k\psi, \quad (1.38)$$

Из (1.37) и (1.38) следует, что возвращающая сила для шарика a больше возвращающей силы для шарика i :

$$F_{возвр a} > F_{возвр i}$$

По мере движения от входа к выходу значение возвращающей силы уменьшается, а значит (см. (1.36)), уменьшается и амплитуда колебаний.

Таким образом, при рассмотренных условиях высоких частот ($\omega > \omega_N$) на выходе цепочки получается сильно ослабленный сигнал. Можно сказать, что срезаются высокие частоты, система работает как *фильтр*, не пропускающий колебания с высокой частотой.

Величина ω_N является верхней граничной частотой вынужденных колебаний.

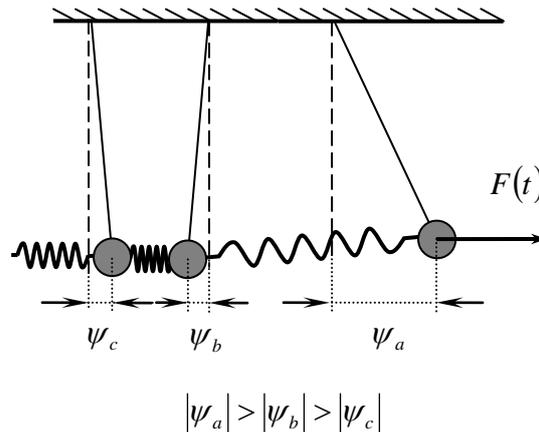


Рис. 1.14

Низкие частоты

Низкими будем называть частоты, для которых справедливо условие $\omega < \omega_1$.

Рассмотрим предельный случай, когда частота ω стремится к нулю. Статическая деформация, очевидно, будет убывать при удалении от входа (см. рис. 1.15).

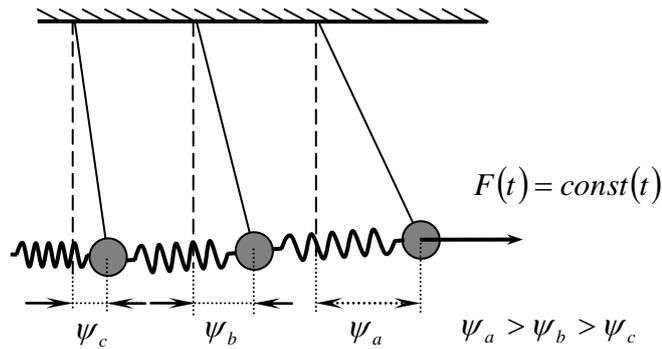


Рис. 1.15

При конечных, но низких частотах также получаем на выходе уменьшение амплитуды.

Итак, если внешняя вынуждающая сила имеет частоту $\omega < \omega_1$, то система «не пропускает» движения с низкими частотами. Для такой системы ω_1 – нижняя граничная частота вынужденных колебаний.

Терминология

Если система «пропускает» лишь движения с частотами от ω_1 до ω_N , то такая система называется *полосным фильтром*, а диапазон $[\omega_1; \omega_N]$ – полоса пропускания фильтра.

В предельном случае, когда длина подвесов стремится к бесконечности, частота нижней моды стремится к нулю:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l} \rightarrow \frac{g}{\infty} = 0,$$

При нижней граничной частоте $\omega_1 = 0$, полоса пропускания лежит в диапазоне $[0; \omega_N]$, и такая система называется фильтром низких частот.

Рассмотрим другой предельный случай, когда коэффициент жесткости k стремится к бесконечности: $k \rightarrow \infty$, $\omega_N \rightarrow \infty$, а ω_1 – конечна.

В этом случае полоса пропускания фильтра лежит в диапазоне $[\omega_1; \infty]$, и система называется фильтром высоких частот.

2. Рассмотрим эту же ситуацию строго, в случае двух связанных маятников – в системе с двумя степенями свободы. Введем нормальные координаты согласно (1.11):

$$\psi_1 = \frac{\psi_a + \psi_b}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\psi_a - \psi_b}{2},$$

где ψ_a и ψ_b – смещения маятников от положения равновесия.

Запишем дифференциальные уравнения для первой и второй мод:

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\omega_1^2 \cdot \psi_1 - 2\beta \cdot \psi_1 + \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.33)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\omega_2^2 \cdot \psi_2 - 2\beta \cdot \psi_2 + \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t), \quad (1.34)$$

где $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$, где ω_1 – частота первой моды,

$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$, где ω_2 – частота второй моды.

Используя эти дифференциальные уравнения, покажем, что имеет место эффект срезания высоких и/или низких частот в зависимости от свойств системы. Решение (1.33) имеет вид

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega \cdot t).$$

Подставляя его в уравнение (1.33), и пренебрегая для простоты трением в системе, получим:

$$-\omega^2 A_1 \cos(\omega \cdot t) = -\omega_1^2 A_1 \cos(\omega \cdot t) + \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

Откуда
$$A_1(\omega_1^2 - \omega^2) = \frac{F_m}{2m}, \quad \text{или} \quad A_1 = \frac{F_m}{2m} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2}. \quad (1.39)$$

Аналогично получим для A_2 :

$$A_2 = \frac{F_m}{2m} \cdot \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}, \quad (1.40)$$

Через амплитуды мод найдем амплитуды колебаний маятников a и b . Поскольку

$$\psi_a = \psi_1 + \psi_2, \quad \psi_b = \psi_1 - \psi_2,$$

имеем:

$$\psi_a = \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right], \quad (1.41)$$

$$\psi_b = \frac{F_m}{2m} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right]. \quad (1.42)$$

Удостоверимся в том, что колебания по мере удаления от входа ослабляются. Для этого найдем отношение ψ_b к ψ_a :

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}}{\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2}} = \frac{\omega_2^2 - \omega^2 - (\omega_1^2 - \omega^2)}{\omega_2^2 - \omega^2 + (\omega_1^2 - \omega^2)} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2 + \omega_1^2} \quad (1.43)$$

Рассмотрим частные случаи:

$$1) \quad \omega = \omega_1: \quad \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2 + \omega_1^2} = 1,$$

т.е. маятники a и b колеблются в фазе, наблюдается резонанс, соответствующий первой моде;

$$2) \quad \omega = \omega_2: \quad \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - 2\omega^2 + \omega_1^2} = -1,$$

т.е. маятники колеблются в противофазе. Это резонанс, соответствующий второй моде;

3) $\omega < \omega_1$: в предельном случае рассмотрим случай, когда $\omega \rightarrow 0$

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} < 1 \text{ – происходит ослабление.}$$

Если $\omega_2 - \omega_1$ мало, то и ψ_b/ψ_a – мало, т.е. если фильтр является узкополосным, то низкие частоты сильно ослабляются (срезаются);

4) $\omega > \omega_2$: в предельном случае рассмотрим $\omega \rightarrow \infty$, то $\frac{\psi_b}{\psi_a} \rightarrow -0$.

Это означает, что в шарик движется в противофазе и происходит сильное ослабление высоких частот.

3. Рассмотрим электрический аналог системы двух связанных математических маятников:

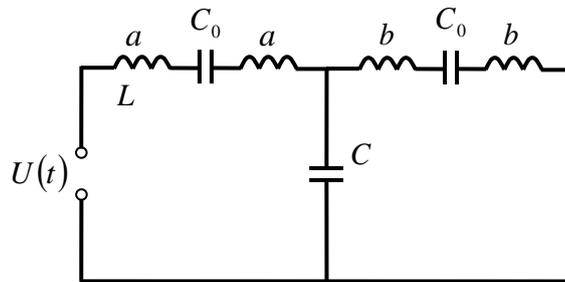


Рис. 1.16

Катушки a и b являются аналогами масс a и b . Конденсатор C – аналог пружины, $U(t)$ – аналог внешней вынуждающей силы. C_0 – отражает действие на маятник силы тяжести.

Моды выглядят следующим образом:

1-я мода:

$$I_a = I_b, \text{ т.е. токи текут синфазно.}$$

$$q_C = 0 \text{ – конденсатор } C \text{ не заряжен, поэтому } \omega_1^2 = \frac{1}{C_0 L}.$$

2-я мода:

$I_a = -I_b$, т.е. токи в противофазе,

q_c – «двойной» заряд на конденсаторе, поэтому $\omega_2^2 = \frac{1}{C_0 L} + \frac{2}{CL}$.

По аналогии с механической системой, воспользовавшись формулой (1.43), получим:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2} = \frac{1/LC}{1/LC_0 + 1/LC - \omega^2} \quad (1.44)$$

При условиях $\omega < \omega_1$ и $\omega > \omega_2$ происходит сильное ослабление.

4. Условие $l \rightarrow \infty$ является аналогом условия, когда расстояние между обкладками конденсатора стремится к 0:

$d_{C_0} \rightarrow 0$, и, следовательно $C_0 \rightarrow \infty$, получаем:

$$\frac{I_b}{I_a} = \frac{1/LC}{1/LC - \omega^2}$$

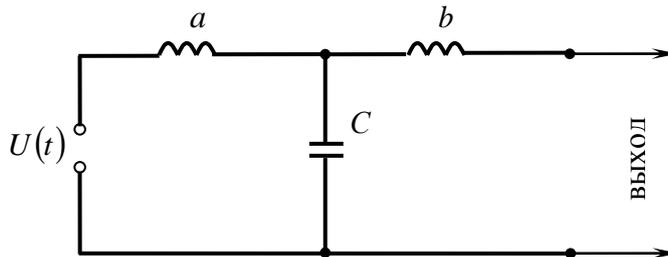


Рис. 1.17

Такая система работает как фильтр низких частот, т.к. $\omega_1 \rightarrow 0$.

Раздел 2. Общие сведения о дифференциальных уравнениях в частных производных

2.1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

1. Классификация:



Дифференциальные уравнения в частных производных 2-го порядка, линейные по старшей производной, имеют в общем случае следующий вид:

$$a_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + a_{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + a_{22} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = F \left(\xi, \eta, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right). \quad (2.1)$$

Функция F может быть линейной и нелинейной. Примеры нелинейности:

$$F = a \cdot \xi^2 \cdot \psi; \quad F = a \cdot \psi^2 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad F = a \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Если функция F нелинейна, то для таких уравнений, принцип суперпозиции решений не работает.

Существует три канонические формы дифференциальных уравнений:

1) *уравнения гиперболического типа* (описывают распространение волн):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = \begin{cases} 0 - \text{однородное} \\ F \left(\xi, \eta, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \text{неоднородное} \end{cases} \quad (2.2)$$

- 2) уравнения параболического типа (описывают распространение примеси (диффузии), тепла, течение жидкости, скин-эффект):

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \begin{cases} 0 - \text{однородное} \\ F\left(\xi, \eta, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) - \text{неоднородное} \end{cases} \quad (2.3)$$

- 3) уравнения эллиптического типа (описывают распределение потенциала ЭСП $\Delta \varphi = -\rho$, поверхность мыльной пленки, форму биметаллической пластины):

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \begin{cases} 0 - \text{однородное} \\ F\left(\xi, \eta, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) - \text{неоднородное} \end{cases} \quad (2.4)$$

2. Рассмотрим процедуру приведения дифференциального уравнения в частных производных к канонической форме на примере волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Приведем его к виду (2.2).

Решением (2.5) является уравнение бегущей волны:

$$\psi(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi_0); \quad (2.6)$$

здесь знак «-» – для прямой волны (распространяется вдоль оси x), связан с эффектом запаздывания, знак «+» – для обратной волны (распространяется против оси x).

Уравнение (2.6) можно привести к виду:

$$\psi(x, t) \sim A \cdot \cos\left[k\left(\frac{\omega}{k}t \mp x\right) + \varphi_0\right],$$

или, вводя фазовую скорость волны $\frac{\omega}{k} = c$, к виду:

$$\psi(x, t) = A \cos[k \cdot (ct \mp x) + \varphi_0]. \quad (2.6a)$$

В общем случае (для негармонических волн), решение волнового уравнения имеет следующий вид:

$$\psi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct), \quad (2.6b)$$

где f_1, f_2 – произвольные функции аргументов $(ct \mp x)$ из (2.6a).

Введем обобщенные координаты ξ и η по следующим правилам:

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct, \quad \text{тогда:}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right); \quad (\text{здесь учтено, что } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c; \frac{\partial \eta}{\partial t} = c).$$

Чтобы привести уравнение к интересующему нас виду, возьмем от ψ вторую производную по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[c \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] = c \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] = \\ &= c^2 \left[-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right] = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Аналогично вторая производная от ψ по x :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (\text{учтено, что } \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1),$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

Таким образом:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}; \quad (2.8)$$

Подставляем уравнения (2.7) и (2.8) в уравнение (2.5), получаем:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right),$$

Что после приведения подобных дает:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \cdot \partial \eta} = 0.$$

2.2. Краевая задача. Граничные и начальные условия (на примере задач о распространении волн и тепла)

При решении дифференциальных уравнений в частных производных возникают константы интегрирования, а для их определения необходимы дополнительные условия.

Дополнительные условия:

- 1) *граничные*;
- 2) *начальные*.

1. Начальные условия.

Т.к. в обеих частях волнового уравнения $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ присутствует вторая производная, то при решении и правая, и левая часть дают нам по 2 константы интегрирования.

Аналогично и для уравнения, описывающего теплопроводность $\frac{\partial \psi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$, в левой части его записана первая производная, которая дает нам 1 константу интегрирования, а в правой части – вторая, которая дает нам 2 константы.

Константы интегрирования, которые нам дают левые части уравнений, мы будем искать из *начальных* условий, а константы, которые нам дают правые части – из *граничных* условий.

Начальные условия для волнового уравнения: $\psi(x,0) = u(x)$

где $u(x)$ – распределение смещения в начальный момент времени.

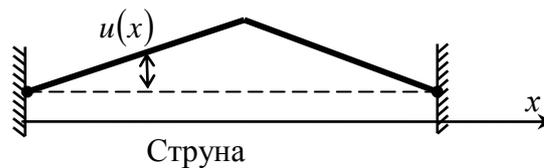


Рис. 2.1

$\psi(x,0) = g(x)$ – начальное условие распределения скорости вдоль струны

где $g(x)$ – скорость при любом x в начальный момент времени.

Начальные условия для уравнения, описывающие теплопроводность: $\psi(x,0) = u(x)$,

где $u(x)$ – начальное распределение температуры.

2. Граничные условия.

- 1-го рода – содержат условия для ψ на границах области.
- 2-го рода – содержат условия для $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ на границах области.

- 3-го рода – содержат условия для ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ на границах области в одном дифференциальном уравнении.

Задачи о волнах

- 1) Граничные условия 1-го рода реализуются, например, если струна закреплена на неподвижной или движущейся стенке:

а) однородные:

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, t) = 0 \\ \psi(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ – то есть концы струны}$$
 неподвижны.

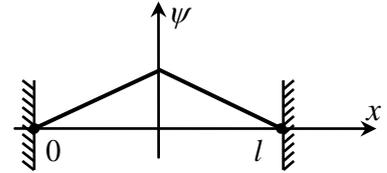


Рис. 2.2

б) неоднородные:

$$\left. \begin{aligned} \psi(0, t) = \mu_1(t) \\ \psi(l, t) = \mu_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ – т.е. концы перемещаются.}$$

- 2) Граничные условия 2-го рода реализуются, например, если нижний конец струны (см. рис. 2.3) свободен или нагружен.

а) однородные:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(l, t) = 0.$$

б) неоднородные:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(l, t) = \nu(t) \text{ – на границе задано упругое}$$
 напряжение.

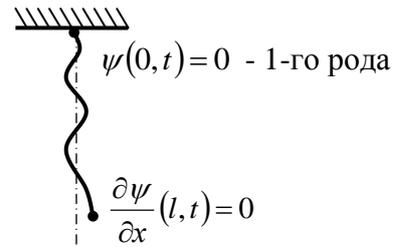


Рис. 2.3

- 3) Граничные условия 3-го рода, например, конец пружины «мягко» закреплен при помощи резинки (F_1 – сила на конце пружины, F_2 – сила на конце резинки):

$$F_1(t) = F_2(t), \quad \left. \begin{aligned} F_2 &= -\alpha \cdot \psi \\ F_1 &= k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\},$$

$$k \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\alpha \cdot \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -h \psi.$$

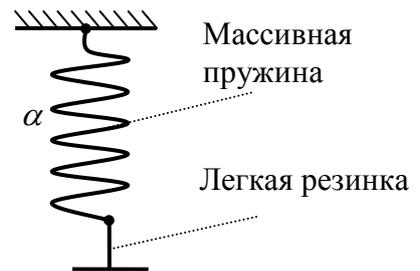


Рис. 2.4

Нижний конец пружины может быть подвижным. В этом случае граничные условия запишутся:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -h(\psi + v(t)).$$

- 4) Возможны также граничные условия, в которых участвуют производные по времени и координате.

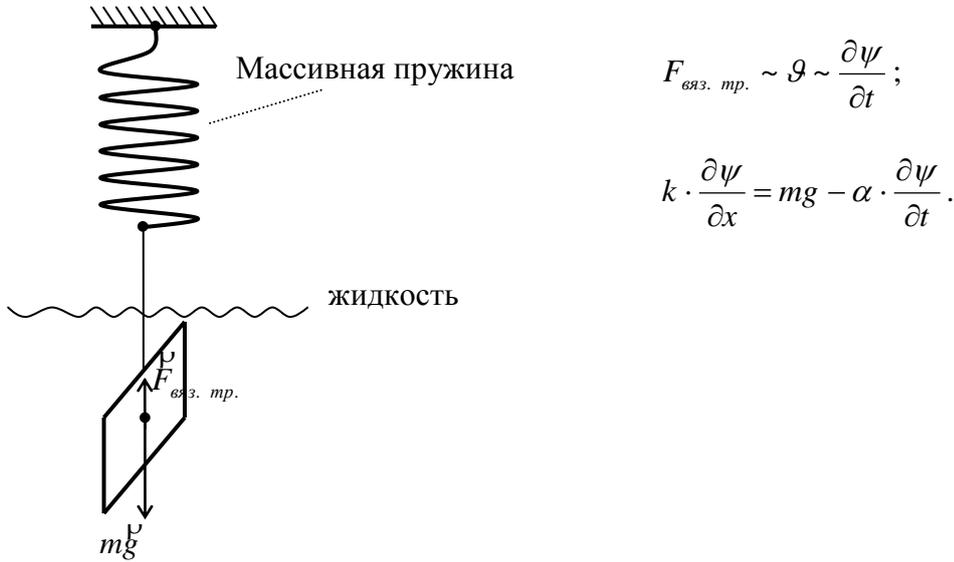


Рис. 2.5

Задача о распространении тепла

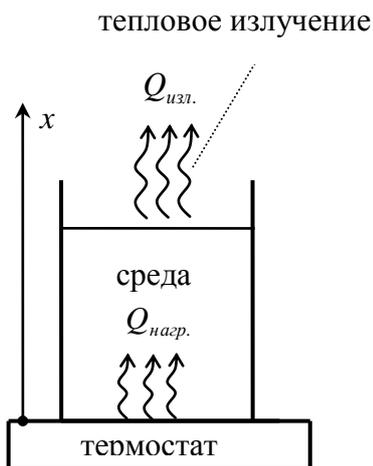


Рис. 2.6

Интенсивность теплового излучения зависит от температуры по закону Стефана–Больцмана:

$$R^* = \sigma T^4;$$

На нижней границе температура среды задана равной температуре термостата:

$$\psi(0, t) = 0 \text{ — 1-го рода.}$$

$$Q_{\text{нагр.}} = Q_{\text{изл.}} \sim (T^4 - T_{\text{среды}}^4);$$

Тогда теплоток на верхней границе связан с 4-ой степенью температуры:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \sim \psi^4 \text{ — 2-го рода.}$$

Раздел 3. ДУЧП гиперболического типа: волновые явления

3.1. Волны в однородных распределенных системах (бесконечное число степеней свободы)

Ранее волновое уравнение выводилось для продольной волны в сплошной упругой среде и поперечной электромагнитной волны в вакууме или однородной среде. Рассмотрим еще две практически важные системы.

1. Волновое уравнение для поперечных колебаний однородной тяжелой струны.

Рассмотрим идеально упругую и идеально гибкую струну, совершающую малые колебания:

Идеально упругие струны подчиняются закону Гука:

$$F \sim \psi;$$

На элемент струны массой Δm действуют силы упругости \vec{T}_1 и \vec{T}_2 (см. рис. 3.1).

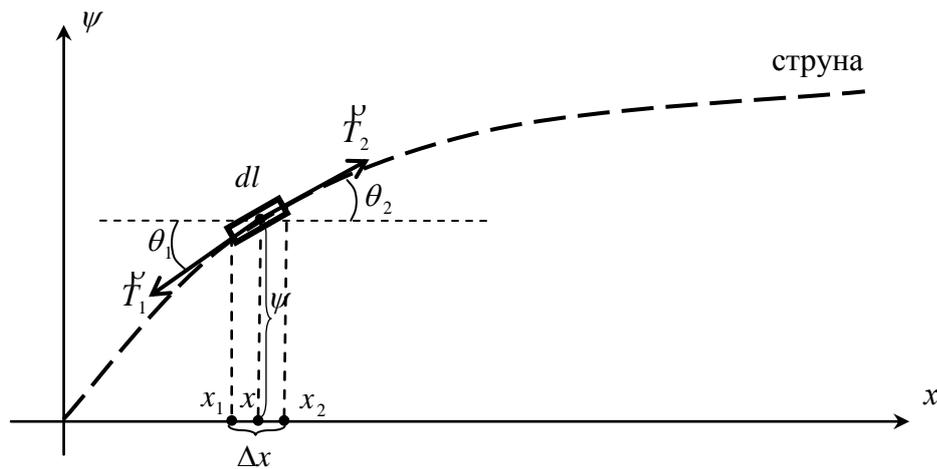


Рис. 3.1

Горизонтальный размер элемента

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Выразим все величины через параметры: линейную плотность струны ρ и натяжение в состоянии равновесия T_0 .

При $\Delta l > \Delta x$ реализуются конечные колебания, при которых возникают нелинейные эффекты (см. п.3.6). Поэтому ограничимся случаем малых колебаний и примем

$$\Delta l \approx \Delta x.$$

Тогда

$$T_0 \neq T_1 \neq T_2.$$

Запишем 2-ой закон Ньютона для элемента струны массой $\Delta m = \rho \Delta x$:

$$\Delta m \ddot{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \quad (3.1)$$

В проекциях на оси x и ψ получим:

$$\Delta m a_{\parallel} = F_{\parallel} = -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2, \quad (3.2)$$

$$\Delta m a_{\perp} = F_{\perp} = -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2, \quad (3.3)$$

где a_{\parallel} – ускорение параллельное оси x ,

а a_{\perp} – ускорение перпендикулярное оси x .

Величина $a_{\parallel} = 0$ – т.к. мы рассматриваем поперечные колебания (вдоль оси ψ), поэтому из уравнения (3.2) следует ($\cos \theta_1 \approx \cos \theta_2 \approx 1$ для малых колебаний):

$$T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 \approx T_0.$$

А из уравнения (3.3) следует:

$$\begin{aligned} \Delta m a_{\perp} = F_{\perp} &= -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 = -T_1 \sin \theta_1 \cdot \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_1} + T_2 \sin \theta_2 \cdot \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_2} = \\ &= -T_1 \cos \theta_1 \cdot \operatorname{tg} \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 \cdot \operatorname{tg} \theta_2 = T_0 (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) \end{aligned}$$

Заменим $\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial \psi}{\partial x}$. Для малых колебаний имеет место $\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x$. Тогда получим:

$$\Delta m a_{\perp} = F_{\perp} = T_0 (\operatorname{tg} \theta_2 - \operatorname{tg} \theta_1) = T_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=x_1} \right] = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Delta x = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x,$$

или:

$$\rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta x,$$

Откуда:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.4)$$

где коэффициент $\frac{T_0}{\rho} = c^2$, т.е. $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ – имеет смысл фазовой скорости.

2. Электромагнитная волна в проводниках. Телеграфные уравнения

Рассмотрим участок проводника, длиной Δx , обладающий параметрами:

- ΔR – сопротивление.
- ΔC – емкость.
- ΔL – индуктивность.
- ΔG – утечка заряда за счет неидеальности изоляции.

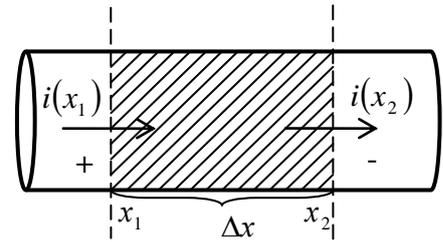


Рис. 3.2

Те же параметры для элемента единичной длины обозначим $R_{ед.}$, $C_{ед.}$, $L_{ед.}$, $G_{ед.}$.

Построим дифференциальные уравнения для напряжения и тока на участке Δx :

- а) Напряжение на элементе определяется эффектами индуктивности и проводимости

$$\Delta U = -\Delta L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - \Delta R \cdot i$$

$$\Delta U = -\Delta L \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{— закон Фарадея;}$$

$$\Delta U = -\Delta R \cdot i \quad \text{— закон Ома.}$$

Знак “-” во втором слагаемом показывает, что протекание тока приводит к уменьшению напряжения.

Для малых элементов имеет место

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x.$$

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x = -L_{ед.} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - R_{ед.} \cdot \Delta x \cdot i.$$

Разделив обе части уравнения на Δx , получим 1-ое телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_{ед.} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} - R_{ед.} \cdot i \quad (3.5)$$

б) Получим второе телеграфное уравнение. Обозначим Δq – изменение заряда элемента проводника за время Δt и запишем его как разницу «притока» и «оттока» за счет протекания электрического тока. Считая, что $\Delta i \approx \frac{\partial i}{\partial x} \cdot \Delta x$, получим:

$$\Delta q = [i(x_1) - i(x_2)] \cdot \Delta t = -[i(x_2) - i(x_1)] \cdot \Delta t = -\frac{\partial i}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta t;$$

Изменение заряда элемента проводника идет на зарядку элемента проводника и утечку с поверхности элемента.

Учитывая, что при зарядке элемента $\Delta q = C \cdot \Delta U$ (ΔU – изменение напряжения со временем, $C = \frac{q}{U}$)

получим:

$$\Delta q = \Delta C \cdot \Delta U + \Delta G \cdot U \cdot \Delta t = C_{ed} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t + G_{ed} \cdot \Delta x \cdot U \cdot \Delta t ;$$

(здесь учтено $\Delta U = \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t$). Сопоставляя выражения для Δq , имеем:

$$-\frac{\partial i}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot \Delta t = C_{ed} \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \Delta t + G_{ed} \cdot \Delta x \cdot U \cdot \Delta t .$$

После сокращения на Δt и Δx получим 2-ое телеграфное уравнение:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_{ed} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} - G_{ed} \cdot U \quad (3.6)$$

в) Возьмем от первого телеграфного уравнения производную по x :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -L_{ed} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) - R_{ed} \cdot \frac{\partial i}{\partial x} ;$$

и подставим в него уравнение (3.6):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -L_{ed} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(C_{ed} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + G_{ed} \cdot U \right) + R_{ed} \cdot \left(C_{ed} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + G_{ed} \cdot U \right) .$$

После приведения подобных слагаемых получим:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_{ed} \cdot C_{ed} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (L_{ed} \cdot G_{ed} + R_{ed} \cdot C_{ed}) \frac{\partial U}{\partial t} + R_{ed} \cdot G_{ed} \cdot U \quad (3.7)$$

з) Возьмем от второго телеграфного уравнения производную по x :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C_{ed} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) - G_{ed} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} ,$$

и подставим в него уравнение (3.5):

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = C_{ed} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(L_{ed} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_{ed} \cdot i \right) + G_{ed} \cdot \left(L_{ed} \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R_{ed} \cdot i \right) .$$

После приведения подобных слагаемых, получим:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ed} \cdot C_{ed} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (L_{ed} \cdot G_{ed} + R_{ed} \cdot C_{ed}) \frac{\partial i}{\partial t} + R_{ed} \cdot G_{ed} \cdot i \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7) и (3.8) называют обобщенными волновыми уравнениями.

В частном случае малых сопротивлений и малых коэффициентов утечки получаются стандартные волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L_{ed} \cdot C_{ed} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ed} \cdot C_{ed} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{L_{ed} \cdot C_{ed}} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{L_{ed} \cdot C_{ed}} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

где коэффициент $\frac{1}{L_{ed} \cdot C_{ed}} = c^2$, т.е. $c = \sqrt{\frac{1}{L_{ed} \cdot C_{ed}}}$ – имеет смысл фазовой скорости.

3.2. Принцип суперпозиции

Для волновых уравнений:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

имеет место принцип суперпозиции, т.е. если $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ – решения волнового уравнения, то линейная их комбинация

$$\psi = \sum_{i=1}^n (c_i \psi_i) \quad (3.11)$$

также является решением.

Наличие принципа суперпозиции связано с тем, что волновое уравнение линейно по ψ и её производным. Процессы, описываемые линейным дифференциальным уравнением, называются линейными процессами.

С точки зрения возможности решения зрения линейных уравнений принцип суперпозиции важен, т.к. общее решение дифференциального уравнения может быть получено несколько этапов: как сумма общего решения однородной задачи, частного решения

неоднородной и ряда частных решений для дополнительных условий. Этапы решения отображает следующая таблица.

Этап	Уравнение		Граничные условия		Начальные условия	
	Однородное	Неоднородное	Однородные	Неоднородные	Произвольное	Заданное
1.	+		+		+	
2.	+		+			+
4.	+			+	+	
3.		+	+		+	

В разделах 3а и 4а такая последовательность решений реализована при использовании метода Фурье.

3.3. Волны в системах со многими степенями свободы. Дисперсия и дисперсионные соотношения

Ранее мы рассматривали волновые процессы в однородных средах.

Для упругой волны фазовая скорость описывалась уравнением: $c = \sqrt{E/\rho}$.

Для электромагнитной волны: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Для сплошной тяжелой струны: $c = \sqrt{T_0/\rho}$.

Для сплошного проводника: $c = 1/\sqrt{LC}$.

Во всех этих случаях общим является то, что за счет однородности среды фазовая скорость $c = \omega/k$ не зависела от волнового числа: $c = const(k)$.

Отсутствие такой зависимости в системе означает отсутствие дисперсии, наличие зависимости означает, что дисперсия имеет место.

Если в среде нет дисперсии, то:

$$c = g_{gp};$$

где $g_{gp} = \frac{d\omega}{dk}$ – групповая скорость.

Пример для сплошной тяжелой струны:

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}; \quad c = \frac{\omega}{k};$$

$\omega = ck = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \cdot k$ – простейшее дисперсионное соотношение.

$\omega \sim k$, т.к. $c = const(k)$.

$$g_{зп.} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \left(\sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \cdot k \right) = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}};$$

$c = g_{зп.}$ – доказали, что нет дисперсии.

1. Рассмотрим поперечные колебания невесомой упругой струны с точечными грузами массой m .

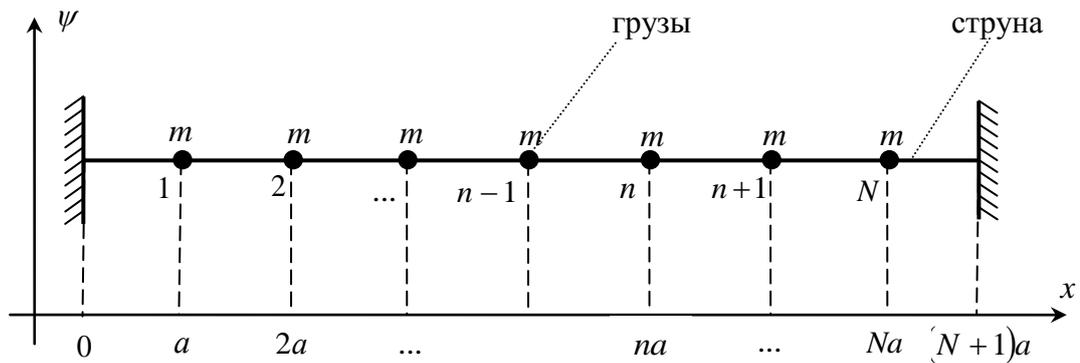


Рис. 3.3

Рассмотрим этот рисунок в увеличенном виде для n -го шарика, выведенного из положения равновесия:

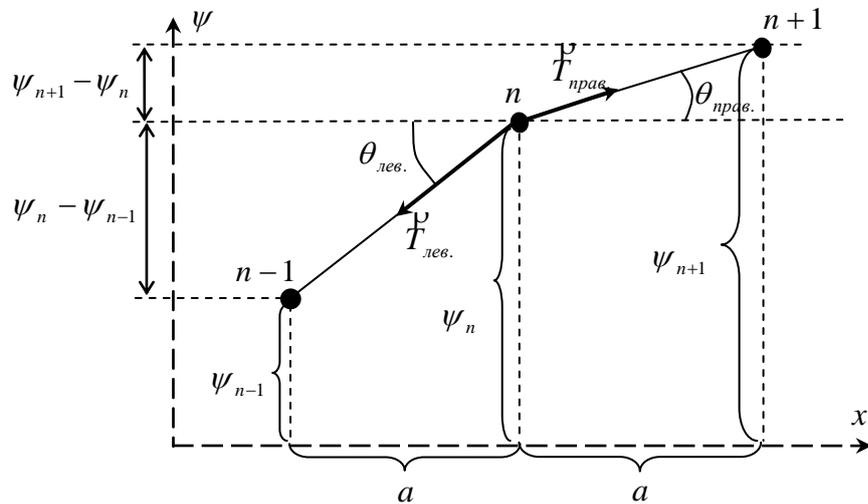


Рис. 3.4

Запишем для него 2-ой закон Ньютона в проекциях на координатные оси.

$$\text{На } O\psi: \quad m \cdot \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = T_{\text{прав.}} \cdot \sin \theta_{\text{прав.}} - T_{\text{лев.}} \cdot \sin \theta_{\text{лев.}}. \quad (3.12)$$

$$\text{На } Ox: \quad 0 = T_{\text{прав.}} \cdot \cos \theta_{\text{прав.}} - T_{\text{лев.}} \cdot \cos \theta_{\text{лев.}}. \quad (3.13)$$

(здесь в левой части $a_x = 0$ – т.к. колебания поперечные), поэтому

$$T_{\text{прав.}} \cos \theta_{\text{прав.}} = T_{\text{лев.}} \cos \theta_{\text{лев.}} = T_0,$$

где T_0 – натяжение струны в положении равновесия.

Выразим проекции в левой части уравнения через натяжение T_0 , помножив её и разделив на косинус соответствующего угла. Получающийся при этом тангенс, как видно из рисунка, можно записать так:

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{прав.}} = \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a}, \quad \operatorname{tg} \theta_{\text{лев.}} = \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a}.$$

Тогда (3.12) приобретет вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= T_{\text{прав.}} \cos \theta_{\text{прав.}} \cdot \operatorname{tg} \theta_{\text{прав.}} - T_{\text{лев.}} \cos \theta_{\text{лев.}} \cdot \operatorname{tg} \theta_{\text{лев.}} = T_0 (\operatorname{tg} \theta_{\text{прав.}} - \operatorname{tg} \theta_{\text{лев.}}) = \\ &= T_0 \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} - \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \right) = \frac{T_0}{a} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}). \end{aligned}$$

По сути, последняя скобка – это конечно-разностная форма 2-ой производной от ψ по x . Итак,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{ma} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}). \quad (3.14)$$

Мы получили аналог волнового уравнения для системы со многими степенями свободы за счет дискретного распределения масс. Это уравнение описывает струну с грузами и многие другие колебательные системы, т.е. является одной из базовых моделей волновых процессов.

2. Займемся решением полученного уравнения. В рамках одной моды все шарики движутся с течением времени по синусоидальному закону с одинаковыми частотами, но с различными амплитудами.

Частота колебаний ω у всех шариков одна и та же, потому что она соответствует одной и той же моде, а амплитуды различны $A_n = \operatorname{const}(t)$, $A_n \neq \operatorname{const}(x)$. Решения ψ_i имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A_1 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ \psi_2 &= A_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{n-1} &= A_{n-1} (\omega \cdot t + \varphi_0) \\ \psi_n &= A_n (\omega \cdot t + \varphi_0) \\ \psi_{n+1} &= A_{n+1} (\omega \cdot t + \varphi_0) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Подставим эти «затравки» в волновое уравнение (3.14), вычислив предварительно вторую производную в левой части:

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = -\omega^2 A_n \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Подстановка дает

$$-\omega^2 A_n \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) = \frac{T_0}{ma} (A_{n+1} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) - 2A_n \cos(\omega \cdot t + \varphi_0) + A_{n-1} \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)).$$

Сократив на $\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, получим:

$$-\omega^2 A_n = \frac{T_0}{ma} (A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1}).$$

Разделив обе части уравнения на $\frac{T_0}{ma}$:

$$-\frac{ma\omega^2}{T_0} A_n = A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1},$$

получим уравнение для связи соседних амплитуд:

$$\left(2 - \frac{ma\omega^2}{T_0}\right) A_n = A_{n+1} + A_{n-1}. \quad (3.15)$$

3. Фактически, мы уже используем метод разделения переменных (см. также раздел 3а.):

$$\psi(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Как выглядит $X(x)$? Для сплошной струны, закрепленной с 2-х концов в подразделе (3а.1) получено решение:

$$X(x) = A \sin(kx). \quad (3.16)$$

Выразим x через номер шарика и расстояние a : $x = na$.

Попытаемся угадать решение, оно должно быть похоже на (3.16). Чтобы удовлетворить граничному условию на левой границе, положим:

$$A_n = A \sin(kan),$$

A – амплитуда волны во всей струне.

Аналогично для амплитуд последующего и предыдущего шариков:

$$A_{n+1} = A \sin(ka(n+1)) = A \sin(kan + ka) = A \cdot (\sin(kan) \cos(ka) + \cos(kan) \sin(ka));$$

$$A_{n-1} = A \sin(ka(n-1)) = A \sin(kan - ka) = A \cdot (\sin(kan) \cos(ka) - \cos(kan) \sin(ka));$$

следовательно

$$A_{n-1} + A_{n+1} = 2A \sin(kan) \cos(ka).$$

Подставим полученное выражение в уравнение (3.15):

$$\left(2 - \frac{ma \cdot \omega^2}{T_0}\right) \cdot A \sin(kan) = A(2 \sin(kan) \cos(ka)).$$

После сокращения и преобразований:

$$2 - \frac{ma \cdot \omega^2}{T_0} = 2 \cos(ka); \quad 2 - 2 \cos(ka) = \frac{ma \cdot \omega^2}{T_0}; \quad 4 \left(\frac{1 - \cos(ka)}{2}\right) = \frac{ma \cdot \omega^2}{T_0};$$

$$4 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) = \frac{ma \cdot \omega^2}{T_0};$$

получим

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{ma} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right).$$

Связь частоты и волнового числа носит название дисперсионного соотношения. Мы получили дисперсионное соотношение

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (3.16)$$

для струны с грузами.

Простейшее дисперсионное соотношение это линейная зависимость $\omega = ck$. В нашем случае масса распределена дискретно, поэтому и дисперсионное соотношение другое.

Совершим предельный переход от струны с дискретным распределением масс к сплошной струне.

Условием перехода является $a \rightarrow 0$:

$$c = \frac{\omega}{k} = 2 \sqrt{\frac{T_0}{ma}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k} = \sqrt{\frac{T_0 a}{m}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{a \left(\frac{k}{2}\right)} = \sqrt{\frac{T_0 a}{m}} = \sqrt{\frac{T_0}{\left(\frac{m}{a}\right)}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

(здесь использовано $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{\left(\frac{ka}{2}\right)} = 1$ – первый замечательный предел).

В пределе мы получили формулу фазовой скорости для сплошной струны и убедились, что зависимость скорости от волнового числа пропадает, а значит, пропадает и дисперсия.

Дисперсия в рассмотренном случае оказалась связана с дискретным распределением масс в системе.

Построим график, иллюстрирующий дисперсионное соотношение:

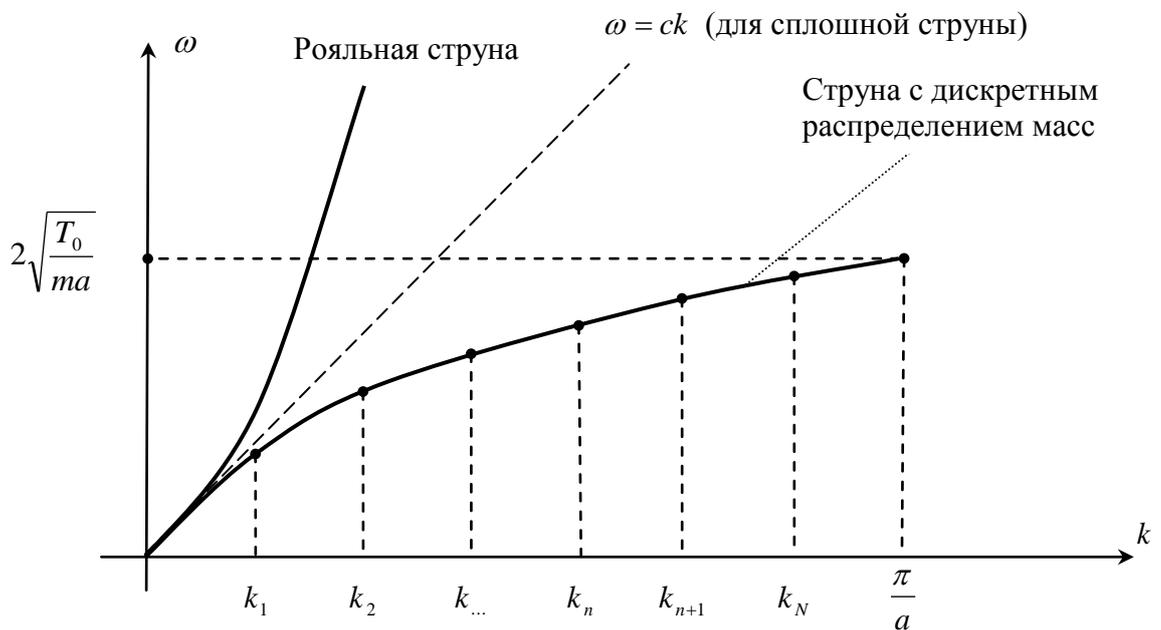


Рис. 3.5

На этом графике тангенс угла наклона к графику характеризует групповую скорость.

Проанализируем дисперсионное соотношение для невесомой струны с грузами:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{T_0}{ma}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right);$$

При $k = 0$ имеем $\omega = 0$ и

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=0} = 2\sqrt{\frac{T_0}{ma}} \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \Big|_{k=0} = \sqrt{\frac{T_0 a}{m}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}};$$

Наклон прямой такой же, как и у сплошной струны, т.е. линия, $\omega = ck$, является касательной.

Максимальное значение $\omega = \omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{T_0}{ma}}$ достигается при условии:

$$\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = 1, \quad \frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad k_{\max} = \frac{\pi}{a}.$$

При одном и том же значении k частота ω для дискретной системы меньше, чем для сплошной.

4. Учет граничные условия и построим моды волны. Выясним количество этих мод.

В общем виде решение уравнения для сплошной струны:

$$X(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx).$$

Запишем граничные условия:

$$X(0) = 0; \quad X(L) = 0.$$

Из граничных условий определяем, что $C_2 = 0$. Следовательно, уравнение, написанное выше, переписывается в виде:

$$X(x) = C \sin(kx);$$

Для амплитуды n -го шарика это уравнение примет вид:

$$A_n = A \sin(kan);$$

Запишем граничные условия для амплитуды A_n : $A|_{\substack{x=0 \\ n=0}} = 0; \quad A|_{\substack{x=L \\ n=(N+1)}} = 0;$

$$n = 0: \quad A_0 = A \sin(0) = 0$$

$$n = N + 1: \quad A_{N+1} = A \sin(ka(N + 1)) = 0$$

Докажем, что волновое число «квантуется»:

$$ka(N + 1) = \pi \cdot m, \quad \text{где формально } m = 0, 1, 2, \dots, N + 1.$$

При подстановке $m = 0$ и $m = N + 1$ в уравнение для волнового числа k_m получаем тривиальные решения, которые нас не удовлетворяют. Поэтому

$$k_m = \frac{\pi \cdot m}{a(N + 1)} \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

Здесь m имеет смысл номера моды.

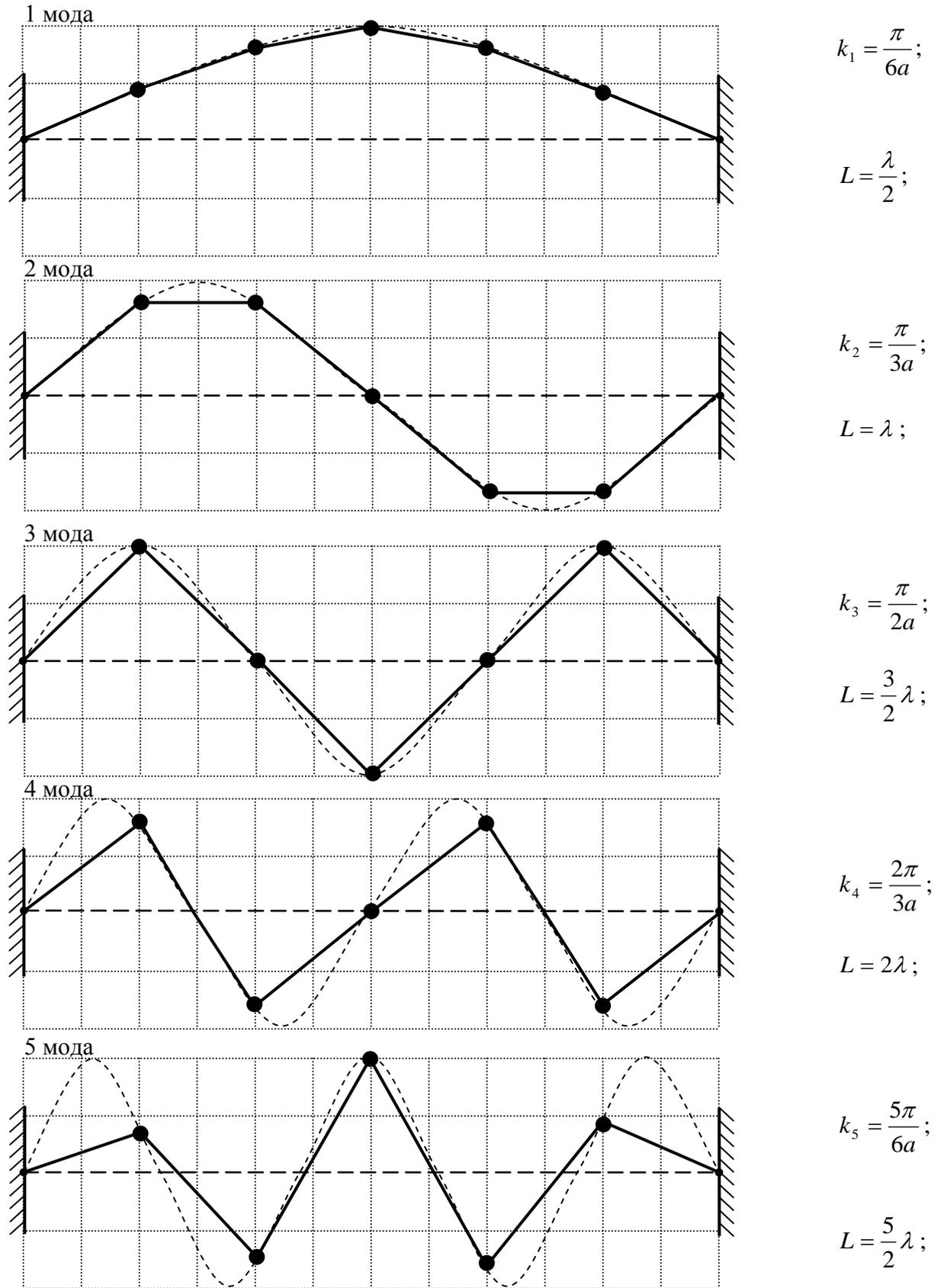


Рис. 3.6

Волновое число «квантуется», т.е. имеет значения из дискретного ряда. Количество мод оказывается конечным, равным числу точечных масс (грузов). Сколько система имеет степеней свободы, столько может реализоваться мод. Высшая мода характерна тем, что все соседние грузы колеблются в противофазе. Изображение 5-ой моды показывает, что соседние грузы находятся в разных полуплоскостях, поэтому 6-ой моды быть не может.

На рис. 3.5 приведена также зависимость $\omega(k)$ для рояльной струны. Дисперсионное соотношение в этом случае имеет вид:

$$\omega^2 = (ck)^2 + \alpha k^4.$$

Второе слагаемое связано с тем, что рояльная струна обладает упругостью по отношению к изгибу. Поэтому частота для неё выше, чем для идеально гибкой струны. Упругость рояльной струны сильнее проявляется для коротких волн, этому и соответствует слагаемое αk^4 .

3.4. Волны в системах со многими степенями свободы (другие системы, описываемые уравнением $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{ma} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1})$)

1. Рассмотрим цепочку пружинок с коэффициентом жесткости α , и шариков массой m , которая совершает продольные колебания:

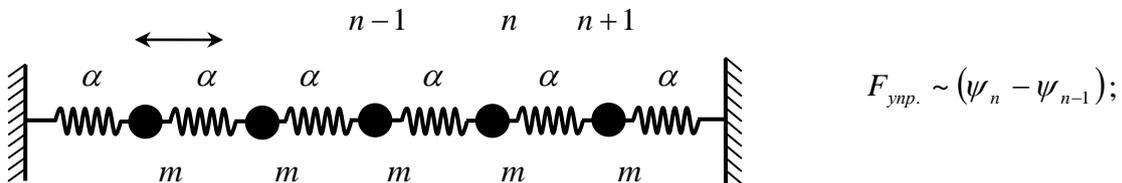


Рис. 3.7

Запишем 2-ой закон Ньютона для n -ой массы:

$$m \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial t^2} = \alpha(\psi_{n+1} - \psi_n) - \alpha(\psi_n - \psi_{n-1}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{m} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}).$$

Полученное уравнение имеет вид (3.14), поэтому дисперсионное соотношение для данной системы будет выглядеть так:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\alpha}{m}} \cdot \sin\left(\frac{ka}{2}\right); \quad (3.18)$$

Величина a имеет размерность длины; её смысл таков: при умножении a на k , фаза колебаний меняется на π .

2. Рассмотрим бесконечно длинную LC цепочку:

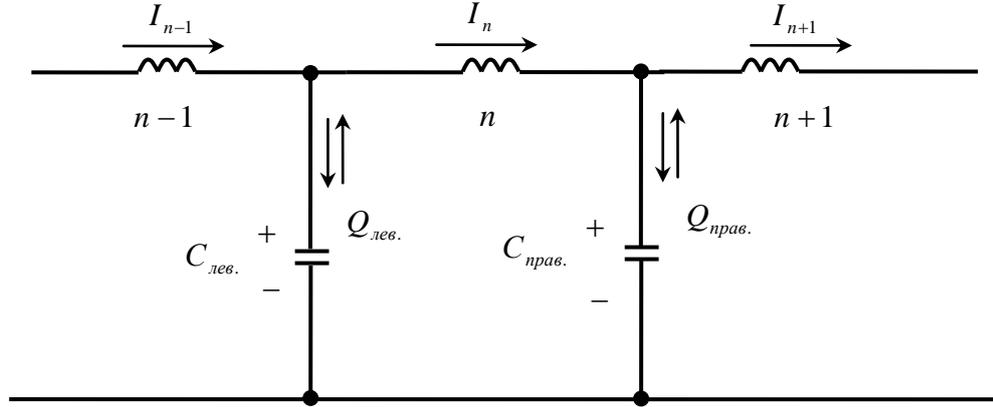


Рис .3.8

Запишем для n -го звена 2е правило Кирхгофа:

$$L \frac{dI_n}{dt} = \frac{Q_{лев.}}{C} - \frac{Q_{прав.}}{C}; \quad L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{C} \left(\frac{dQ_{лев.}}{dt} - \frac{dQ_{прав.}}{dt} \right);$$

$\frac{dQ}{dt}$ – ток зарядки конденсатора.

Запишем первое правило Кирхгофа для левого и правого узлов:

$$\frac{dQ_{лев.}}{dt} = I_{лев.} = I_{n-1} - I_n; \quad \frac{dQ_{прав.}}{dt} = I_{прав.} = I_n - I_{n+1};$$

$$L \frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{C} [(I_{n-1} - I_n) - (I_n - I_{n+1})];$$

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} = \frac{1}{LC} (I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}).$$

Это уравнение вновь совпадает по форме с (3.14).

Таким образом, дисперсионное соотношение для данной системы имеет вид:

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right). \quad (3.19)$$

a – это абстрактная величина, имеющая размерность длины.

3. Во всех рассмотренных выше системах правая часть была прямо пропорциональна разнице смещений элементов от состояния равновесия. Встречаются системы, в которых имеются дополнительные воздействия на элементы. Рассмотрим цепочку связанных математических маятников:

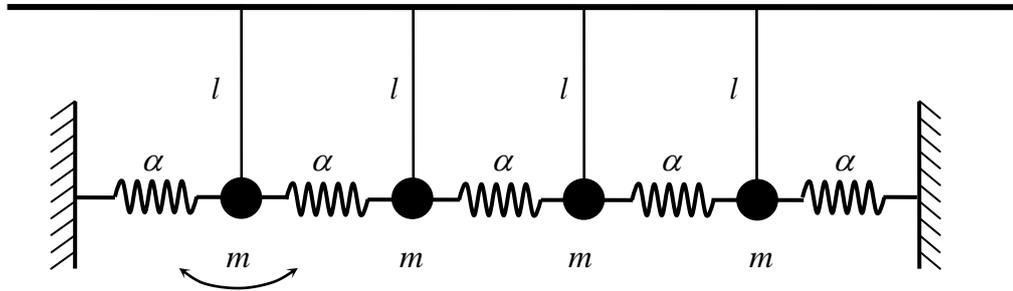


Рис. 3.9

Сила тяжести возвращает каждый шарик в положение равновесия. Поэтому дисперсионное соотношение для этой системы

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + 4 \frac{\alpha}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \quad (3.20)$$

содержит слагаемое типа (3.18), а также слагаемое, соответствующее частоте математического маятника:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_1^2 = 4 \frac{\alpha}{m}.$$

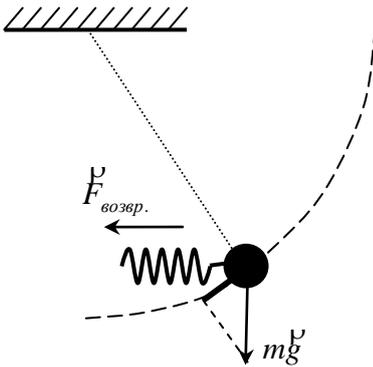


Рис. 3.10

Итак,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right). \quad (3.20a)$$

Вид дисперсионного соотношения отражает рис. 3.11.

Рассмотрим предельный случай длинных волн $\lambda \gg a$ (иначе – это предел сплошной среды):

$$\frac{ka}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a = \frac{\pi a}{\lambda} \ll 1;$$

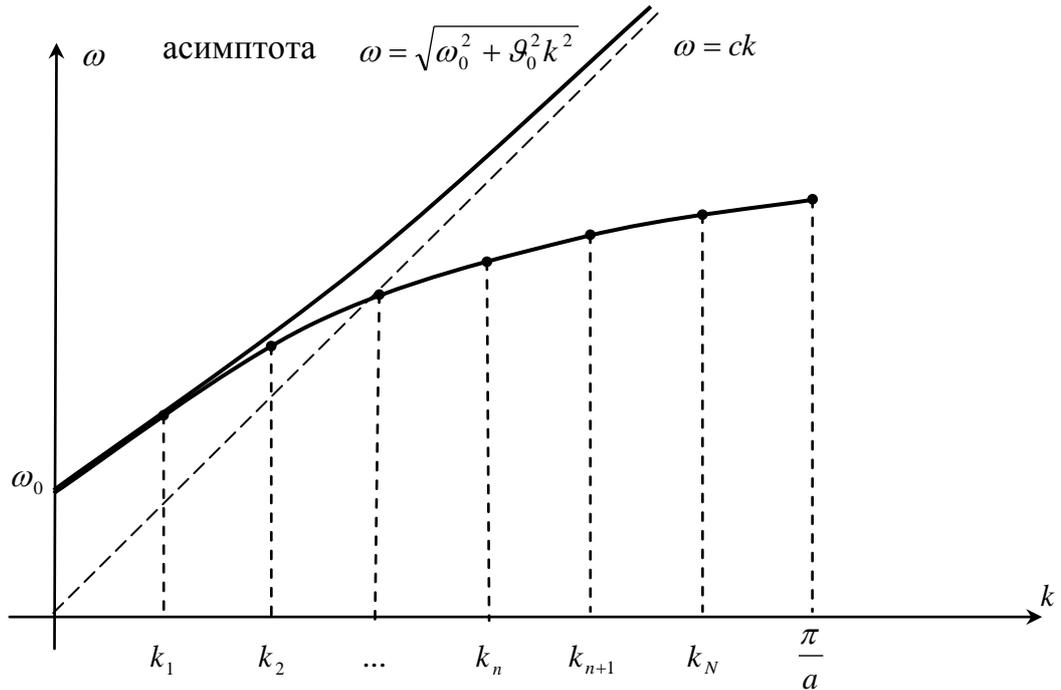


Рис. 3.11

Тогда дисперсионное соотношение для сплошной струны можно разложить в ряд Тейлора вблизи нуля, т.к. под функцией синус возникает малый параметр. Для него справедливо:

$$\sin \frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2};$$

Дисперсионное соотношение раскладывается следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \frac{k^2 a^2}{4} = \omega_0^2 + k^2 \frac{\omega_1^2 a^2}{4};$$

Обозначим $\frac{\omega_1^2 a^2}{4} = g_0^2$, тогда:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 g_0^2 \tag{3.20б}$$

График этой функции будет асимптотически приближаться к графику простейшего дисперсионного соотношения $\omega = ck$.

При $k \rightarrow \infty$, ω_0 можно пренебречь, поэтому: $\omega \sim k$.

При $a \rightarrow 0$, мы получаем сплошную среду, которая может рассматриваться как система с бесконечным числом степеней свободы, а значит с бесконечным числом мод.

3.5. Волны в пространственно-неоднородных системах. Собственные функции и их полный набор

1. Обобщение для пространственно-однородных систем (повторение):

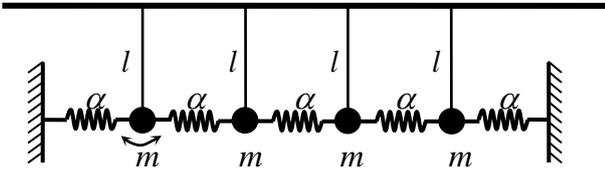


Рис. 3.12

α – коэффициент жесткости пружины.
Пространственная однородность – одинаковость свойств системы.
Параметры системы α , m , l не зависят от параметра x .

Ранее мы выяснили, что волны в пространственно-однородных системах описываются гиперболическим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

Это классическое волновое уравнение.

Скорость является функцией параметров задачи: $c = f(\text{параметры})$, например, для такой пространственно-однородной системы как однородная струна:

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}};$$

T_0 – натяжение в состоянии равновесия.

Функция ψ является функцией от времени и координат, но зависимость от x и от t синусоидальная:

$$\psi(x, t) \sim \sin \setminus \cos ;$$

Любая функция может быть разложена в ряд Фурье по синусу или косинусу,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \sin(k_n x)] = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n \sin(k_1 \cdot n \cdot x)] \quad (3.21)$$

(для случая с закрепленными концами струны).

Для пространственно-однородных систем синусоидальное решение является естественным, т.е. возникает при решении дифференциальных уравнений с учетом граничных условий.

Таким образом, синус и косинус образуют естественный базис, иначе говоря, являются собственными функциями волнового уравнения. По ним удобно раскладываются любые функции $f(x)$.

Из того, что в ряд Фурье можно раскладывать любые функции, следует, что система функций синусов и косинусов с разными частотами является полной.

Этот базис является ортогональным, и более того – нормированным.

2. Пространственно-неоднородные системы.

Если система является пространственно-неоднородной, то использование синуса и косинуса неудобно, они не являются собственными функциями соответствующих уравнений в частных производных.

Пример пространственно-неоднородной системы:

Для пространственно-неоднородной системы классическое волновое уравнение не работает.

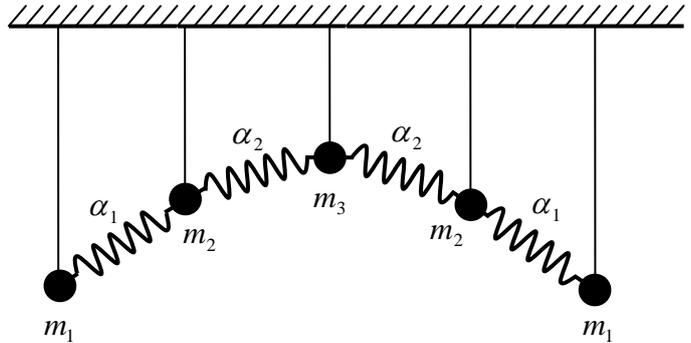


Рис. 3.13

Выясним, как выглядит неклассическое волновое уравнение для неоднородной струны.

Для однородной струны, $T = const$, было верно приближение:

$$T_1 \cos \theta_1 \approx T_2 \cos \theta_2 \approx T_0;$$

Если у нас струна пространственно неоднородная, то:

$$T = T(x); \quad \rho = \rho(x);$$

где ρ – линейная плотность.

Еще один пример пространственно неоднородной системы:

Вверху пружины число витков на единицу длины меньше, чем снизу. Силы натяжения неодинаковы, т.к. пружина сверху растянута сильнее.

$$T_{\text{ниж.}} < T_{\text{верх.}},$$

$$T_{\text{верх.}} - T_{\text{ниж.}} = mg,$$

$$\rho_{\text{ниж.}} > \rho_{\text{верх.}}.$$

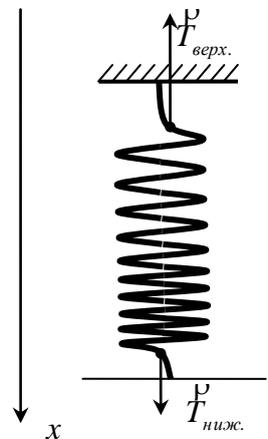


Рис. 3.14

При $T = const$ волновое уравнение выглядело так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Т.к. у нас $T = T(x)$, то «вытащить» из-под производной её нельзя и "неклассическое" волновое уравнение будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} \right]. \quad (3.22)$$

Такая система обладает другими свойствами, а решение этого волнового уравнения не является синусоидальным.

По-прежнему можно использовать метод Фурье разделения переменных:

$$\psi(x, t) = X(x) \cdot \theta(t),$$

Подставив в неклассическое волновое уравнение, получим:

$$X \cdot \ddot{\theta} = \frac{1}{\rho(x)} \cdot \theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial X}{\partial x} \right],$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dX}{dx} \right],$$

Левая часть этого уравнения зависит только от времени. Правая часть – только от пространственной координаты.

$$-\omega^2 = \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dX}{dx} \right],$$

Введем понятие ω^2 , т.к. если есть две простые функции равные друг другу, то:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

Для временной части получается стандартное уравнение гармонических колебаний, а это значит, что каждая точка струны движется по синусоидальному закону:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

Для пространственной части:

$$\frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{dX}{dx} \right] + \omega^2 \rho(x) X = 0. \quad (3.23)$$

Получается уравнение с переменными коэффициентами, а решение его не является синусоидальным. Решения зависят от вида функций $T(x)$ и $\rho(x)$. Чтобы получить эти решения, нужно конкретизировать эти функции.

В общем случае для простых функций $T(x)$ и $\rho(x)$ удастся получить аналитическое решение, а в остальных случаях придется решать численно.

Получится бесконечное количество мод, и полное решение будет представлять собой суперпозицию этих мод:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [X_n(x) \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_0)]. \quad (3.24)$$

Здесь перенормирован множитель $X_n(x)$, в него «спрятан» θ_0 .

Моды будут представлять собой искаженные синусы:

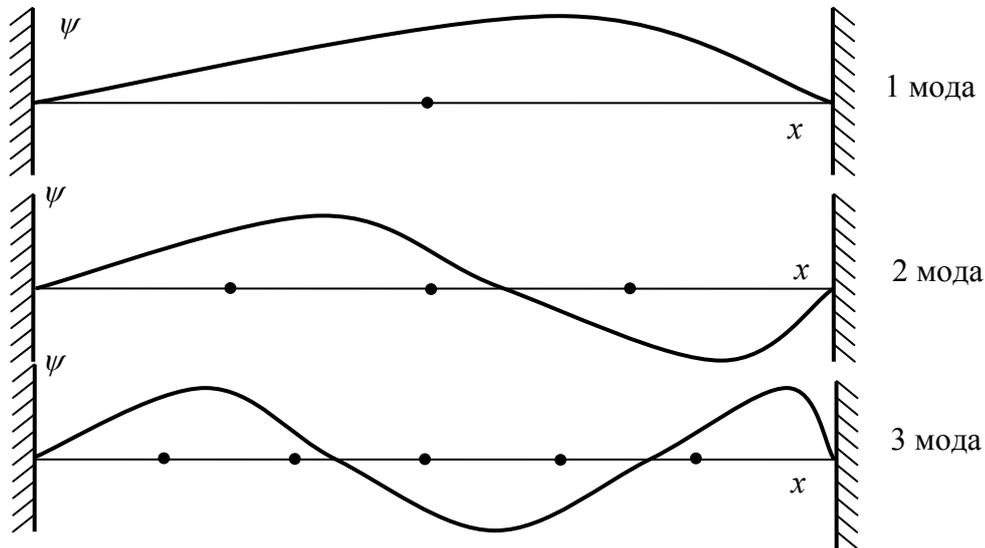


Рис. 3.15

Похожесть этих решений на синусы связана в значительной степени с условиями на границах (струна закреплена).

Решение уравнения $X_n(x)$ может быть разложено по синусу или косинусу в ряд Фурье, но это будет неудобно, поскольку каждая мода будет представляться суперпозицией бесконечного числа слагаемых, для каждой из бесконечного числа мод.

Неудобство это связано с тем, что синус и косинус не являются естественными базисными функциями для уравнения, описывающего пространственную часть (3.23). Базисные функции должны совпадать с нормальными модами системы.

Функции $X_n(x)$ будут собственными для неклассического волнового уравнения, и система их будет полна, то есть по ним можно будет разложить в ряд любую функцию $f(x)$.

Убедимся в этом.

Пусть $f(x) = \psi(x, 0)$,

$f(x)$ – произвольная функция.

$\psi(x,0)$ – начальные условия.

Запишем решения:

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} [X_n(x) \cdot \cos \varphi_0] = \cos \varphi_0 \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) = \text{const} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x),$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x),$$

$X_n(x)$ – базисные (собственные) функции уравнения.

Для пространственно неоднородных систем, которых бесконечно много, существует бесконечно большое количество полных наборов собственных функций. Вид этих функций определяется характером неоднородности и граничными условиями:

$$\begin{aligned} X_n(0) &= 0, \\ X_n(L) &= 0. \end{aligned}$$

3.6. Колебания конечной амплитуды

До сих пор мы рассматривали только малые колебания, теперь же поговорим о конечных колебаниях.

Малые колебания всегда описывались видом:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

А решениями всегда являлись функции:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Если же колебания конечны, то возможны возникновения нелинейности во временной части уравнения:

Для пружинного маятника при малых колебаниях работает закон Гука:

$$F_{\text{упр.}} = kx,$$

При больших колебаниях этот закон не работает.

Для физического маятника при малых колебаниях:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |M| = r \cdot mg \sin \varphi,$$

$$I\epsilon = M = -r \cdot mg \sin \varphi,$$

Знак «-» связан с тем, что $\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{\varphi}$.

$$I\epsilon = r \cdot mg \sin \varphi = 0,$$

$$\frac{r \cdot mg}{I} \sin \varphi = 0. \quad (3.25)$$

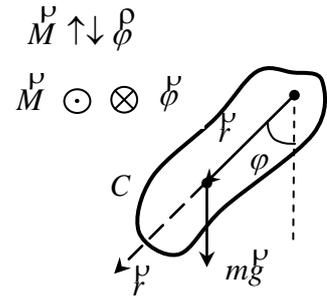


Рис. 3.16

Синус угла φ связан с нелинейностью по смещению. Для малых углов $\varphi \ll 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$, тогда получим следующее решение:

$$\frac{r \cdot mg}{I} \cdot \varphi = 0$$

Для конечных колебаний физического маятника зависимости $\varphi, \omega, \epsilon$ от времени изображены ниже:

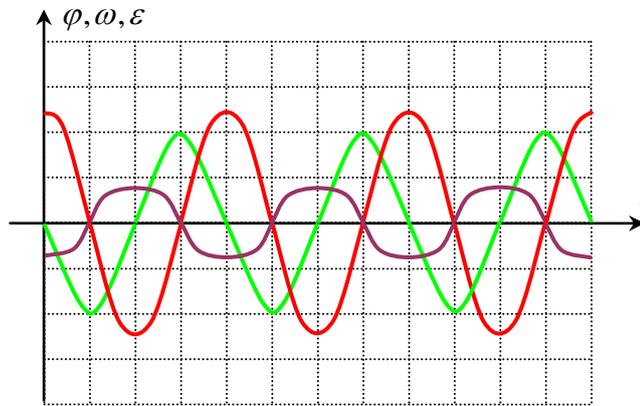


Рис. 3.17

Сильнее ангармонизм заметен, например, при колебаниях точечного заряда в поле двух других закрепленных зарядов:

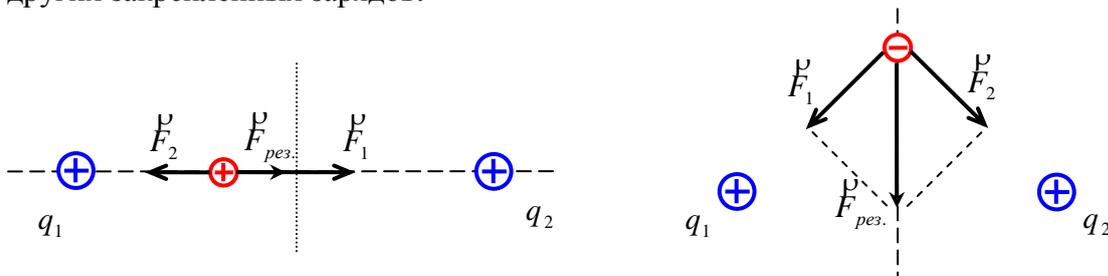


Рис. 3.18

Зависимости кинематических характеристик от времени изображены на рис. 3.19:

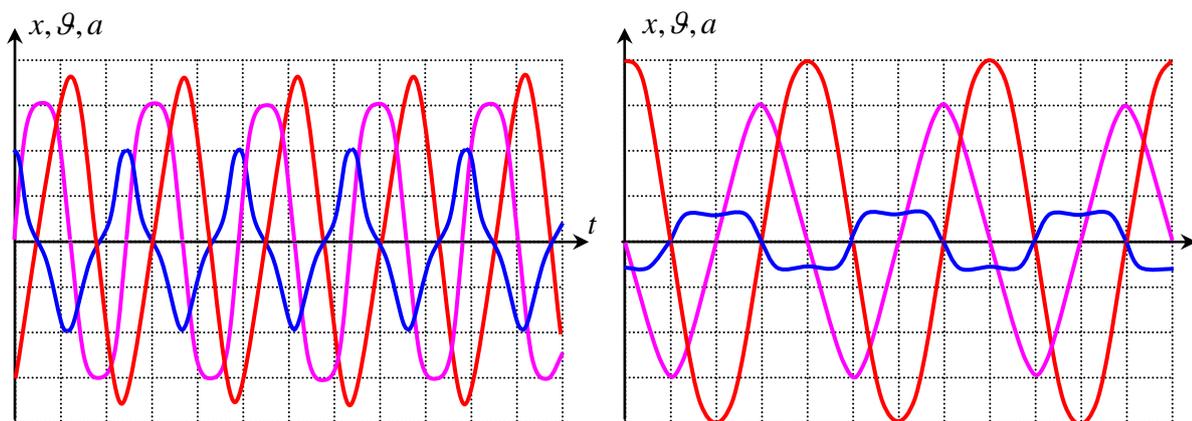


Рис. 3.19

Системы с нелинейным вторым слагаемым не описываются синусоидальным решением, а решение таких задач становится сложнее. Реальные системы пространственно неоднородны, а колебания не малы, а конечны.

Раздел 3а. Метод Фурье разделения переменных для решения уравнений гиперболического типа (поперечные колебания тяжелой струны)

3а.1. Этап 1: общее решение однородного уравнения с однородными граничными и произвольными начальными условиями

1. Рассмотрим волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}; \quad (3a.1)$$

Метод Фурье основан на предположении, что для данной задачи пространственная и временная части решения независимы.

В самом деле, для волны можно записать:

$$\psi(x, t) \sim \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0) \stackrel{\text{Re}}{\sim} \exp[i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot x)] \rightarrow e^{i \cdot \omega t} \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}.$$

Поэтому представим функцию ψ в виде произведения пространственной и временной частей:

$$\psi(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (3a.2)$$

Подставляя “затравку” (3a.2) в уравнение (3a.1), получим:

$$X \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot T$$

или

$$X \cdot \overset{\&}{T} = c^2 \cdot X'' \cdot T$$

(точка означает производную по времени, штрих – по координате).

Разделив обе части уравнения на $c^2 \cdot X \cdot T$, получим:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \cdot \overset{\&}{T}; \quad (3a.3)$$

В левой части уравнения (3a.3) записана некоторая функция, зависящая от координаты, а в правой – функция от времени. Эти функции должны быть равны друг другу и постоянны. Значит обе они – константы. Обозначим эту константу – λ :

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{const} = -\lambda.$$

Ниже будет показано, что константа разделения переменных должна быть отрицательной (т.е. $\lambda > 0$).

После разделения пространственной и временной части получилась система:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + c^2 \lambda T = 0. \end{cases} \quad (3a.4)$$

Таким образом, волновое уравнение распалось на два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения.

2. Для решения волнового уравнения необходимо два начальных и два граничных условия. Рассмотрим для начала простейший случай однородных граничных условий 1-го рода, которые соответствуют жестко закрепленным концам струны (l – длина струны):

$$\begin{aligned} \psi(0, t) &= 0, \\ \psi(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Переформулируем граничные условия для дифференциального уравнения на языке $X(x)$.

Для левой границы

$$\psi(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0.$$

Это означает, что

$$X(0) = 0,$$

в противном случае должно выполняться $T(t) = 0$ и, следовательно $\psi(0, t) = 0$, т.е. задача всегда имеет тривиальное решение (отсутствие волны), что не представляет интереса.

Для правой границы

$$\psi(l, t) = X(l) \cdot T(t) = 0,$$

откуда, аналогично, следует

$$X(l) = 0.$$

Таким образом, граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(l) = 0. \end{cases} \quad (3a.5)$$

Эти условия позволяют определить знак константы в разделении переменных $const = -\lambda$.

Выясним, при каком знаке λ задача имеет нетривиальное решение.

а) Рассмотрим случай $\lambda < 0$, $\lambda = -|\lambda|$. Уравнение

$$X'' + \lambda X = 0$$

можно переписать в виде

$$X'' - |\lambda| \cdot X = 0. \quad (3a.6)$$

Поскольку решение должно иметь вид $X \sim e^{\alpha \cdot x}$, то $X'' \sim \alpha^2 \cdot e^{\alpha \cdot x}$.

Подставив эти заготовки в (3a.6) получим:

$$\alpha^2 \cdot e^{\alpha \cdot x} - |\lambda| \cdot e^{\alpha \cdot x} = 0,$$

После деления на $e^{\alpha \cdot x}$, приходим к характеристическому уравнению, из которого следует

$$\alpha = \pm \sqrt{|\lambda|}.$$

Значит, общее решение уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|} \cdot x} + C_2 \cdot e^{\sqrt{|\lambda|} \cdot x}; \quad (3a.7)$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определим, используя граничные условия.

При $x = 0$ (3a.7) дает

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

откуда

$$C_2 = -C_1.$$

Значит, решение (3a.7) переписывается в виде:

$$X(x) = C_1 \cdot \left(e^{-\sqrt{|\lambda|} \cdot x} - e^{\sqrt{|\lambda|} \cdot x} \right).$$

При $x = l$ это дает:

$$X(l) = C_1 \cdot \left(e^{-\sqrt{|\lambda|} \cdot l} - e^{\sqrt{|\lambda|} \cdot l} \right) = 0.$$

Поскольку

$$e^{-\sqrt{|\lambda|} \cdot l} - e^{\sqrt{|\lambda|} \cdot l} \neq 0,$$

то $C_1 = 0$, значит, и $C_2 = 0$, а, следовательно, $X(x) = 0$. Таким образом, при $\lambda < 0$ мы получаем тривиальное решение.

б) Рассмотрим случай $\lambda = 0$. Уравнение

$$X'' + \lambda X = 0$$

вырождается:

$$X'' = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$X(x) = C_1 + C_2 \cdot x.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 определим, используя граничные условия.

При $x = 0$:

$$X(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = C_1 = 0, \text{ следовательно } C_1 = 0.$$

Отсюда следует, что $X(x) = C_2 \cdot x$.

При $x = l$:

$$X(l) = C_2 \cdot l = 0.$$

Поскольку $l \neq 0$, то $C_2 = 0$.

Таким образом, при $\lambda = 0$ опять приходим к тривиальному решению: $X(x) = 0$.

По-видимому, нетривиальное решение существует только при $\lambda > 0$ (т.е. отрицательной константе разделения переменных $const = -\lambda$).

в) Рассмотрим случай $\lambda > 0$. Чтобы подчеркнуть знак λ запишем её так: $\lambda = k^2$, где k – имеет смысл волнового числа.

Тогда общее решение имеет вид:

$$X(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx). \quad (3a.8)$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий.

При $x = 0$ (3a.8) дает:

$$X(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2 = 0, \text{ откуда } C_2 = 0.$$

Значит, $X(x) = C_1 \sin(kx)$.

При $x = l$:

$$X(l) = C_1 \sin(kl) = 0.$$

Константа интегрирования $C_1 \neq 0$, иначе вновь приходим к тривиальному решению, следовательно:

$$\sin(kl) = 0;$$

Решение имеет вид:

$$k \cdot l = \pi \cdot n, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

При $n = 0$ $k = 0$, а значит и $\sin(kl) = 0$, т.е. получается тривиальное решение. Значит, $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, условие для разрешенных значений волнового числа (для n -ой моды) будет выглядеть следующим образом:

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3a.9)$$

Это означает, что струна длиной l может “нести на себе” волны не любой длины, а только из дискретного спектра.

Таким образом, пространственная часть для n -ой моды будет выглядеть следующим образом:

$$X_n(x) = C_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Положим $C_1 = 1$, поскольку учесть этот коэффициент можно в полном решении для функции ψ во временной части решения. Тогда:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right). \quad (3a.10)$$

Рассмотрим временную часть задачи:

$$T'' + c^2 \cdot k^2 \cdot T = 0.$$

Величина $c^2 \cdot k^2 = \omega^2$ имеет смысл квадрата циклической частоты. Общее решение этого уравнения:

$$T_n(t) = A_n \cdot \cos(c \cdot k_n \cdot t) + B_n \cdot \sin(c \cdot k_n \cdot t),$$

где A , B – константы интегрирования.

Каждому значению k_n соответствует определенная гармоника, поэтому с учетом (3a.9) получаем:

$$T_n(t) = A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right). \quad (3a.11)$$

Полное решение волнового уравнения (поскольку оно линейное) представляет собой суперпозицию всех гармоник, получающихся при умножении пространственной части (3a.10) на временную (3a.11):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) \right\}. \quad (3a.12)$$

Коэффициенты A_n и B_n учитывают константу интегрирования C_1 . Их можно будет определить, используя начальные условия.

3a.2. Вид решений для струны с двумя закрепленными концами

Решение выглядит проще, если вместо двух слагаемых с \sin и \cos с нулевой начальной фазой использовать их выражение через одну функцию (например, \cos) при начальной фазе, отличной от нуля. Для перехода к такой форме записи применим метод векторных диаграмм (см. рис.3a.1).

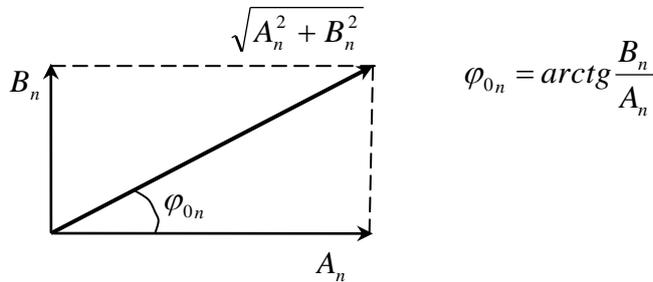


Рис. 3a.1

Из рисунка видно, что амплитуда результирующего вектора равна $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, а начальная фаза $\text{arctg} \frac{B_n}{A_n}$. Тогда вместо (3a.11) получаем:

$$T_n(t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t + \text{arctg} \frac{B_n}{A_n}\right).$$

Полное же решение запишем так:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t + \varphi_{0n}\right) \right]. \quad (3a.13)$$

Волна в струне представляет собой суперпозицию стоячих волн с волновыми числами и частотами, соответственно:

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{l}, \quad \omega_n = ck_n = \frac{\pi \cdot n \cdot c}{l}.$$

Найдем положение узлов стоячей волны, т.е. точек, где амплитуда равна нулю

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) = 0.$$

Решение имеет вид:

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x = \pi \cdot m, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

При $m = 0$, соответствующем левой границе, и $m = n$, соответствующем правой границе ($nx/l = n$, то есть $x = l$), получаем тривиальные решения, которые нас не устраивают.

После сокращения на π , получим условие для узлов:

$$x_{\text{узла}} = \frac{m \cdot l}{n}, \quad \text{где } \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \end{matrix} \quad (3a.14)$$

где n – номер гармоники, $(n-1)$ – количество узлов. Т.е. для волн с разными волновыми числами количество узлов будет различным.

Найдем положение пучностей стоячей волны, т.е. точки, где амплитуда по модулю максимальна:

$$\sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) = \pm 1.$$

Решение имеет вид:

$$\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot m, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

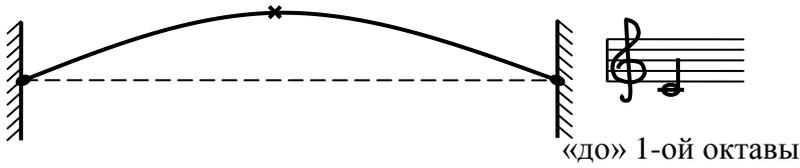
После сокращения на π , получим условие для пучностей:

$$x_{\text{пучности}} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{l}{n}, \quad \text{где } \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ m = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1) \end{matrix} \quad (3a.15)$$

причем n – количество пучностей.

Колебания для различных мод изображены ниже (рис.3а.2); рядом приведена высота тона для случая, если основная мода соответствует ноте «до» 1-ой октавы.

Для 1-ой моды: $n = 1$, $N_{уз.} = 0$, $N_{пуч.} = 1$:

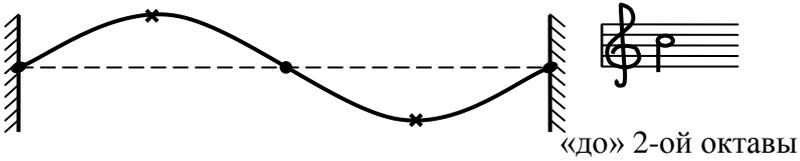


$$\lambda_1 = 2l;$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2l} = \frac{\pi}{l};$$

$$\omega_1 = \frac{\pi c}{l} - \text{основной тон.}$$

Для 2-ой моды: $n = 2$, $N_{уз.} = 1$, $N_{пуч.} = 2$:



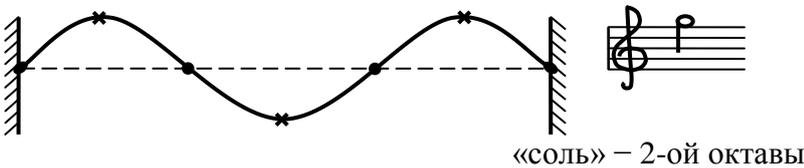
$$\lambda_2 = l = \frac{\lambda_1}{2};$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{l} = 2k_1;$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi c}{l} - \text{обертон}$$

(1-ая гармоника)

Для 3-й моды: $n = 3$, $N_{уз.} = 2$, $N_{пуч.} = 3$.



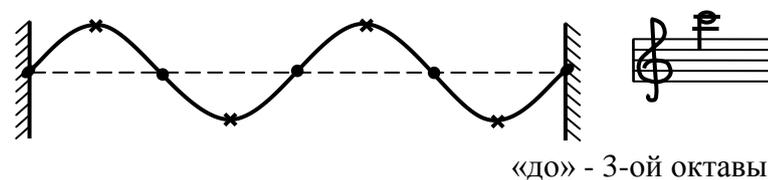
$$\lambda_3 = \frac{2}{3}l = \frac{\lambda_1}{3};$$

$$k_3 = 3k_1;$$

$$\omega_3 = 3\omega_1 = \frac{3\pi c}{l} - \text{обертон}$$

(2-ая гармоника)

Для 4-й моды: $n = 4$, $N_{уз.} = 3$, $N_{пуч.} = 4$.



$$\lambda_4 = \frac{l}{2} = \frac{\lambda_1}{4};$$

$$k_4 = 4k_1$$

$$\omega_4 = 4\omega_1 = \frac{4\pi \cdot c}{l} -$$

обертон (3-ая гармоника).

Рис. 3а.2

Заметим, что для любых двух нот, интервал между которыми составляет октаву, частоты отличаются в два раза. Поэтому частоты, например, «до» 1-ой октавы и «до» 3-й октавы отличаются в четыре раза, а «до» и «соль» одной (любой) октавы – в 1,5 раза.

3а.3. Вид решений для струны со свободным концом

Для этой задачи граничные условия будут выглядеть следующим образом:

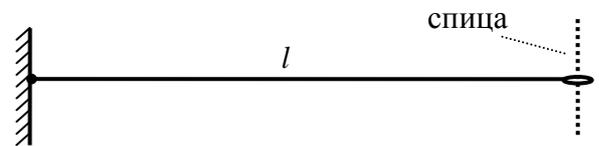
$$\psi(0, t) = 0 \quad - \text{ для жестко закрепленного конца;}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(l, t) = 0 \quad - \text{ для свободного конца.}$$

(Свободный конец может быть реализован, как показано на рис. 3а.3 при помощи кольца, без трения скользящего по спице).

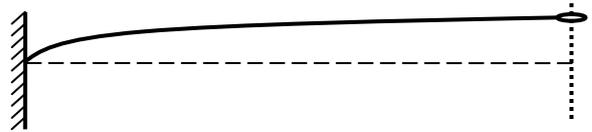
Проанализируем вид гармоник качественно.

Для 0-ой моды:



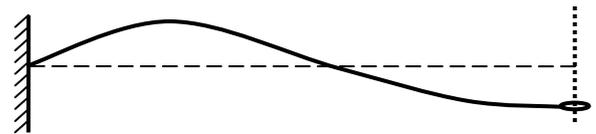
Для 1-ой моды:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4l; \\ k_1 &= \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{4l} = \frac{\pi}{2l}; \\ \omega_1 &= \frac{\pi \cdot c}{2l}; \end{aligned}$$



Для 2-ой моды:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{4}{3}l = \frac{\lambda_1}{3}; \\ k_2 &= \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}l} \cdot 3 = \frac{\pi}{2l} \cdot 3 = 3k_1; \\ \omega_2 &= 3\omega_1; \end{aligned}$$



Для 3-й моды:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{4}{5}l = \frac{\lambda_1}{5}; \\ k_3 &= 5k_1; \\ \omega_3 &= 5\omega_1; \end{aligned}$$

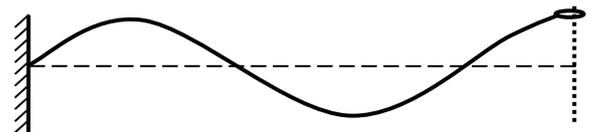


Рис. 3а.3

Из рисунков видны свойства узлов и пучностей:

- В узлах смещение всегда равно нулю, а модуль скорости достигает максимума при любом времени:

$$\psi = 0; \quad |\dot{\psi}| = \max.$$

- В пучностях скорость всегда равна нулю, а модуль смещения достигает максимума при любом времени:

$$|\dot{\psi}| = 0; \quad \psi = \max.$$

3а.4. Этап 2: учет начальных условий

Итак, общее решение волнового уравнения представляет собой суперпозицию всех гармоник (3а.12):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) \right\};$$

Коэффициенты A_n и B_n пока неизвестны. Определим их из начальных условий, которые запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= u(x), \\ \dot{\psi}(x, 0) &= g(x). \end{aligned}$$

Найдем $\psi(x, t)$ в начальный момент времени, подставив $t = 0$ в (3а.12):

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) \right] = u(x); \quad (3а.16)$$

Теперь возьмем производную от ψ по t :

$$\dot{\psi}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \left(-\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) + B_n \cdot \frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot t\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right),$$

и найдем $\dot{\psi}(x, t)$ в начальный момент времени:

$$\dot{\psi}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cdot \frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{l} \cdot x\right) \right] = g(x); \quad (3а.17)$$

Из уравнений (3а.16) и (3а.17) нужно определить бесконечное количество коэффициентов A_n и B_n соответственно.

Напоминание из математики: ряды Фурье

1. Любую функцию $f(x)$, периодическую или определенную на конечном отрезке, можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda_1} \cdot x\right) + B_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda_1} \cdot x\right) \right],$$

где λ_1 – наибольший возможный пространственный период; как правило, он равен длине отрезка, на котором определена функция. Иначе:

$$f(x) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda_1} \cdot x\right) + B_n \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n}{\lambda_1} \cdot x\right) \right].$$

2. Функции синуса и косинуса обладают свойством *ортгональности*.

Функции $f(x)$ и $g(x)$ ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\int_0^{\lambda_1} f(x) \cdot g(x) \cdot dx = 0.$$

Свойства ортогональности для синусов и косинусов можно записать так:

$$\int_0^{\lambda_1} \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot dx = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \delta_{nm},$$

$$\int_0^{\lambda_1} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot dx = \frac{\lambda_1}{2} \cdot \delta_{nm},$$

$$\int_0^{\lambda_1} \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot dx = 0, \quad \text{где } \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m. \end{cases}$$

3. Если дана функция $f(x)$ и нужно её представить как ряд Фурье, то коэффициенты будут иметь вид:

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \cdot \int_0^{\lambda_1} f(x) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot dx, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_1} \cdot \int_0^{\lambda_1} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot x}{\lambda_1}\right) \cdot dx,$$

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \int_0^{\lambda_1} f(x) \cdot dx;$$

Разложим функции $u(x)$ и $\mathcal{G}(x)$ из уравнения (3a.16) и (3a.17) в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{A}_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right], \quad \mathcal{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\tilde{B}_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}\right) \right].$$

Каждое из уравнений в силу ортогональности синусов и косинусов распадается на бесконечное количество уравнений, содержащих коэффициенты при синусах с различными частотами, следовательно:

$$A_n = \tilde{A}_n, \quad B_n \cdot \frac{\pi \cdot n \cdot c}{l} = \tilde{B}_n.$$

Итак,

$$\begin{aligned} A_n &= \tilde{A}_n \\ B_n &= \frac{l}{\pi \cdot n \cdot c} \cdot \tilde{B}_n \end{aligned} \quad (3a.18)$$

Таким образом, мы определили коэффициенты A_n и B_n , они выражаются через коэффициенты разложения начальных условий в ряде Фурье, и задача оказывается полностью решена.

3a.5. Этап 3: неоднородное уравнение с нулевыми граничными условиями и заданными начальными условиями

Рассмотрим теперь неоднородное волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (3a.19)$$

Начальные и простейшие граничные условия для него будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= u(x), & \psi(0, t) &= 0, \\ \psi(x, 0) &= \mathcal{G}(t), & \psi(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Так как уравнение линейное, для него работает принцип суперпозиции, значит общее решение может быть представлено, как сумма:

$$\psi(x, t) = \psi_I(x, t) + \psi_{II}(x, t),$$

где $\psi_I(x, t)$ – общее решение однородной задачи с заданными начальными условиями; $\psi_{II}(x, t)$ – частное решение неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями. Это последнее может быть получено из (3а.12) стандартными методами, например, методом вариации постоянной (см. подраздел 4а.3).

3а.6. Этап 4: неоднородные граничные условия; общая постановка первой краевой задачи

В общей постановке следует рассмотреть неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3а.20)$$

с начальными и граничными условиями вида:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= u(x), & \psi(0, t) &= \mu_1(t), \\ \psi(x, 0) &= g(x), & \psi(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего подраздела граничные условия здесь неоднородны.

Задача с неоднородными граничными условиями по стандартной методике сводится к задаче с однородными граничными условиями (см. этап 3). Рассмотрим эту методику.

Представим функцию $\psi(x, t)$ в виде суммы двух функций $\Phi(x, t)$ и $\varphi(x, t)$:

$$\psi(x, t) = \Phi(x, t) + \varphi(x, t), \quad (3а.21)$$

где $\Phi(x, t)$ – известная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям (вид её будет определен ниже);

$\varphi(x, t)$ – новая неизвестная функция, для которой следует записать новую краевую задачу с нулевыми граничными условиями.

Найдем функцию $\Phi(x, t)$. Для этого подставим уравнение (3а.21) в уравнение (3а.20):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Отсюда для новой неизвестной функции $\varphi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (3a.22)$$

Здесь $\tilde{f}(x,t)$ – новая функция неоднородности. Найдем $\Phi(x,t)$ такую, что задача для функции $\varphi(x,t)$ будет иметь нулевые граничные условия. Условия $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ будут при этом обеспечены самой $\Phi(x,t)$.

Переформулируем начальные условия для функции $\varphi(x,t)$:

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \Phi(x,0) + \varphi(x,0) = u(x), \\ \varphi(x,0) &= \Phi(x,0) + \varphi(x,0) = g(x). \end{aligned}$$

Таким образом, выразив из этих уравнений $\varphi(x,0)$ и $\varphi(x,0)$, получим новые начальные условия:

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) &= u(x) - \Phi(x,0) \\ \varphi(x,0) &= g(x) - \Phi(x,0) \end{aligned} \quad (3a.23)$$

Переформулируем граничные условия для функции $\varphi(x,t)$:

$$\begin{aligned} \psi(0,t) &= \Phi(0,t) + \varphi(0,t) = \mu_1(t), \\ \psi(L,t) &= \Phi(L,t) + \varphi(L,t) = \mu_2(t). \end{aligned}$$

Таким образом, выразив из этих уравнений $\varphi(0,t)$ и $\varphi(L,t)$, получим:

$$\begin{aligned} \varphi(0,t) &= \mu_1(t) - \Phi(0,t), \\ \varphi(L,t) &= \mu_2(t) - \Phi(L,t). \end{aligned} \quad (3a.24)$$

Потребуем однородности граничных условий для φ :

$$\begin{aligned} \varphi(0,t) &= 0, \\ \varphi(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Тогда из (3a.24) получим:

$$\begin{aligned} \Phi(0,t) &= \mu_1(t), \\ \Phi(L,t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad (3a.25)$$

т.е. выполнение исходных граничных условий для функции ψ действительно обеспечивает функция $\Phi(x,t)$.

Функций Φ , удовлетворяющих этим значениям на границах области, существует бесконечно много, а вид функции внутри области никакой роли не играет. Поэтому представим её в простейшем виде – в виде линейной функции:

$$\Phi(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{L} \cdot (\mu_2(t) - \mu_1(t)). \quad (3a.26)$$

Таким образом, исходная задача сводится к следующей:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \tilde{f}(x, t), \quad (3a.27)$$

где

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Начальные и граничные условия выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= u(x) - \Phi(x, 0), & \varphi(0, t) &= 0, \\ \varphi(x, 0) &= g(x) - \Phi(x, 0), & \varphi(L, t) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L} \cdot (\mu_2(0) - \mu_1(0)), \\ \Phi(x, 0) &= \mu_1(0) + \frac{x}{L} \cdot (\mu_2(0) - \mu_1(0)). \end{aligned}$$

Функцию $\varphi(x, t)$ найдем из нового дифференциального уравнения с новой функцией неоднородности и однородными граничными условиями.

Итак, общее решение произвольной краевой задачи можно найти, как суперпозицию:

$$\psi(x, t) = \psi_I(x, t) + \psi_{II}(x, t) + \psi_{III}(x, t).$$

$\psi_I(x, t)$ – общее решение однородной задачи с заданными начальными условиями и с однородными граничными условиями (I и II этапы).

$\psi_{II}(x, t) = \Phi(x, t)$ – частное решение задачи с неоднородными граничными условиями и нулевыми начальными условиями (IV этап).

ψ_{III} – частное решение неоднородной задачи с однородными граничными условиями и нулевыми начальными условиями (III этап).

Раздел 4. ДУЧП параболического типа: явления переноса

4.1. Явления переноса: классификация, характеристики, законы

1. *Явления переноса* – эффекты, связанные с тепловым движением и вызванные неоднородностью в пространстве какой-либо характеристики системы.

Сравнить основные явления переноса в молекулярной физике помогает нижеследующая таблица. В пп. 2–4 затем разобрано каждое из этих явлений.

	Явление		
	Диффузия	Внутреннее трение	Теплопроводность
Суть явления	Перенос массы	Перенос импульса	Перенос энергии
Причина возникновения	Неоднородность концентрации	Неоднородность скорости	Неоднородность температуры
Основная характеристика	$M = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial m}{\partial t}$	$\sigma_{xy} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$	$q = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}$
Основные уравнения	Закон Фика $M = -D \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}$	Закон Ньютона $\sigma_{xy} = -\eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$	Закон Фурье $q = -\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$
Динамический коэффициент переноса	$D = \frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ D – коэффициент диффузии	$\eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ η – динамический коэффициент вязкости	$\kappa = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot c_p \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ κ – коэффициент теплопроводности
Кинематический коэффициент переноса	$D = \frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ D – коэффициент диффузии	$\nu = \frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ ν – кинематический коэффициент вязкости	$\chi = \frac{\kappa}{\rho \cdot c_p} = \frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle$ χ – коэффициент температуропроводности

Здесь $\langle \mathcal{G} \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_0}}$ – средняя арифметическая скорость,

$\langle \mathcal{G}_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$ – среднеквадратичная скорость молекул,

$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{n\sigma_e}$ – средняя длина свободного пробега молекул,

n – концентрация примеси, σ_e – эффективное сечение молекул., μ и m_0 – молярная масса и масса молекулы, R и k – универсальная газовая постоянная и постоянная Больцмана.

Напоминание из молекулярной физики

Рассмотрим газ с концентрацией молекул n и средней арифметической скоростью движения молекул $\langle \mathcal{G} \rangle$:

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot R \cdot T}{\pi \cdot \mu}}.$$

Найдем среднюю частоту соударений $\langle \nu \rangle$, среднее время между соударениями $\langle \tau \rangle$ и среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$.

Для простоты предположим, что все молекулы газа неподвижны, кроме одной, движение которой и будем рассматривать. Траектория этой молекулы представляет собой ломанную линию, причем вершины ломанной связаны с отражением от других молекул.

Построим вокруг траектории движения молекул цилиндр с радиусом d , равным диаметру молекулы. Рассматриваемая молекула испытывает соударения только с теми молекулами, центры которых находятся внутри построенного «тоннеля».

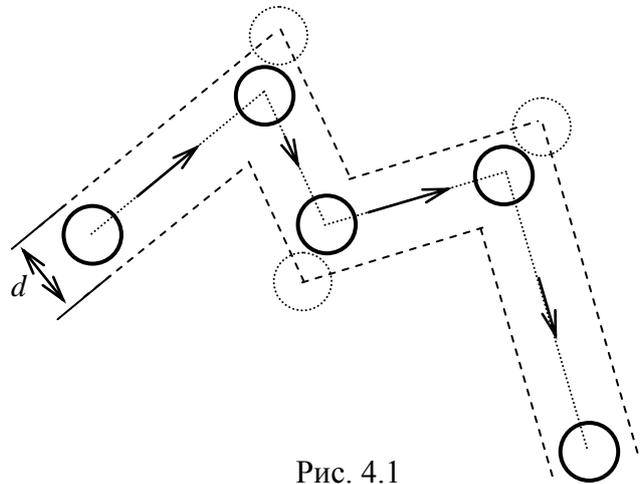


Рис. 4.1

Обозначим Δt – время наблюдения; ΔN – число соударений.

Найдем число соударений наблюдаемой молекулы за время Δt движения через выделенный объем ΔV «тоннеля»:

$$\Delta N = n \cdot \Delta V;$$

$$\Delta V = S \cdot \Delta L = \pi \cdot d^2 \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \Delta t;$$

$$\Delta N = n \cdot \Delta V = n \cdot S \cdot \Delta L = n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \Delta t,$$

где n – концентрация молекул газа, в том числе, внутри «тоннеля».

Средняя частота соударений $\langle \nu \rangle$ запишется следующим образом:

$$\langle \nu \rangle = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{n \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \Delta t}{\Delta t};$$

Введем следующее обозначение:

$$\sigma_e = \pi \cdot d^2,$$

где σ_e – эффективное сечение молекулы (находим в справочной таблице для молекул любого вещества), тогда:

$$\langle \nu \rangle = n \cdot \sigma_e \cdot \langle \mathcal{G} \rangle.$$

Среднее время между соударениями обратно пропорционально частоте:

$$\langle \tau \rangle = \frac{1}{\langle \nu \rangle} = \frac{1}{n \cdot \sigma_e \cdot \langle \mathcal{G} \rangle}.$$

Средняя длина свободного пробега молекул будет равна:

$$\langle \lambda \rangle = \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \tau \rangle = \frac{\langle \mathcal{G} \rangle}{n \cdot \sigma_e \cdot \langle \mathcal{G} \rangle} = \frac{1}{n \cdot \sigma_e}.$$

Формула для величины $\langle \lambda \rangle$ получена в упрощенном рассмотрении, т.к. движутся все молекулы, а не одна.

2. Явление диффузии на примере самодиффузии.

В среде с неоднородным распределением примеси возникает процесс самодиффузии вследствие того, что концентрация примеси в разных областях неодинакова.

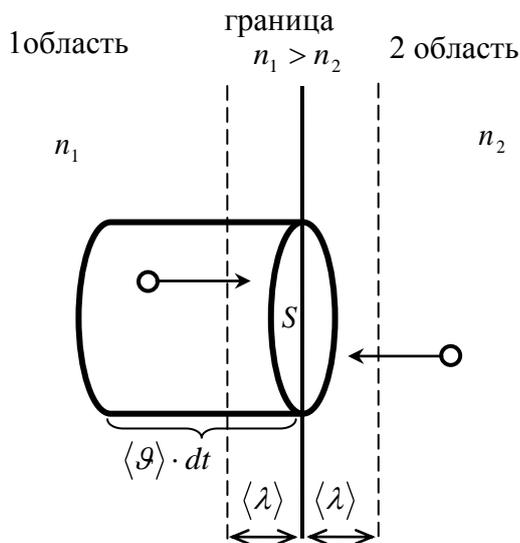


Рис. 4.2

Разделим условно среду на две области (см. рис. 4.2); концентрация примеси в первой области n_1 , во второй – n_2 .

Изменение концентрации $(n_1 - n_2)$ происходит на толщине $2\langle \lambda \rangle$. Одновременно происходит проникновение молекул из первой области во вторую и из второй в первую за счет теплового движения.

Вычислим количество молекул dN_1 , которые проникнут из 1-ой области во 2-ую за время dt через участок площадью S :

$$dN_1 = \frac{1}{6} \cdot n_1 \cdot dV = \frac{1}{6} \cdot n_1 \cdot S \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot dt, \quad (4.1)$$

dV – объем цилиндра (см. рис. 4.1), находящиеся в котором молекулы успевают за время наблюдения dt пересечь границу областей.

Коэффициент «1/6» связан с тем, что не все молекулы движутся вправо (для простоты считаем, что молекулы движутся по нормали к границе).

Вычислим количество молекул dN_2 , которые проникнут из 2-ой области во 1-ую за время dt через участок площадью dS :

$$dN_2 = \frac{1}{6} \cdot n_2 \cdot dV = \frac{1}{6} \cdot n_2 \cdot S \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot dt; \quad (4.2)$$

Результирующая масса примеси, проникшей за время наблюдения dt во 2-ую область:

$$dm = m_0(dN_1 - dN_2) = \frac{1}{6} \cdot m_0 \cdot S \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot dt \cdot (n_1 - n_2). \quad (4.3)$$

Перепад концентрации выразим через её градиент:

$$n_1 - n_2 = -\frac{\partial n}{\partial x} \cdot dx, \quad dx \approx 2\langle \lambda \rangle, \quad n_1 - n_2 = -\frac{\partial n}{\partial x} \cdot 2\langle \lambda \rangle \quad (4.4)$$

($\frac{\partial n}{\partial x}$ – градиент концентрации, dx – толщина слоя диффузии).

С учетом вышеупомянутых замен, увеличение массы примеси во 2-ой области:

$$dm = -\frac{1}{6} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt \cdot m_0 \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \cdot 2 \cdot \langle \lambda \rangle;$$

Введем понятие плотности примеси:

$$\rho = m_0 \cdot n.$$

Тогда:

$$dm = -\frac{1}{6} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt \cdot \frac{\partial(n \cdot m_0)}{\partial x} \cdot 2 \cdot \langle \lambda \rangle = -\frac{1}{6} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot 2 \cdot \langle \lambda \rangle.$$

Разделив обе части этого уравнения на величину $S \cdot dt$, получим уравнение диффузии:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (4.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial m}{\partial t}; \quad D = \frac{1}{3} \cdot \langle g \rangle \cdot \langle \lambda \rangle; \quad (4.5a)$$

Величина M – называется плотностью потока массы, D – коэффициент диффузии.

С учетом принятых обозначений, уравнение диффузии (4.5) примет следующий вид:

$$M = -D \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad (4.6)$$

его называют 1-ым законом Фика.

Физический смысл плотности потока массы: это масса вещества, которая переносится в единицу времени через единичную площадку.

Поскольку M – величина векторная, то в векторной форме закон Фика будет выглядеть так:

$$\vec{M} = -D \cdot \nabla \rho \quad (4.6a)$$

Знак «-» показывает, что вектор плотности потока массы направлен в сторону убыли плотности примеси.

3. Вязкость (внутреннее трение).

Пусть в области I (см. рис. 4.3) две части потока жидкости, разделенные перегородкой, движутся с различными скоростями u_1 и u_2 . Тогда в области II, где перегородка кончилась, возникает скачок скорости. В результате теплового движения молекулы верхних слоев перескакивают в нижний слой, увеличивая скорость упорядоченного (нетеплового, температура всюду одинакова) движения нижнего слоя. Аналогичный эффект создают для молекул нижних слоев. В результате, в области III скорости слоев будут меняться поперек потока плавно:

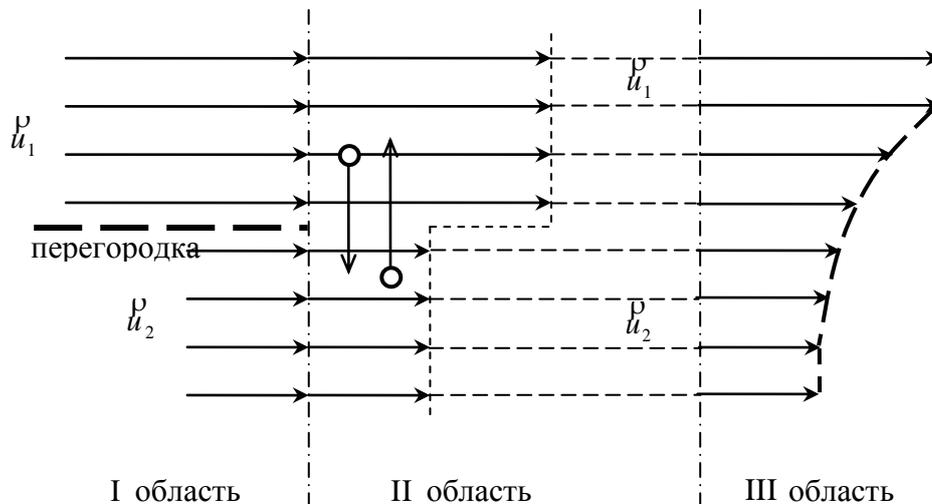


Рис. 4.3

Вычислим импульс, который переносят молекулы из верхнего полупространства в нижнее и наоборот:

$$\begin{aligned} dp_1 &= dm_1 \cdot u_1, \\ dp_2 &= dm_2 \cdot u_2, \end{aligned}$$

где dm_1 и dm_2 – масса молекул, диффундировавших сверху вниз и снизу вверх. Количество молекул, которое переносится сверху вниз и т.д. одинаково, поэтому с учетом (4.1) справедливо выражение:

$$dm_1 = dm_2 = m_0 \cdot dN = m_0 \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot S \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot dt. \quad (4.7)$$

Суммарный перенос импульса запишем так:

$$dp = dp_1 - dp_2 = dm \cdot (u_1 - u_2) = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \langle \lambda \rangle, \quad (4.8)$$

где перепад скоростей $u_1 - u_2$ записан, аналогично (4.4) в виде:

$$u_1 - u_2 \approx -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy = -\frac{\partial u}{\partial y} \cdot 2\langle \lambda \rangle;$$

подставим в (4.8) выражение (4.7):

$$dp = -\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot S \cdot dt.$$

Разделив обе части этого уравнения на величину $S \cdot dt$, получим уравнение, описывающее эффект внутреннего трения:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}; \quad \eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle; \quad (4.9a)$$

величина σ_{xy} называется вязким касательным напряжением, η – коэффициент динамической вязкости.

Введем коэффициент кинематической вязкости ν :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} = \frac{1}{3} \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle.$$

С учетом принятых обозначений, уравнение примет следующий вид:

$$\sigma_{xy} = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.10)$$

Знак «-» означает, что импульс переносится в направлении его убыли. Величину σ_{xy} можно также назвать вектором плотности потока импульса. Эта величина показывает количество *иксовой* компоненты импульса, которая переносится в *игрековом* направлении за единицу времени через единичную площадку.

В общем случае вязкое напряжение представляет собой тензор второго ранга. В векторной форме уравнение (4.10) будет выглядеть так:

$$\vec{\sigma} = -\eta \cdot \nabla \vec{u}. \quad (4.10a)$$

При записи в компонентах оно будет иметь вид:

$$\sigma_{ij} = -\eta \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10б)$$

(вместо обозначений x, y, z часто для удобства используют x_1, x_2, x_3).

Симметризованное выражение для тензора второго ранга:

$$\sigma_{ij} = -\eta \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.10в)$$

Формулы (4.10a)–(4.10в) выражают закон Ньютона вязкого трения. Жидкости, которые подчиняются этому состоянию, называются ньютоновскими.

Встречаются также неньютоновские жидкости. Для них вязкое напряжение может зависеть от градиента скорости нелинейно, а сам коэффициент вязкости может быть не скаляром, а тензором второго ранга (т.е. вязкие свойства среды различны в различных направлениях – анизотропная среда). Неньютоновскими жидкостями являются: ил, кровь, жидкие металлы; анизотропны жидкие кристаллы.

Выражение для вязкого напряжения в анизотропных средах выглядит так:

$$\sigma_{ij} = -\eta_{ik} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (4.10г)$$

Здесь суммирование ведется по правилу Эйнштейна, т.е. по повторяющимся (немым) индексам.

4. Теплопроводность.

Пусть в начальный момент времени температура в 1-ой области среды T_1 , а во 2-ой – T_2 .

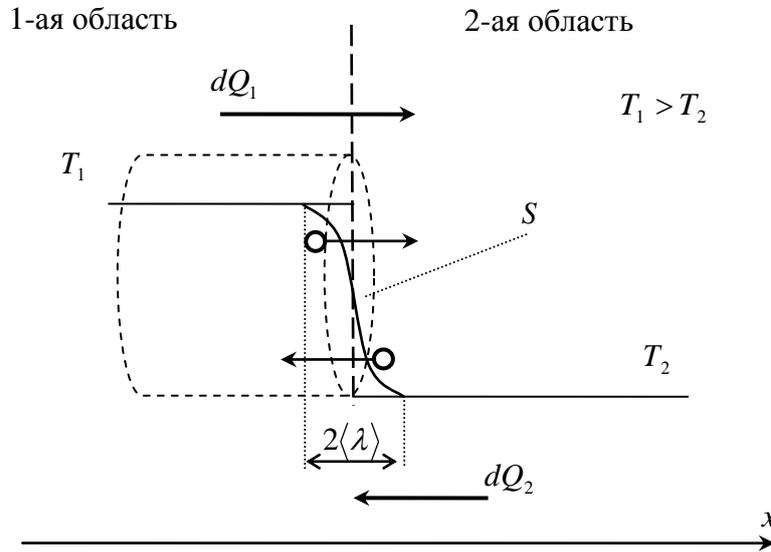


Рис. 4.4

На ширине $2\langle \lambda \rangle$ происходит выравнивание температур вблизи границы областей. Опишем математически, как это происходит:

$$\begin{aligned} dQ_1 &= dm \cdot c_p \cdot T_1, \\ dQ_2 &= dm \cdot c_p \cdot T_2, \end{aligned}$$

dQ_1 – теплота, которая переносится из 1-ой области во 2-ую за счет перехода молекул слева направо,

dQ_2 – теплота, которая переносится из 2-ой области в 1-ую за счет перехода молекул справа налево,

c_p – теплоемкость при постоянном давлении,

dm – количество вещества, перешедшего из 1-ой области во 2-ую и, обратно, из 2-ой в 1-ую (считаем dm одинаковым в обоих случаях, чтобы не было макроскопических изменений), которое по аналогии с (4.7) запишем в виде:

$$dm = \frac{1}{6} \cdot m_0 \cdot n \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt;$$

Тогда суммарная перенесенная слева направо теплота dQ равна:

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot S \cdot dt \cdot c_p \cdot (T_1 - T_2). \quad (4.11)$$

С учетом того, что $(T_1 - T_2) \approx -\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \Delta x$, $\Delta x = 2 \cdot \langle \lambda \rangle$, тогда $(T_1 - T_2) \approx -\frac{\partial T}{\partial x} \cdot 2 \langle \lambda \rangle$,

$$dQ = -\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot c_p \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot S \cdot dt; \quad (4.12)$$

Разделив обе части уравнения на величину $S \cdot dt$, получим уравнение, описывающее теплоперенос:

$$\frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{1}{3} \cdot \rho \cdot c_p \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \cdot \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (4.13)$$

Знак «-» связан здесь с тем, что теплота переносится в направлении убыви температуры. Введем следующие обозначения:

$$q = \frac{1}{S} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad \text{ж} = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot c_p \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle; \quad (4.13a)$$

Величина q называется вектором плотности теплового потока; ж – коэффициент теплопроводности.

Плотность теплового потока – это количество тепла, которое переносится через единичную площадку за единицу времени.

С учетом принятых обозначений, наше уравнение переписется следующим образом:

$$q = -\text{ж} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) выражает закон Фурье теплопередачи. Среды, в которых выполняется этот закон, называются фурьевскими.

Также вводят коэффициент температуропроводности χ , который определяется через ж:

$$\chi = \frac{\text{ж}}{\rho \cdot c_p} = \frac{1}{3} \cdot \langle \mathcal{G} \rangle \cdot \langle \lambda \rangle.$$

Единицы измерения у кинематических коэффициентов переноса D , ν , χ одинаковы [m^2/c], кроме того, они приближенно равны (равны в рамках упрощенной теории).

Закон Фурье в векторной форме будет выглядеть так:

$$\vec{q} = -\text{ж} \cdot \nabla T, \quad (4.14a)$$

а в компонентах:

$$q_i = -\text{ж} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (4.14б)$$

Для нефурьевских жидкостей теплоток может быть более сложно, чем линейно, зависеть от градиента температуры, а коэффициент теплопроводности может быть тензором 2-го ранга (т.е. теплопроводные свойства среды будут различны в различных направлениях – проявляются анизотропные свойства):

$$q_i = -\mathcal{J}_{ij} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_j}; \quad (4.14\text{е})$$

(индекс j – повторяющийся, и, согласно правилу Эйнштейна, по нему будет проводиться суммирование).

Неньютоновские и нефурьевские жидкости называют аномальными. Для примера: тепловой поток в направлении Ox вызванный градиентом температуры вдоль Oy для нефурьевской жидкости можно записать так:

$$q_x = -\mathcal{J}_{xx} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} - \mathcal{J}_{xy} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} - \mathcal{J}_{xz} \cdot \frac{\partial T}{\partial z};$$

$-\mathcal{J}_{xy} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$ – это слагаемое определяет перенос вдоль оси x , за счет того, что содержит в себе игрековую компоненту.

5. Смысл кинематических коэффициентов переноса

Возьмем, для примера, кинематический параметр переноса D :

$$D = \frac{1}{3} \cdot \langle \vartheta \rangle \cdot \langle \lambda \rangle;$$

Исходя из формулы, размерность этой величины:

$$[D] = \frac{M^2}{c};$$

Выражение для коэффициента переноса на макроуровне можно записать следующим образом:

$$D = \frac{l^2}{\tau};$$

где l – толщина слоя диффузии, т.е. расстояние (глубина), на которое проникает примесь за время τ , а τ – характерное время.

Коэффициент диффузии можно записать так:

$$l = \sqrt{D \cdot \tau}. \quad (4.23)$$

D – коэффициент в формуле, связывающий величины l и τ . Это мера интенсивности диффузии.

4.2. Нестационарное уравнение теплопроводности. Учет движения среды

1. Рассмотрим процесс теплопередачи в области с изменяющимися граничными условиями. Тепловой поток в этом случае зависит и от времени, и от координаты.

Выделим в сплошной среде элемент (заштрихован на рис. 4.5) с горизонтальным размером dx и массой dm .

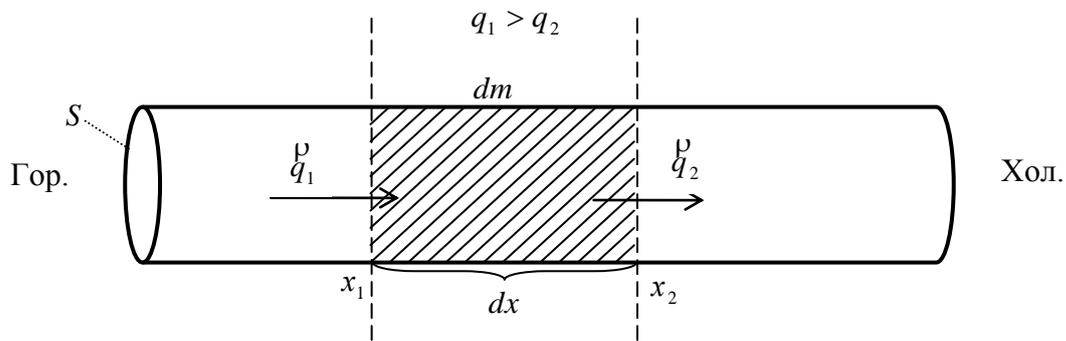


Рис. 4.5

На рисунке q_1 , q_2 – плотности теплового потока на левой и правой границах элемента. Элемент нагревается, если $q_1 > q_2$.

Согласно определению, плотность теплового потока равна:

$$q = \frac{1}{S} \cdot \frac{dQ}{dt},$$

значит количество тепла, протекающее через левую и правую границы равно:

$$\begin{aligned} dQ_{\text{лев.}} &= q_1 \cdot S \cdot dt, \\ dQ_{\text{прав.}} &= q_2 \cdot S \cdot dt, \end{aligned}$$

$dQ_{\text{лев}}$ – количество тепла, пришедшее слева,

$dQ_{\text{прав}}$ – количество тепла ушедшее вправо.

Изменение внутренней энергии элемента

$$dQ = dQ_{\text{лев.}} - dQ_{\text{прав.}} = (q_1 - q_2) \cdot S \cdot dt.$$

С учетом малости элемента dx :

$$q_1 - q_2 = -\frac{\partial q}{\partial x} \cdot dx,$$

поэтому

$$dQ = -\frac{\partial q}{\partial x} \cdot S \cdot dx \cdot dt. \quad (4.15)$$

Величина dQ обуславливает изменение температуры элемента, связанное с тем, что теплоток на левой и на правой границах различен:

$$dQ = dm \cdot c_p \cdot dT \quad (4.16)$$

Приравнивая правые части уравнений (4.15) и (4.16), имеем:

$$dm \cdot c_p \cdot dT = -\frac{\partial q}{\partial x} \cdot S \cdot dx \cdot dt.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} dm &= \rho \cdot dV = \rho \cdot S \cdot dx, & \text{то} \\ \rho \cdot c_p \cdot S \cdot dx \cdot dT &= -\frac{\partial q}{\partial x} \cdot S \cdot dx \cdot dt. \end{aligned}$$

Поделим обе части выражения на величину $S \cdot dt \cdot dx$, с учетом этих обозначений наше уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}.$$

После преобразования получаем следующее уравнение, называемое нестационарным уравнением теплопроводности или 2-ым законом Фурье:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}. \quad (4.17)$$

Объединим 1-ый и 2-ой законы Фурье, подставив (4.14) в (4.17):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[-\text{ж} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right].$$

Для тех случаев, когда $\text{ж} = \text{const}(x)$, т.е. перепады температур не слишком велики, можно записать:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\text{ж}}{\rho \cdot c_p} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

С учетом того, что

$$\chi = \frac{\text{ж}}{\rho \cdot c_p},$$

нестационарное уравнение теплопроводности примет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (4.18)$$

Это дифференциальное уравнение параболического типа. Оно требует трёх дополнительных условий: одного начального (для температур при $t = 0$) и двух граничных.

2. В качестве примера рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры в среде при заданных температурах на границах области.

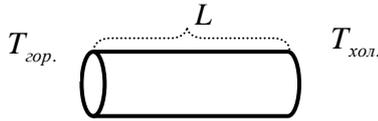


Рис. 4.6

Стационарность означает, что мы ждали достаточно долго, чтобы температура во всех точках стержня установилась, т.е. $T = \text{const}(t)$, поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Это значит что и правая часть уравнения (4.18) тоже будет равна нулю:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является линейная функция:

$$T(x) = C_1 + C_2 \cdot x.$$

Константы интегрирования, C_1 и C_2 , найдем из условий на границах области. Пусть на левой границе задана температура $T_{гор.}$, тогда

$$T(0) = T_{гор.} = C_1 + C_2 \cdot 0, \text{ т.е. } C_1 = T_{гор.}.$$

На правой границе $x = L$ зададим постоянную температуру $T_{хол.}$:

$$T(L) = T_{хол.} = T_{гор.} + C_2 \cdot L.$$

Отсюда

$$C_2 = \frac{T_{хол.} - T_{гор.}}{L} = -\frac{T_{гор.} - T_{хол.}}{L}.$$

В результате получаем:

$$T(x) = T_{гор.} - \frac{T_{гор.} - T_{хол.}}{L} \cdot x.$$

3. Если среда движется макроскопически, то уравнение теплопередачи (4.18) нужно модернизировать.

Все, что рассматривалось в пункте *Теплопроводность* предыдущей темы, касалось случая неподвижной среды, т.е. макроскопического движения не было, было только тепловое. Теперь необходимо перейти от частной производной по времени к полной производной:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ где } \mathcal{G} = \frac{\partial x}{\partial t} - \text{ скорость движения среды.}$$

Тогда уравнение теплопередачи, имеет вид.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \chi \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (4.19)$$

(иногда используется такая терминология: $\frac{\partial T}{\partial t}$ – локальная производная по времени, $\mathcal{G} \frac{\partial T}{\partial x}$ – конвективная производная; сумма слагаемых в левой части (4.19) называется полной или субстанциальной производной от температуры по времени).

Уравнение (4.19) получено для одномерных процессов теплопередачи; если тепло распространяется в пространстве, то:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathcal{G} \cdot \nabla T = \chi \cdot \nabla^2 \cdot T \quad (4.19a)$$

(здесь оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\mathcal{G} \cdot \nabla = \mathcal{G}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \mathcal{G}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \mathcal{G}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}$).

4.3. Краевая задача для дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа

1. Помимо уравнения теплопроводности, уравнениями параболического типа описываются процессы нестационарной диффузии, нестационарного течения вязкой жидкости, скин-эффект в металлах и др.

Вместо функции T будем использовать ниже некую абстрактную функцию ψ , под которой может подразумеваться концентрация, плотность, магнитная индукция и другие величины.

В общем виде уравнение параболического типа будет выглядеть так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + c \cdot \psi; \quad (4.20)$$

коэффициенты a , b , c здесь могут быть переменными.

Уравнение (4.20) может быть сведено к более простому виду

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2}; \quad (4.21)$$

путем замены:

$$\psi(x, t) = \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}(x, t); \quad (4.22)$$

Коэффициенты λ и μ в подстановке (4.22) найдем, потребовав, чтобы в (4.21) коэффициенты при первой и нулевой производных были равны нулю.

Для этого вычислим производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \mu \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} + \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}' ; \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} + \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}' ; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} + 2 \cdot \lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}' + \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}'' .\end{aligned}$$

и подставим их в уравнение (4.20):

$$\begin{aligned}\mu \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} &= \\ &= a^2 \cdot [\lambda^2 \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} + 2\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}' + \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}''] + \\ &+ b \cdot [\lambda \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi} + \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}'] + c \cdot \exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t) \cdot \tilde{\psi}\end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения на величину $\exp(\lambda \cdot x + \mu \cdot t)$, и вынесем общие множители за скобки, получим:

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + (2 \cdot \lambda \cdot a^2 + b) \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} + (a^2 \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c - \mu) \cdot \tilde{\psi} ;$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при первой и нулевой производных были нулевыми:

$$\begin{cases} 2 \cdot \lambda \cdot a^2 + b = 0 \\ a^2 \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c - \mu = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим λ и μ :

$$\begin{aligned}\lambda &= -\frac{b}{2 \cdot a^2} ; \\ \mu &= a^2 \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = a^2 \cdot \frac{b^2}{4 \cdot a^4} + b \cdot \left(-\frac{b}{2 \cdot a^2} \right) + c = c - \frac{b^2}{4 \cdot a^2} .\end{aligned}$$

Итак, если λ и μ в замене (4.22) равны полученным, то общее уравнение параболического типа сводится к виду (4.21).

2. Начальные и граничные условия.

а) начальные условия.

Поскольку уравнение (4.21) содержит первую производную от ψ по времени, то необходимо одно начальное условие:

$$\psi(x,0) = \theta(x).$$

Если в качестве ψ рассматривается температура T , то $\theta(x)$ – распределение начальной температуры вдоль области.

б) граничные условия.

Уравнение (4.21) содержит вторую производную по координате, поэтому необходимо два граничных условия.

Граничные условия 1-го рода:

$$\begin{aligned}\psi(0, t) &= \mu_1(t); \\ \psi(L, t) &= \mu_2(t).\end{aligned}$$

(здесь L – протяженность области).

В случае задания теплопроводности, граничные условия первого рода означают, что задана температура на границе.

Реализовать граничные условия первого рода сложно, граница должна быть выведена в термостат, т.е. систему, обладающую очень большой теплоемкостью, которая может обеспечить поддержание заданной температуры.

Граничные условия 2-го рода:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) &= \nu_1(t); \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) &= \nu_2(t).\end{aligned}$$

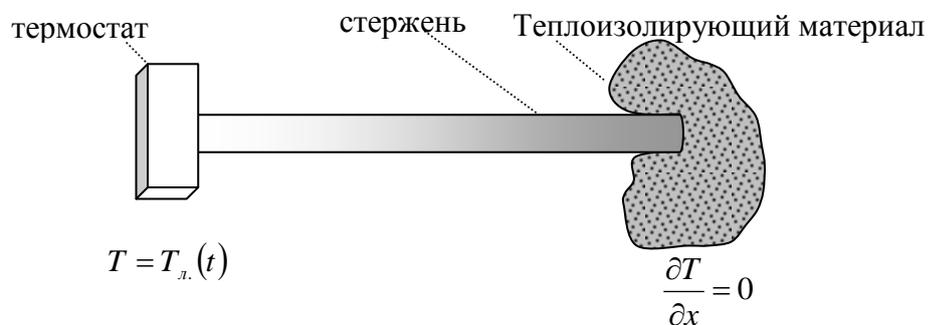
Поскольку $-j \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = q$, то есть градиент температуры пропорционален теплоток, то для задачи теплопроводности граничные условия 2-го рода означают, что задан тепловой поток на границе области. Например, для адиабатических (теплоизолированных) границ:

$$q = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Это однородное граничное условие 2-го рода.

Возможны комбинированные граничные условия, т.е. на левой границе – одного рода, а на правой границе – другого.

Пример



Граничное условие 1-го рода Граничное условие 2-го рода
(Тепло никуда не уходит!!)

Рис. 4.7

Граничные условия 3-го рода:

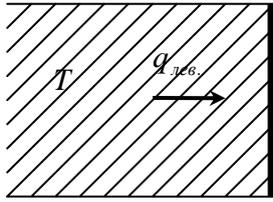


Рис. 4.8

Это дифференциальные уравнения, содержащие саму функцию ψ , и ее производную по координате $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.
Например, граница подводится слева теплопоток:

$$q_{лев.} = -\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x};$$

Теплопередача в окружающую среду происходит в соответствии с законов Био (при малых перепадах температур, тепловой поток в окружающую среду пропорционален перепаду температур)

$$q_{прав.} = \alpha \cdot (T - T_0);$$

где $q_{прав.}$ – суммарный тепловой поток, T_0 – температура окружающей среды.

В состоянии теплового равновесия на границе должно выполняться следующее равенство:

$$q_{лев.} = q_{прав.}.$$

Например, батарея, которая имеет температуру больше, чем у окружающей среды, но чуть меньше, чем температура воды в батарее. Это дает граничное условие 3-го рода:

$$-\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \cdot (T - T_0).$$

Температура здесь относится к любому моменту времени, но строго на границе.

Если перепад температур велик, то теплопередача в окружающую среду определяется законом Стефана–Больцмана:

$$R_e = \sigma \cdot T^4,$$

R_e – интегральная испускательная способность (теплоотдача с единицей площади в единицу времени). В этом случае граничное условие 3-го рода имеет вид:

$$-\kappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \sigma \cdot (T^4 - T_0^4).$$

(Слагаемое T_0^4 показывает, что воздух тоже отдает батарее тепло.)

4.4. Скин-эффект при высокочастотном токе в металлах

Рассмотрим бесконечный плоскопараллельный слой металла, в котором внешнее электрическое поле с большой частотой меняется со временем:

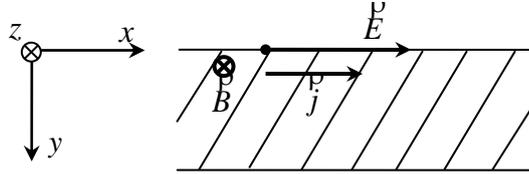


Рис. 4.9

Поле порождает электрический ток, который в соответствии с законом Ома сонаправлен с полем:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}.$$

Переменный ток порождает переменное магнитное поле, а то, в свою очередь, порождает вихревое электрическое и т.д.

Чтобы понять, насколько глубоко проникает магнитное поле в металл, рассмотрим поверхностный слой. Предположим, что вектор магнитного поля в некоторый момент времени направлен от нас.

Выберем систему координат (см. рис. 4.9). Задача однородна по осям x и z , характеристики зависят от y . Электрического поле \vec{E} имеет только x -составляющую, так что

$$\vec{E}(E_x(y, t); 0; 0).$$

Ток также имеет только x -составляющую, которая зависит от y :

$$\vec{j}(j_x(y, t); 0; 0).$$

Магнитное поле \vec{B} представлено z -составляющей:

$$\vec{B}(0; 0; B_z(y, t)).$$

Итак, физическая система описывается тремя величинами:

$$\begin{aligned} &\vec{E}(E_x(y, t); 0; 0); \\ &\vec{j}(j_x(y, t); 0; 0); \\ &\vec{B}(0; 0; B_z(y, t)). \end{aligned}$$

Чтобы получить уравнения для этих величин, воспользуемся уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Последнее слагаемое отбросим, поскольку в проводящей среде ток смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости.

При проецировании уравнения (4.23) на ось z и (4.24) на ось x , получим:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x; \quad (4.26)$$

Однородность вдоль осей x и z дает:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0,$$

поэтому:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0;$$

и уравнения (4.25), (4.26) приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t}; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = j_x; \quad (4.28)$$

Получилось 2 уравнения и 4 переменные величины: E , B , H , j . Поэтому добавим для омически проводящей среды уравнения:

$$j = \sigma \cdot E; \quad (4.29)$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H. \quad (4.30)$$

Получим систему четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (4.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} = j_x \end{array} \right. \quad (4.28)$$

$$j = \sigma \cdot E \quad (4.29)$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H \quad (4.30)$$

Выразим из уравнения (4.29) величину E , а из уравнения (4.30) величину H и подставим их в уравнения (4.27) и (4.28) соответственно. Получим:

$$\frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial j}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial t}; \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} = j. \quad (4.32)$$

Величину тока j из уравнения (4.32) подставим в уравнение (4.31):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \right).$$

Поскольку $\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} = const$, вынесем её из-под знака производной:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}, \quad (4.32)$$

Получили уравнение параболического типа, где коэффициент при производной в правой части имеет смысл коэффициента диффузии магнитного поля:

$$D = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu \cdot \sigma}; \quad (4.32a)$$

Аналогично, исключая из (4.31) и (4.32) B , получим:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \cdot \mu \cdot \sigma} \cdot \frac{\partial^2 j}{\partial y^2}, \quad (4.33)$$

где коэффициент диффузии тока в правой части равен коэффициенту диффузии магнитного поля (4.32б).

Итак, для величин B и j получены уравнения параболического типа, причем коэффициент диффузии для магнитного поля и тока одинаков.

Глубина проникновения примеси l равна, в соответствии с (4.23):

$$l = \sqrt{D \cdot \tau}.$$

Для скин-эффекта величину l называют толщиной скин-слоя. В качестве характерного времени τ возьмем полпериода, т.к. в это время поле и ток не меняют направления, тогда

$$l = \sqrt{D \cdot \tau} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu \cdot \sigma}} \cdot \sqrt{\frac{T}{2}},$$

или, иначе, через частоту:

$$l = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu \cdot \sigma \cdot \nu}}. \quad (4.34)$$

Смысл толщины скин-слоя: это глубина проводника, на которой плотность тока j и магнитное поле B уменьшаются в e раз по сравнению со значением на поверхности.

Вихревое электрическое поле препятствует проникновению внешнего электрического поля E и тока вглубь проводника.

Приведем пример для меди:

- при частоте тока и поля $\nu = 50 \text{ Гц}$, то $l = 1 \text{ см}$ (никакого скин-эффекта не наблюдается);
- при частоте тока и поля $\nu = 5 \text{ кГц}$, то $l = 1 \text{ мм}$;
- при частоте тока и поля $\nu = 500 \text{ кГц}$, то $l = 0,01 \text{ мм}$;
- для СВЧ-диапазона $l \sim 1 \text{ мкм}$, то есть наблюдается выраженный скин-эффект.

Раздел 4а. Метод Фурье разделения переменных для уравнений параболического типа

4а.1. Этап 1: общее решение однородного уравнения с однородными граничными и произвольными начальными условиями

1. Рассмотрим задачу, описывающуюся однородным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad (4a.1)$$

Простейшие начальные и граничные условия зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \theta(x); & \psi(0,t) &= 0, \\ & & \psi(L,t) &= 0. \end{aligned}$$

Для решения уравнения (4а.1) используем метод Фурье разделения переменных. Представим функцию ψ в виде произведения пространственной и временной частей:

$$\psi(x,t) = X(x) \cdot T(t); \quad (4a.2)$$

Тогда (4а.1) перепишем в следующем виде:

$$X \cdot \mathcal{T}' = a^2 \cdot X'' \cdot T$$

или

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\mathcal{T}'}{T}; \quad (4a.3)$$

В левой части уравнения (4а.3) записана некоторая функция, зависящая от координаты, а в правой – функция времени. Эти функции должны быть равны друг другу и постоянны. Обозначим постоянную разделения переменных $const = -k^2$ (как и в разделе 3а, можно показать, что она отрицательная). Тогда

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\mathcal{T}'}{T} = const = -k^2;$$

Величина k имеет смысл волнового числа для пространственной составляющей решения.

После разделения пространственной и временной части решения получаем систему:

$$\begin{cases} X'' + k^2 X = 0 \\ \mathcal{T}' + a^2 k^2 T = 0 \end{cases} \quad (4a.4)$$

2. К уравнениям (4a.4) добавим дополнительные условия для пространственной части X , «переработав» граничные условия для уравнения (4a.1).

На левой границе:

$$\psi(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0.$$

Очевидно, что

$$X(0) = 0,$$

в противном случае $T(t) = 0$ и, следовательно, $\psi(0, t) = 0$, т.е. задача имеет тривиальное решение, что не представляет интереса.

На правой границе (L – протяженность области):

$$\psi(L, t) = X(L) \cdot T(t) = 0;$$

Отсюда, аналогично, следует:

$$X(L) = 0.$$

3. Уравнение для X имеет следующее общее решение:

$$X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx).$$

Определим константы интегрирования A и B из граничных условий.

При $x = 0$:

$$X(0) = A \sin(k \cdot 0) + B \cos(k \cdot 0) = 0 + B \cdot 1 = B = 0.$$

Значит $B = 0$. Тогда, для пространственной части можно записать:

$$X(x) = \sin(kx); \tag{4a.5}$$

На коэффициент A внимание обращать пока не будем, т.к. можно учесть в амплитудном коэффициенте полного решения (т.е. с учетом временной части $T(t)$).

При $x = L$ получим:

$$X(L) = \sin(kL) = 0.$$

Корни уравнения $\sin(kL) = 0$ определяются условием:

$$kL = \pi \cdot n, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Однако при $n = 0$ оказывается $k = 0$, а значит и $\sin(kx) = 0$, т.е. получается тривиальное решение. Значит, нулевой моды быть не может.

Таким образом, волновое число для n -ой моды будет выглядеть следующим образом:

$$k_n = \frac{\pi \cdot n}{L}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4a.6)$$

Подставив (4a.6) в уравнение (4a.5), получим пространственную часть решения n -ой моды:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right), \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4a.7)$$

Таким образом, одно граничное условие позволило отбросить слагаемое с косинусом, то есть определило решение в виде синуса, а второе позволило определить дискретный спектр волновых чисел.

4. Теперь получим решение для временной части. Запишем уравнение

$$\mathcal{L} + a^2 k^2 T = 0;$$

в виде:

$$\frac{dT}{dt} = -a^2 k^2 T;$$

и произведем разделение переменных:

$$\frac{dT}{T} = -a^2 k^2 dt.$$

После интегрирования получим:

$$\ln \frac{T}{C} = -a^2 k^2 t;$$

где $\ln C$ – постоянная интегрирования. Отсюда

$$T = C \cdot \exp(-a^2 k^2 t);$$

С учетом (4a.6), для n -ой моды временная часть решения будет выглядеть следующим образом:

$$T_n(t) = C_n \exp\left[-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2 \cdot t\right]. \quad (4a.8)$$

Общее решение задачи (4a.1) представляет собой суперпозицию всех мод:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \exp\left[-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] \quad (4a.9)$$

4a.2. Этап 2: учет начальных условий

Теперь для однородного уравнения:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}.$$

Учтем заданное начальное условие:

$$\psi(x,0) = \theta(x);$$

где $\theta(x)$ – произвольная функция пространственной координаты.

Запишем общее решение (4a.9) при $t = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] = \theta(x). \quad (4a.10)$$

Количество постоянных C_n равно бесконечности. Их нужно найти из начальных условий, разложив функцию $\theta(x)$ в ряд Фурье по синусам:

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\theta_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right]. \quad (4a.11)$$

Подстановка (4a.11) в (4a.10) дает:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\theta_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] \quad (4a.12)$$

В левой и правой частях этого уравнения имеется бесконечное число слагаемых. Однако, поскольку синусы с разными волновыми числами ортогональны друг другу, коэффициенты при синусах, с каждым значением волнового числа k_n в левой и правой части должны быть равны, т.е.:

$$C_n = \theta_n. \quad (4a.13)$$

Приведем также строгое доказательство. Домножим равенство (4a.11) на $\sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) \cdot dx$, и проинтегрируем по x на пределах от 0 до L :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L C_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \theta_n \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) dx;$$

Если $n \neq m$, то

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) dx = 0,$$

в противном случае

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) dx = \frac{L}{2};$$

Получается, что из всей бесконечной суммы числа слагаемых в левой и правой части, остается только одно слагаемое, когда $n = m$:

$$C_n \frac{L}{2} = \theta_n \frac{L}{2}.$$

Найдем коэффициент θ_n , домножив уравнение (4а.11) на $\sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) \cdot dx$, и проинтегрировав по x на пределах от 0 до L :

$$\int_0^L \theta(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \theta_n \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot m}{L} \cdot x\right) dx.$$

При $n = m$ интеграл в правой части уравнения равен $L/2$, во всех остальных случаях – нулю.

Таким образом, коэффициент θ_n будет иметь вид:

$$\theta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \theta(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) dx \quad (4а.14)$$

Введем понятие функции точечного источника. Для этого объединим формулы (4а.9) и (4а.14) (чтобы не путать координату x с переменной интегрирования, заменим в (4а.14) x на ξ):

$$C_n = \theta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \theta_n(\xi) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi\right) d\xi.$$

Подстановка этого выражения в (4а.9) дает

$$\psi(x, t) = \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cdot \exp\left[-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi\right) \right] \cdot \theta(\xi) d\xi.$$

Введем следующее обозначение:

$$G(x, \xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cdot \exp \left[-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right] \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi \right). \quad (4a.15)$$

Тогда решение переписывается в следующем виде:

$$\psi(x, t) = \int_0^L G(x, \xi, t) \cdot \theta(\xi) \, d\xi. \quad (4a.16)$$

Функцию $G(x, \xi, t)$ называют функцией точечного источника. Она ответственна за значение переносимой функции (например, температуры) в точку x в момент времени t под действием точечного источника, который имеет мощность, равную $\rho \cdot c_p$ в точке ξ в начальный момент времени.

4a.3. Этап 3: неоднородное уравнение с нулевыми граничными и начальными условиями

Теперь рассмотрим задачу, описывающуюся неоднородным уравнением:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4a.17)$$

В этом случае общее решение представляет собой сумму ψ_I и ψ_{II} :

ψ_I – общее решение однородной задачи с заданными начальными условиями;

ψ_{II} – частное решение неоднородной задачи с нулевыми начальными условиями.

Для ψ_{II} подставим следующие начальные и граничные условия (индекс II далее для краткости опускаем):

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= 0; & \psi(0, t) &= 0, \\ & & \psi(L, t) &= 0. \end{aligned}$$

Решение неоднородного уравнения получим из уравнения (4a.9):

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \exp \left[-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right] \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \right],$$

например, методом вариации постоянной,

Временная часть $T(t)$ изменится в связи с появившейся неоднородностью. Учтем это, предположив, что константа C_n – не константа, а функция времени:

$$C_n = C_n(t);$$

Пространственная часть измениться не может, поскольку граничные условия нулевые.

Найдем производную от функции ψ по времени и вторую производную от функции ψ по координате, получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\mathcal{E}_n + C_n \cdot \left(-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \right) \right) \cdot \exp \left(-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \right]; \quad (4a.18)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \cdot \exp \left(-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) \cdot \left(- \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \right]. \quad (4a.19)$$

Функцию неоднородности разложим в ряд Фурье по синусам:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n(t) \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \right].$$

Подставим (4a.18) и (4a.19) в уравнение (4a.17), перегруппируем слагаемые в левой части и вынесем за скобки общий множитель; получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\left[\mathcal{E}_n - C_n \cdot a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 + C_n \cdot a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \right] \cdot \exp \left(-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) - f_n \right] \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x \right) \right) = 0.$$

Пара слагаемых в квадратной скобке взаимноуничтожаются. Поскольку синусы с различными n ортогональны друг другу, то в ноль должны обращаться коэффициенты в фигурных скобках при каждом синусе в отдельности. Тогда:

$$\mathcal{E}_n \cdot \exp \left(-a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) = f_n$$

или

$$\frac{dC}{dt} = \exp \left(a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) \cdot f_n.$$

Разделим переменные, домножив уравнение на dt :

$$dC = \exp \left(a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L} \right)^2 \cdot t \right) \cdot f_n \cdot dt.$$

Проинтегрируем, заменив t на τ под знаком интеграла, чтобы не путать с пределом интегрирования:

$$C_n(t) = \int_0^t f_n(\tau) \cdot \exp\left(a^2 \left(\frac{\pi \cdot n}{L}\right)^2 \cdot \tau\right) d\tau. \quad (4a.20)$$

Подставив выражение (4a.20) в уравнение (4a.9), получим:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau) \cdot \exp\left(a^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \cdot \tau\right) d\tau \cdot \exp\left(-a^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right];$$

После объединения экспонент решение приобретет вид:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau) \cdot \exp\left(a^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \cdot (t - \tau)\right) d\tau \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] \quad (4a.21)$$

Коэффициенты $f_n(t)$ разложения неоднородности в ряд Фурье определяются так:

$$f_n(\tau) = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi, \tau) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi\right) d\xi; \quad (4a.22)$$

Перепишем (4a.21) в терминах функции точечного источника. Подставим (4a.22) в уравнение (4a.21) и после преобразований получим:

$$\psi(x, t) = \int_0^t \int_0^L \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cdot \exp\left(a^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \cdot (t - \tau)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right) \right] \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Введем следующее обозначение:

$$G(x, \xi, t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \cdot \exp\left(a^2 \cdot \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2 \cdot (t - \tau)\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot \xi\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{L} \cdot x\right). \quad (4a.23)$$

Тогда, решение для ψ будет иметь вид:

$$\psi(x, t) = \int_0^t \int_0^L G(x, \xi, t, \tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4a.24)$$

Здесь $G(x, \xi, t, \tau)$ – функция точечного источника. Она ответственна за значение переносимой функции (например, температуры) в точке x в момент времени t под действием точечного источника, который имеет мощность, равную $\rho \cdot c_p$ в точке ξ в момент времени τ .

4а.4. Этап 4: неоднородные граничные условия; общая постановка первой краевой задачи

В общей постановке следует рассмотреть неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + f(x, t); \quad (4a.17)$$

С начальными и граничными условиями следующего вида образом:

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) &= \theta(x); & \psi(0, t) &= \mu_1(t), \\ & & \psi(L, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}$$

В отличие от предыдущего подраздела граничные условия здесь неоднородны.

Задача с неоднородными граничными условиями по стандартной методике сводится к задаче с однородными граничными условиями (см. этап 3). Рассмотрим эту методику.

Для учета неоднородности граничных условий, представим функцию ψ в виде:

$$\psi(x, t) = \Phi(x, t) + \varphi(x, t); \quad (4a.25)$$

где $\Phi(x, t)$ – известная функция, которая обеспечивает выполнение заданных граничных условий (вид её будет определен ниже);
 $\varphi(x, t)$ – новая, неизвестная функция, для которой следует записать новую краевую задачу с нулевыми граничными условиями.

Подставим (4a.25) в уравнение (4a.17), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + f(x, t).$$

Отсюда, для новой неизвестной функции $\varphi(x, t)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + f(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t};$$

Введем следующее обозначение:

$$\tilde{f}(x, t) = f(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где $\tilde{f}(x, t)$ – новая функция неоднородности.

Найдем функцию φ из уравнения (4.3) с новой функцией неоднородности и нулевыми граничными условиями, а выполнение заданных граничных условий для функции ψ возложим на функцию Φ .

Для этого «переработаем» граничные условия:

на левой границе:

$$\psi(0, t) = \mu_1(t) = \Phi(0, t) + \varphi(0, t),$$

отсюда

$$\Phi(0, t) = \mu_1(t) - \varphi(0, t);$$

на правой границе:

$$\psi(L, t) = \mu_2(t) = \Phi(L, t) + \varphi(L, t),$$

откуда

$$\Phi(L, t) = \mu_2(t) - \varphi(L, t);$$

С учетом граничных условий $\varphi(0, t) = 0$ и $\varphi(L, t) = 0$, «переработанные» граничные условия примут вид:

$$\Phi(0, t) = \mu_1(t)$$

$$\Phi(L, t) = \mu_2(t)$$

Вид зависимости функции Φ от координаты несущественен, поэтому выберем простейший вариант – линейную функцию:

$$\Phi(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{L}(\mu_2(t) - \mu_1(t));$$

Таким образом, общее решение произвольной краевой задачи можно найти как суперпозицию трех слагаемых:

$$\psi(x, t) = \psi_I + \psi_{II} + \psi_{III};$$

здесь ψ_I – общее решение однородной задачи с заданными начальными и однородными граничными условиями (этапы 1 и 2).

$\psi_{II} = \Phi(x, t)$ – частное решение однородной задачи с неоднородными граничными условиями и нулевыми начальными условиями (этап 4).

$\psi_{III} = \varphi(x, t)$ – частное решение неоднородной задачи с однородными граничными и нулевыми начальными условиями.

Раздел 5. Уравнения гидродинамики несжимаемой жидкости

5.1. Уравнения движения идеальной жидкости

Идеальной называется жидкость, в которой эффекты вязкости и теплопроводности пренебрежимо малы. Уравнения динамики идеальной жидкости были получены Эйлером.

1. Первое уравнение называется уравнением непрерывности и связано с законом сохранения массы.

Рассмотрим воображаемую поверхность S , внутри которой находится объём V и массой жидкости в этом объеме m :

$$m = \int_V \rho \cdot dV$$

(в общем случае ρ – переменная величина). Если жидкость течет, то масса внутри поверхности меняется.

Тогда быстрота изменения массы может быть записана так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV.$$

Причиной изменения массы в объеме V является поток массы через поверхность S :

$$\oint_S \rho \cdot \vec{g} \cdot d\vec{S}.$$

Величина $\rho \cdot \vec{g}$ – вектор плотности потока массы. Имеет смысл массы, которая переносится за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения вещества. Таким образом, эта величина является аналогом вектора плотности тока в электричестве.

Быстрота изменения массы в объеме V внутри S равна потоку этой массы через замкнутую поверхность S . Отсюда следует уравнение непрерывности в интегральной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = - \oint_S \rho \cdot \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (5.1)$$

Знак «-» связан с тем, что поток жидкости в направлении внешней нормали (за пределы S) приводит к уменьшению массы внутри поверхности.

Перейдем к дифференциальной форме записи. Согласно теореме Остроградского, можно записать:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} \cdot dV, \quad (5.2)$$

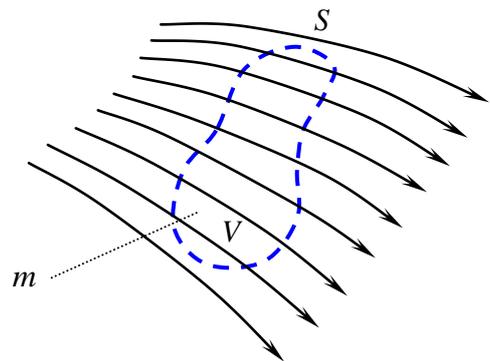


Рис. 5.1

откуда получаем:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = \int_V [-\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{g})] \cdot dV;$$

Интегральное соотношение выполняется для любых объёмов, поэтому подынтегральные выражения также равны:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{g}).$$

Таким образом, уравнение непрерывности для жидкости в дифференциальной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{g}) = 0; \quad (5.3)$$

2. Закон движения жидкости связан с законом сохранения импульса.

Рассмотрим в потоке жидкости элемент массой m , на стенки которого действуют силы давления $\vec{F}_{\text{дав.}}$.

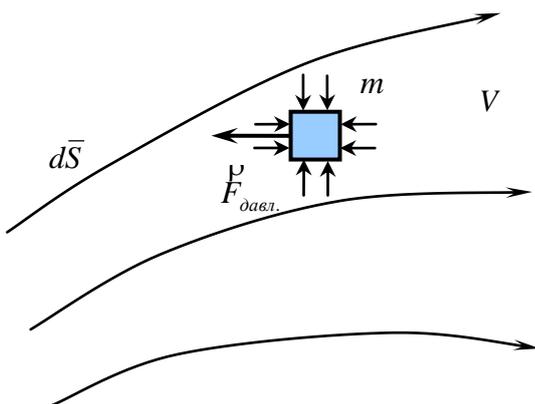


Рис. 5.2

Запишем для него 2-ой закон Ньютона:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{F}_{\text{дав.}}$$

Учтем, что:

$$m = \int_V \rho \cdot dV, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{g}}{dt}.$$

$$\text{Для } \vec{F}_{\text{дав.}} = \int_S d\vec{F} = -\int_S p \cdot d\vec{S},$$

поскольку $p = \frac{dF}{dS}$, а знак «-» связан с тем,

что вектор $d\vec{S}$ направлен наружу и противоположен внешним силам давления p .

Тогда перепишем 2-ой закон Ньютона в виде:

$$\left(\int_V \rho \cdot dV \right) \cdot \frac{d\vec{g}}{dt} = \left(\int_V \rho \cdot dV \right) \cdot \vec{g} - \oint_S p \cdot d\vec{S}. \quad (5.4)$$

Получили закон движения в интегральной форме.

Чтобы получить тот же закон в дифференциальной форме, используем для преобразования (5.4) теорему Остроградского для скаляра. Запишем её по аналогии с (5.2) в виде:

$$\oint_S B \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla B \cdot dV; \quad (5.2a)$$

«Набла» повышает ранг тензора, то есть в обеих частях уравнения (5.2a) стоят векторы. Получаем:

$$\int_V \left(\rho \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right) \cdot dV = \int_V \rho \cdot \mathbf{g} \cdot dV - \int_V \nabla p \cdot dV.$$

Это выражение верно для любых объемов, значит подынтегральные выражения слева и справа равны и можно перейти к дифференциальной форме записи:

$$\rho \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} = -\nabla p + \rho \cdot \mathbf{g}. \quad (5.5)$$

Поскольку жидкость течет, то поле скоростей зависит и от времени, и от координаты, поэтому полную производную по времени надо записать так:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \equiv \text{grad } f \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}$$

то

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \cdot f, \quad \text{где} \quad \mathbf{g} \cdot \nabla = g_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + g_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} + g_z \cdot \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.6)$$

Подставив (5.6) в (5.5) и разделив обе части уравнения на ρ , получим уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \mathbf{g} \quad (5.7)$$

3. Уравнение для энтропии (соответствует закону сохранения энергии).

Энтропия – мера неупорядоченности системы или, иначе, мера близости системы к состоянию термодинамического равновесия.

Рассмотрим элемент жидкости с единичной массой. Рассматривается именно единичная масса, а не объём, потому что, если среда сжимаема, то в один и тот же объём может поместиться различное количество вещества, и энтропия единичного объёма при сжатии жидкости будет меняться. Поскольку в идеальной жидкости отсутствует перенос импульса и энергии (тепла), то энтропия элемента с единичной массой меняться не будет, т.к. элемент оказывается теплоизолированным, поэтому:

$$\frac{dS}{dt} = 0. \quad (5.8)$$

Поскольку жидкость течет, то воспользуемся уравнением (5.6) и получим уравнение, имеющее смысл уравнения переноса энтропии:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \cdot S = 0. \quad (5.9)$$

Итак, движение идеальной жидкости изэнтропично (адиабатно).

Уравнения гидродинамики, как и всякие дифференциальные уравнения в частных производных требуют дополнительных условий двух типов:

- 1) начальные условия (т.е. начальные распределения полей скорости, температуры, концентрации примеси и так далее);
- 2) граничные условия.

Выделяют два типа границ: свободные и твердые (см. рис. 5.3). Профили скорости (штриховая линия) для идеальной жидкости и для реальной различны.



Рис. 5.3

Для вектора скорости \mathcal{V} выделяют 2 компоненты: нормальная к границе компонента \mathcal{V}_n и тангенциальная \mathcal{V}_τ .

Составляющие скорости для идеальной и реальной жидкости различны:

Условия на границе	Идеальная жидкость	Реальная жидкость
Условие непротекания (для обоих типов границ), формулируется для \mathcal{V}_n	$\mathcal{V}_n = 0$	$\mathcal{V}_n = 0$
Условие прилипания (на твердой границе), для реальной жидкости, формулируется для \mathcal{V}_τ	—	$\mathcal{V}_\tau = 0$ — т.к. в реальной жидкости имеет место вязкость.
На свободной границе (свободная граница не влияет на скорости потока) и на твердой для идеальной жидкости	$\frac{\partial \mathcal{V}_\tau}{\partial n} = 0$	$\frac{\partial \mathcal{V}_\tau}{\partial n} = 0$

Для температур граничные условия ставятся так же, как и для задач теплопроводности, которые рассмотрены выше.

5.2. Некоторые частные соотношения динамики идеальной жидкости

1. Условие постоянства расхода (верно как для идеальной, так и для реальной жидкости).

Выведем из уравнения (5.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V \rho \cdot dV = - \oint_S \rho \cdot \mathcal{G} \cdot dS^V = 0$$

Т.к. рассматривается стационарная задача, то левая часть уравнения будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \int_V \rho \cdot dV = 0,$$

тогда уравнение примет вид:

$$\oint_S \rho \cdot \mathcal{G} \cdot dS^V = 0, \quad (5.1a)$$

Рассмотрим трубу переменного сечения, по которой течет жидкость (рис. 5.4).

Скорость жидкости \mathcal{G}_2^V через сечение диаметра S_2 больше чем скорость \mathcal{G}_1^V , поскольку $S_1 > S_2$. Интеграл в (5.1a) берется по всей поверхности S . Он позволяет найти связь между величинами S_1 и S_2 , \mathcal{G}_1^V и \mathcal{G}_2^V :

$$\oint_S = \int_{бок} + \int_{S_1} + \int_{S_2}$$

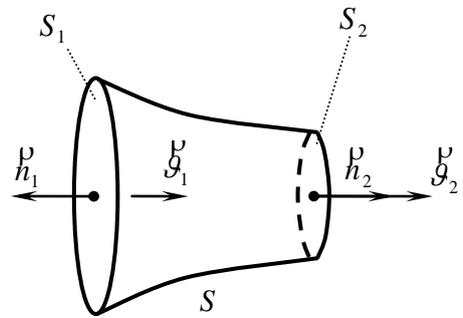


Рис. 5.4

Интеграл по боковой поверхности равен нулю в связи с условием непротекания, поэтому запишем интеграл по замкнутой поверхности в следующем виде:

$$\oint_S \rho \mathcal{G} \cdot dS^V = \int_{S_1} \rho_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot dS_1 \cdot \cos \alpha_1 + \int_{S_2} \rho_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_2.$$

Поскольку $\alpha_1 = 180^\circ$, а $\alpha_2 = 0$, то выражение примет следующий вид:

$$\oint_S \rho \mathcal{G} \cdot dS^V = - \int_{S_1} \rho_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot dS_1 + \int_{S_2} \rho_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot dS_2.$$

Для идеальной жидкости ρ и \vec{g} одинаковые по всему сечению, т.е. $\rho_1 \mathcal{G}_1 = const$ и $\rho_2 \mathcal{G}_2 = const$. Тогда получим:

$$\oint_S \rho \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\rho_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot S_1 + \rho_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot S_2.$$

В соответствии с (5.1a)

$$-\rho_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot S_1 + \rho_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot S_2 = 0,$$

или

$$\rho_1 \cdot \mathcal{G}_1 \cdot S_1 = \rho_2 \cdot \mathcal{G}_2 \cdot S_2. \quad (5.10)$$

Обе части этого выражения имеют смысл массы, которая протекает за единицу времени через сечение трубы. Величина $\rho \cdot \mathcal{G} \cdot S$ называется *массовым расходом*. Итак, массовый расход жидкости одинаков во всех сечениях потока.

Особый интерес представляет частный случай несжимаемой жидкости, т.е. $\rho = const$. Уравнение неразрывности в интегральной форме (5.1) примет вид:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (5.1a)$$

поскольку быстрота изменения массы будет равна нулю, даже если течение нестационарное:

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \left(\int_V \rho \cdot dV \right) = 0.$$

В дифференциальной форме уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\operatorname{div} \vec{g} = 0. \quad (5.3a)$$

Уравнение (5.10) для несжимаемой жидкости будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{G}_1 \cdot S_1 = \mathcal{G}_2 \cdot S_2. \quad (5.10a)$$

В обеих частях этого уравнения записан объем жидкости, который протекает в единицу времени через сечение потока. Величина $\mathcal{G} \cdot S$ называется *объемным расходом*. Итак, объемный расход несжимаемой жидкости постоянен вдоль потока.

2. Теорема Бернулли.

Выведем теорему Бернулли из уравнения Эйлера (5.7):

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + (\vec{g} \cdot \nabla) \cdot \vec{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \vec{g}.$$

Рассмотрим стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости, т.е. зависимости от времени нет, $\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} = 0$.

Тогда (5.7) примет следующий вид:

$$(\vec{g} \cdot \nabla) \cdot \vec{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \vec{g}. \quad (5.11)$$

Остальные слагаемые запишем в потенциальной форме, т.е. через градиент от некоторых скалярных полей, как, например, связаны в электростатике напряженность и потенциал: $\vec{E} = -\nabla \varphi$.

В векторном анализе доказывается, что:

$$\nabla \left(\frac{g^2}{2} \right) = \vec{g} \times \text{rot } \vec{g} + (\vec{g} \cdot \nabla) \cdot \vec{g}, \text{ поэтому } (\vec{g} \cdot \nabla) \cdot \vec{g} = \nabla \left(\frac{g^2}{2} \right) - \vec{g} \times \text{rot } \vec{g}.$$

В правой части уравнения (5.11) второе слагаемое запишем в виде:

$$\vec{g} = \nabla(-g \cdot z);$$

знак «-» связан с тем, что \vec{g} и \vec{z} противоположны. Наконец, первое слагаемое в правой части (5.11) приводится к потенциальной форме, если внести ρ под знак градиента, что верно в случае несжимаемой жидкости. В результате (5.11) приобретет следующий вид:

$$\nabla \left(\frac{g^2}{2} \right) - \vec{g} \times \text{rot } \vec{g} = \nabla \left(-\frac{1}{\rho} \cdot p \right) + \nabla(-g \cdot z).$$

В левой части сгруппируем все слагаемые, записанные в потенциальной форме, получим:

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \cdot p + g \cdot z + \frac{g^2}{2} \right) = \vec{g} \times \text{rot } \vec{g}. \quad (5.12)$$

Введем понятие линий тока – линий, вдоль которых движутся жидкие частицы. Для ламинарного течения вид линий тока изображен на рис. 5.5а; для турбулентного и хаотического движения – на рис. 5.5б. Здесь всюду рассматривается ламинарный режим течения жидкости.

Спроецируем векторное уравнение (5.12) на линию тока, т.е. на направление вектора \vec{g} . Поскольку $\vec{g} \times \vec{A} \perp \vec{g}$, где \vec{A} – любой вектор, получим:

$$\vec{g} \times \text{rot } \vec{g} = 0, \quad \nabla \left(\frac{1}{\rho} \cdot p + g \cdot z + \frac{g^2}{2} \right) = 0. \quad (5.12a)$$

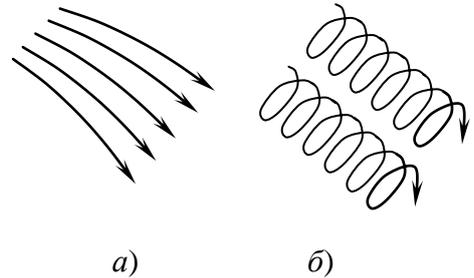


Рис. 5.5

Градиент равен нулю, значит, под знаком градиента находится константа:

$$\frac{1}{\rho} \cdot p + g \cdot z + \frac{g^2}{2} = const .$$

Домножив это выражение на ρ , получим теорему Бернулли.

Полное давление в несжимаемой жидкости постоянно вдоль линии тока:

$$p + g \cdot \rho \cdot z + \frac{\rho \cdot g^2}{2} = const ,$$

где p – внешнее давление.

$g \cdot \rho \cdot z$ – гидростатическое давление.

$\rho \cdot g^2 / 2$ – гидродинамическое давление, связанное с движением жидкости.

Рассмотрим трубу переменного сечения (рис. 5.6).

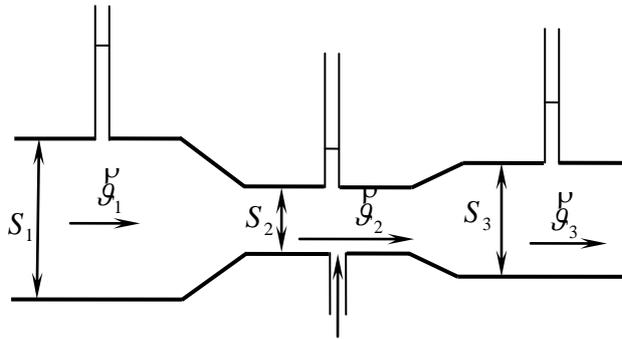


Рис. 5.6

Чем больше сечение, тем скорость меньше (см. (5.10)). Поэтому высота жидкости в трубках зависит от сечения: чем меньше сечение, тем меньше высота. Если вставить трубку снизу, то может оказаться, что выражение $\rho \cdot g \cdot h < 0$, тогда жидкость будет втягиваться в трубу. Это явление называется *инжекцией* и широко используется в технике.

5.3. Уравнение динамики вязкой жидкости

Запишем уравнение движения для скорости \vec{g} , исходя из аналогии между явлениями переноса – теплопроводности и вязкости, для первого из которых уравнение движения было получено выше (4.19a):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{g} \cdot \nabla) \cdot T = \chi \cdot \nabla^2 T . \quad (4.19a)$$

Для явлений вязкости имеет место:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{S} \cdot \frac{dp}{dt} = -\eta \cdot \nabla \mathcal{G}, \quad (5.13)$$

где σ_{xy} – плотность потока импульса (тензор вязких напряжений).

Скорость может меняться (следует из уравнения Эйлера) за счет того, что:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \sim -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}, \quad (5.14)$$

Подставив уравнение (5.13) в (5.14), получим:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \sim \nu \cdot \nabla^2 \overline{\overline{\sigma}}, \quad (5.15)$$

где $\overline{\overline{\sigma}}$ – тензор 2-го ранга.

ν – коэффициент кинематической вязкости.

В компонентах выражение (5.15) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial t} \sim \nu \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial y^2}.$$

Уравнение Эйлера (5.7) выглядело следующим образом:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \mathcal{G};$$

Величина \mathcal{G} в сплошной жидкой среде несущественна, поскольку элемент находится внутри слоев, т.е. она компенсируется силой давления нижних слоев, и ей можно пренебречь. А для того, чтобы учесть вязкие эффекты, добавим к этому уравнению величину $\nu \cdot (\partial^2 \mathcal{G} / \partial y^2)$ из (5.15), так что получим уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathcal{G}. \quad (5.16)$$

В итоге система уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости состоит из:

1. $\text{div} \mathcal{G} = 0$ (уравнение неразрывности),
2. $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot \mathcal{G} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathcal{G}$ (уравнение Навье–Стокса)
3. $\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot T = \chi \cdot \nabla^2 T + B,$

где B некоторая добавка, которая связана с вязким разогревом, и который равен:

$$B = \frac{\nu}{2 \cdot c_p} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathcal{G}_k}{\partial x_i} \right)^2.$$

Эта добавка очень мала, обычно её можно не учитывать.

Величины $(\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot \mathcal{G}$ и $(\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot T$ – нелинейные слагаемые, составляющие основную сложность при решении задач гидродинамики, поскольку из-за них не работает принцип суперпозиции.

5.4. Закон подобия и безразмерные критерии подобия. Устойчивость решений и бифуркации

1. При одних и тех же граничных условиях течения могут иметь разную структуру.

Рассмотрим смену режимов на примере течения Пуазейля.

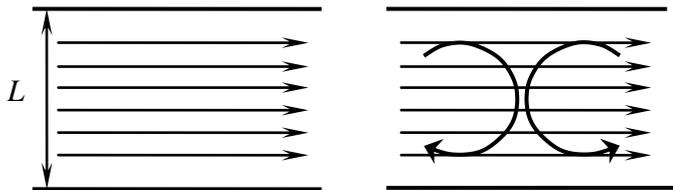


Рис. 5.7

Течение можно изменять, меняя:

- перепад давлений на концах трубы $\Delta p \rightarrow U_m$ (скорость меняется);
- расстояние между пластинами L ;
- вязкость $\eta = \nu \cdot \rho$.

Эксперимент показывает, что структура течения определяется не отдельно параметрами U, L, η, ρ , а их комбинацией $\frac{U \cdot L}{\nu}$, которая и определяет, когда произойдет переход от одной структуры течения к другой. Размерность этой комбинации:

$$\left[\frac{U \cdot L}{\nu} \right] = \frac{\frac{M}{c} \cdot M}{\frac{M^2}{c}} = 1$$

Таким образом, мы получили безразмерный критерий подобия для динамических задач – число Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{U \cdot L}{\nu}. \quad (5.17)$$

Подобие означает, что при различных значениях параметров U, L, ν течения будут иметь одинаковую структуру и интенсивность, если число Рейнольдса одинаково. Собственно, в этом и состоит закон подобия.

В связи с законом подобия уравнение движения удобно записать в обезразмеренной форме. Поговорим о процедуре обезразмеривания.

Скорость можно записать в виде:

$$\underline{g} \rightarrow \frac{g}{U} = \underline{g}, \quad \underline{g} = f_g\left(\frac{F}{L}; \text{Re}\right) \quad (5.18)$$

где \underline{g} – безразмерная скорость, U – характерный масштаб скорости (например, для течения Пуазейля – скорость на оси (плоскости) симметрична), L – характерный пространственный масштаб (расстояние между пластинами).

Аналогично введем безразмерные величины для давления, силы и времени.

Согласно теореме Бернулли:

$$p \sim \rho \cdot U^2.$$

Тогда

$$p \rightarrow \frac{p}{\rho \cdot U^2} = \underline{p}, \quad \underline{p} = f_p\left(\frac{F}{L}; \text{Re}\right), \quad (5.19)$$

где $\rho \cdot U^2$ – характерный масштаб для давления.

Для силы:

$$\underline{F} \rightarrow \frac{F}{\rho \cdot U^2 \cdot L^2} = \underline{F}, \quad \underline{F} = f_F\left(\frac{F}{L}; \text{Re}\right), \quad (5.20)$$

где $F = p \cdot S = \rho \cdot U^2 \cdot L^2$ – характерный масштаб силы.

Для времени, поскольку $t = \frac{S}{g} \rightarrow \frac{L}{U}$, можно записать:

$$t \rightarrow \frac{t}{\frac{L}{U}} = \underline{t}, \quad \underline{t} = f_t\left(\frac{F}{L}; \text{Re}\right),$$

где L/U – характерный масштаб времени.

Обезразмерим и само уравнение переноса скорости. Это позволяет оставить в уравнении единственный параметр, которым можно управлять:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial t} + (\underline{g} \cdot \nabla) \cdot \underline{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla \cdot p + \nu \cdot \nabla^2 \cdot \underline{g} \quad (5.16)$$

Так как

$$\underline{g} = \underline{g} \cdot U; \quad t = \underline{t} \cdot \frac{L}{U}; \quad \nabla = \underline{\nabla} \cdot \frac{1}{L}; \quad p = \underline{p} \cdot \rho \cdot U^2,$$

уравнение (5.16) примет вид:

$$\frac{U}{L} \cdot \frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{t}} + \frac{U^2}{L} \cdot (\underline{g} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{L} \cdot \rho \cdot U^2 \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{p} + \nu \cdot \frac{1}{L^2} \cdot U \cdot \underline{\nabla}^2 \cdot \underline{g}.$$

Разделив на $\frac{U^2}{L}$, получим уравнение движения в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{t}} + (\underline{g} \cdot \underline{\nabla}) \cdot \underline{g} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{p} + \frac{\nu}{L \cdot U} \cdot \underline{\nabla}^2 \cdot \underline{g}.$$

Для краткости в дальнейшем подчеркивания опускаем, понимая под всеми переменными безразмерные величины.

$$\frac{\partial \underline{g}}{\partial t} + (\underline{g} \cdot \nabla) \cdot \underline{g} = -\nabla \cdot p + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \nabla^2 \cdot \underline{g}. \quad (5.21)$$

Если число Рейнольдса одинаково для двух каких-либо подобных систем, то тела в них будут вести себя одинаково. Например, при испытании самолетов делают уменьшенную копию и помещают в аэродинамическую трубу, воздух через которую прогоняется с иной скоростью, чем та, с которой летит реальный самолет (можно вместо большой скорости использовать вещество с иной вязкостью, например, воду вместо воздуха).

Если рассмотреть уравнение гидродинамики в безразмерной форме, то переход для каждого течения от одного режима к другому будет происходить при фиксированных значениях числа Рейнольдса, независимо от того каковы реальные значения U, L, ν, ρ .

Рассмотрим течение Пуазеля.

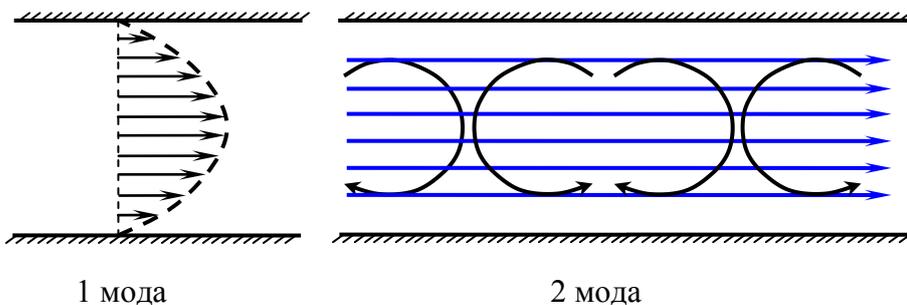


Рис. 5.8

Переход от первой моды ко второй происходит при некотором значении $Re_1 = const$ – закон подобия. Соответственно при некотором значении Re_2 произойдет переход от второй моды к третьей.

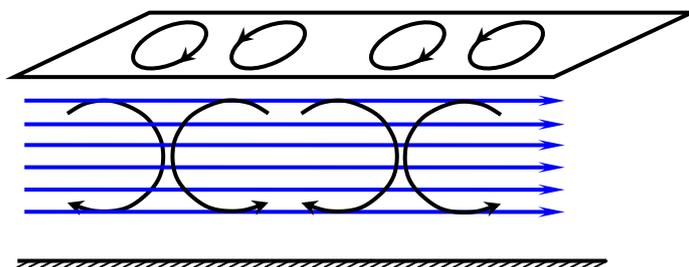


Рис. 5.9

Происходит разбиение валов на ячейки, за счет того что возникает закрутка вокруг вертикальной оси.

В некоторых течениях возможны спирали вертикального рода.

При некотором значении Re_3 происходит переход к четвертой моде. Четвертая мода оказывается нестационарной. Ячейки “дышат”, т.е. меняются во времени.

Рассмотрим течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами.

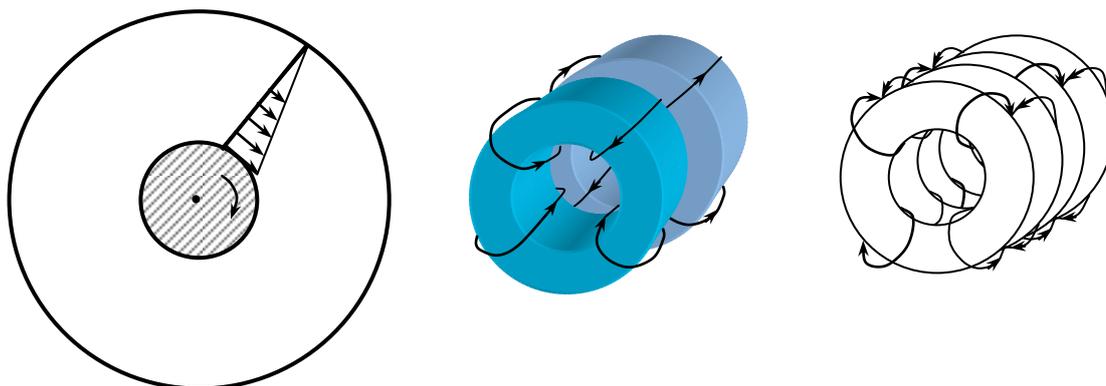


Рис. 5.10

Цилиндр вращается в смазке.

При значении Re_1 происходит переход ко второй моде.

Жидкость между цилиндрами разбивается на торы, причем в любом кольце возникает движение.

Третья мода трехмерная, в ней торы разбиваются на ячейки.

2. Выясним, почему происходит смена режимов.

Любая мода является решением уравнения движения и удовлетворяет граничным условиям. Это означает, что любая мода в принципе может реализовываться при любом значении числа Рейнольдса. Однако эксперимент показывает, что каждая мода реализуется только в конкретном диапазоне значений числа Рейнольдса. Каждая мода (каждое из этих решений) устойчива в своем диапазоне значений числа Рейнольдса и неустойчива при всех остальных. Существуют системы абсолютно устойчивые и системы, устойчивые по отношению к малому возмущению.

Пример абсолютно устойчивого решения – потенциальная яма.

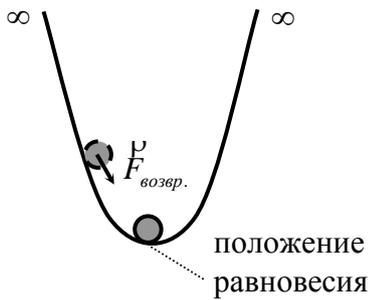


Рис. 5.11

В любом из этих состояний шарик устойчив. Существует некоторый диапазон энергии, в которой частица устойчива. Любой режим устойчив по отношению к какому-либо диапазону энергии. При различных значениях энергии системы устойчивыми оказываются различные решения. При переходе через критическое значение числа Рейнольдса, “старое” решение теряет свою устойчивость, и система самопроизвольно переходит в новое состояние.

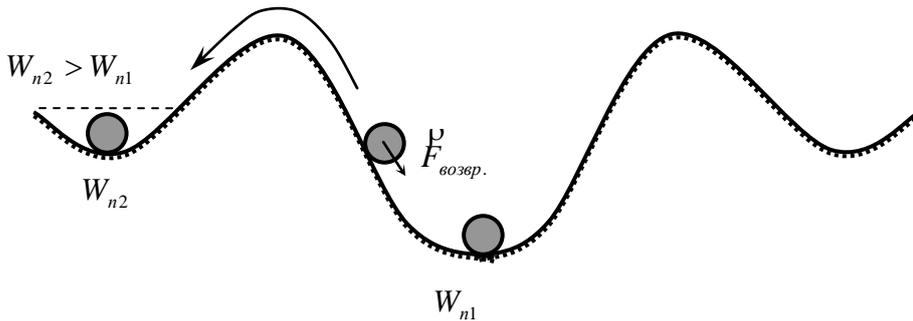


Рис. 5.12

Проиллюстрируем этот эффект на простой механической задаче о коническом маятнике, состоящем из массивного тела, закрепленного на конце легкого стержня, другой конец которого закреплен в шарнире, позволяющем всей системе свободно вращаться.

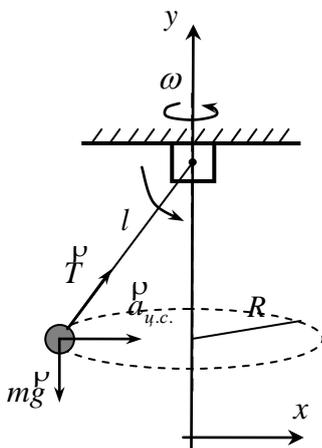


Рис. 5.13

Здесь m – масса груза, l – длина стержня, ω – скорость вращения системы вокруг вертикальной оси, T – сила упругости.

Требуется найти φ – угол отклонения стержня от вертикали, как функцию l, g, ω .

Запишем второй закон Ньютона:

$$m \cdot \bar{a}_{цс} = m \cdot \bar{g} + \bar{T} \quad (5.22)$$

В проекции на оси x, y уравнение (5.22) будет иметь вид:

$$m \cdot a_{цс} = T \cdot \sin \varphi \quad (5.22a)$$

$$0 = -m \cdot g + T \cdot \cos \varphi \quad (5.22б)$$

Из последнего уравнения находим:

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos \varphi},$$

кроме того

$$a_{у.с.} = \frac{g^2}{R} = \omega^2 \cdot R = \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi .$$

Подставляя эти выражения и в (5.22a), получаем:

$$\cos \varphi = \frac{g}{l \cdot \omega^2} .$$

Пусть, например, дано $l = 1\text{м}$, $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\omega = 5 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, тогда $\cos \varphi = 0,4$. То есть, чем больше скорость вращения системы, тем меньше $\cos \varphi$ и тем больше угол отклонения стержня от вертикали.

Если же $\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, то $\cos \varphi = 2,5$. Это означает, что рассчитанный режим при

$\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ уже не реализуется. Скорость еще больше нуля, а угол φ уже равен нулю.

Значит, существует критическое значение скорости вращения системы $\omega_{кр}$.

$$\cos \varphi = \frac{g}{l \cdot \omega^2} = 1 ,$$

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{l}} < \omega .$$

Для того, чтобы отклонение от вертикали происходило необходимо, чтобы выполнялось условие $\omega > \omega_{кр}$.

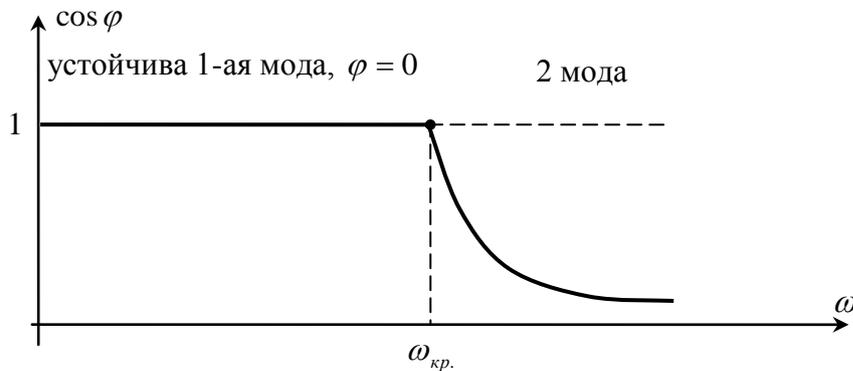


Рис. 5.14

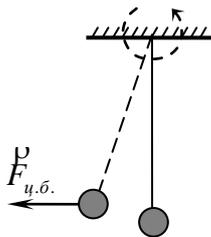


Рис. 5.15

В точке $\omega_{кр}$ происходит бифуркация, сама точка $\omega_{кр}$ называется точкой ветвления решения.

Если нет вибраций, маятник вращается бесконечно долго, скорость доходит до бесконечности. Это неустойчивое положение. Если шарик немного отклонится, его подхватит центробежная сила, реализуется вторая мода.

Раздел 5а. Решение задач гидродинамики

5а.1. Задачи динамики идеальной жидкости

Задача 1

Насосная станция города поддерживает давление воды в водопроводе на уровне 1-го этажа равное 5 атм. Определить (пренебрегая трением жидкости) скорость струи воды, вытекающей из крана на первом, втором и третьем этажах, если краны любого последующего этажа расположены на 4 метра выше кранов предыдущего. На какой этаж вода уже не поднимется?

Дано:

$$p_1 = 5 \text{ атм.} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$\Delta h = 4 \text{ м};$$

Найти: g_1, g_2, g_3 .

Решение

1 этаж:

Запишем теорему Бернулли:

$$P + \rho \cdot g \cdot \Delta h + \frac{\rho \cdot g^2}{2} = \text{const}.$$

Применительно для первого этажа это выражение будет выглядеть следующим образом:

$$P_1 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{\rho \cdot g_1^2}{2};$$

$\Delta h = 0$ – поскольку рассматривается 1 этаж.

Находим скорость жидкости на 1 этаже:

$$g_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot P_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^5}{10^3}} = 31,6 \text{ (м/с)}.$$

2 этаж:

Запишем теорему Бернулли:

$$P_1 = \rho \cdot g \cdot \Delta h + \frac{\rho \cdot g_2^2}{2}.$$

Отсюда выразим скорость:

$$g_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - \rho \cdot g \cdot \Delta h)}{\rho}} < g_1,$$

находим скорость жидкости на 2 этаже:

$$g_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (5 \cdot 10^5 - 10 \cdot 10^3 \cdot 4)}{10^3}} = 30,3 \text{ (м/с)}.$$

3 этаж:

Скорость на 3-ем этаже выражается следующим образом:

$$g_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - \rho \cdot g \cdot (3-1)\Delta h)}{\rho}},$$

находим скорость жидкости на 3 этаже:

$$g_3 = \sqrt{\frac{2 \cdot (5 \cdot 10^5 - 10 \cdot 10^3 \cdot 8)}{10^3}} = 28,9 \text{ (м/с)}.$$

n этаж:

Скорость на n -ом этаже выражается следующим образом:

$$g_n = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - \rho \cdot g \cdot (n-1)\Delta h)}{\rho}};$$

Найдем этаж, на который вода не попадет, т.е. $g_n = 0$:

$$g_n = \sqrt{\frac{2 \cdot (P_1 - \rho \cdot g \cdot (n-1)\Delta h)}{\rho}} = 0,$$

$$P_1 - \rho \cdot g \cdot (n-1)\Delta h = 0,$$

отсюда находим n :

$$n = 1 + \frac{P_1}{\rho \cdot g \cdot \Delta h} = 13,5;$$

т.е. на 14 этаж вода уже не попадет.

Ответ: $g_1 = 31,6 \text{ (м/с)}$, $g_2 = 30,3 \text{ (м/с)}$, $g_3 = 28,9 \text{ (м/с)}$, вода не попадет на 14 этаж.

Задача 2

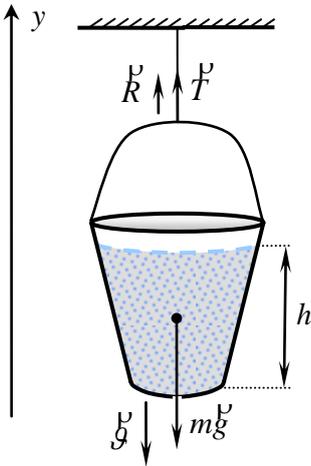


Рис. 5a.1

Сосуд с водой подвешен к потолку. Высота воды в сосуде h . На сколько изменится сила натяжения подвеса, если в дне сосуда открыть маленькое отверстие, из которого будет вытекать струя сечения S ? Плотность воды ρ .

Дано: h, S, ρ .

Найти: ΔT .

Решение

Сила натяжения подвеса меняется из-за появления реактивной силы.

$$T = m \cdot g \text{ — когда нет отверстия.}$$

Запишем 2 закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}, \text{ где } \vec{F} \text{ — равнодействующая всех сил.}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v},$$

$$\frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}.$$

Продифференцировав это уравнение, получим:

$$\frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}, \quad \text{где } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a},$$

$$m \cdot \vec{a} = \sum \vec{F} - \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}, \quad \text{где } -\vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} = \vec{R} \text{ — реактивная сила.}$$

$$\vec{R} = -\mu \cdot \vec{v}, \quad \text{где } \mu = \frac{dm}{dt} \text{ — массовый расход.}$$

Знак ”–“ связан с тем, что реактивная сила \vec{R} противоположна со скоростью \vec{v} .

Итак:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} + \vec{T}' + \vec{R}.$$

В проекции его на ось Y :

$$0 = -m \cdot g + T' + R,$$

$$T' = m \cdot g - |R| = m \cdot g - \mu \cdot \mathcal{G}.$$

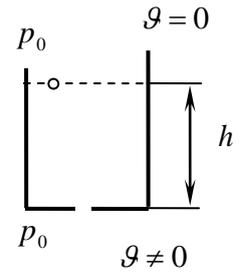


Рис. 5а.2

Запишем теорему Бернулли:

$$P + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}^2}{2} = const.$$

По закону сохранения:

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot h = P_0 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}^2}{2},$$

после сокращения на P и на ρ , получим:

$$g \cdot h = \frac{\mathcal{G}^2}{2} \quad \text{или} \quad \mathcal{G} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Массовый расход:

$$\mu = \rho \cdot \mathcal{G} \cdot s,$$

$$T' = m \cdot g - \rho \cdot s \cdot \mathcal{G}^2, \quad \text{где } m \cdot g = T,$$

тогда изменение силы натяжения подвеса:

$$\Delta T = \rho \cdot s \cdot \mathcal{G}^2 = \rho \cdot s \cdot 2 \cdot g \cdot h = 10^2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,5 = 1 \text{ (H)}.$$

Ответ: $\Delta T = 1 \text{ Н}$.

Задача 3

Насос должен подавать ежесекундно объем воды V на высоту h по трубе постоянного сечения S . Какова должна быть мощность насоса N , если считать плотность воды ρ .

Дано: V, h, S, ρ .

Найти: N .

Решение

Работа:

$$A = W_k + W_n;$$

$$W_k = \frac{m \cdot g^2}{2} = \frac{\rho \cdot V \cdot g^2}{2} = \frac{\rho \cdot V \cdot h^2}{2}, \quad \text{т.к. } g = \frac{h}{t} = h, \text{ за } e = 1 \text{ сек.}$$

$$W_n = \rho \cdot g \cdot h,$$

$$A = F \cdot h, \quad \text{где } F = P \cdot S,$$

P – давление на высоте $h = 0$.

$$P = \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot g^2}{2}.$$

Мощность насоса вычисляется:

$$N = A_1 = \left(\rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot g^2}{2} \right) \cdot S \cdot h,$$

где A_1 – работа в единицу времени; $V_1 = g \cdot s$ – объемный расход, откуда:

$$N = \rho \cdot S \cdot h \cdot \left(g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{V_1^2}{S^2} \right);$$

Ответ:
$$N = \rho \cdot S \cdot h \cdot \left(g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \frac{V_1^2}{S^2} \right).$$

Задача 4

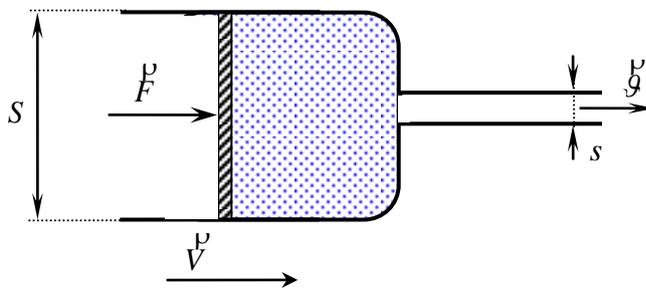


Рис. 5а.3

Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем, площадью S и выходным отверстием, площадью s , расположенным на оси цилиндра. Определить скорость истечения жидкости из насоса, если поршень под действием силы F перемещения с постоянной скоростью V . Плотность жидкости ρ .

Дано: S, s, F .

Найти: \mathcal{Q} .

Решение:

Запишем условие постоянства расхода:

$$V \cdot S = \mathcal{Q} \cdot s;$$

Запишем теорему Бернулли:

$$P + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot \mathcal{Q}^2}{2} = const;$$

Закон сохранения:

$$\frac{F}{S} + \frac{\rho \cdot V^2}{2} = \frac{\rho \cdot \mathcal{Q}^2}{2}, \text{ где } P = \frac{F}{S};$$

$$\frac{F}{S} + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{\mathcal{Q}^2 \cdot s^2}{S^2} = \frac{\rho \cdot \mathcal{Q}^2}{2}, \text{ где } V = \frac{v \cdot s}{S};$$

$$\mathcal{Q}^2 \cdot \frac{\rho}{2} \cdot \left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right) = \frac{F}{S};$$

Отсюда скорость:

$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{S \cdot \left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right) \cdot \rho}}.$$

$$\text{Ответ: } \mathcal{Q} = \sqrt{\frac{2 \cdot F}{S \cdot \left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right) \cdot \rho}}.$$

Задача 5

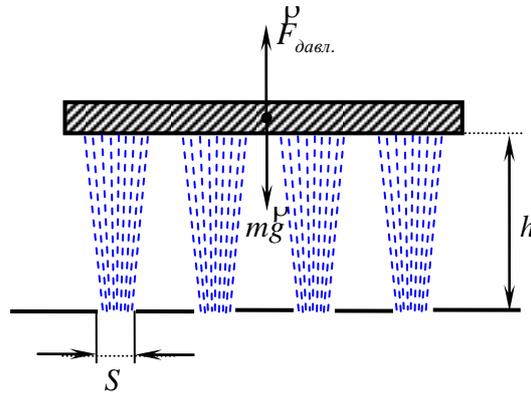


Рис. 5a.4

Плита массой m удерживается на месте в горизонтальном положении n струйками жидкости плотности ρ . Площадь отверстия S , скорость воды \mathcal{G}_0 . На какой высоте будет удерживаться плита?

Дано: $n, S, \mathcal{G}_0, \rho$.

Найти: h .

Решение:

Запишем условие равновесия, учитывая, что весь импульс уходит к платформе:

$$m \cdot g = F_{\text{давл.}} = \frac{dp}{dt} = \frac{dm \cdot \mathcal{G}}{dt},$$

преобразуем приращение массы dm следующим образом:

$$dm = N \cdot \rho \cdot dV = N \cdot \rho \cdot S \cdot dh = N \cdot \rho \cdot S \cdot \mathcal{G}_0 \cdot dt.$$

Найдем скорость \mathcal{G} по теореме Бернулли:

$$P_0 + \rho \cdot g \cdot 0 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}_0^2}{2} = P_0 + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}^2}{2},$$

после сокращения на ρ и P_0 получим:

$$\mathcal{G} = \sqrt{\mathcal{G}_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}.$$

Подставим полученные выражения в уравнение для условия равновесия:

$$m \cdot g = \frac{\sqrt{\mathcal{G}_0^2 - 2 \cdot g \cdot h} \cdot N \cdot \rho \cdot S \cdot \mathcal{G}_0 \cdot dt}{dt} = \sqrt{\mathcal{G}_0^2 - 2 \cdot g \cdot h} \cdot N \cdot \rho \cdot S \cdot \mathcal{G}_0;$$

выражаем отсюда h :

$$\frac{m^2 \cdot g^2}{N^2 \cdot \rho^2 \cdot S^2 \cdot \mathcal{G}_0^2} = \mathcal{G}_0^2 - 2 \cdot g \cdot h,$$

$$h = \frac{\mathcal{G}_0^2}{2 \cdot g} - \frac{m^2 \cdot g}{N^2 \cdot \rho^2 \cdot S^2 \cdot \mathcal{G}_0^2 \cdot 2}.$$

Ответ: $h = \frac{\mathcal{G}_0^2}{2 \cdot g} - \frac{m^2 \cdot g}{N^2 \cdot \rho^2 \cdot S^2 \cdot \mathcal{G}_0^2 \cdot 2}.$

Задача 6

Слой воды, в начальный момент, высотой d_0 скатывается с наклонной плоскости. На длине l высота уменьшается вдвое, на каком расстоянии высота уменьшится вчетверо?

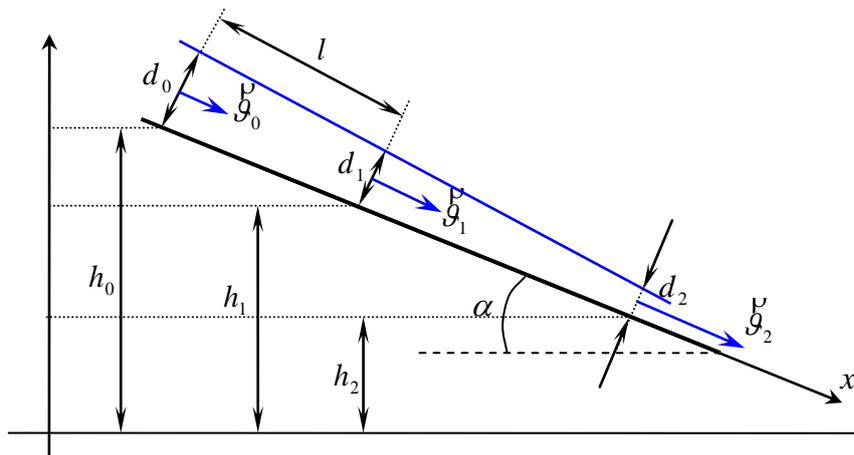


Рис. 5а.5

Дано: d_0, l .

Найти: l' .

Решение:

Запишем теорему Бернулли и условие постоянства расхода:

$$\mathcal{G} \cdot S = const, \quad p_0 + \rho \cdot g \cdot h + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}^2}{2} = const.$$

Применительно к задаче:

$$\mathcal{G}_0 \cdot d_0 = \mathcal{G}_1 \cdot d_1 = \mathcal{G}_2 \cdot d_2,$$

$$\mathcal{G}_0 \cdot d_0 = \mathcal{G}_1 \cdot \frac{d_0}{2} = \mathcal{G}_2 \cdot \frac{d_0}{4},$$

т.е. $\mathcal{G}_1 = 2 \cdot \mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_2 = 4 \cdot \mathcal{G}_0$.

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}_0^2}{2} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_1 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}_1^2}{2},$$

$$p_0 + \rho \cdot g \cdot h_0 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}_0^2}{2} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_2 + \frac{\rho \cdot \mathcal{G}_2^2}{2},$$

после сокращения на p_0 , ρ и подстановки \mathcal{G}_0 , уравнения примут вид:

$$g \cdot h_0 + \frac{\mathcal{G}_0^2}{2} = g \cdot h_1 + \frac{4 \cdot \mathcal{G}_0^2}{2},$$

$$g \cdot h_0 + \frac{\mathcal{G}_0^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{16 \cdot \mathcal{G}_0^2}{2}.$$

Умножим оба уравнения на 2:

$$2 \cdot g \cdot h_0 + \mathcal{G}_0^2 = 2 \cdot g \cdot h_1 + 4 \cdot \mathcal{G}_0^2,$$

$$2 \cdot g \cdot h_0 + \mathcal{G}_0^2 = 2 \cdot g \cdot h_2 + 16 \cdot \mathcal{G}_0^2,$$

приведем подобные:

$$2 \cdot g \cdot h_0 = 2 \cdot g \cdot h_1 + 3 \cdot \mathcal{G}_0^2,$$

$$2 \cdot g \cdot h_0 = 2 \cdot g \cdot h_2 + 15 \cdot \mathcal{G}_0^2.$$

Домножим первое уравнение на 5, а 2-е оставим без изменений:

$$10 \cdot g \cdot h_0 = 10 \cdot g \cdot h_1 + 15 \cdot \mathcal{G}_0^2,$$

$$2 \cdot g \cdot h_0 = 2 \cdot g \cdot h_2 + 15 \cdot \mathcal{G}_0^2.$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе:

$$8 \cdot g \cdot h_0 = 10 \cdot g \cdot h_1 - 2 \cdot g \cdot h_2.$$

Разделим на g обе части уравнения:

$$8 \cdot h_0 = 10 \cdot h_1 - 2 \cdot h_2.$$

Из прямоугольного треугольника, полученного на рисунке, можно получить следующие соотношения:

$$h_0 - h_1 = l \cdot \sin \alpha,$$

$$h_0 - h_2 = l' \cdot \sin \alpha.$$

Поделив первое уравнение на 2-е получим:

$$\frac{l}{l'} = \frac{h_0 - h_1}{h_0 - h_2};$$

Находим l' :

$$l' = l \cdot \frac{h_0 - h_2}{h_0 - h_1} = l \cdot \frac{h_0 - 5 \cdot h_1 + 4 \cdot h_0}{h_0 - h_1} = l \cdot \frac{5 \cdot h_0 - 5 \cdot h_1}{h_0 - h_1} = 5 \cdot l;$$

Ответ: $l' = 5 \cdot l$.

Задача 7

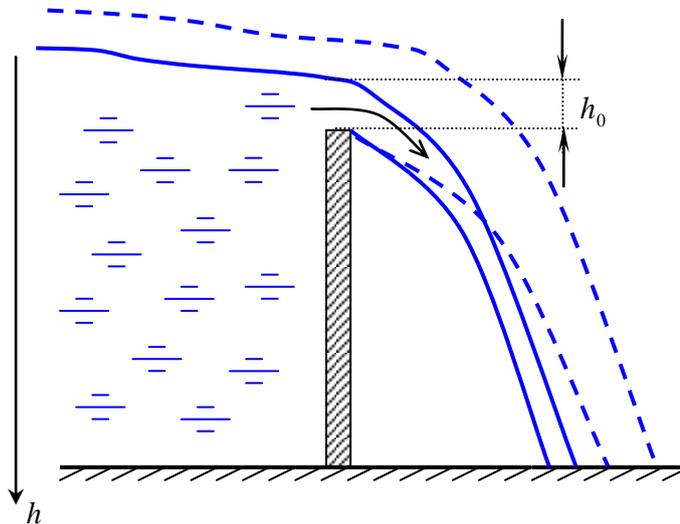


Рис. 5а.6

Во сколько раз увеличится сброс воды через широкую плотину, если высота уровня воды над кромкой увеличится в 2 раза.

Найти: Q'/Q .

Решение:

Здесь формулу расхода $\mathcal{Q} \cdot s$ использовать нельзя. Используем $\mathcal{Q} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$, где h – толщина верхнего слоя. Разобьем слой воды, текущей на препятствие, на элементы, скорость \mathcal{Q} для каждого элемента различна.

Запишем элементарный расход:

$$dQ = \mathcal{Q} \cdot dh = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot dh,$$

где dQ – элемент объемного расхода;

$$Q = \int_S dQ = \int_0^{h_0} \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \frac{2 \cdot \sqrt{2 \cdot g}}{3} \cdot h_0^{\frac{3}{2}};$$

Это выражение означает, что $Q \sim h_0^{\frac{3}{2}}$, а $h \rightarrow 2 \cdot h$, откуда следует: $Q \rightarrow 2 \cdot \sqrt{2} \cdot Q_0$,

$$\frac{Q'}{Q} = 2 \cdot \sqrt{2}.$$

Ответ: $Q'/Q = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Задача 8

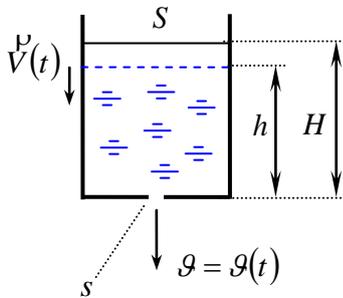


Рис. 5a.7

Цилиндрический сосуд с высотой H и площадью основания S заполнен водой. Начальный уровень воды в сосуде h . В дне сосуда имеется небольшое отверстие площадью s , так что вода вытекает. Найти закон изменения уровня воды $h = h(t)$. Определить, сколько времени вода будет вытекать из сосуда.

Найти: $h = h(t)$, t_* .

Решение:

Запишем условие постоянства объемного расхода в двух сечениях:

$$S \cdot V = g \cdot s,$$

(V и g – скорости движения поверхности воды и истечения струи через отверстие).

Скорость движения поверхности воды связана с уровнем формулой

$$V = -\frac{dh}{dt}.$$

Знак "-" здесь связан с тем, что уровень жидкости с течением времени понижается. Подставляя это выражение в формулу условия постоянства объемного расхода, получим дифференциальное уравнение относительно h :

$$S \cdot \frac{dh}{dt} = -s \cdot g, \text{ где } g = f(h).$$

Поделим это выражение на S и применим формулу для гидростатического давления:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}.$$

Разделяя переменные и интегрируя (пределы интегрирования соответствуют полному истеканию воды), получим:

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \int_0^{t_*} dt ;$$

После интегрирования имеем:

$$\sqrt{H} = \frac{s}{2 \cdot S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot t_* .$$

Находим полное время вытекания жидкости t_* :

$$t_* = \frac{2 \cdot \sqrt{H} \cdot S}{s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} = \frac{S}{s} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} .$$

Проинтегрируем выражение для массового расхода для мгновенных значений h и t :

$$\int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot \int_0^t dt .$$

После интегрирования получаем закон изменения уровня воды:

$$\sqrt{H} - \sqrt{h} = \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t ,$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t ,$$

$$h = \left(\sqrt{H} - \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t \right)^2 = H - 2 \cdot \sqrt{H} \cdot \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} \cdot t + \frac{s^2}{S^2} \cdot \frac{g}{2} \cdot t^2 ,$$

то есть поверхность жидкости опускается с постоянным ускорением, направленным противоположно скорости. Иначе говоря, это движение является равнозамедленным.

Коэффициент $2\sqrt{H} \cdot \frac{s}{S} \cdot \sqrt{\frac{g}{2}} = \frac{s}{S} \cdot \sqrt{2gH}$ имеет смысл скорости V_0 , с которой жидкость движется в начальный момент времени, при этом величина ускорения определяется формулой:

$$a = \left(\frac{s}{S} \right)^2 \cdot g = const .$$

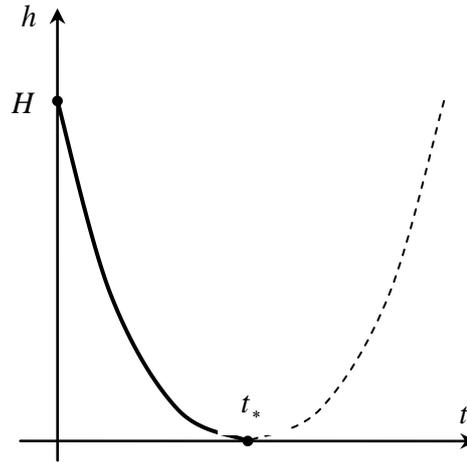


Рис. 5a.8

Найдем экстремум зависимости $h(t)$:

$$V = \frac{dh}{dt} = 0.$$

Это условие минимального (из физических соображений понятно, что нулевого) уровня жидкости. Скорость истекания жидкости в момент времени, соответствующий вершине параболы:

$$\frac{s}{S} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} + \left(\frac{s}{S}\right)^2 \cdot g \cdot t_m = 0,$$

где $t_m = t_*$ — значение времени, соответствующее минимальному (нулевому) уровню воды. Отсюда вновь получаем:

$$t_m = \frac{S}{s} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}.$$

5a.2. Течение Куэтта между параллельными движущимися плоскостями

Примем, что $T = const$, тем самым ограничимся 2-мя уравнениями динамики. Рассмотрим слой жидкости между двумя параллельными движущимися плоскостями (рис. 5a.9):

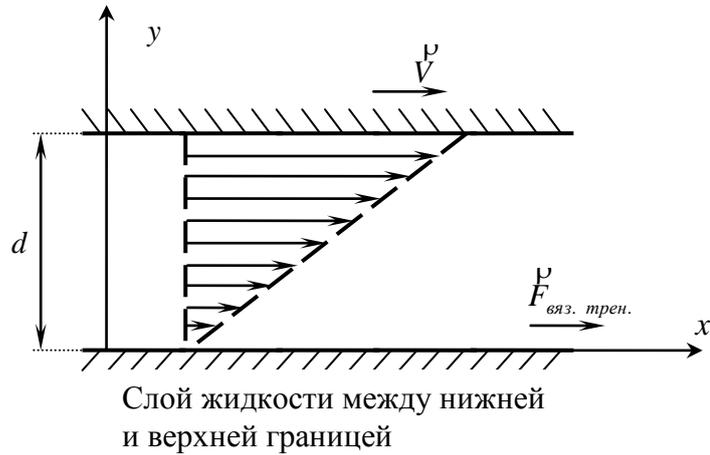


Рис. 5а.9

где

- d – толщина слоя жидкости.
- V – скорость движения верхней границы.
- $F_{вяз. трен.}$ – сила вязкого трения.

Поскольку существует эффект прилипания, то чем ближе к нижней границе, тем скорость меньше. Зависимость скорости от поперечной координаты, как будет показано ниже, линейная.

1. При не слишком больших скоростях движения, течение жидкости является плоскопараллельным, то есть вектор скорости имеет только одну иксовую компоненту:

$$\mathbf{v}(y; 0; 0),$$

С учетом этого, уравнение непрерывности примет вид:

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0,$$

Составляющая скорости по осям y и z здесь равны нулю, т.е.:

$$\frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0,$$

а значит и составляющая по оси x то же будет равна нулю:

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = 0;$$

Из этого следует, что:

$$\vartheta_x = const(x).$$

Составляющая не зависит от координаты x , но зависит от координаты y :

$$g_x = f(y).$$

Рассмотрим отдельно нелинейное слагаемое, расписав его в компонентах:

$$\left(\frac{\rho}{g} \cdot \nabla \right) \cdot g = \begin{bmatrix} g_x \cdot \frac{\partial g_x}{\partial x} + g_y \cdot \frac{\partial g_x}{\partial y} + g_z \cdot \frac{\partial g_x}{\partial z} \\ g_x \cdot \frac{\partial g_y}{\partial x} + g_y \cdot \frac{\partial g_y}{\partial y} + g_z \cdot \frac{\partial g_y}{\partial z} \\ g_x \cdot \frac{\partial g_z}{\partial x} + g_y \cdot \frac{\partial g_z}{\partial y} + g_z \cdot \frac{\partial g_z}{\partial z} \end{bmatrix} = 0$$

Скорость направлена по направлению x , а в проекции на остальные оси она равна нулю, кроме того, мы рассматриваем стационарную задачу, поэтому и производная по времени тоже будет равна нулю:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

В проекции на ось x уравнение Навье–Стокса будет иметь следующий вид:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2}, \quad (5a.1)$$

Движение создается за счет того, что движется верхняя пластина и жидкость прилипает к ней, поэтому градиент давления отсутствует:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

С учетом этого, уравнение (5a.1) примет следующий вид:

$$\nabla^2 g = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} = 0; \quad (5a.2)$$

Решением дифференциального уравнения (5a.2) является следующая линейная функция:

$$g = C_1 + C_2 \cdot y,$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий:

на нижней границе ($y = 0$): $g = 0$,

на верхней границе ($y = d$): $g = V$.

Отсюда,

$$\begin{aligned} \text{если } \vartheta(0) = 0, \text{ то } C_1 = 0, \\ \text{если } \vartheta(d) = V, \text{ то } C_2 = V/d. \end{aligned}$$

Таким образом, для стационарной задачи зависимость скорости от координаты y выглядит следующим образом:

$$\vartheta(y) = \frac{V}{d} \cdot y. \quad (5a.3)$$

Получилась прямая пропорциональная зависимость, которая и изображена на рисунке.

Найдем силу, с которой движущаяся среда действует на стенку:

$$F_{\text{вяз. трен.}}^y = \sigma_{xy} \cdot S, \quad (5a.4)$$

где

$F_{\text{вяз. трен.}}^y$ – сила вязкого трения.

σ_{xy} – компонента тензора вязких напряжений (касательное напряжение), которая равна:

$$\sigma_{xy} = \eta \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right),$$

С учетом этих преобразований, уравнение (5a.4) примет следующий вид:

$$F_{\text{вяз. трен.}}^y = \eta \cdot \left(\frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \right) \cdot S = \eta \cdot \frac{V}{d} \cdot S.$$

5а.3. Течение Пуазейля в плоском слое

Рассмотрим две плоские границы, расстояние между которыми $2h$:

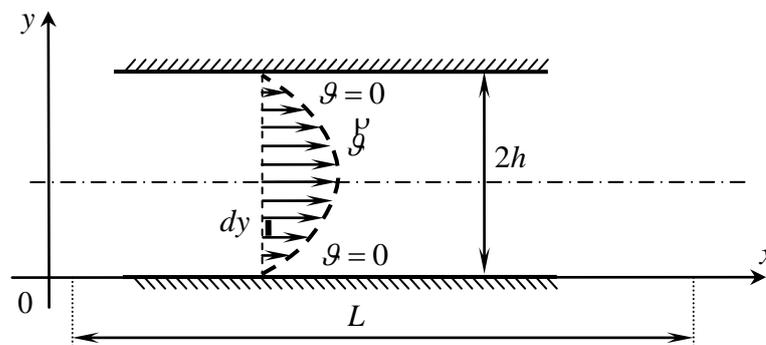


Рис. 5а.10

Жидкость течет потому, что на концах трубы создается перепад давлений Δp . Т.е. создается градиент давления:

$$\text{grad } p = \frac{\Delta p}{L}.$$

Это явление называется прокачкой.

Благодаря условию прилипания, профиль скорости представляет собой параболу.

Докажем это из уравнения неразрывности и уравнения Навье–Стокса:

Будем считать, что вдоль оси z ничего не меняется, т.е. задача однородна:

$$g_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0;$$

С учетом этого, уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} = 0,$$

а уравнение Навье–Стокса останется без изменений:

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + (\mathbf{g} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{g} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 \mathbf{g}; \quad (5a.5)$$

При небольших градиентах давления поле скорости примет следующий вид:

$$\mathbf{g}(g_x; 0; 0)$$

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} = 0, \quad g_x = \text{const}(x, z),$$

Таким образом, икс-овая компонента скорости является функцией от игрека:

$$\mathbf{g}(g(y); 0; 0) \quad (5a.6)$$

Будем рассматривать стационарную задачу, т.е. ламинарное течение жидкости? Из уравнения (5a.5) переходим к скалярной форме записи в проекции на ось x :

$$\left(g_x \frac{\partial}{\partial x} + g_y \frac{\partial}{\partial y} + g_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot g_x = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot g_x \quad (5a.7)$$

Уравнения гидродинамики в отличие от рассмотренных ранее нелинейные. В этом и заключается сложность их решения. Скорость не меняется вдоль оси x , а давление

меняется. Величина dp/dx постоянна для бесконечной трубы, и поэтому справедливо следующее:

$$\text{grad } p = \frac{\Delta p}{L};$$

С учетом условия (5а.6), уравнение (5а.7) переписется в виде:

$$v \cdot \frac{\partial^2 g_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\Delta p}{L},$$

Разделив обе части этого уравнения на величину v , заметив так же, что $p v = \eta$, получим:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L}, \quad (5а.8)$$

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{L} = \text{const};$$

Если правая часть уравнения (5а.8) постоянна, то функция g – квадратичная функция. Поэтому можно сразу записать решение:

$$g_x(y) = C_1 + C_2 \cdot y + \frac{\Delta p}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot y^2, \quad (5а.9)$$

Учитывая разные давления в начале и конце слоя, перепишем уравнение (5а.9) в виде:

$$g_x(y) = C_1 + C_2 \cdot y - \frac{|\Delta p|}{2 \cdot \eta \cdot L} \cdot y^2 \quad (5а.10)$$

Коэффициент при переменной y^2 оказался отрицательным, поскольку давление вдоль оси x падает. Парабола, изображающая профиль скорости (рис. 5а.10), направлена выпуклостью вверх.

Коэффициенты при 1-й и 0-й степенях y (C_1 и C_2) найдем с помощью граничных условий:

на границе работает условие прилипания:

$$g|_h = 0, \quad g|_{-h} = 0 \text{ э}$$

Уравнение (5а.10), с учетом условия на верхней границе ($y = h$), переписется в виде:

$$g_x(h) = C_1 + C_2 h - \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2 = 0, \quad (5а.11)$$

А с учетом на нижней границе ($y = -h$) в виде:

$$\mathcal{G}_x(-h) = C_1 - C_2 h - \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2 = 0. \quad (5a.12)$$

Отсюда получаем систему 2-х уравнений (5a.11) и (5a.12) для определения C_1 и C_2 .

Из разности уравнений для верхней и нижней границы получим:

$$2C_2 h = 0, \quad C_2 = 0.$$

Из суммы этих уравнений получим:

$$2C_1 - \frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot h^2 = 0, \quad C_1 = \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2,$$

Окончательное решение выглядят следующим образом:

$$\mathcal{G}_x(y) = \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2 - \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot y^2 = \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right). \quad (5a.13)$$

Получаем, что профиль скорости имеет вид параболы, обращенной в направлении более низкого давления и симметричный относительно центральной плоскости слоя.

Максимальное значение скорости \mathcal{G}_m достигается при условии $y = 0$:

$$\mathcal{G}_m = \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2.$$

Обобщенный ответ будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{G}(\mathcal{G}(y); 0; 0), \quad \mathcal{G}(y) = \mathcal{G}_m \left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right), \quad \mathcal{G}_m = \frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot h^2. \quad (5a.14)$$

1. Вычислим расход жидкости через сечение канала (единичной по оси z ширины).

Объемный расход вычисляем по формуле:

$$Q = \mathcal{G} \cdot s,$$

Поскольку \mathcal{G} зависела от y , то разобьем канал по высоте на элементы высотой dy и запишем элементарный расход жидкости через сечение dy :

$$dQ = \mathcal{G}(y) \cdot dy,$$

Найдем функцию расхода, проинтегрировав это уравнение по высоте трубы. Для этого воспользуемся условиями симметрии y и четности $\mathcal{G}(y)$:

$$Q = \int_{-h}^h \mathcal{G}(y) \cdot dy = 2 \int_0^h \mathcal{G}_m \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \cdot dy = 2 \mathcal{G}_m \left[y \Big|_0^h - \frac{1}{h^3} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h \right] = 2 \mathcal{G}_m \left[h - \frac{1}{3h^2} \cdot h^3 \right] = 2 \mathcal{G}_m \frac{2}{3} h$$

С учетом уравнения (5а.14) наше уравнение примет вид:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot \frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot h^3. \quad (5а.15)$$

2. Вычислим силу вязкого трения, действующую на единичную поверхность стенки:

$$F_x = \sigma_{xy} \cdot s = \eta \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial x} \right) = \eta \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y} = \eta \cdot \mathcal{G}_m \left(-\frac{2y}{h^2} \right),$$

Применим тензор вязких напряжений σ_{xy} для поверхности трубы.

$$F_x = \sigma_{xy} \Big|_{y=h} \cdot s = \eta \cdot v_m \left(-\frac{2y}{h^2} \right) \Big|_{y=h} = \eta \cdot v_m \frac{2}{h} = \eta \frac{2}{h} \cdot \frac{|\Delta p| \cdot h^2}{2\eta L} = \frac{|\Delta p|}{L} \cdot h.$$

Таким образом, чем больше перепад давления, тем сильнее нужно держать трубу.

5а.4. Течение Пуазейля в круглой трубе

1.

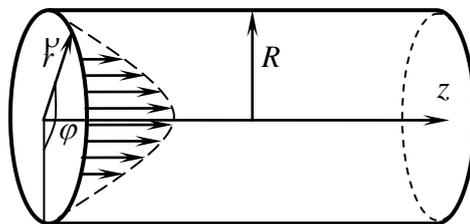


Рис. 5а.11

Выберем направление движения жидкости справа налево. Для малых скоростей и малых перепадов давлений справедливо:

$$\mathcal{G}(0; 0; \mathcal{G}_z), \quad \mathcal{G}_z = f(r),$$

Для всех остальных случаев возникают 2-е и 3-е моды и уравнение будет иметь более сложный вид. Перейдем к уравнению Навье–Стокса в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + (\mathcal{G} \cdot \nabla) \cdot \mathcal{V} = \frac{1}{\rho} \cdot \nabla \rho + \nu \cdot \nabla^2 \mathcal{G},$$

Для нашей стационарной задачи первое слагаемое в левой части обращается в 0, второе слагаемое также обращается в 0, т.к. рассматриваем плоскопараллельное течение жидкости.

Запишем проекцию этого уравнения на ось z , с учетом, что давление вдоль оси z падает:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \left(-\frac{|\Delta p|}{L} \right) + \nu \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial r} \right),$$

Перейдем к полным производным:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{|\Delta p|}{\eta L},$$

Проинтегрируем это уравнение, предварительно разделив переменные, получим:

$$\begin{aligned} d \left(r \cdot \frac{d\mathcal{G}}{dr} \right) &= -\frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot r \cdot dr, \\ r \cdot \frac{d\mathcal{G}}{dr} &= -\frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1, \\ \frac{d\mathcal{G}}{dr} &= -\frac{|\Delta p| \cdot r}{2\eta L} + \frac{C_1}{r}, \\ d\mathcal{G} &= \left(-\frac{|\Delta p|}{2\eta L} \cdot r + \frac{C_1}{r} \right) dr, \\ \mathcal{G}(r) &= -\frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2. \end{aligned}$$

Коэффициент при параметре r^2 отрицателен, значит, парабола обращена выпуклостью в сторону области наименьшего давления. Константы C_1 и C_2 определим из граничных условий:

Первое граничное условие – условие прилипания на поверхности трубы:

$$\mathcal{G}|_{r=R} = 0,$$

На оси симметрии системы при условии $r=0$ поставим условие ограниченности функции \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}|_{r=0} < \pm\infty,$$

Это условие приведет к выводу, что $C_1 = 0$, иначе получается условие $\ln r = \infty$. Определим C_2 из условия на нормальной твердой границе $r = R$:

$$\begin{aligned} g(r) &= -\frac{|\Delta p|}{\eta L} \cdot \frac{R^2}{4} + C_2 = 0, \\ C_2 &= \frac{|\Delta p| \cdot R^2}{4\eta L}, \\ g(r) &= \frac{|\Delta p| \cdot R^2}{4\eta L} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Профиль скорости в этой задаче, как и в предыдущей, оказался параболическим. Общее решение выглядит следующим образом:

$$\vec{u}(0; 0; g_z(r)), \quad g_z(r) = g_m \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right), \quad g_m = \frac{|\Delta p| \cdot R^2}{4\eta L}.$$

2. Вычислим объемный расход жидкости через сечение трубы.

Разобьем круговое сечение трубы на элементы, имеющие форму колец. Объемный расход каждого кольца вычисляется по формуле:

$$dQ = g \cdot ds = g \cdot 2\pi r \cdot dr,$$

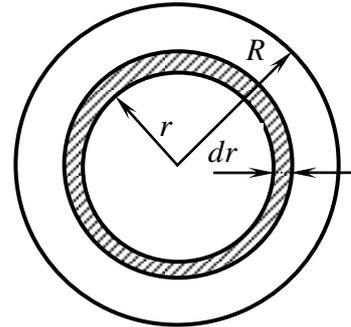


Рис. 5а.12

В азимутальном направлении наша задача однородна, поэтому интегрируем по радиусу:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R g(r) \cdot ds = \int_0^R g_m \cdot \pi \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot 2r \cdot dr = \pi \cdot g_m \cdot R^2 \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot d \left[\left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \\ &= \pi \cdot g_m \cdot R^2 \left[\left(\frac{R}{R} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R} \right)^4 \right] = \frac{1}{2} \pi \cdot R^2 \cdot g_m = s \cdot \langle g \rangle \end{aligned}$$

где $\langle g \rangle$ – средняя по течению скорость.

$$\langle g \rangle = \frac{g_m}{2}.$$

3. Найдем силу вязкого трения – силу, действующую на трубу единицы длины со стороны жидкости:

$$F_z|_{r=R} = \sigma_{xy} \cdot s = \eta \cdot \frac{\partial g}{\partial r} \Big|_{r=R} \cdot s = g_m \eta \cdot s \left(-\frac{2R}{R^2} \right) = \frac{2\eta \cdot g_m}{R} \cdot s = \frac{2\eta}{R} \cdot s \cdot \frac{|\Delta p| \cdot R^2}{4\eta L} = \frac{R \cdot |\Delta p| \cdot s}{2L},$$

В предыдущих задачах нелинейные члены не работали, рассмотрим одну из задач с нелинейностью.

5a.5. Пограничный слой. Уравнения Прандтля

1. Имеется твердое тело и обтекается потоком жидкости:

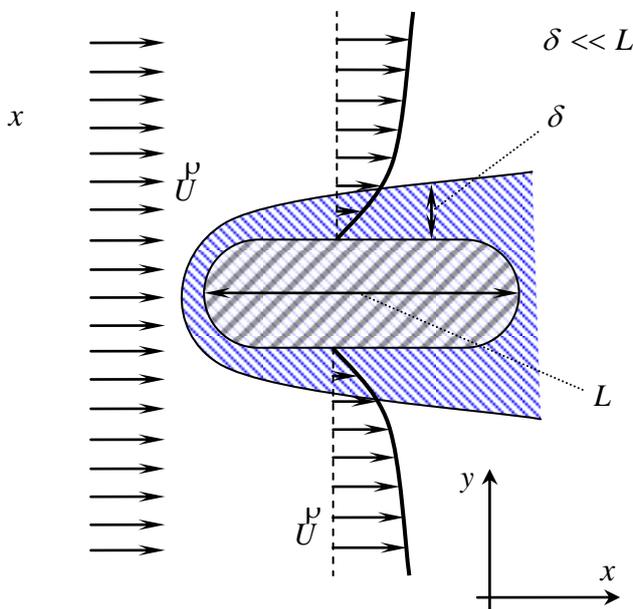


Рис. 5a.13

Поскольку на поверхности тела реализуется условие прилипания, то скорость жидкости у поверхности равна 0, а потом она постепенно превращается в $U = const$. Т.о. принято разделять на внешний (свободный, гидродинамический) и приграничный слой. Пограничный слой – это такой слой жидкости вблизи поверхности, в которой происходит изменение скорости потока от 0 до U .

Величина пограничного слоя δ является функцией x :

$$\delta = \delta(x),$$

Для него справедливо условие: $\delta \ll L$, где L – продольный размер тела.

Рассмотрим уравнение неразрывности для плоского случая (вдоль оси z задача однородная):

$$\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} = 0,$$

Оценим величины и перепишем это уравнение:

$$\partial \vartheta_x \sim \vartheta_x, \quad \partial \vartheta_y \sim \vartheta_y, \quad \partial x \sim L, \quad \partial y \sim \delta.$$

Отсюда следует, что по порядку величин следующие слагаемые равны:

$$\frac{\vartheta_x}{L} \sim \frac{\vartheta_y}{\delta}, \quad \vartheta_y \sim \vartheta_x \cdot \frac{\delta}{L},$$

Как уже отмечалось, препятствие достаточно протяженное, т.е. $\delta \ll L$. Отсюда, согласно нашим оценкам, $\delta/L \ll 1$. Значит:

$$\vartheta_y \ll \vartheta_x, \quad \vartheta_y \sim \vartheta_x \cdot \frac{\delta}{L},$$

Запишем уравнение Навье–Стокса в проекциях на x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \vartheta_y}{\partial t} + \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} + \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

Мы рассматриваем стационарную задачу, поэтому:

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta_y}{\partial t} = 0,$$

С учетом наших оценок, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} \sim \frac{\vartheta_x}{L^2} \ll \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} \sim \frac{\vartheta_x}{\delta^2}, \\ \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial x^2} \sim \frac{\vartheta_y}{L^2} \ll \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2} \sim \frac{\vartheta_y}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Все изменения происходили в глубине граничного слоя и поперек его, поэтому второй производной по x пренебрегли.

$$\vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} \sim \frac{\vartheta_x \cdot \vartheta_x}{L}, \quad \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_y}{\partial x} \sim \frac{\vartheta_x \cdot \vartheta_y}{L},$$

Отсюда:

$$\frac{\vartheta_x^2}{L} \gg \frac{\vartheta_x \cdot \vartheta_y}{L},$$

Аналогично можно записать:

$$\vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} \gg \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 \vartheta_y}{\partial y^2},$$

Все слагаемые y уравнения много меньше соответствующих слагаемых x , значит, то же должно относиться к слагаемым с давлением:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Это значит, что зависимость давления от координаты y слабая, т.е. можно считать, что $p \approx p(x)$. В результате слагаемым проекции давления на ось y можно пренебречь, тогда уравнение Навье–Стокса переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2}, \\ \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial [p(x)]}{\partial y}, \end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения зависит только от x , следовательно, левая часть также зависит только от x .

Запишем теорему Бернулли в пограничном слое:

$$p(x) + \rho gh + \frac{\rho \cdot \vartheta_x^2}{2} = const,$$

Возьмем производную по x :

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 2\vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x} = \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x},$$

Это уравнение справедливо для любой точки системы. Запишем это же уравнение для внешней части потока, для которой $\vartheta(x) = U$:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p(x)}{\partial x} = U \cdot \frac{\partial U}{\partial x},$$

В результате получим уравнение Прандтля для ламинарного стационарного двумерного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_y}{\partial y} &= 0, \\ \vartheta_x \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \cdot \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} &= U \frac{\partial U}{\partial x}, \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\mathcal{G}_x|_{\text{граница}} = 0,$$

$$\mathcal{G}_y|_{\text{граница}} = 0,$$

Условие сшивки решения с внешним слоем:

$$\mathcal{G}_x|_{\infty} = U,$$

$$\mathcal{G}_y|_{\infty} = 0,$$

При помощи уравнения Прандтля рассмотрим важный частный случай – пограничный слой на плоской прямой пластине.

5а.6. Задача Блауиса и метод последовательных приближений Швеца

Задача об обтекании бесконечно тонкой плоскости потоком с постоянной внешней скоростью.

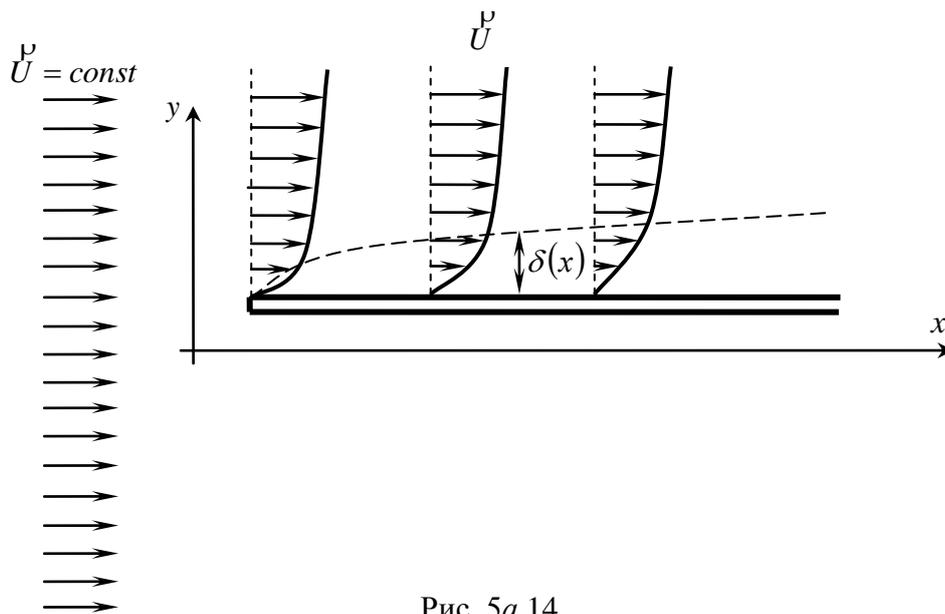


Рис. 5а.14

$U = const$ – скорость внешнего потока,
 $\delta(x)$ – толщина пограничного слоя.

За счет прилипания скорость внешнего потока на пластине равна нулю. С увеличением x плоскость влияет на все более толстый слой потока. Поэтому толщина пограничного слоя увеличивается.

Пограничный слой – область потока, в котором скорость меняется от нуля до U . Во внешней области она равна скорости набегающего потока.

Ссылаемся на систему уравнений Прандтля для ламинарного стационарного двумерного пограничного слоя:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial y} = 0,$$

$$\mathcal{G}_x \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x} + \mathcal{G}_y \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x} - \nu \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial y^2} = U \cdot \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$\mathcal{G}_x|_r = 0, \quad \mathcal{G}_y|_r = 0, \quad \mathcal{G}_x|_\infty = U, \quad \mathcal{G}_y|_\infty = 0.$$

Поскольку $U(x, y) = const$ система переписывается следующим образом:

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x}{\partial y^2} = \mathcal{G}_x \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x} + \mathcal{G}_y \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y}, \quad (5a.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}_y}{\partial y} = 0, \quad (5a.17)$$

Разбиваем поток на две зоны. На самом деле четкой границы пограничного слоя нет.

$$\mathcal{G}_x|_{y=0} = 0, \quad \mathcal{G}_y|_{y=0} = 0, \quad \mathcal{G}_x|_{y=\delta} = U.$$

Здесь $\mathcal{G}_x \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial x}$, $\mathcal{G}_y \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y}$ – нелинейные члены.

Так как выполняется $\mathcal{G}_x|_{y=\delta} = U$, то приближенно можно записать:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y}|_{y=\delta} = 0,$$

$$\mathcal{G}_y|_{y=\delta} = 0.$$

Все условия на границе пограничного слоя приближенные.

Это единственная задача в данном пособии, в которой нелинейные члены не равны нулю.

Рассмотрим приближенный метод решения – метод Швеца, аналогичный методу возмущений в квантовой механике.

Идея метода: скорость представляем, как ряд слагаемых, причем любое следующее слагаемое по порядку величины меньше предыдущего.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(2)} + \dots$$

Нелинейные члены малы, поскольку поток почти везде плоскопараллельный. В нулевом приближении считаем нелинейные члены равными нулю.

Из уравнения (5а.16) вычисляем $\mathcal{G}_x^{(0)}$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}_x^{(0)}}{\partial y^2} = 0, \quad \mathcal{G}_x^{(0)} = c_1 + c_2 \cdot y.$$

Константы интегрирования c_1 и c_2 определим из граничных условий – условия прилипания и $\mathcal{G}_x|_{y=\delta} = U$:

при $y = 0$ получаем

$$\mathcal{G}_x^{(0)} = c_1 = 0, \quad c_1 = 0,$$

при $y = \delta$ получаем

$$\mathcal{G}_x^{(0)} = c_2 \cdot \delta = U, \quad c_2 = \frac{U}{\delta(x)}.$$

Получили нулевое приближение для иксовой компоненты скорости:

$$\mathcal{G}_x^{(0)} = \frac{U}{\delta(x)} \cdot y \quad (5а.18)$$

Найдем нулевое приближение для игриковой компоненты скорости, подставив решение (5а.18) в уравнение неразрывности (5а.17):

$$d\mathcal{G}_y^{(0)} = -\frac{\partial \mathcal{G}_x^{(0)}}{\partial x} \cdot dy = -\left(-\frac{1}{\delta^2} \cdot \delta' \cdot U \cdot y\right) \cdot dy,$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\mathcal{G}_y^{(0)} = \frac{U \cdot \delta'}{\delta^2} \cdot \int y \cdot dy = \frac{U \cdot \delta'}{\delta^2} \cdot \frac{y^2}{2} + c_3.$$

Находим c_3 из условия прилипания ($y = 0$): $\mathcal{G}_y^{(0)} = c_3 = 0$.

Таким образом получаем:

$$\mathcal{G}_y^{(0)} = \frac{U \cdot \delta'}{\delta^2} \cdot \frac{y^2}{2}, \quad (5а.19)$$

Полученные выражения для $\mathcal{G}_x^{(0)}$ и $\mathcal{G}_y^{(0)}$, т.е. (5а.18) и (5а.19) подставляем в правую часть нелинейного уравнения (5а.16) и находим $\mathcal{G}_x^{(1)}$ – первое приближение:

$$\begin{aligned} \nu \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y^2} &= \mathcal{G}_x^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x^{(0)}}{\partial x} + \mathcal{G}_y^{(0)} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}_x^{(0)}}{\partial y}, \\ \nu \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y^2} &= \frac{U}{\delta} \cdot y \cdot \left(-\frac{\delta'}{\delta^2} \cdot U \cdot y\right) + \frac{U \cdot \delta'}{\delta^2} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot \frac{U}{\delta}, \end{aligned}$$

$$\nu \cdot \frac{\partial^2 \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\nu} \cdot U^2 \cdot \frac{\delta'}{\delta^3} \cdot y^2.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\mathcal{G}_x^{(1)} = -\frac{1}{2 \cdot \nu} \cdot U^2 \cdot \frac{\delta'}{\delta^3} \cdot \frac{y^4}{12} + c_4 \cdot y + c_5 \quad (5a.20)$$

Константы интегрирования c_4 и c_5 определим из граничных условий.

При $y = 0$ получаем

$$\mathcal{G}_x^{(1)} = c_5 = 0$$

При $y = \delta$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_x^{(1)} &= -\frac{1}{24 \cdot \nu} \cdot U^2 \cdot \delta' \cdot \delta + c_4 \cdot \delta = U, \\ c_4 \cdot \delta &= \frac{1}{24 \cdot \nu} \cdot U^2 \cdot \delta' \cdot \delta + U, \\ c_4 &= \frac{U}{\delta} + \frac{1}{24 \cdot \nu} \cdot U \cdot \delta'. \end{aligned}$$

Подставив полученные значения констант интегрирования c_4 и c_5 в (5a.20) получим:

$$\mathcal{G}_x^{(1)} = \frac{U}{\delta} \cdot y + \frac{U^2}{24 \cdot \nu} \cdot \delta' \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y^3}{\delta^3}\right), \text{ или } \mathcal{G}_x^{(1)} = \mathcal{G}_x^{(0)} + \frac{U^2}{24 \cdot \nu} \cdot \delta' \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y^3}{\delta^3}\right).$$

Продолжать итерационную процедуру не станем, поскольку наша основная цель – найти зависимость $\delta = \delta(x)$. Для этого воспользуемся дополнительными условиями на внешней границе пограничного слоя:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{G}_x}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0$$

Находим

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y} = \frac{U}{\delta} + \frac{U^2 \cdot \delta'}{24 \cdot \nu} \cdot \left(1 - \frac{4y^4}{\delta^3}\right),$$

При $y = \delta$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y} &= \frac{U}{\delta} + \frac{U^2 \cdot \delta'}{24 \cdot \nu} \cdot (1 - 4) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y} &= \frac{U}{\delta} - \frac{U^2 \cdot \delta'}{8 \cdot \nu} = 0, \end{aligned}$$

Разделив на U :

$$\frac{\partial \mathcal{G}_x^{(1)}}{\partial y} = \frac{1}{\delta} - \frac{U \cdot \delta'}{8 \cdot \nu} = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение для δ :

$$\frac{U \cdot \delta'}{8 \cdot \nu} = \frac{1}{\delta}, \quad \frac{d\delta}{dx} = \frac{8 \cdot \nu}{U} \cdot \frac{1}{\delta},$$

Разделяем переменные:

$$\delta \cdot d\delta = \frac{8 \cdot \nu}{U} \cdot dx,$$

проинтегрируем:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{8 \cdot \nu}{U} \cdot x + c_6.$$

В начале пограничного слоя, при $x = 0$, $\delta = 0$: $c_6 = 0$.

Тогда

$$\delta^2 = \frac{16 \cdot \nu}{U} \cdot x, \quad \delta = 4 \cdot \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}.$$

Таким образом, толщина пограничного слоя растет вдоль плоскости по корневому закону.

В заключение вычислим касательную компоненту тензора вязких напряжений, который характеризует силу, вовлекающую плоскость в движение (силу вязкого трения единичной поверхности).

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \cdot \frac{\partial g_x}{\partial y}|_{y=0} = \eta \cdot \left(\frac{U}{\delta} + \frac{U^2 \cdot \delta'}{24 \cdot \nu} \right),$$

так как $\delta' = \frac{d\delta}{dx} = 4 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{U}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$, то

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \eta \cdot U \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{U}{x \cdot \nu}} + \frac{U}{24 \cdot \nu} \cdot 4 \cdot \sqrt{\frac{\nu}{U}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \eta \cdot U \cdot \left(\sqrt{\frac{U}{\nu \cdot x}} + \sqrt{\frac{U}{\nu \cdot x}} \cdot \frac{1}{3} \right),$$

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \frac{1}{4} \cdot \eta \cdot U \cdot \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\frac{U}{\nu \cdot x}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{\eta^2 \cdot U^3}{\nu \cdot x}}.$$

Так как $\nu = \eta/\rho$ (ν – коэффициент кинематической вязкости), то выражение для компоненты тензора вязких напряжений примет вид:

$$\sigma_{xy}|_{y=0} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot \eta \cdot U^3}{x}}.$$

Итак, вязкое трение уменьшается с увеличением x по корневому закону, т.к. с увеличением x градиент скорости в пограничном слое уменьшается (т.к. увеличивается толщина пограничного слоя).

Формула очень близка к точному решению. В точном решении коэффициент получается не $1/3$, а $0,332$. То есть метод Швеца обладает высокой сходимостью.

Литература

1. Колесниченко В.И., Бурдин В.В. Общая физика: учебн. пособие. Ч. IV. Гидродинамика и теплообмен – Пермь, Изд-во ПГТУ, 2011 – 167 с.
2. Крауфорд Ф. Волны. Берклевский курс физики. Т. 3. М: Наука, 1984. 511 с.
3. Паршаков А.Н. Физика колебаний: учебное пособие для вузов / А. Н. Паршаков. – Пермь: ПГТУ, 2008. – 249 с.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики : учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва: Изд-во МГУ Наука, 2004. – 736 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Тома 3-5: учебное пособие вузов / Д. В. Сивухин. – М.: Физматлит, 1996-2006.

Учебное издание

Д.В. Баяндин

Специальные разделы физики

*Конспект лекций по курсу
для студентов, обучающихся по направлению подготовки
12.03.03 «Фотоника и оптоинформатика»*

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 4.09.2017. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 3,5. Тираж 50 экз. Заказ № 113а/2017.

Отпечатано в Издательстве
Пермского национального исследовательского
политехнического университета.
Адрес: 614000, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 115.
Тел. (342) 219-80-33