

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

На правах рукописи

Шимановский Владимир Александрович

**РАЗРАБОТКА, ОБОСНОВАНИЕ И
ТЕСТИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ
ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ДИНАМИКИ СИСТЕМ СВЯЗАННЫХ
ТВЁРДЫХ ТЕЛ**

1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
Иванов Владимир Николаевич

Пермь – 2024

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Математические модели систем твёрдых тел со структурой дерева	15
1.1. Обзор литературы	15
1.2. Описание систем твёрдых тел	23
1.3. Кинематика систем твёрдых тел	26
1.3.1. Кинематика относительного движения смежных тел	26
1.3.2. Кинематика полной системы	29
1.4. Уравнения движения систем твёрдых тел в лагранжевых переменных	35
1.4.1. Уравнения движения в избыточных переменных	35
1.4.2. Проектирование уравнений движения на касательное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Лагранжа второго рода	37
1.4.3. Проектирование уравнений движения на ортогональное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Лагранжа первого рода	38
1.5. Уравнения движения систем твёрдых тел в гамильтоновых переменных	40
1.5.1. Расширенная система уравнений движения	40
1.5.2. Проектирование уравнений движения на касательное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Гамильтона	42
1.5.3. Проектирование уравнений движения на ортогональное подпространство возможных перемещений	44
Выводы по главе 1	45

Глава 2. Методы разрешения редуцированных уравнений движения	48
2.1. Постановка задачи	48
2.2. Разрешение уравнений движения методом Холецкого	52
2.2.1. Блочный алгоритм разложения Холецкого	52
2.2.2. Применение метода Холецкого для решения уравнений Лагранжа второго рода	56
2.2.3. Применение метода Холецкого для решения уравнений Лагранжа первого рода	59
2.3. Разрешение уравнений движения итерационным методом	62
2.3.1. Постановка задачи и метод решения	62
2.3.2. Основные свойства итерационного алгоритма	65
2.3.3. Согласование шага интегрирования уравнений движения с условием сходимости итерационного метода	77
2.3.4. Особенности применения итерационного алгоритма для разрешения уравнений движения систем твёрдых тел	79
Выводы по главе 2	80
Глава 3. Методы разрешения уравнений движения в избыточных переменных	82
3.1. Разрешение расширенной системы уравнений методом прогонки	82
3.1.1. Решение системы уравнений в лагранжевых переменных	83
3.1.2. Решение системы уравнений в гамильтоновых переменных	85
3.2. Разрешение расширенной системы уравнений с помощью L^TDL -разложения	87
3.2.1. Разложение матрицы системы на треугольные множители	88
3.2.2. Решение системы уравнений в лагранжевых переменных	91
3.2.3. Решение системы уравнений в гамильтоновых переменных	94
Выводы по главе 3	96

Глава 4. Эффективность алгоритмов компьютерного моделирования динамики систем твёрдых тел	97
4.1. Оценка вычислительных затрат алгоритмов моделирования систем твёрдых тел	98
4.1.1. Затраты при использовании уравнений Лагранжа второго рода	98
4.1.2. Затраты при использовании уравнений Лагранжа первого рода	102
4.1.3. Затраты при использовании итерационного алгоритма	104
4.1.4. Затраты при использовании уравнений движения в избыточных переменных	108
4.2. Сравнение эффективности алгоритмов моделирования динамики систем твёрдых тел	110
Выводы по главе 4	116
Глава 5. Комплекс программ для моделирования систем твёрдых тел	117
5.1. Комплекс программ Dynamics90	118
5.1.1. Структура комплекса	118
5.1.2. Блок описания	119
5.1.3. Блок уравнений движения	120
5.1.4. Блок моделирования	121
5.2. Программа D90 для моделирования динамики механических систем с отделяющимися элементами	122
5.2.1. Структура программы	122
5.2.2. Описание механической системы и порядка её функционирования	124
5.2.3. Выбор метода моделирования	127
5.2.4. Порядок работы с программой	129

5.2.5. Верификация программы	130
Выводы по главе 5	138
Заключение	140
Список литературы	143
Приложение А. Акты о внедрении результатов диссертационно- го исследования	164
Приложение Б. Оценка вычислительных затрат решения СЛАУ с разреженной матрицей системы	166
Приложение В. Интерфейс программы D90	169

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Математическое моделирование динамики механических систем широко используется в современной инженерной практике. Особую актуальность математическое моделирование приобретает при проектировании и расчёте поведения сложных технических систем, таких как управляемые космические аппараты, роботы, транспортные средства, изделия гражданского и специального машиностроения. Математическая модель, адекватно отражающая состояние и эволюцию системы, позволяет значительно сократить время испытаний нового образца, затраты на их организацию, оценить целесообразность внесения тех или иных конструктивных изменений, прогнозировать поведение системы в зависимости от вариаций конструкции и условий её применения, получить данные о параметрах, которые трудно измерить в эксперименте (например, реакции, усилия в шарнирах, ускорения в различных точках), провести оптимизацию параметров узлов системы.

Для широкого класса технических систем при построении математической модели в качестве расчётной схемы выбирают систему абсолютно твёрдых тел (СТТ), соединённых с помощью идеальных, голономных или неголономных, стационарных или нестационарных связей. Требование адекватности модели приводит к необходимости увеличивать число тел или подсистем, на которые разбивается механическая система, что приводит к практической невозможности получения полных уравнений движения (УД) с помощью методов классической механики, связанных с составлением и дифференцированием кинетической, потенциальной энергий, функции Гамильтона или энергии ускорений. Кроме того, с ростом размерности математической модели увеличивается время моделирования.

Разнообразие схем конструкций механических систем требует разработки общего подхода к их математическому моделированию, а также создания уни-

версальных комплексов программ, которые могли быть применены для исследования как существующих, так и проектируемых технических систем. Такие комплексы программ должны предоставлять возможность создавать математические модели, требуемые для различных задач проектирования, адекватно описывать перемещения узлов конструкции в широком диапазоне изменения конструктивных параметров, включать в себя вычислительные алгоритмы, имеющие близкую к линейной зависимость временных затрат от размерности механической системы.

Большой вклад в развитие и популяризацию ориентированных на применение ЭВМ методов математического моделирования СТТ внесли следующие учёные: Е. А. Арайс, В. Г. Бойков, В. В. Величенко, А. Ф. Верещагин, М. К. Вукобратович, А. С. Горобцов, Ф. М. Диментберг, В. А. Коноплёв, А. И. Лурье, Д. Ю. Погорелов, А. И. Телегин, Т. R. Kane, Е. J. Haug, P. E. Nikravesh, W. O. Schiehlen, A. A. Shabana, J. Wittenburg и др.

Несмотря на значительные успехи, достигнутые в предыдущие годы по адаптации методов классической механики к численным методам исследования СТТ, приведших к созданию универсальных комплексов программ, таких как ADAMS, EULER, FRUND, MBDyn, RecurDyn, SIMULIA, UM, исследования в этой области нельзя считать завершёнными. Универсализм существующих комплексов программ обладает определёнными недостатками, к которым можно отнести их высокую стоимость, ограниченность набора типов взаимодействия между телами, снижение быстродействия при увеличении сложности математической модели. Применение зарубежного программного обеспечения в настоящее время дополнительно ограничивается требованиями импортозамещения. Это вынуждает инженеров разрабатывать собственные специализированные программы для моделирования процессов функционирования вновь создаваемых конструкций. Кроме того, необходимость сокращения сроков проектирования, усложнение задач, решаемых инженерами при создании новой техники, требует новых алгоритмов, ускоряющих расчёты динамического пове-

дения технических систем. Поэтому разработка машинно-ориентированных методов создания математических моделей СТТ, которые могут быть применены в инженерной практике, а также соответствующего программного обеспечения является одной из важных проблем современного математического моделирования.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что развитие компьютерных методов формирования математических моделей технических систем, допускающих идеализацию в виде СТТ, является актуальной проблемой. Используемые в этих методах алгоритмы из различных разделов математики (линейной алгебры, векторного анализа, вычислительной математики и др.) требуют дальнейшей детальной проработки и усовершенствований.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является систематизация методов построения математических моделей СТТ, анализ преимуществ и недостатков существующих подходов и на его основе разработка собственных эффективных алгоритмов, ориентированных на численные исследования и снижающих трудоёмкость компьютерного моделирования.

Для достижения цели работы были поставлены следующие задачи:

- на основе единого подхода провести классификацию различных способов построения математических моделей СТТ;
- вывести матричную форму УД СТТ со структурой дерева с голономными идеальными связями в гамильтоновых переменных, удобную для численного моделирования;
- разработать алгоритмы разрешения УД СТТ относительно старших производных, позволяющие ускорить вычислительный процесс компьютерного моделирования;
- провести анализ и сравнение временных затрат различных алгоритмов формирования УД СТТ и разрешения их относительно старших производных;
- предложить алгоритм выбора оптимального метода моделирования в

зависимости от характеристик механической системы: количества тел, числа степеней свободы в шарнирах и структуры взаимосвязей;

— создать инструментарий для автоматизации построения математических моделей СТТ;

— разработать комплекс программ моделирования динамики механических систем с отделяющимися частями.

Методология и методы исследования. Работа выполнена в соответствии с общими положениями теории математического моделирования, принципов системного подхода. В качестве основного аппарата исследования использованы методы теоретической механики (кинематики и динамики твёрдого тела, динамики голономных механических систем), матрично-геометрические методы в механике, методы линейной алгебры и вычислительной математики.

Научная новизна.

1. Выведена новая форма УД СТТ в гамильтоновых переменных, отличающаяся расширенным составом переменных состояния, рекуррентной структурой и ориентированная на численное моделирование. Обосновано место этих уравнений среди существующих УД СТТ.

2. Разработан новый итерационный алгоритм разрешения УД СТТ с положительно определённой матрицей системы относительно старших производных, в котором в качестве предобусловливателя используется приближение к обратной обобщённой матрице инерции.

3. Разработан новый алгоритм приведения расширенных форм УД СТТ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в нормальной форме, отличающийся применением симметричного L^TDL -разложения.

4. Проведены анализ и сравнение вычислительной трудоёмкости различных подходов к моделированию СТТ. Указаны условия, при которых тот или иной метод оказывается наиболее эффективным.

5. Впервые предложена методика выбора оптимального метода формирования уравнений движения и приведения их к нормальной форме ОДУ в зави-

симости от структуры СТТ, числа тел и типов шарниров.

Теоретическая и практическая значимость. Разработанный соискателем комплекс алгоритмов повышает эффективность компьютерного моделирования СТТ. Созданная на основе этих алгоритмов библиотека подпрограмм позволяет формировать в различных формах УД СТТ и генерировать программы их численного моделирования. Результаты, полученные в процессе исследования, позволили сформировать рекомендации по выбору оптимального подхода к компьютерному моделированию новых технических систем.

Предложенные математические модели, алгоритмы и вычислительные программы реализованы в комплексе программ, используемом при проектировании новых изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы» (г. Пермь).

Результаты, изложенные в диссертации, могут быть применены при разработке программного обеспечения компьютерного моделирования сложных механических систем.

Положения, выносимые на защиту:

1. Новая матричная форма уравнений движения систем связанных твёрдых тел со структурой дерева, записанная относительно обобщённых и декартовых скоростей, обобщённых и декартовых импульсов.
2. Итерационный алгоритм приведения системы дифференциальных уравнений с положительно определённой матрицей к нормальной форме, необходимой для использования стандартных подпрограмм интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Алгоритм разрешения уравнений движения систем связанных твёрдых тел, записанных в форме системы дифференциально-алгебраических уравнений, основанный на L^TDL -разложении и факторизации Холецкого.
4. Теоретические оценки вычислительных затрат существующих и разработанных соискателем численных алгоритмов моделирования СТТ, которые включают в себя формулы для вычисления количества арифметических операций в зависимости от структуры системы, числа тел и типов шарниров.

5. Комплекс программ моделирования механических систем с переменной кинематической структурой.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: EUROMECH Colloquium 495. Advances in simulation of multibody system dynamics (Bryansk, 18–21 February 2008); Международной конференции «Шестые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 23–27 июня 2008 г.); Международной конференции «Седьмые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 20–24 июня 2011 г.); Международной конференции «Восьмые Окуневские чтения» (Санкт-Петербург, 25–28 июня 2013 г.); XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 19–24 августа 2019 г.); XXVIII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2–5 октября 2019 г.); Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 15–19 июня 2020 г.); X Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук Республики Саха (Якутия) (Якутск, 16–20 июля 2023 г.); XXXII Всероссийской конференции «Математическое моделирование в естественных науках», (Пермь, 4–7 октября 2023 г.).

Работа полностью представлена и обсуждена на семинарах кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий ПГНИУ (рук. доц. В. Н. Терпугов), кафедры математического моделирования систем и процессов ПНИПУ (рук. проф. П.В. Трусков), кафедры механики композиционных материалов и конструкций ПНИПУ (рук. доц. П.В. Писарев), Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеев).

Результаты диссертационной работы внедрены в практику работы ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ПАО «Мотовилихинские заводы». Материалы диссертационной работы используются в семестровом курсе «Компьютерное моделирование систем твёрдых тел», читаемом на механико-математическом факультете ПГНИУ магистрантам первого года обучения направления

«Механика и математическое моделирование».

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 38 печатных работах, среди которых 6 статей в рецензируемых журналах из списков ВАК, WoS и SCOPUS, 6 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, 8 статей в российских периодических изданиях, 10 статей в сборниках трудов конференций и 9 тезисов докладов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка и приложений. Работа изложена на 177 страницах, содержит 26 рисунков и 16 таблиц. Библиографический список включает 207 наименований.

Во **Введении** представлено обоснование актуальности исследования, отражены практическая значимость, научная новизна, цель и задачи исследования, дано краткое описание работы по главам.

В **первой главе** представлен анализ научных достижений в области математического моделирования СТТ. Основной упор делается на исследования, ориентированные на использование вычислительной техники. Проанализированы преимущества и недостатки существующих методов и их реализаций с точки зрения их общности и вычислительной эффективности. На основании обзора сделан вывод об актуальности выбранного направления исследования, определены задачи, требующие решения.

Кроме того, в первой главе построены рекуррентные формулы, предназначенные для автоматизированного компьютерного формирования УД СТТ из простейших основных блоков, которые описывают структуру, масс-инерционные, геометрические и кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров). Для описания кинематики СТТ введена матрица кинематической структуры и исследованы её свойства. Использование этой матрицы позволило записать УД СТТ относительно расширенного состава переменных состояния в компактной форме. Показана связь выведенных УД СТТ относительно расширенного числа неизвестных с классическими уравнениями Лагранжа первого и

второго рода.

Также, в первой главе представлена новая матричная форма УД СТТ со структурой дерева. Уравнения содержат обобщённые координаты, обобщённые импульсы (импульсы Пуассона), квазискорости и множители Лагранжа. Приведены два способа редукции этой формы УД к системам уравнений, содержащих меньшее число неизвестных.

Во **второй главе** рассмотрены вопросы разрешения относительно старших производных УД СТТ в форме уравнений Лагранжа первого и второго рода, а также редуцированных уравнений в импульсах Пуассона. В каждом из таких случаев задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной положительно определённой матрицей.

Представлены два новых метода разрешения СЛАУ с матрицами системы различной степени разреженности, обусловленной топологической структурой СТТ. Для решения разреженных СЛАУ предложена блочная версия метода квадратных корней (метода Холецкого), в которой не происходит заполнение факторов Холецкого. Для СЛАУ с плотно заполненными матрицами системы разработан обратный итерационный алгоритм разрешения УД механических систем относительно ускорений при их численном интегрировании. В данном алгоритме помимо нахождения решения системы вычисляется матрица, обратная к матрице системы, которая используется на следующем шаге численного интегрирования для улучшения начального приближения и начального направления поиска. Доказано утверждение, что предложенный итерационный алгоритм сходится за конечное число шагов.

В **третьей главе** рассматриваются методы разрешения УД СТТ, описываемых системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Особенностью этих систем является то, что они являются СЛАУ относительно своих групп параметров с сильно разреженными и симметричными матрицами систем, которые не являются положительно определёнными. Представлено два метода разрешения этих систем уравнений относительно старших производных.

Первый метод основан на несимметричном гауссовом исключении для блочных ленточных систем; второй — на симметричном гауссовом исключении.

В **четвёртой главе** проводится анализ вычислительных затрат рассмотренных в предыдущих главах алгоритмов компьютерного моделирования динамики СТТ. Выполнено сравнение эффективности методов по объёму арифметической работы и времени выполнения одного шага численного интегрирования. Построен алгоритм выбора оптимальной схемы в зависимости от характеристик механической системы: числа тел, числа степеней свободы в шарнирах и структуры взаимосвязей.

В **пятой главе** представлен комплекс программ для моделирования динамики изделий специального машиностроения, математические модели которых могут быть представлены СТТ. Отличительной особенностью данного комплекса программ является то, что весь процесс функционирования механической системы разбивается на определённое число временных отрезков (этапов), на которых она может иметь разные кинематические структуры. В основу комплекса программ легли разработанные в диссертации математические методы и численные алгоритмы моделирования динамики СТТ.

В **Заключении** изложены основные результаты выполненного исследования, описаны перспективы возможного применения разработанных методов на практике, намечены пути дальнейших исследований.

Глава 1

Математические модели систем твёрдых тел со структурой дерева

В настоящей главе рассматриваются методы формирования УД механических систем, расчётная схема которых может быть представлена в виде связки абсолютно твёрдых тел со структурой дерева.

Дан анализ научных достижений в области математического моделирования СТТ. Основной упор делается на исследования, ориентированные на использование вычислительной техники. Проанализированы преимущества и недостатки существующих методов и их реализаций с точки зрения их общности и вычислительной эффективности.

Выписаны основные кинематические и динамические соотношения для СТТ, отличительной особенностью которых является рекуррентность и матричный способ записи.

Принимая во внимание большое разнообразие методов формирования УД СТТ, в данной главе рассматриваются только те методы, которые ориентированы на численное моделирование.

1.1. Обзор литературы

Теоретические исследования в области автоматизации процессов формирования математических моделей СТТ начались сразу же с появлением ЭВМ в 50-х годах XX века.

Разнообразие созданных к настоящему времени методов компьютерного моделирования СТТ объясняется широким спектром возможных структур исследуемых систем, формами записи кинематических соотношений и выбором различных принципов механики для вывода уравнений. Методы разделяются

по степени общности описания динамики СТТ, по уровню автоматизации формирования модели, по объёму и характеру требуемой подготовительной работы исследователя.

Значительный вклад в разработку ориентированных на применение ЭВМ методов формирования математических моделей СТТ внесли: Е. А. Арайс, В. М. Дмитриев [2, 3, 52, 97], А. В. Банщикова, Л. А. Бурлакова, В. Д. Иртегов [5, 11, 62, 104, 122], В. В. Величенко [17–22], А. Ф. Верещагин, Е. П. Попов [23, 24, 117], Й. Виттенбург [25, 197, 198], М. К. Вукобратович [28–30, 195, 201], А. С. Горбцов [33, 34, 40, 43, 44, 75, 103, 121], Ф. М. Диментберг, Е. И. Воробьёв [27, 48–50, 98], В. Ф. Журавлёв [58–61], В. А. Коноплёв [32, 76–83], Л. К. Лилов [91–93], А. И. Лурье [94], А. П. Маркеев [95, 96], Д. Ю. Погорелов [38, 55–57, 106–114, 194], Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков [51, 63, 115, 116, 123], А. И. Телегин [26, 126–130], Ф. Л. Черноусько [53, 134–138, 153], F. M. L. Amirouche [148–151, 200], R. Featherstone [155–161], T. R. Kane, D. A. Levinson [167, 168, 172], P. E. Nikravesh [171, 177–181], W. O. Schiehlen [146, 176, 188], A. A. Shabana [190, 191] и ряд других авторов.

Имеется большое число публикаций обзорного характера, в которых рассматриваются различные подходы к построению дифференциальных уравнений движения, проводится анализ полученных уравнений, даются сведения об алгоритмах и программах составления уравнений и моделирования динамики с помощью ЭВМ [6, 10, 63, 92, 105, 149, 160, 163, 174, 175, 187, 188, 191].

В настоящее время используется единый общий подход к формированию моделей СТТ, который включает в себя ряд этапов. На первом этапе производится декомпозиция исследуемой системы на простые подсистемы (абсолютно твёрдые тела, упругие твёрдые тела, простые цепочки тел, подсистемы со структурой дерева). Второй этап заключается в процедуре агрегирования моделей подсистем посредством наложения (учёта) связей между подсистемами в единую модель [25, 56, 66, 81, 92, 114].

Достоинство указанного подхода заключается в том, что модели структур

высших уровней формируются из моделей элементов низших уровней по определённым правилам (обычно посредством простых алгебраических операций). Однако проблема декомпозиции и агрегации элементов СТТ приводит к необходимости решения целого ряда достаточно специфических задач.

Прежде всего для систем многих тел возникает проблема описания топологической структуры взаимосвязей между телами системы. Эта проблема рассматривалась как самостоятельная задача в работах Й. Виттенбурга, Л. К. Лилова, В. А. Коноплёва [25, 81, 92]. Принципиально выделяются два основных вида топологического строения СТТ: системы со структурой дерева и системы с замкнутыми цепями. Значительная степень общности при решении задачи описания топологической структуры механических систем получена с использованием методов теории графов [25, 92]. В рамках этой схемы исследуемой системе ставится в соответствие ориентированный граф. Применение соответствующих этому графу матриц структуры (инцидентности, эффективных путей, фундаментальных циклов) позволяет формализовать процедуру определения структуры взаимосвязей для каждой конкретной СТТ и применять аппарат матричной алгебры для эффективной декомпозиции на подсистемы и последующего их агрегирования с учётом структуры графа СТТ.

Вторая задача — это выбор моделей подсистем. Как правило, в качестве подсистем выступают отдельные твёрдые тела. Используются стандартные модели свободного абсолютно твёрдого тела в различных параметрах состояния (обобщённых координатах, квазикоординатах, параметрах Эйлера или Родрига—Гамильтона) [25, 92, 94–96, 115, 136].

В последнее время характерно также привлечение моделей упругого твёрдого тела [34, 41, 44, 83, 92, 102, 151, 152, 182, 196]. Общим подходом к составлению уравнений кинематики и динамики систем с деформируемыми элементами являются методы дискретизации. Предполагается, что упругие деформации могут быть с приемлемой точностью аппроксимированы функциями конечно-го числа независимых переменных (упругих координат). В основном, введение

упругих тел осуществляется в рамках методик, реализованных авторами для систем с абсолютно твёрдыми телами.

Необходимо отметить, что в ряде работ [11, 56, 81, 128] в качестве подсистем рассматриваются не только единичные тела системы, но и соответствующим образом выделенные цепочки тел, построение математических моделей которых достаточно хорошо формализовано. Использование такого промежуточного уровня декомпозиции позволяет оптимизировать затраты на формирование моделей с большим числом тел и степеней свободы.

При моделировании СТТ наиболее остро встаёт вопрос создания формального аппарата вывода уравнений связей для достаточно сложных механических систем. Как отмечает ряд авторов [92, 94], в аналитической механике до сих пор не существует общих методов построения уравнений связей. Варианты решения этой задачи содержатся в работах В. А. Коноплёва, Д. Ю. Погорелова, А. С. Горбцова и других авторов [25, 42, 56, 80, 81, 85, 92, 123].

Непосредственно к задаче формирования уравнений связей примыкает проблема кинематического анализа и определения совокупности независимых параметров, описывающих состояние СТТ. Приводя обзор работ по кинематике СТТ, заметим, что в качестве основного классификационного критерия удобно выбрать тот математический аппарат, который используют авторы при записи кинематических соотношений. Прежде всего, это векторно-матричная форма [25–27, 29, 92, 98], метод блочных матриц [19, 90], аппарат расширенных матриц перехода [48, 87, 98, 170], метод винтов и дуальных матриц [27, 32, 81, 174]. Кроме того, существенные особенности в решении задачи кинематики вносит выбор исследователем того или иного способа описания взаимного положения тел в системе. Отметим следующие основные подходы к решению этой задачи: формализм Деннавита—Хартенберга [30, 74, 98, 200], использование углов Эйлера—Крылова [25, 29, 92], параметров Эйлера и Родрига—Гамильтона [25, 94, 199].

Необходимо отметить, что задачи построения уравнений связей и выбора координат, определяющих состояние исследуемой системы, в большинстве ра-

бот не выделяются авторами как самостоятельные и решаются неявно, с учётом специфики моделируемых систем на этапе записи основных кинематических соотношений и уравнений движения. В ряде работ проблема выбора независимых координат по заданным уравнениям связей рассмотрена более подробно [42, 89, 92, 94, 111, 147].

Следующим важным направлением исследований является поиск форм записи уравнений движения СТТ, удобных для компьютерного моделирования. При этом используется весь спектр методов и принципов теоретической механики.

Прежде всего, выделим работы, в которых основным инструментом выступает метод обобщённых координат. В работах [5, 11, 28, 29, 31, 104, 120, 122, 170] рассматриваются методы формирования динамических моделей СТТ в форме уравнений Лагранжа второго рода. Подчёркивается, что прямое применение формализма Лагранжа приводит к значительным вычислительным трудностям. Поэтому суть всех предлагаемых методик заключается в как можно более полном учёте структуры основных динамических характеристик (особенно кинетической энергии) и самих уравнений Лагранжа второго рода для некоторого класса систем (в основном со структурой дерева). В конечном счёте математические модели формируются на основе явных форм уравнений Лагранжа в обобщённых координатах.

К этой же группе следует отнести работы, связанные с применением других классических уравнений аналитической механики: уравнений Аппеля [24, 29, 37, 115] с построением энергии ускорений, уравнений Эйлера—Лагранжа [87, 104] в квазискоростях, на основе канонической формы записи уравнений движения [115, 183, 184], принципа Сулова—Журдена [13] и уравнений Нильсена [117, 162].

Ещё одна группа работ основана на методе учёта связей с использованием множителей Лагранжа [4, 14, 42, 55, 64, 103, 114, 124, 199]. Отметим универсальность такого способа и простоту формирования уравнений связей между

талами системы. Даже при использовании метода обобщённых координат в качестве основного авторы прибегают к методу множителей Лагранжа при учёте дополнительных связей. Применение множителей Лагранжа типично, например, в задачах моделирования систем с замкнутыми кинематическими цепями [25, 64].

В ряде исследований учёт связей между телами выполняется за счёт выбора системы независимых вариаций [12, 13, 25, 91–93, 167]. Уравнения движения выводятся из обобщённого принципа Даламбера, сформулированного для СТТ и записанного в терминах проекций поступательных и угловых скоростей тел. Указанные проекции скоростей выражаются через некоторый набор независимых квазискоростей так, чтобы уравнения связей были тождественно удовлетворены. В этом случае применение принципа Даламбера приводит к уравнениям динамики СТТ, не содержащих реакции связей. Например, для систем со структурой дерева в качестве независимых квазискоростей принимают производные независимых координат относительного движения [25, 92].

К этой же группе методов можно отнести ряд методик, близких по форме, но полученных на других теоретических основах. Прежде всего, отметим подход, основанный на использовании матрично-геометрических методов в механике, при котором уравнения в обобщённых координатах рассматриваются как проекции классических уравнений Ньютона на оси локального касательного базиса конфигурационного многообразия механической системы [17–19, 115].

Другой вариант решения задачи моделирования динамики СТТ разработан в исследованиях, посвящённых анализу пространственных движений кинематических цепей и механизмов с использованием геометрии линейчатого пространства, общей теории винтов и винтового исчисления [48, 50, 76–78, 81].

Заметим, что современные исследования проблемы построения уравнений динамики СТТ идут в направлении поиска новых форм записи, которые бы объединили достоинства известных ранее решений и удовлетворяли требованиям, возникающим в процессе использования математических моделей в зада-

чах управления и оптимизации технических систем, моделирования в режиме реального времени и др. [86, 88, 99–101, 126–128].

С точки зрения применения ЭВМ, методы математического моделирования механических систем можно разделить на две группы: методы формирования математических моделей в символьной форме и численно-итерационные методы.

Использованию систем аналитических вычислений (САВ) для создания моделей динамики СТТ в символьном виде посвящены работы [5, 15, 39, 62, 73, 118]. Методы этой группы служат инструментом для решения задач качественного исследования поведения систем, оптимизации и синтеза законов управления. Использование САВ позволяет существенно сократить затраты ручного труда исследователя, автоматизировать процессы аналитических выкладок на стадии моделирования.

В работах [45, 46, 54] представлены достаточно полные обзоры литературы по применению САВ на различных этапах вычислительного эксперимента, для решения проблем общей и прикладной механики. Особенности применения САВ в задаче моделирования динамики СТТ рассмотрены в работах [6, 73, 118]. Ряд работ по использованию САВ для моделирования динамики СТТ завершены созданием пакетов прикладных программ для ЭВМ [11, 62, 104, 122].

Если обратиться к современному состоянию проблемы, то изначальная ориентация на численную, компьютерную реализацию моделей привела к разработке специализированных методик моделирования, в которых проблемы теоретической механики переводятся в область реализации численных методов.

Оригинальная методика моделирования динамики механических систем путём прямой минимизации функционала в принципе наименьшего принуждения Гаусса на каждом шаге вычислительного процесса изложена в работах [23, 24, 117].

Отметим также подход к моделированию динамики СТТ, основанный на методах непосредственного численного интегрирования систем дифференциаль-

но-алгебраических уравнений [66, 119, 145, 154, 164, 166, 173, 176, 185, 186, 193]. В рамках этого подхода проблема учёта связей перемещается в область вычислительной математики и решается путём разработки специальных методов численного решения объединённых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений.

Здесь также упомянем работы, которые завершились созданием пакетов прикладных программ для ЭВМ [3, 7–9, 44, 52, 56, 64, 75, 97, 110, 125, 152, 176, 189].

Возрастание сложности моделируемых объектов обусловило необходимость создания эффективно работающего программного обеспечения, предназначенного для моделирования динамики механических систем с большим числом степеней свободы. При увеличении количества тел возникает проблема значительного роста числа арифметических операций при формировании и интегрировании систем ОДУ или ДАУ движения СТТ. Одним из способов решения этой проблемы является распараллеливание процесса моделирования на многоядерных процессорах [33, 34, 113, 121, 155, 161, 166, 169].

В процессе расширения круга исследований, связанных с решением задачи моделирования СТТ, стали появляться работы, в которых в той или иной форме обсуждаются проблемы, связанные с изменением кинематической структуры. Методы решения задачи моделирования СТТ с переменной кинематической структурой предложены в работах [4, 12, 13, 21, 131].

В работах [25, 40, 55, 64, 84, 171, 183] рассмотрены проблемы моделирования ударных взаимодействий в системах твёрдых тел.

В связи с многообразием описанных методов построения моделей возникает задача выбора оптимальной формы записи уравнений движения для конкретной технической механической системы. Необходимо отметить многообразие подходов к понятию оптимальной формы записи уравнений динамики СТТ. Вопросы сравнения вычислительной эффективности тех или иных методик затронуты в работах [30, 81, 105, 110, 192, 195]. В качестве критериев оптимально-

сти используются вычислительная эффективность, алгоритмичность, общность моделей связей и т.п.

На основании приведённого обзора можно выделить следующие направления дальнейших исследований в области разработки компьютерно-ориентированных методов моделирования многостепенных СТТ произвольных конфигураций, которые могут быть применены для решения инженерных задач:

1. Классификация способов формирования математических моделей СТТ на основе единого подхода и выявление их взаимосвязей.
2. Сравнение различных методов по трудоёмкости формирования математических моделей и временным затратам компьютерного моделирования.
3. Разработка новых методов, обладающих лучшими характеристиками.
4. Совершенствование методов выбора оптимальной формы модели в зависимости от типа конкретной технической системы.

1.2. Описание систем твёрдых тел

Рассмотрим механическую систему, состоящую из совокупности абсолютно твёрдых тел, соединённых шарнирами. Под *шарнирами* (или *кинематическими парами*) будем понимать любую механическую связь на геометрические и кинематические параметры, ограничивающую относительные перемещения тел системы. Будем предполагать, что кинематические связи, реализуемые в шарнирах, удерживающие, голономные и идеальные.

Если в технической системе присутствуют неидеальные или неголономные связи, то в инженерной практике традиционно используется метод замены этих связей силовым взаимодействием. Этот метод состоит в следующем: в соответствующих шарнирах неидеальные или неголономные связи освобождаются (т.е. увеличивается число степеней свободы). Реакции этих связей разделяются на нормальные и касательные составляющие. Нормальные реакции заменяются упруго-демпфирующими силами, а для касательных составляющих выписыва-

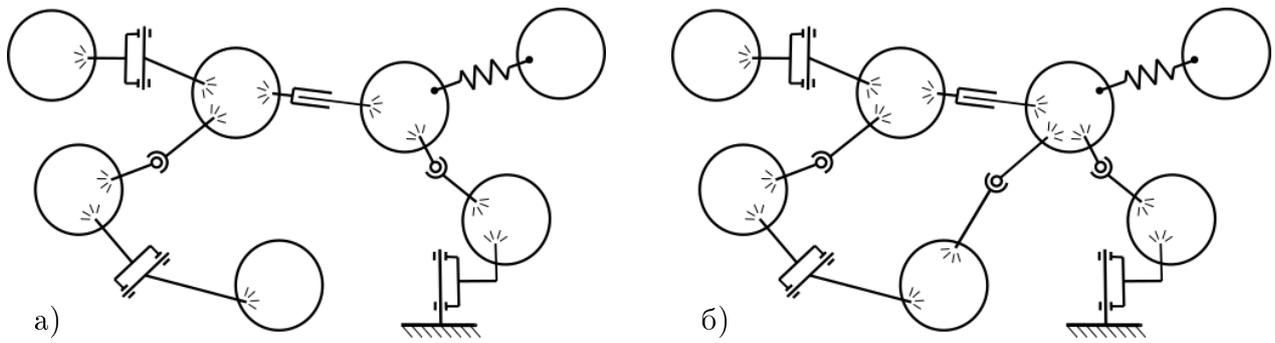


Рис. 1.1. Системы твёрдых тел: а) со структурой дерева; б) с замкнутой кинематической цепью

ется система гипотез о их связи с нормальными составляющими (например, закон Кулона для сил сухого трения).

Следуя работе [25], рассматриваемой СТТ сопоставим граф, вершины которого символизируют тела системы, а ребра — шарниры. Если для всех пар вершин пути между ними определяются единственным образом, то говорят, что граф системы имеет *структуру дерева* (рис. 1.1а). Если существуют два различных пути между двумя вершинами, то эти пути образуют *замкнутую цепь* (рис. 1.1б).

Примерами систем, имеющих структуру дерева, являются: а) система кинематически не связанных тел (тела взаимодействуют друг с другом посредством сил), б) многосвязный физический маятник, в) робот-манипулятор, г) гироскоп в кардановом подвесе. С другой стороны, многие механизмы имеют замкнутые цепи, например, кривошипно-шатунный механизм, дельта-механизм.

В настоящей диссертационной работе исследуются механические системы со структурой дерева. Системы такого типа играют важную роль при компьютерном моделировании динамики СТТ. Причинами этого являются: во-первых, они допускают простое математическое описание; во-вторых, любую систему, содержащую замкнутые кинематические цепи, можно преобразовать в систему со структурой дерева, разрезав выбранные шарниры. В последнем случае для полного описания движения исходной системы к УД СТТ со структурой дерева необходимо добавить кинематические связи, соответствующие разрезанным

шарнирам, которые в инженерной практике либо заменяются упруго-демпфирующими силами, либо учитываются методом штрафных функций или методом модифицированных функций Лагранжа.

Пусть N — число тел в системе за исключением корневого тела, движение которого во времени относительно инерциальной декартовой системы координат (СК) $Oxyz$ задано. Тогда количество шарниров всегда будет равно N , если учитывать шарнир между системой и корневым телом.

Пронумеруем тела и шарниры системы. Корневому телу присвоим номер «0». Остальным телам присвоим номера так, чтобы для любого тела в графе системы номер предшествующего ему тела был меньше, а шарниру, связывающему i -е тело с предшествующим, присвоим номер i . В этом случае для полного описания структуры взаимосвязей системы со структурой дерева достаточно одного упорядоченного множества κ мощности N , i -м элементом которого является индекс тела, предшествующего i -му. Кроме того, с каждым телом свяжем следующие множества индексов: \mathcal{P}_i — упорядоченное множество индексов шарниров, являющихся элементами пути между нулевым и i -м телами; \mathcal{S}_i — множество индексов тел, для которых i -е тело является предшествующим; \mathcal{D}_i — множество индексов тел, образующих поддереву с корнем в теле i (рис. 1.2).

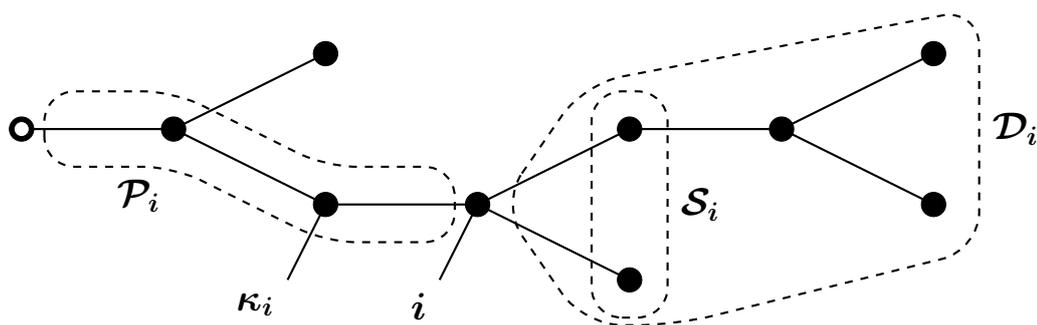


Рис. 1.2. Описание связности СТТ со структурой дерева

1.3. Кинематика систем твёрдых тел

1.3.1. Кинематика относительного движения смежных тел

Рассмотрим относительное движение в шарнире с номером i . С каждым из двух смежных тел свяжем прямоугольные декартовы системы координат с началами в произвольно выбранных точках этих тел.

В качестве скалярных величин, определяющих пространственное положение i -го тела относительно базового (несущего) для него κ_i -го тела, выберем элементы матрицы-столбца ρ_i , составленного из координат точки O_i полюса i -й СК в κ_i -й СК, и элементы матрицы $G_{i\kappa_i} \equiv G_i$ преобразования координат из κ_i -й в i -ю СК (рис. 1.3). Таким образом, если тело свободно, множество его положений является шестимерным многообразием [92], которое будем называть *многообразием относительного положения тела*.

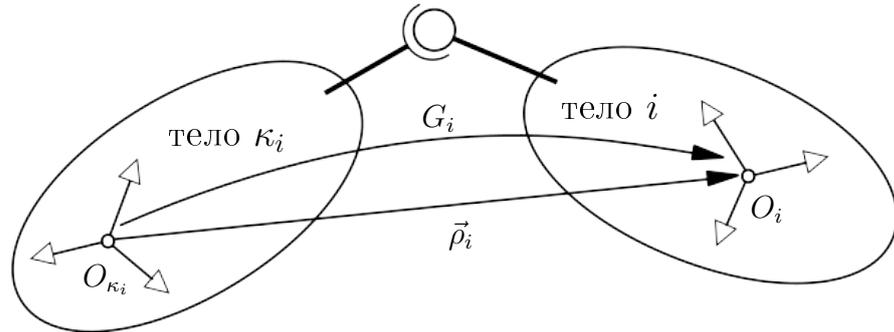


Рис. 1.3. Относительное положение смежных тел

Предположим, что физическая связь в шарнире моделируется системой $m_i \leq 6$ идеальных голономных связей. Эти связи определяют на многообразии относительного положения тела некоторое подмногообразие возможных перемещений размерности $n_i = 6 - m_i$.

Введя n_i -мерный вектор q_i криволинейных координат, уравнения n_i -мерного многообразия возможных перемещений тела можно задать в параметрической форме:

$$\rho_i = \rho_i(q_i, t), \quad G_i = G_i(q_i, t). \quad (1.1)$$

Тогда при заданном законе движения $q_i = q_i(t)$ проекции векторов v_i^r и ω_i^r

относительных поступательной и угловой скоростей i -го тела на оси связанной с ним СК вычисляются по формулам:

$$v_i^r = G_i \dot{\rho}_i = G_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial q_i^k} \dot{q}_i^k + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} \right), \quad (1.2)$$

$$\tilde{\omega}_i^r = G_i \dot{G}_i^T = G_i \left(\sum_{k=1}^{n_i} \frac{\partial G_i^T}{\partial q_i^k} \dot{q}_i^k + \frac{\partial G_i^T}{\partial t} \right). \quad (1.3)$$

Символ « \sim » используется для обозначения кососимметричной матрицы векторного произведения [25]. Например, для вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ она имеет вид:

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основании формул (1.2) и (1.3) векторы v_i^r и ω_i^r можно представить в виде линейной формы от обобщённых скоростей:

$$v_i^r = A_i \dot{q}_i + \hat{v}_i^r, \quad (1.4)$$

где

$$v_i^r = \begin{bmatrix} v_i^r \\ \omega_i^r \end{bmatrix}, \quad A_i = \begin{bmatrix} a_{i1}^v & \cdots & a_{in_i}^v \\ a_{i1}^\omega & \cdots & a_{in_i}^\omega \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_i^r = \begin{bmatrix} a_{i0}^v \\ a_{i0}^\omega \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{ik}^v &= G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial q_i^k} \quad (k = \overline{1, n_i}), & a_{i0}^v &= G_i \frac{\partial \rho_i}{\partial t}, \\ \tilde{a}_{ik}^\omega &= G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial q_i^k} \quad (k = \overline{1, n_i}), & \tilde{a}_{i0}^\omega &= G_i \frac{\partial G_i^T}{\partial t} \end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно выписать для проекций w_i^r , ε_i^r относитель-

ных поступательного и углового ускорений i -го тела:

$$w_i^r = A_i \ddot{q}_i + \hat{w}_i^r, \quad (1.5)$$

где

$$w_i^r = \begin{bmatrix} w_i^r \\ \varepsilon_i^r \end{bmatrix}, \quad \hat{w}_i^r = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_i^r}{\partial q_i^T} \dot{q}_i + \frac{\partial v_i^r}{\partial t} + \tilde{\omega}_i^r v_i^r \\ \frac{\partial \omega_i^r}{\partial q_i^T} \dot{q}_i + \frac{\partial \omega_i^r}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

Столбцы матрицы A_i являются 6-мерными векторами, касательными к подмногообразию возможных перемещений [19]. Будем считать, что эти векторы линейно независимы и образуют базис n_i -мерного линейного подпространства, касательного к многообразию возможных перемещений (*касательного подпространства возможных перемещений*). Тогда компоненты вектора q_i есть *обобщённые координаты*. Следуя работе [19], матрицу A_i будем называть *матрицей касательного локального базиса относительного движения в шарнире с номером i* .

Введём матрицу Z_i размерности $6 \times m_i$ ортогонального локального базиса относительного движения в шарнире с номером i . Столбцы матрицы Z_i образуют базис $(6 - n_i)$ -мерного *ортогонального подпространства возможных перемещений*. Матрицы A_i и Z_i связаны следующими соотношениями:

$$Z_i^T A_i = 0, \quad A_i^T Z_i = 0. \quad (1.6)$$

Эти соотношения выражают условие ортогональности касательного и ортогонального базисов [19].

Если известна матрица A_i , то матрицу Z_i можно построить, выделив линейно независимые столбцы симметричной матрицы

$$Z_i^* = E - A_i (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T, \quad (1.7)$$

которая также ортогональна к матрице A_i .

Другой способ состоит в представлении матриц A_i и Z_i в блочном виде [19]:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_i^H \\ A_i^3 \end{bmatrix}, \quad Z_i = \begin{bmatrix} Z_i^3 \\ Z_i^H \end{bmatrix}.$$

Здесь блоки A_i^H и Z_i^H являются независимыми, а блоки A_i^3 и Z_i^3 — зависимыми блоками матриц A_i и Z_i , $\dim A_i^H = (n_i \times n_i)$, $\dim A_i^3 = (m_i \times n_i)$, $\dim Z_i^H = (m_i \times m_i)$, $\dim Z_i^3 = (n_i \times m_i)$, $|A_i^H| \neq 0$, $|Z_i^H| \neq 0$.

В этом случае

$$Z_i = \begin{bmatrix} Z_i^3 \\ Z_i^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[A_i^3(A_i^H)^{-1}]^T \\ E_{m_i} \end{bmatrix} Z_i^H, \quad (1.8)$$

где Z_i^H произвольная невырожденная матрица.

1.3.2. Кинематика полной системы

Используем метод относительного описания положения тел системы. Движение нулевого тела принимаем заданным относительно абсолютной СК.

Введём матрицу G_{i0} преобразования координат из СК нулевого тела в СК i -го тела, которую можно вычислить с помощью рекуррентной формулы:

$$G_{i0} = G_{i\kappa_i} G_{\kappa_i 0}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.9)$$

Запишем равенство, связывающее радиус-векторы фиксированных точек O_i и O_{κ_i} двух смежных тел:

$$r_i = r_{\kappa_i} + G_{0\kappa_i} \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.10)$$

Здесь векторы r_i и r_{κ_i} заданы в СК нулевого тела, $G_{0\kappa_i} = G_{\kappa_i 0}^T$.

Применяя кинематические соотношения для скоростей и ускорений твёр-

дого тела, совершающего относительное движение [94], запишем матричные соотношения для скоростей и ускорений i -го и κ_i -го тел:

$$v_i = C_i v_{\kappa_i} + v_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.11)$$

$$w_i = C_i w_{\kappa_i} + w_i^c + w_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.12)$$

где

$$v_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix}, \quad w_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \varepsilon_i \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{bmatrix}, \quad w_i^c = \begin{bmatrix} G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i}^2 \rho_i + 2G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} G_i^T v_i^r \\ G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} G_i^T \omega_i^r \end{bmatrix}.$$

Здесь v_i, ω_i — матрицы-столбцы проекций векторов абсолютной поступательной и угловой скоростей i -го тела на оси связанной с ним системы координат; w_i, ε_i — матрицы-столбцы проекций векторов абсолютного поступательного и углового ускорений i -го тела на оси связанной с ним системы координат. Векторные переменные $v_0(t), \omega_0(t), w_0(t)$ и $\varepsilon_0(t)$ являются заданными функциями времени.

Выразим декартовы скорости и ускорения тел системы через обобщённые скорости и ускорения. Для этого в формулы (1.11) и (1.12) подставим соотношения (1.4) и (1.5) для относительных скоростей и ускорений тел системы:

$$v_i = C_i v_{\kappa_i} + A_i \dot{q}_i + \hat{v}_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.13)$$

$$w_i = C_i w_{\kappa_i} + A_i \ddot{q}_i + w_i^c + \hat{w}_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.14)$$

Рекуррентные соотношения (1.9), (1.10), (1.13) (1.14) представляют собой кинематическую модель системы абсолютно твёрдых тел со структурой дерева, которая позволяет определять положение, распределение скоростей и ускорений любого тела системы через вектор обобщённых параметров системы, его первую и вторую производные.

Введём квадратную блочную матрицу S с квадратными подматрицами

шестого порядка по следующей формуле:

$$S_{ij} = \begin{cases} E, & j = i, \\ -C_i, & j = \kappa_i, \\ 0, & j \neq i \vee \kappa_i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.15)$$

Заметим, что матрица S содержит в каждой строке только два ненулевых блока: единичную матрицу E на главной диагонали и матрицу параллельного переноса и вращения C_i в столбце, соответствующему предшествующему телу.

Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре СТТ, так и об относительном положении тел в системе, будем называть её *матрицей кинематической структуры*.

С использованием матрицы S уравнения кинематики системы тел (1.13) и (1.14) можно записать в краткой матричной форме:

$$Sv = A\dot{q} + \hat{v}^r, \quad (1.16)$$

$$Sw = A\ddot{q} + w^c + \hat{w}^r, \quad (1.17)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$, $q = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_N)$, $v = \text{col}(v_1, v_2, \dots, v_N)$, $w = \text{col}(w_1, w_2, \dots, w_N)$, $\hat{v}^r = \text{col}(\hat{v}_1^r, \hat{v}_2^r, \dots, \hat{v}_N^r)$, $\hat{w}^r = \text{col}(\hat{w}_1^r, \hat{w}_2^r, \dots, \hat{w}_N^r)$, $w^c = \text{col}(w_1^c, w_2^c, \dots, w_N^c)$. Таким образом, матрица S позволяет проектировать векторы из пространства абсолютных скоростей системы в пространство векторов относительных скоростей.

Найдём производную от матрицы кинематической структуры S . С учётом формул (1.2) и (1.3) получаем, что

$$\dot{C}_i = \begin{bmatrix} \dot{G}_i & -\dot{G}_i \tilde{\rho}_i - G_i \dot{\tilde{\rho}}_i \\ 0 & \dot{G}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\omega}_i^r G_i & \tilde{\omega}_i^r G_i \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i^r G_i \\ 0 & -\tilde{\omega}_i^r G_i \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Преобразуем элементы матрицы $\dot{S}_{i\kappa_i}$, используя соотношения (1.11) между

относительной и абсолютными скоростями смежных тел:

$$\begin{aligned}
-\tilde{\omega}_i^r G_i &= -\tilde{\omega}_i G_i + G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i}, \\
\tilde{\omega}_i^r G_i \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i^r G_i &= \tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i - G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i G_i + G_i \tilde{v}_{\kappa_i} + G_i \widetilde{(\tilde{\omega}_{\kappa_i} \rho_i)} = \\
&= \tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i - \tilde{v}_i G_i + G_i \tilde{v}_{\kappa_i} - G_i \tilde{\rho}_i \tilde{\omega}_{\kappa_i}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Подставляя выражение (1.19) в (1.18), получим:

$$\begin{aligned}
\dot{C}_i &= \begin{bmatrix} G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} & G_i \tilde{v}_{\kappa_i} - G_i \tilde{\rho}_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} \\ 0 & G_i \tilde{\omega}_{\kappa_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i G_i & -\tilde{\omega}_i G_i \tilde{\rho}_i + \tilde{v}_i G_i \\ 0 & \tilde{\omega}_i G_i \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{\kappa_i} & \tilde{v}_{\kappa_i} \\ 0 & \tilde{\omega}_{\kappa_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i & \tilde{v}_i \\ 0 & \tilde{\omega}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i & -G_i \tilde{\rho}_i \\ 0 & G_i \end{bmatrix} = \\
&= \Omega_i^T C_i - C_i \Omega_{\kappa_i}^T, \tag{1.20}
\end{aligned}$$

где

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_i & 0 \\ \tilde{v}_i & \tilde{\omega}_i \end{bmatrix}.$$

Из формул (1.20) следует, что

$$\dot{S} = \Omega^T S - S \Omega^T, \tag{1.21}$$

где $\Omega = \text{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N)$.

Рекуррентные формулы (1.13), (1.14) можно также записать в виде явных выражений вида

$$v = T(A \dot{q} + \hat{v}^r), \tag{1.22}$$

$$w = T(A \ddot{q} + w^c + \hat{w}^r), \tag{1.23}$$

где матрица $T = (T_{ij})$ является нижней унитреугольной блочной матрицей,

подматрицы которой могут быть вычислены по рекуррентным формулам:

$$T_{ij} = \begin{cases} E, & j = i, \\ C_i T_{\kappa_i j}, & j \in \mathcal{P}_{\kappa_i}, \\ 0, & j \notin \mathcal{P}_i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.24)$$

Из формул (1.16) и (1.22) следует, что матрица T является обратной для матрицы S , т. е.

$$TS = ST = E. \quad (1.25)$$

Кроме того, матрица T позволяет проектировать векторы из пространства относительных скоростей в пространство абсолютных скоростей.

Рассмотрим подробнее структуру матрицы T . Предположим, что система имеет структуру простой цепочки. Тогда

$$\begin{aligned} T_{11} &= E_6, \\ T_{21} = C_2 &= \begin{bmatrix} G_2 & -G_2 \tilde{\rho}_2 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{21} & -G_{21} \tilde{\rho}_{12} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix}, \\ T_{31} = C_3 C_2 &= \begin{bmatrix} G_{32} & -G_{32} \tilde{\rho}_{23} \\ 0 & G_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{21} & -G_{21} \tilde{\rho}_{12} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} G_{32} G_{21} & -G_{32} G_{21} \tilde{\rho}_{12} - G_{32} \tilde{\rho}_{23} G_{21} \\ 0 & G_{32} G_{21} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} G_{32} G_{21} & -G_{32} G_{21} (\tilde{\rho}_{12} + G_{21}^T \tilde{\rho}_{23} G_{21}) \\ 0 & G_{32} G_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{31} & -G_{31} \tilde{\rho}_{13} \\ 0 & G_{31} \end{bmatrix}, \dots \end{aligned}$$

Таким образом, ненулевые блоки матрицы T имеют структуру, аналогичную структуре матриц C_i :

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} G_{ij} & -G_{ij} \tilde{\rho}_{ji} \\ 0 & G_{ij} \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

Нетрудно видеть, что $T_{ii} = E$, а $T_{i\kappa_i} = C_i$.

Найдём производную от матрицы T . Для этого продифференцируем равенство (1.25):

$$\dot{T}S + T\dot{S} = 0. \quad (1.27)$$

Тогда из (1.27) и (1.21) следует, что

$$\dot{T} = \Omega^T T - T \Omega^T. \quad (1.28)$$

Раскрывая скобки в выражениях (1.22) и (1.23), получим:

$$v = B\dot{q} + \hat{v}, \quad (1.29)$$

$$w = B\ddot{q} + \hat{w}, \quad (1.30)$$

где

$$B = TA, \quad \hat{v} = T\hat{v}^r, \quad \hat{w} = T(w^c + \hat{w}^r).$$

В этих соотношениях матрица B называется *матрицей касательного базиса системы*. Она является блочной нижней треугольной матрицей, матричные блоки B_{ij} которой могут быть вычислены по следующей рекуррентной формуле:

$$B_{ij} = \begin{cases} A_i, & j = i, \\ C_i B_{\kappa_i j}, & j \in \mathcal{P}_{\kappa_i}, \\ 0_{6 \times n_j}, & j \notin \mathcal{P}_i, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Компоненты векторов \hat{v} и \hat{w} в формулах (1.29), (1.30) также могут быть вычислены по рекуррентным формулам:

$$\hat{v}_i = C_i \hat{v}_{\kappa_i} + \hat{v}_i^r, \quad (1.32)$$

$$\hat{w}_i = C_i \hat{w}_{\kappa_i} + w_i^c + \hat{w}_i^r. \quad (1.33)$$

1.4. Уравнения движения систем твёрдых тел в лагранжевых переменных

1.4.1. Уравнения движения в избыточных переменных

Для составления УД СТТ со структурой дерева будем использовать принцип освобождения от связей [94]. В этом случае мысленно удаляем связи между телами, а движение системы, осуществляемое при наличии связей, обеспечим введением дополнительных сил, которые называются *реакциями связей* (рис. 1.4). Введение таких реакций позволяет записать дифференциальные УД

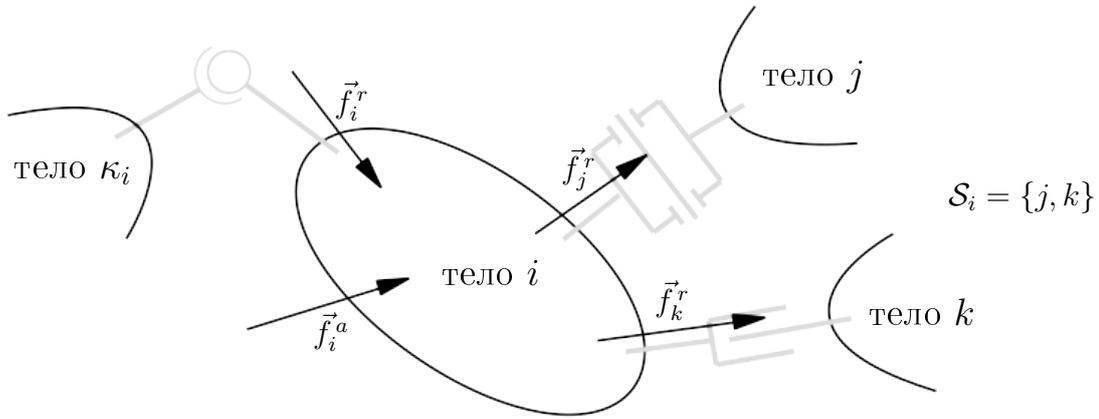


Рис. 1.4

i -го тела в форме уравнений Ньютона—Эйлера для свободного твёрдого тела:

$$m_i [\dot{\vec{v}}_i^* + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i + \dot{\vec{\omega}}_i \times \vec{r}_i^c + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^c)] = \vec{f}_i^a + \vec{f}_i^r - \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{f}_j^r, \quad (1.34)$$

$$\Theta_i \cdot \dot{\vec{\omega}}_i + \vec{\omega}_i \times \Theta_i \cdot \vec{\omega}_i + m_i \vec{r}_i^c \times (\dot{\vec{v}}_i^* + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i) = \vec{\tau}_i^a + \vec{\tau}_i^r - \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \vec{\tau}_j^r, \quad (1.35)$$

где m_i — масса i -го тела; Θ_i — тензор инерции i -го тела; \vec{r}_i^c — радиус-вектор центра масс i -го тела; \vec{f}_i^a — главный вектор активных сил, действующих на i -е тело; $\vec{\tau}_i^a$ — главный момент активных сил, действующих на i -е тело; \vec{f}_i^r — главный вектор реакций связей в i -м шарнире; $\vec{\tau}_i^r$ — главный момент реакций связей в i -м шарнире относительно точки O_i .

Учтём, что

$$\vec{w}_i = \vec{v}_i^* + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i,$$

и запишем два векторных уравнения (1.34) и (1.35) в матричной форме в проекциях на оси i -й СК:

$$M_i w_i = F_i^c + F_i + R_i - \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T R_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.36)$$

где

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i E & -m_i \tilde{r}_i^c \\ m_i \tilde{r}_i^c & \Theta_i \end{bmatrix}, \quad F_i^c = \begin{bmatrix} -m_i \tilde{\omega}_i^2 r_i^c \\ -\tilde{\omega}_i \Theta_i \omega_i \end{bmatrix}, \quad F_i = \begin{bmatrix} f_i^a \\ \tau_i^a \end{bmatrix}, \quad R_i = \begin{bmatrix} f_i^r \\ \tau_i^r \end{bmatrix}.$$

Для получения замкнутой математической модели СТТ необходимо к динамическим уравнениям (1.36) добавить кинематические уравнения (1.14) и соотношения

$$A_i^T R_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.37)$$

Равенства (1.37) отражают то обстоятельство, что при идеальности связей в шарнирах реакции принадлежат ортогональному подпространству возможных перемещений.

Запишем полученную систему УД СТТ в компактном матричном виде:

$$\begin{aligned} M w - S^T R &= F', \\ -S w + A \ddot{q} &= -w', \\ A^T R &= 0, \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$, $R = \text{col}(R_1, \dots, R_N)$, $F' = \text{col}(F_1^c + F_1, \dots, F_N^c + F_N)$, $w' = \text{col}(w_1^c + \hat{w}_1^r, \dots, w_N^c + \hat{w}_N^r)$

Система уравнений (1.38) является системой из $12N + n$ линейных уравнений относительно неизвестных векторных величин w , R , \ddot{q} . Матрица системы симметричная, блочно-трёхдиагональная, сильно разреженная.

Система дифференциально-алгебраических уравнений (1.38) может быть использована непосредственно для моделирования динамики СТТ. С другой стороны, она служит основой для получения других (в том числе известных) форм записи УД СТТ со структурой дерева. Преобразования к известным формам УД связаны с уменьшением размерности (редукцией) расширенной системы (1.38).

К основным методам редукции относятся:

а) группа методов, основанных на исключении из системы реакций связей с использованием касательного подпространства возможных перемещений. В результате такой редукции получаем уравнения динамики в обобщённых координатах, а именно, уравнения Лагранжа второго рода;

б) вторая группа основана на идее использования ортогонального подпространства возможных перемещений и выражения сил реакций через множители Лагранжа. В результате эти уравнения динамики сводятся к уравнениям Лагранжа первого рода.

1.4.2. Проектирование уравнений движения на касательное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Лагранжа второго рода

Для получения уравнений указанного типа спроектируем уравнения (1.38) на касательное подпространство возможных перемещений. Умножим слева первое уравнение этой системы на $A^T T^T$ и исключим из него реакции связей:

$$A^T T^T M w = A^T T^T F'. \quad (1.39)$$

Далее, умножим слева второе уравнение системы (1.38) на матрицу T и выразим из него декартовы ускорения:

$$w = T A \ddot{q} + T w'. \quad (1.40)$$

Подставив последнее выражение в уравнение (1.39), получим уравнение динамики системы тел в обобщённых координатах в виде:

$$A^T T^T M T A \ddot{q} = A^T T^T (F' - M T w'). \quad (1.41)$$

Векторно-матричное уравнение (1.41) представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, не разрешённых относительно старших производных, и, по сути, является явной матричной формой уравнений Лагранжа второго рода.

1.4.3. Проектирование уравнений движения на ортогональное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Лагранжа первого рода

Для получения УД в указанной форме выразим силы и моменты реакции связей в шарнирах через независимые параметры с помощью следующих соотношений:

$$R = Z\lambda, \quad (1.42)$$

где $Z = \text{diag}(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ — блочно-диагональная матрица размерности $6N \times (6N - n)$; λ — $(6N - n)$ -мерный вектор множителей Лагранжа.

Подставив соотношения (1.42) в первое уравнение системы (1.38) и умножив второе уравнение слева на Z^T , получим систему

$$\begin{aligned} M w - S^T Z \lambda &= F', \\ -Z^T S w &= -Z^T w', \end{aligned} \quad (1.43)$$

в которую входят $12N - n$ скалярных уравнений относительно координат неизвестных векторных величин w и λ с симметричной матрицей системы.

Выражение вектора обобщённых ускорений \ddot{q} через вектор декартовых ускорений w можно получить, умножив второе уравнение системы (1.38) слева

на матрицу A^T :

$$\ddot{q} = (A^T A)^{-1} A^T (S w - w'). \quad (1.44)$$

Опишем метод решения системы уравнений (1.43) с помощью проектирования на подпространство, ортогональное к конфигурационному многообразию системы.

Выразим из первого уравнения системы (1.43) декартовы ускорения:

$$w = M^{-1}(S^T Z \lambda + F'). \quad (1.45)$$

Далее подставим их во второе уравнение. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно множителей Лагранжа:

$$Z^T S M^{-1} S^T Z \lambda = Z^T (w' - S M^{-1} F'). \quad (1.46)$$

Система линейных уравнений (1.46) обладает следующей особенностью: чем больше степеней свободы в шарнире, тем меньше её порядок. Матрица системы является симметричной, положительно определённой.

Таким образом, для нахождения вектора обобщённых ускорений механической системы проектированием системы уравнений (1.38) на ортогональное подпространство возможных перемещений необходимо: 1) составить и решить систему линейных алгебраических уравнений (1.46); 2) найденные значения множителей Лагранжа λ подставить в формулы (1.45); 3) найти декартовы ускорения w тел системы, которые затем подставить в формулы (1.44).

1.5. Уравнения движения систем твёрдых тел в гамильтоновых переменных

1.5.1. Расширенная система уравнений движения

Уравнениям Ньютона—Эйлера (1.34) и (1.35) можно придать вид уравнений Эйлера—Лагранжа [94] в квазискоростях:

$$M_i \dot{v}_i + \Omega_i M_i v_i = F_i + R_i - \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T R_j, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.47)$$

Совокупность уравнений (1.47) запишем в следующей краткой форме:

$$M \dot{v} + \Omega M v = F + S^T R. \quad (1.48)$$

Введём n -мерный вектор

$$p = B^T M v, \quad (1.49)$$

являющийся вектором *обобщённых импульсов*, или *импульсов Пуассона* [19].

Умножим уравнение (1.48) слева на B^T . Получим

$$B^T M \dot{v} + B^T \Omega M v = B^T F,$$

или

$$\frac{d}{dt} (B^T M v) - \dot{B}^T M v + B^T \Omega M v = B^T F. \quad (1.50)$$

Здесь было учтено равенство

$$B^T S^T R = A^T T^T S^T R = A^T R = 0.$$

Учитывая обозначение (1.49), уравнение (1.50) запишем в виде:

$$\dot{p} = (\dot{B}^T - B^T \Omega) M v + B^T F. \quad (1.51)$$

Уравнения (1.29), (1.51) совместно с равенством (1.49) образуют замкнутую систему $12N + 2n$ дифференциально-алгебраических уравнений относительно того же числа неизвестных величин q , p и v .

Разложим матрицу $\dot{B}^T - B^T \Omega$ с учётом формулы (1.28) на произведение блочно-диагональной и верхней треугольной матриц:

$$\begin{aligned} \dot{B}^T - B^T \Omega &= \dot{A}^T T^T + A^T \dot{T}^T - A^T T^T \Omega = \\ &= \dot{A}^T T^T + A^T (T^T \Omega - \Omega T^T) - A^T T^T \Omega = \\ &= \dot{A}^T T^T + A^T T^T \Omega - A^T \Omega T^T - A^T T^T \Omega = (\dot{A}^T - A^T \Omega) T^T. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Введём новую векторную переменную:

$$p^* = T^T M v. \quad (1.53)$$

Тогда уравнение (1.51) с учётом (1.52) и (1.53) примет следующий вид:

$$\dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) p^* + A^T F^*,$$

где $F^* = T^T F$.

Из определений (1.53) и (1.49) следуют равенства:

$$M v = S^T p^*,$$

$$p = A^T p^*.$$

Эти уравнения для импульсов замыкаются уравнением (1.16), связывающим декартовы и обобщённые скорости. В результате выпишем следующую расши-

ренную систему УД

$$\begin{aligned}
 Mv - S^T p^* &= 0, \\
 -Sv + A\dot{q} &= -\hat{v}^r, \\
 A^T p^* &= p, \\
 \dot{p} &= (\dot{A}^T - A^T \Omega) p^* + A^T F^*.
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Особенность системы уравнений (1.54) состоит в том, что она разрешена относительно производных от обобщённых импульсов \dot{p} . Первые три уравнения образуют линейную систему с симметричной блочной трёхдиагональной разреженной матрицей коэффициентов относительно скоростей v , \dot{q} и переменных p^* , имеющих размерность импульсов. В работе [64] показано, что переменные p^* являются множителями Лагранжа, позволяющими учесть кинематические связи (1.16) при выводе УД из интегрального принципа Остроградского—Гамильтона.

Так же, как и для системы уравнений (1.38), из системы дифференциально-алгебраических уравнений (1.54) могут быть получены с помощью редукции другие известные формы УД в гамильтоновых переменных.

1.5.2. Проектирование уравнений движения на касательное подпространство возможных перемещений. Явная матричная форма уравнений Гамильтона

Исключим из первого и второго уравнений системы (1.54) декартовую скорость v и выразим импульс p^* . Тогда получим равенство:

$$p^* = T^T M T (A\dot{q} + \hat{v}^r). \tag{1.55}$$

Подставим p^* в третье уравнение системы (1.54):

$$p = A^T T^T M T A \dot{q} + A^T T^T M T \hat{v}^r. \tag{1.56}$$

Отсюда следует, что обобщённый импульс p однозначно определяется заданием обобщённой скорости \dot{q} и, наоборот, в силу невырожденности динамической матрицы $A^T T^T M T A$, обобщённая скорость \dot{q} однозначно определяется заданием обобщённого импульса p :

$$\dot{q} = (A^T T^T M T A)^{-1} (p - A^T T^T M T \hat{v}^r). \quad (1.57)$$

Таким образом, переменные $\{q, p\}$ однозначно связаны с переменными $\{q, \dot{q}\}$.

Подставляя равенство (1.57) в уравнение (1.55), получим:

$$p^* = T^T M^{-1} T [A(A^T T^T M T A)^{-1} p + (E - A(A^T T^T M T A)^{-1} A^T T^T M T) \hat{v}^r]. \quad (1.58)$$

Объединяя уравнение (1.57) и последнее уравнение из системы (1.54) получим систему УД СТТ в канонических переменных, записанную в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= (A^T T^T M T A)^{-1} (p - A^T T^T M T \hat{v}^r), \\ \dot{p} &= (\dot{A}^T - A^T \Omega) p^* + A^T T^T F, \end{aligned} \quad (1.59)$$

где p^* вычисляется по формуле (1.58). Уравнения (1.59), по сути, являются явной матричной формой уравнений Гамильтона для СТТ со структурой дерева.

Заметим, что в этой системе в процессе нахождения обобщённых скоростей \dot{q} нет необходимости обращать матрицу $A^T T^T M T A$. В численных расчётах обобщённые скорости находятся как решение системы линейных уравнений. После вычисления обобщённых скоростей \dot{q} множители p^* , входящие во второе уравнение системы (1.59), определяются по формуле (1.55).

1.5.3. Проектирование уравнений движения на ортогональное подпространство возможных перемещений

Умножим второе уравнение системы (1.54) на матрицу A^T и выразим обобщённую скорость \dot{q} как функцию декартовой скорости v :

$$\dot{q} = (A^T A)^{-1} A^T (Sv - \hat{v}^r). \quad (1.60)$$

Для нахождения декартовой скорости v составим систему уравнений, аналогичную уравнениям Лагранжа первого рода (1.43). Представим множитель p^* в виде

$$p^* = A\mu + Z\lambda. \quad (1.61)$$

Тогда из третьего уравнения системы (1.54) получим, что

$$\mu = (A^T A)^{-1} p. \quad (1.62)$$

Исключая с помощью соотношений (1.61) и (1.62) из первого уравнения системы (1.54) переменную p^* и умножая второе уравнение этой системы слева на Z^T , получим

$$\begin{aligned} Mv - S^T Z\lambda &= S^T A (A^T A)^{-1} p, \\ -Z^T S v &= -Z^T \hat{v}^r \end{aligned} \quad (1.63)$$

— систему $12N - n$ скалярных уравнений относительно координат векторных переменных v и λ с симметричной матрицей системы.

Выразим из первого уравнения системы (1.63) декартову скорость

$$v = M^{-1} S^T (Z\lambda + A (A^T A)^{-1} p) \quad (1.64)$$

и подставим её во второе уравнение этой системы. В результате получим систе-

му линейных алгебраических уравнений для определения вектора λ :

$$Z^T S M^{-1} S^T Z \lambda = Z^T [\hat{v}^r - S M^{-1} S^T A (A^T A)^{-1} p]. \quad (1.65)$$

Подставляя λ и μ в равенство (1.61), получим:

$$p^* = [E - Z(Z^T S M^{-1} S^T Z)^{-1} Z^T S M^{-1} S^T] A (A^T A)^{-1} p + \\ + Z(Z^T S M^{-1} S^T Z)^{-1} Z^T \hat{v}^r. \quad (1.66)$$

Выписанное выражение показывает, что вектор p^* зависит только от обобщённых координат q , обобщённых импульсов p и времени t . Это позволяет привести УД (1.54) к канонической форме:

$$\dot{q} = (A^T A)^{-1} A^T (S M^{-1} S^T p^* - \hat{v}^r), \\ \dot{p} = (\dot{A}^T - A^T \Omega) p^* + A^T T^T F. \quad (1.67)$$

Данная форма УД предполагает предварительное решение системы линейных уравнений (1.65) с матрицей $Z^T S M^{-1} S^T Z$ относительно множителей Лагранжа λ и вычисление переменных p^* по формуле (1.61). Заметим, что в уравнениях (1.46) и (1.65) матрицы систем совпадают. Поэтому совпадают их свойства. В частности, чем больше степеней свободы в шарнире, тем меньше размерность столбца множителей Лагранжа p^* , а значит, тем меньше порядок разрешающей системы уравнений. Для СТТ с длинными кинематическими цепочками матрица $Z^T S M^{-1} S^T Z$ является разреженной.

Выводы по главе 1

В этой главе построены рекуррентные формулы, предназначенные для автоматизированного компьютерного формирования УД СТТ из простейших основных блоков, описывающих структуру, масс-инерционные, геометрические и

кинематические характеристики отдельных звеньев (тел и шарниров).

Для описания кинематики СТТ введена матрица кинематической структуры и исследованы её свойства. Выведены рекуррентные формулы для нахождения обратной к ней матрицы. Получены формулы для производных матрицы кинематической структуры и обратной к ней матрицы, не требующие дифференцирования элементов этих матриц.

Использование матрицы кинематической структуры позволило записать УД СТТ в компактной матричной форме. Полученные дифференциально-алгебраические УД состоят из трёх групп уравнений: уравнений динамики твёрдого тела в форме Ньютона-Эйлера, кинематических уравнений и уравнений, описывающих принцип идеальности связей. Данная система уравнений является линейной относительно обобщённых ускорений, квазиускорений тел и реакций в шарнирах.

Показана связь выведенных УД СТТ с классическими уравнениями Лагранжа. Для этого использованы проекционные методы. Исключение из расширенной системы УД реакций связей с использованием касательного подпространства возможных перемещений приводит к УД в обобщённых координатах (к уравнениям Лагранжа второго рода), а проектирование на ортогональное подпространство возможных перемещений и исключение обобщённых ускорений — к уравнениям Лагранжа первого рода. Заметим, что полученные явные матричные формы уравнений Лагранжа второго и первого рода не требуют трудоёмких операций составления кинетической энергии системы и дальнейшего её дифференцирования.

Кроме того, в данной главе представлена новая матричная форма УД СТТ со структурой дерева. Уравнения содержат обобщённые координаты и импульсы, декартовы скорости и импульсы. Эти УД состоят из двух групп уравнений. Первая из них разрешена относительно производных обобщённых импульсов. Вторая группа, представляющая кинематические соотношения, образует линейную систему с симметричной блочной разреженной матрицей коэффициентов

относительно обобщённых скоростей, декартовых скоростей и импульсов. Приведены два способа редукции этой формы УД к системам уравнений, содержащих меньшее число неизвестных. Эти способы состоят в проектировании исходных УД на касательное и ортогональное подпространства возможных перемещений механической системы.

Глава 2

Методы разрешения редуцированных уравнений движения

Полученные в предыдущей главе УД СТТ можно разделить на две группы. К первой группе отнесём уравнения в обобщённых координатах (1.41) и канонических переменных (1.59), представляющие собой системы ОДУ, ко второй — уравнения (1.38), являющиеся системой ДАУ относительно расширенного числа неизвестных (обобщённых координат, квазиускорений и реакций связей), и уравнения (1.54), которые представляют собой систему ДАУ относительно обобщённых координат, обобщённых импульсов и квазискоростей.

В обоих случаях УД можно рассматривать как СЛАУ относительно своих групп неизвестных с матрицей системы, зависящей от обобщённых координат. Для их интегрирования можно использовать численные методы решения ОДУ, если на каждом шаге интегрирования приводить УД к явному виду, то есть разрешать относительно старших производных независимых переменных.

В этой главе рассмотрим методы разрешения первой группы УД, а в следующей — второй.

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим УД СТТ в форме уравнений Лагранжа второго рода (1.41). Данные уравнения можно рассматривать как СЛАУ относительно обобщённых ускорений \ddot{q} :

$$M\ddot{q} = Q, \quad (2.1)$$

где $M = A^T T^T M T A$, $Q = A^T T^T (F' - M T w')$.

Первое уравнение системы в канонических переменных (1.59) также можно рассматривать как СЛАУ относительно обобщённых скоростей \dot{q} с той же

матрицей системы, но с другой правой частью.

При интегрировании УД СТТ в форме уравнений Лагранжа первого рода (1.43) сначала находятся множители Лагранжа λ из уравнения (1.46), которое также представляет СЛАУ

$$\mathbf{H}\lambda = \mathbf{R}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{H} = Z^T S M^{-1} S^T Z$, $\mathbf{R} = Z^T [w' - S M^{-1} F']$.

Аналогично, при интегрировании УД СТТ в канонических переменных (1.67) решается система (1.65), имеющая ту же матрицу коэффициентов.

Исследуем свойства этих систем. Для этого, докажем ряд теорем.

Теорема 2.1. *Матрица M является положительно определённой.*

Доказательство. Рассмотрим диагональные блоки матрицы M

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & m_i z_{Ci} & -m_i y_{Ci} \\ 0 & m_i & 0 & -m_i z_{Ci} & 0 & m_i x_{Ci} \\ 0 & 0 & m_i & m_i y_{Ci} & -m_i x_{Ci} & 0 \\ 0 & -m_i z_{Ci} & m_i y_{Ci} & J_{x_i x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ m_i z_{Ci} & 0 & -m_i x_{Ci} & -J_{x_i y_i} & J_{y_i y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -m_i y_{Ci} & m_i x_{Ci} & 0 & -J_{x_i z_i} & -J_{y_i z_i} & J_{z_i z_i} \end{bmatrix}.$$

Вычислим ведущие главные миноры этой матрицы:

$$M_i^{(1)} = \begin{vmatrix} m_i \end{vmatrix} = m_i,$$

$$M_i^{(2)} = \begin{vmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_i \end{vmatrix} = m_i^2,$$

$$M_i^{(3)} = \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{vmatrix} = m_i^3,$$

$$\begin{aligned}
M_i^{(4)} &= \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & -m_i z_{Ci} \\ 0 & 0 & m_i & m_i y_{Ci} \\ 0 & -m_i z_{Ci} & m_i y_{Ci} & J_{x_i x_i} \end{vmatrix} = m_i^3 [J_{x_i x_i} - m_i(y_{Ci}^2 + z_{Ci}^2)], \\
M_i^{(5)} &= \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & m_i z_{Ci} \\ 0 & m_i & 0 & -m_i z_{Ci} & 0 \\ 0 & 0 & m_i & m_i y_{Ci} & -m_i x_{Ci} \\ 0 & -m_i z_{Ci} & m_i y_{Ci} & J_{x_i x_i} & -J_{x_i y_i} \\ m_i z_{Ci} & 0 & -m_i x_{Ci} & -J_{x_i y_i} & J_{y_i y_i} \end{vmatrix} = \\
&= m_i^3 \begin{vmatrix} J_{x_i x_i} - m_i(y_{Ci}^2 + z_{Ci}^2) & -J_{x_i y_i} + m_i x_{Ci} y_{Ci} \\ -J_{x_i y_i} + m_i x_{Ci} y_{Ci} & J_{y_i y_i} - m_i(x_{Ci}^2 + z_{Ci}^2) \end{vmatrix}, \\
M_i^{(6)} &= \begin{vmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & m_i z_{Ci} & -m_i y_{Ci} \\ 0 & m_i & 0 & -m_i z_{Ci} & 0 & m_i x_{Ci} \\ 0 & 0 & m_i & m_i y_{Ci} & -m_i x_{Ci} & 0 \\ 0 & -m_i z_{Ci} & m_i y_{Ci} & J_{x_i x_i} & -J_{x_i y_i} & -J_{x_i z_i} \\ m_i z_{Ci} & 0 & -m_i x_{Ci} & -J_{x_i y_i} & J_{y_i y_i} & -J_{y_i z_i} \\ -m_i y_{Ci} & m_i x_{Ci} & 0 & -J_{x_i z_i} & -J_{y_i z_i} & J_{z_i z_i} \end{vmatrix} = \\
&= m_i^3 \begin{vmatrix} J_{x_i x_i} - m_i(y_{Ci}^2 + z_{Ci}^2) & -J_{x_i y_i} + m_i x_{Ci} y_{Ci} & -J_{x_i z_i} + m_i x_{Ci} z_{Ci} \\ -J_{x_i y_i} + m_i x_{Ci} y_{Ci} & J_{y_i y_i} - m_i(x_{Ci}^2 + z_{Ci}^2) & -J_{y_i z_i} + m_i y_{Ci} z_{Ci} \\ -J_{x_i z_i} + m_i x_{Ci} z_{Ci} & -J_{y_i z_i} + m_i y_{Ci} z_{Ci} & J_{z_i z_i} - m_i(x_{Ci}^2 + y_{Ci}^2) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Первые три минора очевидно положительны, как степени массы тела. Последние три минора так же положительны, так как они выражаются через главные миноры тензора инерции тела, приведённого к центру масс, а тензор инерции является положительно определённым [94]. Таким образом, по критерию Сильвестра матрицы M_i являются положительно определёнными. Так как все блоки блочно-диагональной матрицы M положительно определены, то она является положительно определённой. ►

Теорема 2.2. *Матрица \mathbf{M} симметрична, положительно определена.*

Доказательство. Симметричность матрицы $\mathbf{M} = A^T T^T M T A = B^T M B$ следует из симметричности блочно-диагональной матрицы M и следующей цепочки равенств:

$$\mathbf{M}^T = (B^T M B)^T = B^T M^T B = B^T M B = \mathbf{M}.$$

Докажем теперь, что матрица \mathbf{M} является положительно определённой. Так как квадратная матрица T невырождена, матрица A имеет ранг n , то их произведение — $(6N \times n)$ -матрица $B = TA$ имеет ранг равный n . Положительная определённость матрицы $\mathbf{M} = B^T M B$ следует из того, что матрица M является положительно определённой, а матрица B полного ранга [36]. ►

Теорема 2.3. *Матрица \mathbf{H} симметрична, положительно определена.*

Доказательство. Так как матрица M является положительно определённой, то и матрица M^{-1} положительно определена [133]. Квадратная матрица S невырождена, матрица Z имеет ранг $6N - n$, следовательно, их произведение SZ является матрицей размерности $6N \times (6N - n)$ полного ранга $6N - n$. Следовательно, матрица $\mathbf{H} = (SZ)^T M^{-1} (SZ)$ является положительно определённой.

Из цепочки равенств

$$\mathbf{H}^T = (Z^T S M^{-1} S^T Z)^T = Z^T S (M^{-1})^T S^T Z = Z^T S M^{-1} S^T Z = \mathbf{H}$$

следует, что матрица \mathbf{H} симметрична. ►

Таким образом, для того, чтобы получить явные выражения для старших производных (или множителей Лагранжа), требуемых для интегрирования УД (1.41), (1.59), (1.43) и (1.67), на каждом шаге численного алгоритма необходимо решать СЛАУ с симметричной положительно определённой матрицей коэффициентов.

Это требует определённых вычислительных затрат, объем которых зависит от выбранного метода решения СЛАУ и плотности заполнения матрицы системы. Известно [94], что число арифметических операций в алгоритмах, основанных на точных методах решения СЛАУ (например, методах Гаусса или Холецкого), возрастает с ростом размерности задачи (в частности, числа степеней свободы и тел в механической системе) для плотно заполненных матриц системы по кубическому закону, для трапециевидных — по квадратичной зависимости, а для ленточных матриц — линейно.

В данной главе для решения систем (1.41), (1.46), (1.56) и (1.65) получены модификации метода Холецкого и метода сопряжённых градиентов решения СЛАУ. Эти методы учитывают доказанные выше свойства матриц коэффициентов этих систем: симметричность, положительную определённость. Модификации направлены на сокращение вычислительных затрат, требуемых для моделирования систем связанных тел с большим числом степеней свободы.

2.2. Разрешение уравнений движения методом Холецкого

Рассмотрим вариант гауссового исключения, учитывающий симметричность, положительную определённость и разреженность матрицы системы.

2.2.1. Блочный алгоритм разложения Холецкого

Предположим, что система уравнений, которую нужно решить, есть

$$Ax = b, \tag{2.3}$$

где A — квадратная симметричная положительно определённая *матрица коэффициентов* n -го порядка; b — n -мерный *вектор правых частей* уравнения; x — n -мерный *вектор неизвестных*.

Данную систему будем решать методом Холецкого [36], в котором матрица

системы разлагается в произведение вида

$$A = L^T L, \quad (2.4)$$

где L — нижняя треугольная матрица n -го порядка, называемая *множителем Холецкого*. Затем последовательно решаются две треугольные системы:

$$L^T y = b, \quad (2.5)$$

$$L x = y. \quad (2.6)$$

Элементы матрицы L могут быть вычислены с помощью совокупности формул:

$$\begin{aligned} l_{ii} &= \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=i+1}^n l_{ki}^2}, & i &= n, n-1, \dots, 1; \\ l_{ij} &= \left(a_{ij} - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} l_{kj} \right) / l_{ii}, & j &= i-1, i-2, \dots, 1; \\ l_{ij} &= 0, & j &> i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эти формулы определяют алгоритм разложения симметричной положительно определённой матрицы в форме скалярных произведений [36].

После того, как вычислено разложение (2.4), решения треугольных систем (2.5) и (2.6) могут быть получены по следующим формулам:

$$y_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} y_j \right) / l_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad (2.8)$$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Обратим внимание, что в формулах алгоритма Холецкого (2.7) – (2.9) изменён порядок разрешения системы линейных уравнений с последнего уравнения до первого. Как будет показано ниже при такой схеме разложения не проис-

ходит заполнения матрицы коэффициентов системы для рассматриваемых в работе задач.

В настоящей работе алгоритм Холецкого применяется для разрешения УД в форме уравнений Лагранжа первого и второго рода (1.41), (1.43) и редуцированных уравнений в импульсах Пуассона (1.56), (1.67), описанных в главе 1. Матрицы систем в этих уравнениях имеют блочную структуру. Поэтому в настоящем разделе выполнена модификация разложения Холецкого для случая, когда матрица системы имеет блочный вид.

Будем рассматривать систему (2.3) в виде

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}^T & \cdots & A_{N1}^T \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{N2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix},$$

где матрица коэффициентов A рассматривается как блочная матрица с квадратными диагональными блоками.

Алгоритм Холецкого (2.7) – (2.9), применённый к данной системе уравнений, можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \text{cholesky} \left[A_{ii} - \sum_{k=i+1}^N L_{ki}^T L_{ki} \right], & i = N, N-1, \dots, 1; \\ L_{ij} &= L_{ii}^{-T} \left(A_{ij} - \sum_{k=i+1}^N L_{ki}^T L_{kj} \right), & j = i-1, i-2, \dots, 1; \\ Y_i &= L_{ii}^{-T} \left(B_i - \sum_{j=i+1}^N L_{ij}^T Y_j \right), & i = N, N-1, \dots, 1; \\ X_i &= L_{ii}^{-1} \left(Y_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} X_j \right), & i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь $\text{cholesky}[A]$ означает вычисление множителя Холецкого для матрицы A по формулам (2.7).

Симметричное гауссово исключение (или метод Холецкого) в применении

к симметричной положительно определённой матрице не требует выбора главных элементов для поддержания численной устойчивости. Однако в случае разреженной матрицы коэффициентов правильно выбранное упорядочение строк и столбцов играет важную роль [47].

При разложении методом Холецкого матрица коэффициентов A обычно претерпевает некоторое заполнение, так что матрица заполнения $F(A) = L + L^T$ имеет ненулевые элементы в тех позициях, где в матрице A стояли нули. Важнейший момент состоит в том, что переупорядочение уравнений и переменных может привести к треугольному множителю L , который разрежен в точности в той же мере, что и нижний треугольник матрицы A .

Установим теперь связь между применением к матрице A симметричного гауссова исключения и соответствующими изменениями её заполнения.

В этой схеме вычисляются одна за другой строки матрицы L . В тоже время каждый шаг требует модификации подматриц A_{ij} посредством произведения $L_{ki}^T L_{kj}$. Из формул (2.10) следует, что блочный элемент A_{ij} модифицированной матрицы A не равен нулю, если соответствующий элемент уже отличен от нуля или, если одновременно $L_{ki} \neq 0$ и $L_{kj} \neq 0$. Если справедливо лишь последнее утверждение, то происходит заполнение подматрицы A_{ij} . Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.4. *Блочная матрица A не претерпевает заполнения, если для всех ненулевых подматриц A_{ki} и A_{kj} ($k > \max(i, j)$) существует ненулевая подматрица A_{ij} .*

Эта теорема позволяет обосновать тот факт, что выписанная модификация блочного метода Холецкого, применяемая для решения уравнений (2.1) и (2.2), не приводит к заполнению множителя Холецкого.

2.2.2. Применение метода Холецкого для решения уравнений Лагранжа второго рода

Выполним модификацию выведенного выше блочного алгоритма разложения Холецкого для решения системы уравнений (2.1). При этом максимально учтём структуру матрицы \mathbf{M} .

Прежде всего отметим, что матрица перед обобщёнными ускорениями \mathbf{M} и вектор правых частей \mathbf{Q} могут быть вычислены в зависимости от порядка перемножения матриц их составляющих двумя способами.

В первом случае, когда

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{M} \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{F}}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \mathbf{A}, \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}' - \mathbf{M} \hat{\mathbf{w}}, \quad (2.14)$$

получаем прямой метод составления уравнений. В этом случае число арифметических операций для вычисления матрицы \mathbf{M} и глобального вектора \mathbf{Q} равно $O(N^3)$ и $O(N^2)$, соответственно.

Во втором случае, если для вычисления матрицы перед обобщёнными ускорениями и вектора правых частей уравнения (1.41) использовать следующие формулы:

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T \mathbf{M}^* \mathbf{A}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{F}}^*, \quad (2.16)$$

где

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}, \quad (2.17)$$

$$\hat{F}^* = T^T \hat{F}, \quad (2.18)$$

то получим *метод составных тел* [160].

С учётом формул (1.24) в рамках этого метода подматрицы блочной симметричной матрицы \mathbf{M} могут быть вычислены по следующим формулам ($i = N, N - 1, \dots, 1, j = i, i - 1, \dots, 1$):

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji}^T = \begin{cases} A_i^T M_i^* T_{ij} A_j, & j \in \mathcal{P}_i, \\ 0, & j \notin \mathcal{P}_i, \end{cases} \quad (2.19)$$

где

$$M_i^* = M_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T M_j^* C_j, \quad (2.20)$$

а компоненты вектора \mathbf{Q} — по формуле ($i = N, N - 1, \dots, 1$):

$$\mathbf{Q}_i = A_i^T \hat{F}_i^*, \quad (2.21)$$

где

$$\hat{F}_i^* = \hat{F}_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T \hat{F}_j^*. \quad (2.22)$$

Переход к рекуррентным формулам (2.19) – (2.22) позволяет уменьшить число арифметических операций при вычислении матрицы \mathbf{M} до $O(N^2)$ и вектора \mathbf{Q} до $O(N)$.

Формула (2.19) показывает, что некоторые элементы матрицы \mathbf{M} автоматически равны нулю только в следствии структуры связности системы тел. Согласно этой формуле \mathbf{M}_{ij} равняется нулю всякий раз когда i -е тело не является ни предком j -го тела, ни его потомком, ни совпадает с ним. Это возможно, только если i -е и j -е тела расположены в различных ветвях дерева системы.

На рис. 2.1 изображены графы двух систем и соответствующие им шаблоны разреженности матрицы \mathbf{M} . Рис. 2.1 а) показывает экстремальный случай,

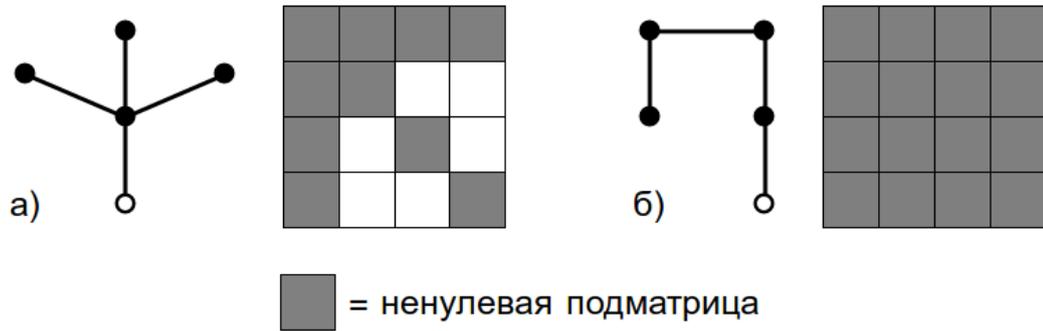


Рис. 2.1. Примеры разреженности матрицы масс

когда каждое тело соединено с базой («носитель—носимые тела»), что приводит к максимальной возможной разреженности матрицы. В этом случае ненулевые блоки матрицы \mathbf{M} расположены только на главной диагонали, в первом столбце и в первой строке. Рис. 2.1 б) показывает противоположный экстремальный случай: дерево системы не имеет ветвей («простая цепочка»), и как следствие, матрица \mathbf{M} плотная.

Структура разреженности матрицы системы \mathbf{M} позволяет доказать следующую теорему:

Теорема 2.5. При блочном разложении Холецкого (2.10) матрица \mathbf{M} не претерпевает заполнения.

Доказательство. Пусть в матрице \mathbf{M} для некоторого k блоки $\mathbf{M}_{ki} \neq 0$ и $\mathbf{M}_{kj} \neq 0$, причём $k > \max(i, j)$. Так как $\mathbf{M}_{ki} \neq 0$, то $i \in \mathcal{P}_k$ и $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_k$. Аналогично получаем, что $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_k$. Пусть для определённости $k > i > j$. Тогда $\mathcal{P}_j \subset \mathcal{P}_i$. Отсюда следует, что $j \in \mathcal{P}_i$, а значит $\mathbf{M}_{ij} \neq 0$. Следовательно, на основании теоремы 2.4, при разложении матрицы \mathbf{M} на множители блочным алгоритмом Холецкого 2.10 она не претерпевает заполнения. ►

Изменив порядок суммирования в формулах (2.10), для решения системы (2.1) можно предложить следующий алгоритм, учитывающий структуру разре-

женности матрицы \mathbf{M} :

$$\begin{aligned}
L_{ii} &= \text{cholesky} \left[\mathbf{M}_{ii} - \sum_{k \in \mathcal{D}_i} L_{ki}^T L_{ki} \right], & i = N, \dots, 1; \\
L_{ij} &= L_{ii}^{-T} \left(\mathbf{M}_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{D}_i} L_{ki}^T L_{kj} \right), & j \in \mathcal{P}_{\kappa_i}; \\
x_i &= L_{ii}^{-T} \left(\mathbf{Q}_i - \sum_{k \in \mathcal{D}_i} L_{ki}^T x_k \right), & i = N, \dots, 1; \\
\ddot{q}_i &= L_{ii}^{-1} \left(x_i - \sum_{j \in \mathcal{P}_{\kappa_i}} L_{ij} \ddot{q}_j \right), & i = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Оценим число арифметических операций, требуемых для решения системы (2.1) по формулам (2.23). В случае системы тел «носитель—носимые тела» множества $\mathcal{P}_1 = \{1\}$ и $\mathcal{P}_i = \{1, i\}$ ($i = \overline{2, N}$), и следовательно, в множителе Холецкого матрицы \mathbf{M} в каждой строке содержится только два ненулевых блока. Это приводит к тому, что число арифметических операций, требуемых для разрешения УД, пропорционально числу тел в механической системе. В случае «простой цепочки», когда матрица масс является полностью заполненной ($\mathcal{P}_i = \{1, 2, \dots, i\}$, $i = \overline{1, N}$), число арифметических операций при решении системы уравнений (2.1) пропорционально кубу от числа тел в механической системе.

2.2.3. Применение метода Холецкого для решения уравнений Лагранжа первого рода

Рассмотрим вариант блочного алгоритма разложения Холецкого (2.10) для решения системы уравнений (2.2).

Учитывая структуру матрицы S (1.15), матрицу \mathbf{H} можно представить в виде симметричной блочной матрицы с подматрицами, вычисляемыми по сле-

дующей формуле ($j = 1, 2, \dots, N$, $i = j, j + 1, \dots, N$):

$$\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{ji}^T = \begin{cases} Z_i^T C_i M_{\kappa_i}^{-1} C_i^T Z_i + Z_i^T M_i^{-1} Z_i, & i = j, \\ -Z_i^T C_i M_j^{-1} Z_j, & i \in \mathcal{S}_j, \\ Z_i^T C_i M_{\kappa_i}^{-1} C_j^T Z_j, & i \in \mathcal{S}_{\kappa_j} \wedge i > j, \\ 0, & i \notin \mathcal{S}_j \cup \mathcal{S}_{\kappa_j}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Компоненты вектора правых частей \mathbf{R} системы уравнений (2.2) могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\mathbf{R}_i = Z_i^T [C_i M_{\kappa_i}^{-1} F'_{\kappa_i} - M_i^{-1} F'_i + \hat{w}_i^{cr}]. \quad (2.25)$$

На рис. 2.2 изображены графы систем связанных тел и соответствующие им шаблоны разреженности матрицы \mathbf{H} . Также как и в случае матрицы масс \mathbf{M} матрица \mathbf{H} имеет различное заполнение в зависимости от структуры взаимосвязей в системе тел. Для системы тел со структурой «простой цепочки» эта матрица будет иметь блочный трёхдиагональный вид, а для системы тел со структурой «носитель—носимые тела» матрица \mathbf{H} будет полностью заполненной.

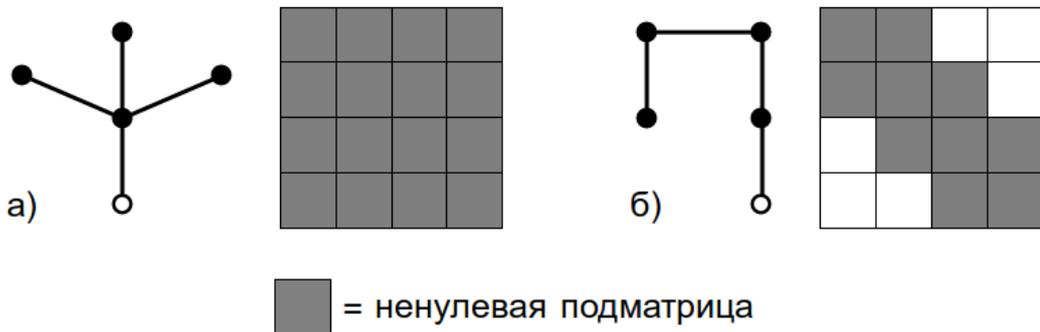


Рис. 2.2. Примеры разреженности матрицы \mathbf{H}

Анализ формулы (2.24) позволяет сделать следующий вывод:

Теорема 2.6. При блочном разложении Холецкого (2.10) матрица \mathbf{H} не претерпевает заполнения.

Доказательство. Пусть в матрице \mathbf{H} для некоторого индекса l блоки $\mathbf{H}_{li} \neq 0$ и $\mathbf{H}_{lj} \neq 0$, причём $l > \max(i, j)$. Так как $\mathbf{H}_{li} \neq 0$, то $i = k_l$ или $i \in \mathcal{S}_{k_l}$. Аналогично, из условия $\mathbf{H}_{lj} \neq 0$, следует, что $j = k_l$ или $j \in \mathcal{S}_{k_l}$. Пусть для определённости $l > i > j$, тогда возможны два варианта:

$$\begin{aligned} 1) & \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathcal{S}_{k_l} \\ j = k_l \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_i = k_l \\ j = k_l \end{array} \right. \Rightarrow j = k_i \Rightarrow \mathbf{H}_{ij} \neq 0, \\ 2) & \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathcal{S}_{k_l} \\ j \in \mathcal{S}_{k_l} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_i = k_l \\ j \in \mathcal{S}_{k_l} \end{array} \right. \Rightarrow j \in \mathcal{S}_{k_i} \Rightarrow \mathbf{H}_{ij} \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда на основании теоремы 2.4 следует, что при разложении матрицы \mathbf{H} на множители Холецкого (2.10) она не претерпевает заполнения. ►

На основании этой теоремы, с учётом структуры матрицы \mathbf{H} , формулы (2.10) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{ii} &= \text{cholesky} \left[\mathbf{H}_{ii} - \sum_{\substack{k>i \\ k \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{\kappa_i}}} L_{ki}^T L_{ki} \right], \quad i = N, N-1, \dots, 1; \\ L_{ij} &= L_{ii}^{-T} \left(\mathbf{H}_{ij} - \sum_{\substack{k>i \\ k \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{\kappa_i}}} L_{ki}^T L_{kj} \right), \quad j \in \{\kappa_i\} \cup \mathcal{S}_{\kappa_i}, \quad j < i; \\ \mu_i &= L_{ii}^{-T} \left(\mathbf{R}_i - \sum_{\substack{k>i \\ k \in \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_{\kappa_i}}} L_{ki}^T \mu_k \right), \quad i = N, N-1, \dots, 1; \\ \lambda_i &= L_{ii}^{-1} \left(\mu_i - \sum_{\substack{j<i \\ j \in \{\kappa_i\} \cup \mathcal{S}_{\kappa_i}}} L_{ij} \mu_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Анализируя эти формулы можно сделать следующие заключения: для системы тел со структурой простой цепочки вычислительная трудоёмкость решения системы уравнений данным алгоритмом будет пропорционально числу тел, а для системы тел со структурой «носитель—носимые тела» — пропорциональна кубу от числа тел.

2.3. Разрешение уравнений движения итерационным методом

В предыдущем разделе было показано, что существуют структуры СТТ, для которых УД представляют собой СЛАУ с плотно заполненной матрицей системы. В этих случаях, число операций умножения в алгоритмах, основанных на конечных методах решения СЛАУ (например, на методе Холецкого), возрастает по кубическому закону с увеличением числа степеней свободы механической системы. Это приводит к тому, что численное моделирование динамики механических систем, состоящих из большого числа тел, на основе уравнений Лагранжа или уравнения Гамильтона требует значительных затрат времени работы ЭВМ.

Итерационные алгоритмы (например, различные модификации метода сопряжённых градиентов [36]) позволяют снизить общий объём вычислений за счёт использования решения, найденного в предыдущие моменты времени промежутка интегрирования в качестве начального приближения. Так как при малой величине шага интегрирования изменения элементов матрицы перед старшими производными в системе УД СТТ малы, то для решения можно использовать методы, основанные на итерационном уточнении матрицы системы. К таким методам относятся методы переменной метрики, развитые для решения оптимизационных задач [1, 35]. Предлагаемый в данном разделе итерационный алгоритм также из их числа.

2.3.1. Постановка задачи и метод решения

Пусть задана система n линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{2.27}$$

где x — n -мерный вектор неизвестных; A — квадратная симметричная положительно определённая матрица коэффициентов порядка n ; b — n -мерный вектор правых частей уравнения.

Предположим, что матрицу A и вектор b можно представить в виде:

$$A = A_0 + \varepsilon F_0,$$

$$b = b_0 + \varepsilon f_0,$$

где $A_0, \varepsilon F_0$ — квадратные симметричные положительно определённые матрицы начального приближения и возмущений; $b_0, \varepsilon f_0$ — векторы начального приближения и возмущений; ε — малый параметр.

Необходимо найти приближенное решение $x^* \approx A^{-1}b$ системы уравнений (2.27), если известна обратная матрица $H_0 = A_0^{-1}$. Приближение к решению рассматриваем в *среднеквадратическом смысле*, т. е. считаем, что в точке x^* выполняется неравенство

$$(b - Ax^*)^T (b - Ax^*) < \varepsilon_{\text{абс}}^2, \quad (2.28)$$

где $\varepsilon_{\text{абс}}$ — допустимое абсолютное отклонение.

Особенность поставленной задачи заключается в том, что в алгоритме нахождения вектора x^* мы можем использовать матрицу H_0 в качестве начального приближения к обратной матрице A^{-1} .

Введем следующие обозначения: $r = b - Ax$ — вектор невязки системы уравнений в точке x ; s — вектор, указывающий направление, в котором происходит улучшение решения при перемещении из точки x . На k -ой итерации

последовательно вычисляются:

$$\begin{aligned}
 s_k &= H_k r_k, \\
 y_k &= r_{k-1} - r_k, \\
 H_{k+1} &= H_k + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}, \\
 x_{k+1} &= x_k + \left(1 + \frac{s_k^T r_k}{s_k^T y_k}\right) s_k, \\
 r_{k+1} &= b - Ax_{k+1}.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Для инициализации итераций, необходимо задать начальные приближения:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= A_0^{-1}, \\
 x_0 &= H_0 b,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

а также отвечающую им невязку $r_0 = b - Ax_0$. Величину r_{-1} , фигурирующую в (2.29) при $k = 0$, полагаем равной b .

Итерационный метод, задаваемый формулами (2.29), можно отнести к методам переменной метрики [1, 35]. В дальнейшем покажем, что он, как и методы сопряжённых градиентов [36], сходится за конечное число итераций.

В результате его работы происходит не только определение решения – точки x^* , но и нахождение обратной матрицы A^{-1} . По сравнению с методами сопряжённых градиентов это требует на каждой итерации дополнительно одного умножения матрицы на вектор ($s_k = H_k r_k$) и одного вычисления диадного произведения векторов ($s_k s_k^T$). Вследствие того, что основное время работы алгоритма затрачивается именно на эти операции, то метод (2.29) как метод решения СЛАУ более трудоёмок, чем методы сопряжённых градиентов. Однако в задачах моделирования динамических систем предлагаемый алгоритм оказывается более эффективным. Это связано с тем, что при численном интегрировании УД механических систем приходится многократно разрешать их относительно ускорений. Поэтому мы можем приближённое значение матрицы

A^{-1} , получаемое в результате работы алгоритма, использовать на следующих шагах численного интегрирования для улучшения начального приближения и начального направления поиска. Вычислительные эксперименты показывают, что в применении к поставленной задаче алгоритм (2.29) сходится быстрее других итерационных алгоритмов, в которых не вычисляется обратная матрица к матрице системы.

2.3.2. Основные свойства итерационного алгоритма

Во-первых, заметим, что решение системы линейных уравнений (2.27) и нахождение точки минимума квадратичной функции с положительно определённой матрицей Гессе

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b \quad (2.31)$$

являются эквивалентными задачами, так как они имеют одинаковое решение $x^* = A^{-1}b$. Система уравнений (2.27) следует из необходимых условий существования точки минимума функции (2.31), т. к. градиент функции $f(x)$ равен

$$\nabla f(x) = -r = Ax - b.$$

Во-вторых, между векторными переменными, входящими в алгоритм (2.29), легко установить следующие соотношения:

$$r_k - r_{k+1} = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) = A(x_{k+1} - x_k) = A s_k. \quad (2.32)$$

Используя соотношения (2.32), расчётные формулы (2.29) алгоритма мож-

но привести к виду

$$\begin{aligned}
s_k &= H_k r_k = -H_k \nabla f(x_k), \\
\lambda_k^* &= \arg \min_{\lambda \in \mathbb{R}} f(x_k + \lambda s_k), \\
s_k^* &= \lambda_k^* s_k, \\
x_{k+1} &= x_k + s_k^*, \\
y_k &= r_k - r_{k+1}, \\
H_{k+1} &= H_k + \frac{(s_k^* - H_k y_k)(s_k^* - H_k y_k)^\top}{(s_k^* - H_k y_k)^\top y_k},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

которые определяют метод переменной метрики Пауэлла—Бройдена [1, 35] минимизации квадратичной функции (2.31). Существенное отличие алгоритма (2.29) от алгоритма (2.33) состоит в том, что в направлении вектора s_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) не осуществляется поиск точки одномерного минимума, а выполняется перемещение на расстояние, совпадающее с длиной вектора s_k ($\lambda_k^* = 1$). Это приводит к тому, что не все направления s_k оказываются A -сопряжёнными. Тем не менее алгоритм (2.29) остается конечно сходящимся.

Перейдем к рассмотрению свойств алгоритма (2.29). В первую очередь докажем, что данный алгоритм имеет конечную скорость сходимости. Для этого нам потребуется доказать четыре вспомогательные теоремы.

Теорема 2.7. *Матрицы H_{k+1} ($k = \overline{0, n-1}$), вычисляемые по формулам (2.29), удовлетворяют квазиньютоновским условиям вида:*

$$H_{k+1}(r_i - r_{i+1}) = A^{-1}(r_i - r_{i+1}), \quad i = \overline{0, k} \tag{2.34}$$

Доказательство. Обозначим $y_i = r_i - r_{i+1}$. При $i = k$ ($\forall k = \overline{0, n-1}$) выполнение условия (2.34) можно проверить непосредственной подстановкой,

учитывая соотношения (2.32):

$$H_{k+1}y_k = H_k y_k + \frac{(H_k r_{k+1})(H_k r_{k+1})^\top y_k}{(H_k r_{k+1})^\top y_k} = H_k y_k + H_k r_{k+1} = H_k r_k = s_k = A^{-1}y_k.$$

Дальнейшее доказательство проводим методом математической индукции.

Пусть

$$H_k y_i = A^{-1}y_i, \quad i = \overline{0, k-1}.$$

Тогда

$$(s_k - H_k y_k)^\top y_i = s_k^\top y_i - y_k^\top H_k y_i = (A^{-1}y_k)^\top y_i - y_k^\top (A^{-1}y_i) = 0.$$

Следовательно, из (2.33) находим, что

$$H_{k+1}y_i = H_k y_i = A^{-1}y_i, \quad i = \overline{0, k-1}. \blacktriangleright$$

Теорема 2.8. *Последовательность направлений поиска $\{s_k\}$ удовлетворяет условиям*

$$s_{k+1} = \alpha_k (E - H_k A) s_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Доказательство. Для начала заметим, что из соотношений (2.32) и (2.34) следует, что

$$H_{k+1} A s_k = H_{k+1} y_k = A^{-1} y_k = s_k.$$

Тогда условия (2.35) доказывает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= H_{k+1} r_{k+1} = H_{k+1} (r_k - A s_k) = H_{k+1} r_k - H_{k+1} A s_k = \\ &= H_k r_k + \frac{(s_k - H_k y_k)(s_k - H_k y_k)^\top r_k}{(s_k - H_k y_k)^\top y_k} - s_k = \\ &= s_k + \alpha_k (s_k - H_k y_k) - s_k = \alpha_k (E - H_k A) s_k, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\alpha_k = \frac{(s_k - H_k y_k)^T r_k}{(s_k - H_k y_k)^T y_k}. \blacktriangleright$$

Теорема 2.9. Векторы s_k и s_{k+1} ($k = 0, 1, 2, \dots$) линейно независимы.

Доказательство. Сначала покажем, что направление спуска s_k^* , используемое при минимизации квадратичной функции (2.31) методом Пауэлла—Бройдена (2.33), можно представить в виде линейной комбинации векторов s_k и s_{k+1} . Пусть

$$\lambda_i^* = \arg \min_{\lambda \in \mathbb{R}} f(x_i + \lambda s_i), \quad i = k, k+1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_{k+1}^*} s_k^* &= -H_{k+1}^* \nabla f(x_{k+1}^*) = -H_{k+1}^* (A s_k^* + \nabla f(x_k)) = \\ &= -s_k^* + H_k r_k + \frac{(s_k^* - H_k y_k^*)(s_k^* - H_k y_k^*)^T r_k}{(s_k^* - H_k y_k^*)^T y_k^*} = \\ &= -\lambda_k^* s_k + s_k + \frac{(s_k - H_k y_k)(s_k - H_k y_k)^T r_k}{(s_k - H_k y_k)^T y_k} = (1 - \lambda_k^*) s_k + s_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Вследствие того, что

$$\begin{aligned} s_k^T A s_{k+1}^* &= \frac{1}{\lambda_k^*} s_k^{*T} A H_{k+1}^* \nabla f(x_{k+1}^*) = \\ &= \frac{1}{\lambda_k^*} (H_{k+1}^* A s_k^*)^T \nabla f(x_{k+1}^*) = \frac{1}{\lambda_k^*} s_k^{*T} \nabla f(x_{k+1}^*) = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

вектор s_{k+1}^* A -сопряжён с вектором s_k ,

Известно [36], что сопряжённые направления линейно независимы. Следовательно, используя доказанное выше свойство, что вектор s_{k+1}^* представим в виде линейной комбинации векторов s_k и s_{k+1} , приходим к заключению, что $E - H_k A \neq \lambda E$ и векторы s_k и s_{k+1} линейно независимы. \blacktriangleright

Теорема 2.10. Векторы s_k ($k \geq 2$) удовлетворяют условиям A -сопря-

жённости:

$$s_i^T A s_k = 0, \quad i = \overline{0, k-2}. \quad (2.39)$$

Доказательство. Равенства (2.39) доказываются последовательным применением соотношений (2.35) и (2.34):

$$\begin{aligned} s_i^T A s_k &= y_i^T s_k = \alpha_{k-1} y_i^T (E - H_{k-1} A) s_{k-1} = \\ &= \alpha_{k-1} [(E - A H_{k-1}) y_i]^T s_{k-1} = \alpha_{k-1} (y_i - A A^{-1} y_i)^T s_{k-1} = 0. \blacktriangleright \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из теорем 2.9 и 2.10 следует, что все направления поиска s_k ($k = \overline{0, n-1}$) линейно независимы, и, следовательно, векторы y_k ($k = \overline{0, n-1}$) также линейно независимы. Из теоремы 2.7 следует, что $H_n y_i = A^{-1} y_i$ ($i = \overline{0, n-1}$). Отсюда, в силу доказанной линейной независимости векторов y_0, y_1, \dots, y_{n-1} , следует, что $H_n = A^{-1}$ и $x_n = x^*$.

Мы доказали, что рассматриваемый метод является конечно сходящимся. Однако для того, чтобы использовать его в качестве итерационного метода решения СЛАУ, необходимо обеспечить монотонность убывания последовательности погрешностей решения $\{\|x_k - x^*\|\}$. В этом случае решение в среднеквадратическом смысле может быть достигнуто меньше, чем за $n + 1$ итерацию.

Определим, при каких условиях метод обеспечивает монотонную сходимость последовательностей $\{H_k\}$ и x_k к H и x^* соответственно.

Для этого введём обозначения:

$$A_k = H_k^{-1}, \quad \Delta A_k = \varepsilon F_k = A - A_k,$$

где ε — малый параметр, εF_k — симметричная матрица возмущений.

Обозначим через $\varkappa(A_k) = \|A_k\| \cdot \|A_k^{-1}\| = \|A_k\| \cdot \|H_k\|$ — число обусловленности матрицы A_k .

Выполним предварительные выкладки. Используя матричный ряд Тейло-

ра [36] для матрицы $(E + \varepsilon A_k^{-1} F_k)^{-1}$, можно получить:

$$\begin{aligned} H &= A^{-1} = [A_k(E + \varepsilon A_k^{-1} F_k)]^{-1} = (E + \varepsilon A_k^{-1} F_k)^{-1} A_k^{-1} = \\ &= (E - \varepsilon H_k F_k + \varepsilon^2 (H_k F_k)^2 - \dots) H_k = \\ &= H_k - \varepsilon H_k F_k (H_k - \varepsilon H_k F_k H_k + \varepsilon^2 (H_k F_k)^2 H_k - \dots) = \\ &= H_k - \varepsilon H_k F_k H. \end{aligned}$$

Таким образом, возмущения прямой и обратной матрицы связаны следующим матричным соотношением:

$$\Delta H_k = H - H_k = -\varepsilon H_k F_k H. \quad (2.41)$$

Найдём явную зависимость матрицы H_{k+1} от матрицы возмущений εF_k . Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} H_k r_{k+1} &= H_k (r_k - y_k) = s_k - H_k A s_k = (E - H_k A) s_k = \\ &= (E - H_k (A_k + \varepsilon F_k)) s_k = -\varepsilon H_k F_k s_k. \end{aligned}$$

Кроме того, можно получить, что

$$\begin{aligned} (H_k r_{k+1})^T y_k &= y_k^T (H_k r_{k+1}) = y_k^T H_k (r_k - y_k) = \\ &= s_k^T A (s_k - H_k A s_k) = s_k^T (A - A H_k A) s_k = \\ &= s_k^T ((A_k + \varepsilon F_k) - (A_k + \varepsilon F_k) H_k (A_k + \varepsilon F_k)) s_k = \\ &= -\varepsilon s_k^T (F_k + \varepsilon F_k H_k F_k) s_k. \end{aligned}$$

Последние равенства имеют место в силу симметрии матриц A , H_k , A_k , F_k .

Подставим полученные соотношения в формулу для H_{k+1} алгоритма (2.29).

В результате приходим к следующему выражению:

$$H_{k+1} = H_k - \varepsilon \frac{(H_k F_k s_k)(H_k F_k s_k)^T}{s_k^T (F_k + \varepsilon F_k H_k F_k) s_k}. \quad (2.42)$$

Теперь сформулируем и докажем достаточное условие монотонности убывания последовательности погрешностей решения $\{\|x_k - x^*\|\}$.

Теорема 2.11. *Если*

$$\|\varepsilon F_0\| < \frac{1}{\kappa(A_0)} \|A_0\| = \frac{1}{\|H_0\|}, \quad (2.43)$$

то алгоритм (2.29) обеспечивает выполнение следующих свойств:

1. $\{H_k\}$ — последовательность положительно определённых матриц.
2. Последовательности $\{\|\varepsilon F_k\|\}$, $\{\|H - H_k\|\}$ и $\{\|x_k - x^*\|\}$ монотонно убывают.

Доказательство. Докажем методом математической индукции.

Пусть $k = 1$. Докажем положительную определённость матрицы H_1 , т. е. то, что справедливо неравенство:

$$\xi^T H_1 \xi = \xi^T H_0 \xi - \varepsilon \frac{\xi^T (H_0 F_0 s_0)(H_0 F_0 s_0)^T \xi}{s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0} > 0 \quad \forall \xi \neq 0. \quad (2.44)$$

В силу положительной определённости матриц H_0 , F_0 и, если выполнено условие теоремы, матрица $F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0$ положительно определена. Из условия (2.43) можно выписать следующую последовательность неравенств:

$$1 > \|H_0\| \cdot \|\varepsilon F_0\| \geq \|\varepsilon H_0 F_0\| = \sup_{\xi \neq 0} \frac{\xi^T (\varepsilon H_0 F_0) \xi}{\xi^T \xi} \geq \frac{\xi^T (\varepsilon H_0 F_0) \xi}{\xi^T \xi}, \quad \forall \xi \neq 0.$$

Откуда следует, что $\xi^T (E - \varepsilon H_0 F_0) \xi > 0$ и $\xi^T F_0 (E - \varepsilon H_0 F_0) \xi > 0$, а это значит, что знаменатель в формуле (2.44) положителен, т. е. $s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0 > 0$.

Если $\varepsilon < 0$, то

$$\xi^T H_1 \xi = \xi^T H_0 \xi + |\varepsilon| \frac{u^T u}{s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0} > 0,$$

где $u = s_0^T F_0 H_0 \xi$. Следовательно, в этом случае матрица H_1 положительно определена.

Теперь, пусть $\varepsilon > 0$. Приведём неравенство (2.44) к общему знаменателю и исследуем знак выражения, получаемого в числителе:

$$f = \varepsilon (\xi^T H_0 \xi) s_0^T F_0 H_0 F_0 s_0 - \varepsilon \xi^T (H_0 F_0 s_0) (H_0 F_0 s_0)^T \xi + (\xi^T H_0 \xi) s_0^T F_0 s_0.$$

В силу симметрии и положительной определённости матрицы H_0 её можно разложить (с помощью сингулярного или ортогонального разложения) на произведения некоторых квадратных матриц n -го порядка [36]:

$$H_0 = V \Lambda V^T = (V \Lambda^{1/2}) (\Lambda^{1/2} V^T) = C C^T.$$

Тогда функцию f можно представить в виде:

$$f = \varepsilon (C^T \xi)^2 (C^T F_0 s_0)^2 - \varepsilon [(C^T \xi)^T (C^T F_0 s_0)]^2 + (\xi^T H_0 \xi) (s_0^T F_0 s_0).$$

В силу справедливости неравенства Коши—Буняковского: $a^2 b^2 \geq (a^T b)^2$, выражение $(C^T \xi)^2 (C^T F_0 s_0)^2 - [(C^T \xi)^T (C^T F_0 s_0)]^2$ неотрицательно. Таким образом, окончательно получаем следующую цепочку неравенств, доказывающую положительную определённость матрицы H_1 :

$$f \geq (\xi^T H_0 \xi) (s_0^T F_0 s_0) > 0 \quad \forall \xi \neq 0 \text{ и } s_0 \neq 0.$$

Теперь докажем, что $\|\varepsilon F_1\| < \|\varepsilon F_0\|$ и $\|H - H_1\| < \|H - H_0\|$. Из (2.42) и

(2.41) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{(H_0 F_0 s_0)(H_0 F_0 s_0)^T}{s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0} &= H_0 - H_1 = \\ &= (H_0 - H) - (H_1 - H) = \varepsilon H_0 F_0 H - \varepsilon H_1 F_1 H. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Заметим, что матрица ранга 1, стоящая слева от равенства в формуле (2.45), является положительно определённой. Следовательно матрица $H_0 F_0 H - H_1 F_1 H$ положительно определена. Этого условия достаточно, чтобы выполнялось требуемое неравенство для норм:

$$\|H_0 F_0 H\| > \|H_1 F_1 H\| \text{ или } \|H - H_0\| > \|H - H_1\|.$$

Исключим из равенства (2.45) H_1 , используя формулу (2.42) при $k = 1$.

Получим

$$\frac{(H_0 F_0 s_0)(H_0 F_0 s_0)^T}{s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0} (E - \varepsilon F_1 H) = H_0 (F_0 - F_1) H.$$

Рассмотрим отдельно левую и правую части последнего равенства. В силу (2.41) $E - \varepsilon F_1 H = A_1 H$ и, следовательно, матрица $E - \varepsilon F_1 H$ является положительно определённой матрицей. Тогда матрица $(F_0 - F_1)$ — также положительно определённая как произведение положительно определённых матриц:

$$F_0 - F_1 = A_0 \frac{(H_0 F_0 s_0)(H_0 F_0 s_0)^T}{s_0^T (F_0 + \varepsilon F_0 H_0 F_0) s_0} (E - \varepsilon F_1 H) A.$$

Отсюда следует требуемое неравенство для норм: $\|\varepsilon F_1\| < \|\varepsilon F_0\|$.

Теперь осталось показать, что $\|x_1 - x^*\| < \|x_0 - x^*\|$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} x_1 - x^* &= x_0 + H_0 r_0 - x^* = x_0 - x^* - H_0 (Ax_0 - b) = \\ &= x_0 - x^* - H_0 (Ax_0 - Ax^*) = (E - H_0 A)(x_0 - x^*). \end{aligned}$$

Следовательно, $\|x_1 - x^*\| < \|x_0 - x^*\|$, если $\|E - H_0A\| < 1$. Последнее неравенство выполняется в силу условия теоремы, так как

$$\|E - H_0A\| = \|E - H_0(A_0 + \varepsilon F_0)\| = \|H_0 \varepsilon F_0\| \leq \|H_0\| \cdot \|\varepsilon F_0\| < 1.$$

Утверждения теоремы доказаны при $k = 1$. Очевидно, что мы можем повторить все рассуждения при любом k , $1 \leq k \leq n$.

Таким образом, условие (2.43) является достаточным условием монотонной сходимости последовательностей норм $\{\|\varepsilon F_k\|\}$, $\{\|H - H_k\|\}$ и $\{\|x_k - x^*\|\}$. ►

Установим ещё один интересный факт. Оказывается, что если матрица возмущений εF имеет ранг меньше n , то описываемый итерационный метод сойдётся меньше чем за n итераций.

Пусть матрица возмущений εF имеет ранг $r \leq n$; обозначим $\text{rank}(\varepsilon F) = r$. Из теории известно [35], что любой метод переменной метрики может быть сформулирован как для обратной матрицы $H = A^{-1}$, так и для исходной матрицы системы $A = A_0 + \varepsilon F$. Алгоритм пересчёта матрицы приближений A_k к матрице A можно получить из формул (2.33) заменой $H_k \rightarrow A_k$, $s_k \rightarrow y_k$, $y_k \rightarrow s_k$:

$$A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k)(y_k - A_k s_k)^T}{(y_k - A_k s_k)^T s_k} = A_k + \frac{r_{k+1} r_{k+1}^T}{r_{k+1}^T s_k}. \quad (2.46)$$

Легко проверить подстановкой, что если $H_0 A_0 = A_0 H_0 = E$, то последовательности приближений удовлетворяют условию взаимной обратимости матриц H_{k+1} и A_{k+1} : $H_{k+1} A_{k+1} = A_{k+1} H_{k+1} = E$ и квазиньютоновским условиям (см. теорему 2.7 и формулы (2.32) и (2.33)):

$$H_{k+1} y_i = s_i = A^{-1} y_i, \quad A_{k+1} s_i = y_i = A s_i, \quad i = \overline{0, k}. \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в (2.46), получим рекуррентные формулы $A_{k+1} = A_k +$

$+ \delta A_k = A_0 + \sum_{i=0}^k \delta A_i$, где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \delta A_0 &= \frac{\varepsilon F s_0 (\varepsilon F s_0)^T}{(\varepsilon F s_0)^T s_0}, \\ \delta A_i &= \frac{(\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i ((\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i)^T}{((\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i)^T s_i}, \quad i = \overline{1, k}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Покажем, что если $\text{rank}(\varepsilon F) = r$, то $A_r = A_0 + \sum_{i=0}^{r-1} \delta A_i = A_0 + \varepsilon F$, т.е. $\varepsilon F = \sum_{i=0}^{r-1} \delta A_i$. Для начала заметим, что если $r = 1$, то существует вектор $p \in \mathbb{R}^n$, такой, что матрица возмущений может быть представлена в виде диадного произведения $\varepsilon F = pp^T$, при этом $p^T s_0 \neq 0$, так как по построению $s_0 = -H_0 r_0 = -H_0 \varepsilon F x_0$. Тогда

$$\delta A_0 = \frac{pp^T s_0 (pp^T s_0)^T}{(pp^T s_0)^T s_0} = \frac{(p^T s_0)^2 pp^T}{(p^T s_0)^2} = pp^T = \varepsilon F.$$

Следовательно, в этом случае $A_1 = A_0 + \varepsilon F = A$ и $H_1 = A_1^{-1} = H$ соответственно, и итерационный метод (2.29) сойдется к точному решению за два шага: $x^* = Hb = x_2 = x_1 + s_1 = x_1 - H_1(Ax_1 - b)$.

Теперь докажем необходимую вспомогательную теорему.

Теорема 2.12. Пусть матрицы A и εF удовлетворяют всем условиям, сформулированным в постановке задачи, и $\text{rank}(\varepsilon F) = r$. Пусть s_0, s_1, \dots, s_{r-1} — векторы направлений спусков, генерируемых итерационной процедурой (2.29). Тогда

$$s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-1} \delta A_i \right) s_j = 0, \quad k = \overline{1, r-1}, \quad j = \overline{1, k-1}. \quad (2.49)$$

Доказательство. Докажем лемму методом математической индукции. При $k = 1$ непосредственно убеждаемся, подставляя формулы (2.48) в равенства (2.49),

что

$$s_1^T(\varepsilon F - \delta A_0)s_0 = s_1^T \varepsilon F s_0 - s_1^T \frac{\varepsilon F s_0 (\varepsilon F s_0)^T s_0}{(\varepsilon F s_0)^T s_0} = s_1^T \varepsilon F s_0 - s_1^T \varepsilon F s_0 = 0.$$

Предположим, что равенства (2.49) справедливы для любого $i < k$: $s_i^T(\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1})s_j = 0$, $i = \overline{1, k-1}$, $j = \overline{0, i-1}$. Покажем, что из последнего условия следует, что равенства (2.49) выполняются и при $i = k > 1$. Во-первых,

$$\begin{aligned} s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-1} \delta A_i \right) s_{k-1} &= s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-2} \delta A_i \right) s_{k-1} - s_k^T \delta A_{k-1} s_{k-1} = \\ &= s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-2} \delta A_i \right) s_{k-1} - s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-2} \delta A_i \right) s_{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Во-вторых, при $j < k-1$ имеем

$$\begin{aligned} s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{k-1} \delta A_i \right) s_j &= s_k^T \left(\varepsilon F - \sum_{i=0}^{j-1} \delta A_i \right) s_j - \\ &\quad - s_k^T \delta A_j s_j - s_k^T \sum_{i=j+1}^{k-1} \delta A_i s_j = -s_k^T \sum_{i=j+1}^{k-1} \delta A_i s_j = \\ &= -s_k^T \sum_{i=j+1}^{k-1} \frac{(\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i (s_i^T (\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_j)}{((\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i)^T s_i} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Используя равенства (2.49), получим, что при любом $i = \overline{0, r-1}$ верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r-1} \delta A_k s_i &= \sum_{k=0}^{i-1} \delta A_k s_i + \delta A_i s_i + 0 = \sum_{k=0}^{i-1} \delta A_k s_i + \\ &\quad + \frac{(\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i (s_i^T (\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i)}{((\varepsilon F - \delta A_0 - \dots - \delta A_{i-1}) s_i)^T s_i} = \varepsilon F s_i. \quad (2.50) \end{aligned}$$

Так как векторы s_0, s_1, \dots, s_{r-1} в соответствии с теоремами 2.9 и 2.10 линейно независимы, а $\sum_{k=0}^{r-1} \delta A_k$ — сумма r матриц ранга 1, то r систем уравнений (2.50)

имеют единственное решение $\sum_{k=0}^{r-1} \delta A_k = \varepsilon F$. Отсюда следует, что

$$A_r = A_0 + \sum_{i=0}^{r-1} \delta A_i = A_0 + \varepsilon F,$$

$$H_r = A_r^{-1} = (A_0 + \varepsilon F)^{-1},$$

$$x^* = x_{r+1} = H_r b = x_r + s_r,$$

т.е. в случае, когда матрица возмущений имеет ранг r , итерационная процедура сойдётся к точному решению за $r + 1$ шаг.

Заметим, что при численном решении УД механических систем вида (2.1) обычно на каждом шаге интегрирования эффективный ранг [36] матрицы возмущений εF много меньше ранга матрицы системы A . Поэтому следует ожидать, что приближенное решение системы уравнений (2.27) рассматриваемым итерационным методом в практических задачах будет достигаться за небольшое число итераций.

2.3.3. Согласование шага интегрирования уравнений движения с условием сходимости итерационного метода

В УД вида (1.41) матрица \mathbf{M} , стоящая перед ускорениями, зависит только от обобщённых координат. Следовательно,

$$\|\varepsilon F\| = \|\Delta \mathbf{M}\| = \|\mathbf{M}'_q \Delta q + O(\Delta q^2)\| \leq \|\mathbf{M}'_q\| \cdot \|\Delta q\| + \|O(\Delta q^2)\|,$$

где Δq — вектор приращений обобщённых координат на шаге интегрирования.

Элементы матрицы \mathbf{M} в силу её структуры близки к квадратичным функциям относительно обобщённых координат. Поэтому существуют параметры c и a , при которых

$$\|\Delta \mathbf{M}\| \leq \frac{\|\mathbf{M}\|}{c + a\|q\|} \|\Delta q\| + \|O(\Delta q^2)\|.$$

Если шаг интегрирования h достаточно мал, то приращение обобщённых

координат Δq линейно зависит от начальных на шаге значений скорости и ускорения:

$$\Delta q = \ddot{q}_0 \frac{h^2}{2} + \dot{q}_0 h.$$

Используя неравенство (2.43), получим, что величина шага интегрирования h должна быть согласована с числом обусловленности матрицы $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(q_0)$:

$$\frac{1}{c + a\|q_0\|} \left(\|\ddot{q}_0\| \frac{h^2}{2} + \|\dot{q}_0\| h \right) \leq O \left(\frac{1}{\kappa(\mathbf{M}_0)} \right). \quad (2.51)$$

Чем больше число обусловленности $\kappa(\mathbf{M}_0)$, тем меньше должен быть шаг интегрирования.

В первом приближении, если модель механической системы в достаточной степени отмасштабирована, т. е. $q(t)$, $\ddot{q}(t)$ порядка $O(1)$, то можно предложить более простую формулу оценки сверху величины шага интегрирования h , а именно:

$$h \leq \frac{1}{\max(1, \|\dot{q}_0\|)} O \left(\frac{1}{\kappa(\mathbf{M}_0)} \right). \quad (2.52)$$

Заметим, что неравенства (2.51) и (2.52) задают достаточные условия сходимости итерационного алгоритма (2.29) и не являются существенными ограничениями на область применимости предлагаемого метода. Во-первых, численные эксперименты показывают, что метод монотонно сходится и при менее жёстких условиях на шаг интегрирования. Во-вторых, в случае невыполнения условий сходимости алгоритма (2.29) можно перейти к алгоритму (2.33), монотонная сходимость которого обеспечивается одномерной минимизацией нормы невязки решения на каждой итерации. Сочетание этих двух методов позволяет создавать действительно эффективные процедуры приведения УД механических систем к явному виду на каждом шаге численного интегрирования.

2.3.4. Особенности применения итерационного алгоритма для разрешения уравнений движения систем твёрдых тел

Как уже отмечалось в разделе 2.2, при конструировании уравнений Лагранжа второго рода методом составных тел вычисление элементов вектора \mathbf{Q} и матрицы \mathbf{M} по формулам (2.19)–(2.22) требует порядка $O(N)$ и $O(N^2)$ арифметических операций, соответственно. Кроме того, на каждом шаге итерационного алгоритма (2.29) необходимо вычислять антиградиент

$$r = \mathbf{Q} - \mathbf{M} \ddot{q}, \quad (2.53)$$

на что также требуется порядка $O(N^2)$ арифметических операций.

Сократить объём вычислений в итерационном алгоритме можно двумя путями. Первый — учесть разреженность матрицы \mathbf{M} как при вычислении её элементов, так и при вычислении антиградиента. Этот путь эффективен для систем тел со структурой типа «звезда» (рис. 2.1, а) и совершенно неэффективен для систем со структурой простой цепочки (рис. 2.1, б).

Второй путь повышения эффективности итерационного алгоритма заключается в отказе от явного формирования матрицы \mathbf{M} . В этом случае вычисление антиградиента можно организовать следующим образом:

$$u = TA \ddot{q}, \quad (2.54)$$

$$r = \mathbf{Q} - A^T T^T M u, \quad (2.55)$$

где последовательно выполняются умножения матриц на векторы.

Таким образом, вычисление антиградиента для уравнений Лагранжа второго рода осуществляется по рекуррентным формулам; объём вычислительной работы пропорционален числу тел и не зависит от структуры взаимосвязей СТТ.

Вычислительные эксперименты, приведённые в главе 4, показывают, что

объём вычислительной работы итерационного алгоритма разрешения уравнений Лагранжа второго рода пропорционален квадрату от числа тел в системе. Причиной этого является то, что приближённые значения ускорений и элементов обратной матрицы, получаемые рассмотренным итерационным алгоритмом, достигаются за конечное малое число итераций для всех рассмотренных моделей СТТ.

Выводы по главе 2

В этой главе рассмотрены вопросы разрешения УД СТТ в форме уравнений Лагранжа второго рода (1.41) и первого рода (1.43), а также редуцированных уравнений в импульсах Пуассона (1.56), (1.67) относительно старших производных. В каждом из этих случаев задача нахождения старших производных сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (2.1) или (2.2) с динамическими матрицами \mathbf{M} и \mathbf{H} соответственно.

Показано, что в зависимости от топологической структуры системы тел, получаемые при формировании указанных УД динамические матрицы \mathbf{M} и \mathbf{H} имеют различную степень разреженности. Кроме того, доказано, что эти матрицы положительно определённые. Вследствие этого для решения линейных уравнений (2.1) и (2.2) применена блочная версия метода Холецкого, учитывающая структуру разреженности матриц \mathbf{M} и \mathbf{H} . При этом метод Холецкого был модифицирован таким образом, чтобы уменьшить заполнение множителей Холецкого без переупорядочивания их строк и столбцов. Доказано, что для рассматриваемых механических систем заполнение множителей Холецкого не происходит.

Кроме того, в главе представлен новый обратный итерационный алгоритм разрешения УД механических систем относительно ускорений при их численном интегрировании. В данном алгоритме помимо определения решения системы вычисляется матрица, обратная к матрице коэффициентов системы, кото-

рая используется на следующем шаге численного интегрирования для улучшения начального приближения и начального направления поиска. Предложенный итерационный алгоритм сходится за конечное число шагов, не превосходящих ранга матрицы возмущений $\Delta\mathbf{M}$ на шаге интегрирования.

При интегрировании УД в обобщённых координатах (1.41) предложен рекуррентный алгоритм вычисления антиградиента, в котором не требуется вычисления матрицы \mathbf{M} .

Глава 3

Методы разрешения уравнений движения в избыточных переменных

В данной главе рассматриваются методы разрешения системы ДАУ (1.38) относительно расширенного числа переменных (обобщённых координат, квази-ускорений и реакций связей), и ДАУ (1.54) относительно обобщённых координат, обобщённых импульсов и квазискоростей. Их особенностью является то, что они являются системами линейных уравнений относительно своих групп переменных с общей матрицей системы. Данная матрица системы является разреженной, симметричной, но не является положительно определённой.

3.1. Разрешение расширенной системы уравнений методом прогонки

Вследствие того, что система уравнений (1.38) для СТТ со структурой простой цепочки имеет блочно-трёхдиагональный вид, её можно решить методом прогонки, который, по существу, является модификацией метода Гаусса решения СЛАУ с ленточной структурой. Впервые подобный метод был применён А. Ф. Верещагиным в 1974 г. [23] для исследования динамики пространственных механизмов, содержащих ряд звеньев, соединённых в цепь с одной степенью подвижности между звеньями.

Заметим, что при любой кинематической структуре системы тел в каждой строке матрицы системы (1.38) под главной диагональю содержится только один ненулевой блок. Поэтому метод Верещагина можно обобщить на произвольную механическую систему со структурой дерева.

3.1.1. Решение системы уравнений в лагранжевых переменных

Для простоты изложим метод прогонки на примере цепочки кинематически связанных твёрдых тел. Запишем УД N -го (концевого) тела системы:

$$M_N w_N = F'_N + R_N, \quad (3.1)$$

$$w_N = C_N w_{N-1} + A_N \ddot{q}_N + \hat{w}_N^{cr}, \quad (3.2)$$

$$A_N^T R_N = 0. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.1) исключим w_N и выразим R_N :

$$R_N = M_N(C_N w_{N-1} + A_N \ddot{q}_N + \hat{w}_N^{cr}) - F'_N. \quad (3.4)$$

После этого, подставим полученное выражение в уравнение (3.3):

$$A_N^T(M_N(C_N w_{N-1} + A_N \ddot{q}_N + \hat{w}_N^{cr}) - F'_N) = 0.$$

Из последнего уравнения найдём обобщённые ускорения в шарнире:

$$\ddot{q}_N = (A_N^T M_N A_N)^{-1} A_N^T (F'_N - M_N(C_N w_{N-1} + \hat{w}_N^{cr})). \quad (3.5)$$

Запишем теперь уравнение Ньютона—Эйлера для $(N - 1)$ -го тела:

$$M_{N-1} w_{N-1} = F'_{N-1} + R_{N-1} - C_N^T R_N.$$

Исключим из него R_N с помощью соотношений (3.4) и (3.5) и преобразуем его к виду

$$M_{N-1}^* w_{N-1} = F_{N-1}^* + R_{N-1}, \quad (3.6)$$

где введены следующие обозначения:

$$M_{N-1}^* = M_{N-1} + C_N^T (E - M_N A_N (A_N^T M_N A_N)^{-1} A_N^T) M_N C_N,$$

$$F_{N-1}^* = F'_{N-1} + C_N^T (E - M_N A_N (A_N^T M_N A_N)^{-1} A_N^T) (F'_N - M_N \hat{w}_N^{cr}).$$

Таким образом, мы получили для $(N - 1)$ -го тела уравнение, имеющее ту же структуру, что и соответствующее уравнение (3.1) для N -го тела. Поэтому повторяя наши рассуждения и вычисляя матрицы M_{k-1}^* и векторы F_{k-1}^* ($k = N, N - 1, \dots, 2$) мы можем записать аналогичное уравнение для $(N - 2)$ -го тела, затем — для $(N - 3)$ -го и так далее, вплоть до тела с номером 1.

Так реализуется прямой ход алгоритма: от конца цепочки к её началу. Обратный ход этого алгоритма (от начала цепочки до её конца) реализуется с помощью формул (3.5) и (3.2).

Для системы со структурой дерева прямой ход этого метода описывается формулами:

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T H_j M_j^* C_j, \\ F_i^* &= F_i' + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T H_j (F_j^* - M_j^* \hat{w}_j^{cr}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} H_j &= E - M_j^* A_j U_j, \\ U_j &= D_j^{-1} A_j^T, \\ D_j &= A_j^T M_j^* A_j, \end{aligned}$$

а обратный ход — соотношениями:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= U_i (F_i^* - M_i^* w_i^*), \\ w_i &= A_i \ddot{q}_i + w_i^*, \\ R_i &= M_i^* w_i - F_i^*, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$w_i^* = C_i w_{\kappa_i} + \hat{w}_i^{cr}.$$

Алгоритм (3.7) – (3.8) называется *методом отдельных тел* [160]. Он явля-

ется одним из самых эффективных методов численного моделирования систем с длинными кинематическими цепями. В этом методе требуется обращение лишь матриц $A_i^T M_i^* A_i$, порядок которых равен числу степеней свободы в i -м шарнире. Они симметричны и положительно определены. А поскольку их порядок всегда мал (не превышает шести), то этим и обусловлена эффективность описываемого метода.

3.1.2. Решение системы уравнений в гамильтоновых переменных

Учитывая формулы (1.15) и (1.24), систему уравнений (1.54) запишем в следующем виде

$$p_i^* = M_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T p_j^*, \quad (3.9)$$

$$v_i = C_i v_{\kappa_i} + A_i \dot{q}_i + \hat{v}_i^r, \quad (3.10)$$

$$A_i^T p_i^* = p_i, \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_i = (\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i) p_i^* + A_i^T F_i^*, \quad (3.12)$$

где

$$F_i^* = F_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T F_j^*.$$

На основе этой системы построим рекуррентные формулы для вычисления обобщённых скоростей \dot{q} и производных от обобщённых импульсов \dot{p} .

Покажем, что для каждого тела системы импульс p_i^* может быть представлен в виде

$$p_i^* = M_i^* v_i - \pi_i^*. \quad (3.13)$$

Нетрудно видеть, что для концевых тел системы это выполняется, если положить $M_i^* = M_i$, а $\pi_i^* = 0$.

Предположим, что формула (3.13) справедлива для всех номеров $j \in \mathcal{S}_i$. Продемонстрируем, что она справедлива и для номера i .

Для этого с помощью формулы (3.10) исключим из (3.13) декартову скорость текущего тела:

$$p_i^* = M_i^* C_i v_{\kappa_i} + M_i^* A_i \dot{q}_i + M_i^* \hat{v}_i^r - \pi_i^*. \quad (3.14)$$

Подставим полученное выражение для p_i^* в уравнение (3.11) и выразим из него обобщённую скорость \dot{q}_i :

$$\dot{q}_i = (A_i^T M_i^* A_i)^{-1} (p_i + A_i^T \pi_i^* - A_i^T M_i^* (C_i v_{\kappa_i} + \hat{v}_i^r)). \quad (3.15)$$

С помощью формул (3.14), (3.15) из уравнения (3.9) исключим импульсы несомых тел:

$$p_i^* = M_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T [M_j^* C_j v_i + \\ + M_j^* A_j (A_j^T M_j^* A_j)^{-1} (p_j + A_j^T \pi_j^* - A_j^T M_j^* (C_j v_i + \hat{v}_j^r)) + M_j^* \hat{v}_j^r - \pi_j^*].$$

Соберём в полученном равенстве коэффициент перед v_i и обозначим его через M_i^* . Оставшиеся слагаемые обозначим через π_i^* . В результате для p_i^* получим формулу (3.13).

Таким образом, для системы со структурой дерева прямой ход описывается формулами:

$$M_i^* = M_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T H_j M_j^* C_j, \\ \pi_i^* = \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T [H_j (\pi_j^* - M_j^* \hat{v}_j^r) - M_j^* A_j u_j], \\ F_i^* = F_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T F_j^*, \quad (3.16)$$

где

$$H_j = E - M_j^* A_j U_j, \\ U_j = D_j^{-1} A_j^T, \quad u_j = D_j^{-1} p_j,$$

$$D_j = A_j^T M_j^* A_j,$$

а обратный ход — формулами:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= U_i(\pi_i^* - M_i^* v_i^*) + u_i, \\ v_i &= A_i \dot{q}_i + v_i^*, \\ p_i^* &= M_i^* v_i - \pi_i^*, \\ \dot{p}_i &= (\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i) p_i^* + A_i^T F_i^*, \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$v_i^* = C_i v_{\kappa_i} + \hat{v}_i^r.$$

При реализации прямого хода i меняется от N до 1, а при обратном ходе — от 1 до N .

3.2. Разрешение расширенной системы уравнений с помощью L^TDL -разложения

В качестве ещё одного способа определения старших производных из системы уравнений (1.38) или (1.54) можно предложить метод разложения матрицы коэффициентов системы на треугольные множители.

Запишем систему уравнений (1.38) и первые три уравнения системы уравнений (1.54) в виде:

$$\begin{bmatrix} D_1 & H_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ H_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{N-1} & H_N^T \\ 0 & 0 & \cdots & H_N & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_{N-1} \\ W_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad MW = F, \tag{3.18}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 & H_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ H_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{N-1} & H_N^T \\ 0 & 0 & \cdots & H_N & D_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{N-1} \\ P_N \end{bmatrix}, \quad \text{или} \quad MV = P \quad (3.19)$$

соответственно, где

$$D_i = \begin{bmatrix} 0 & A_i^T & 0 \\ A_i & 0 & -E \\ 0 & -E & M_i \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -\hat{w}_i^{cr} \\ F_i' \end{bmatrix}, \quad W_i = \begin{bmatrix} \ddot{q}_i \\ R_i \\ w_i \end{bmatrix}, \quad P_i = \begin{bmatrix} p_i \\ -\hat{v}_i^r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_i = \begin{bmatrix} \dot{q}_i \\ p_i^* \\ v_i \end{bmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что матрицы систем (3.18) и (3.19) совпадают.

3.2.1. Разложение матрицы системы на треугольные множители

Матрицы D_i симметричны, но не являются положительно определёнными. Поэтому разложение Холецкого здесь не применимо. Однако, как нетрудно видеть, эти матрицы можно разложить следующим образом:

$$D_i = L_{D_i}^T \check{I} L_{D_i} \quad (3.20)$$

где

$$L_{D_i} = \begin{bmatrix} L_{AMA_i} & 0 & 0 \\ L_{M_i^{-1}}^{-T} A_i & -L_{M_i^{-1}} & 0 \\ 0 & -L_{M_i}^{-T} & L_{M_i} \end{bmatrix}, \quad \check{I} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{bmatrix}.$$

Здесь L_{M_i} , $L_{M_i^{-1}}$ и L_{AMA_i} факторы Холецкого матриц M_i , M_i^{-1} и $A_i^T M_i A_i$ соответственно.

С помощью разложения (3.20) матрицу коэффициентов системы уравнений (3.18) можно представить в виде:

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_0 = \begin{bmatrix} D_1 & H_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ H_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{N-1} & H_N^T \\ 0 & 0 & \cdots & H_N & D_N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & L_{H_N}^T \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{D_N}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & H_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ H_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{N-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \check{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & L_{H_N} & L_{D_N} \end{bmatrix} = \mathbb{L}_1^T \mathbb{M}_1 \mathbb{L}_1,$$

где

$$L_{H_N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_N C_N \\ 0 & 0 & L_{M_N^{-1}}^{-T} C_N \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{N-1}^* = \begin{bmatrix} 0 & A_{N-1}^T & 0 \\ A_{N-1} & 0 & -E \\ 0 & -E & M_{N-1}^* \end{bmatrix}.$$

Матрица U_N находится из матричного уравнения

$$L_{A_M A_N}^T U_N = A_N^T M_N,$$

а матрица M_{N-1}^* вычисляется по формуле:

$$M_{N-1}^* = M_{N-1} + C_N^T (M_N - U_N^T U_N) C_N.$$

Нетрудно видеть, что матрица D_{N-1}^* имеет ту же структуру, что и матрицы D_i , а следовательно, к ней применимо разложение (3.20). Разложим матрицу \mathbb{M}_1 на произведение трёх матриц:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_1 &= \begin{bmatrix} D_1 & H_2^T & \cdots & 0 & 0 \\ H_2 & D_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_{N-1}^* & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \check{I} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} E & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & E & L_{H_{N-1}}^T & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & L_{D_{N-1}}^T & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & D_{N-2}^* & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \check{I} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \check{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & E & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & L_{H_{N-1}} & L_{D_{N-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & E \end{bmatrix} = \mathbb{L}_2^T \mathbb{M}_2 \mathbb{L}_2.
\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим, что

$$\mathbb{M} = \mathbb{L}_1^T \mathbb{L}_2^T \dots \mathbb{L}_N^T \mathbb{M}_N \mathbb{L}_N \dots \mathbb{L}_2 \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}^T \mathbb{I} \mathbb{L}, \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbb{L} &= \begin{bmatrix} L_{D_1} & 0 & \cdots & 0 \\ L_{H_2} & L_{D_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{D_N} \end{bmatrix}, & \mathbb{I} &= \begin{bmatrix} \check{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \check{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \check{I} \end{bmatrix}, \\
L_{D_i} &= \begin{bmatrix} L_{A M A_i} & 0 & 0 \\ L_{M_i^{-1}}^{-T} A_i & -L_{M_i^{-1}} & 0 \\ 0 & -L_{M_i}^{-T} & L_{M_i} \end{bmatrix}, & L_{H_i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_i C_i \\ 0 & 0 & L_{M_i^{-1}}^{-T} C_i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Здесь L_{M_i} , $L_{M_i^{-1}}$ и $L_{A M A_i}$ — множители Холецкого матриц M_i^* , M_i^{*-1} и $A_i^T M_i^* A_i$ соответственно, где

$$M_i^* = M_i + C_{i+1}^T (M_{i+1}^* - U_{i+1}^T U_{i+1}) C_{i+1}, \quad U_i = L_{A M A_i}^{-T} A_i^T M_i^*. \quad (3.22)$$

(3.22) и (3.27) задают прямой ход метода Холецкого (приведение системы (3.18) к треугольному виду), а формулы (3.29) — обратный ход (решение треугольной системы).

Если обобщить этот алгоритм на случай СТТ со структурой дерева, то формулы (3.22), (3.26) и (3.27) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} M_i^* &= M_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T H_j C_j, \\ F_i^* &= F_i' + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} C_j^T h_j, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} H_j &= M_j^* - U_j^T U_j, & h_j &= F_j^* - H_j \hat{w}_j^{cr} - U_j^T u_j, \\ U_j &= L_j^{-T} A_j^T M_j^*, & u_j &= L_j^{-T} A_j^T F_j^*, \\ L_j &= \text{cholesky} [A_j^T M_j^* A_j], \end{aligned}$$

а соотношения (3.29) — к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i &= L_i^{-1} (u_i - U_i w_i^*), \\ w_i &= A_i \ddot{q}_i + w_i^*, \\ R_i &= M_i^* w_i - F_i^*, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$w_i^* = C_i w_{\kappa_i} + \hat{w}_i^{cr}$$

В данном алгоритме решения системы уравнений (1.38) требуется найти множители Холецкого для симметричных положительно определённых матриц $A_i^T M_i^* A_i$, порядок которых не превышает шести. Поэтому вычислительные затраты алгоритма растут линейно с ростом числа тел в механической системе.

обратный ход — формулами:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_i &= L_i^{-1}(u_i - U_i v_i^*), \\
 v_i &= A_i \dot{q}_i + v_i^*, \\
 p_i^* &= M_i^* v_i - \pi_i^*, \\
 \dot{p}_i &= \left(\dot{A}_i^T - A_i^T \Omega_i \right) p_i^* + A_i^T F_i^*,
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

где

$$v_i^* = C_i v_{\kappa_i} + \hat{v}_i^r.$$

Выводы по главе 3

В этой главе рассмотрены методы разрешения дифференциально-алгебраических УД (1.38) и (1.54) относительно обобщённых ускорений и скоростей соответственно.

Первый метод основан на несимметричном алгоритме гауссова исключения для блочных ленточных систем (методе прогонки). Второй метод основан на процедуре симметричного гауссового исключения ($L^T DL$ -разложении). Оба метода доведены до рекуррентных алгоритмов. Первый метод является развитием метода А. Ф. Верещагина [23], а второй был разработан автором.

Эти методы характеризуются линейным ростом числа арифметических операций в зависимости от количества тел в механической системе. С этой точки зрения, при большом числе тел в системе алгоритмы разрешения уравнений (1.38) или (1.54), содержащих избыточное число переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования УД в обобщённых координатах вида (1.41) или (1.59) и их последующего разрешения.

Глава 4

Эффективность алгоритмов компьютерного моделирования динамики систем твёрдых тел

С теоретической точки зрения разные формы матричных уравнений динамики СТТ совершенно эквивалентны. С вычислительной — уравнения (1.38), (1.41), (1.43) для каждой конкретной СТТ могут отличаться весьма существенно, поскольку объём вычислительных операций, требуемых для их формирования и интегрирования, зависит от размерности математической модели СТТ и её кинематической структуры. Запись матричных уравнений в явном виде позволяет оценить необходимые для интегрирования объёмы вычислений и на этой основе выбрать рациональный метод решения УД конкретной моделируемой СТТ.

В этой главе проводится анализ вычислительных затрат различных алгоритмов компьютерного моделирования динамики СТТ и сравнение этих алгоритмов по объёму арифметических операций на каждом шаге численного интегрирования (теоретическая оценка) и времени выполнения одного шага интегрирования (вычислительный эксперимент).

Объём вычислительных затрат методов измерялся числом флопов. *Флоп* — это одна операция над числами в формате с плавающей точкой [36]. Оценка количества флопов — это грубый подход, применяемый в случае отсутствия других инструментов к измерению эффективности программ, поскольку этот подход игнорирует затраты на индексацию, обмены с памятью и многочисленные прочие издержки, возникающие при исполнении программы на компьютере.

При оценке вычислительных затрат не учитывался объём арифметической работы, требуемый для вычисления элементов матриц ρ_i , G_i , A_i , v_i^r , \hat{w}_i^r и F_i . В каждом конкретном случае задача нахождения этих матриц не является трудоёмкой и может быть выполнена вручную или средствами систем аналитических

вычислений (СAB). Кроме того, этот объём вычислений присутствует в каждом методе, не является значимым по сравнению с другими этапами моделирования механической системы и поэтому не сказывается на сравнении их вычислительной эффективности.

Практическая эффективность алгоритмов формирования УД механических систем и разрешения их относительно обобщённых ускорений проверялась на примерах интегрирования уравнений, описывающих колебания многозвенных механических систем со структурой дерева, отличающихся как количеством степеней свободы в шарнирах, так и структурой взаимосвязей.

Рассматривались два типа систем: «цепь» (все тела соединены последовательно друг с другом) и «звезда» (на базовом теле закреплено несколько цепочек тел). Для соединения тел системы использовались: 1) одностепенные вращательные шарниры; 2) двустепенные кардановые шарниры; 3) трёхстепенные шаровые шарниры.

Интегрирование механических систем осуществлялось методом Штермера [132] с порядком аппроксимации равным шести с постоянным шагом и измерялось среднее время вычисления одного шага этого метода.

4.1. Оценка вычислительных затрат алгоритмов моделирования систем твёрдых тел

4.1.1. Затраты при использовании уравнений Лагранжа второго рода

Решение прямой задачи динамики СТТ с использованием уравнений Лагранжа второго рода можно разбить на три этапа: 1) вычисление векторов v , \hat{w} , \hat{F} ; 2) вычисление элементов матриц M и Q ; 3) вычисление обобщённых ускорений \ddot{q} .

Объём вычислительной работы первого этапа, выраженный в флопах, при-

ведён в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
v	(1.11)	$24N$	$24N$
\hat{w}	(1.33)	$36N$	$39N$
\hat{F}	(2.14)	$54N$	$45N$

Как уже отмечалось, некоторые элементы матрицы масс \mathbf{M} в УД (2.1) автоматически равны нулю и их количество зависит исключительно от кинематической структуры СТТ. Для учёта влияния кинематической структуры введём в рассмотрение коэффициенты $\eta_i = \sum_{j \in \mathcal{P}_i} n_j$ и $\tau_i = \sum_{j \in \mathcal{P}_i} n_i$. В табл. 4.2 приведён объём вычислительной работы алгоритма на втором этапе.

Таблица 4.2

	Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
Прямой метод	B	(1.31)	$24 \sum_{i=2}^N \eta_{\kappa_i}$	$18 \sum_{i=2}^N \eta_{\kappa_i}$
	Q	(2.12)	$6 \sum_{i=1}^N \eta_i$	$6 \sum_{i=1}^N \eta_i$
	M	(2.11)	$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 + 8\eta_i)$	$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 + 6\eta_i)$
Метод составных тел	\hat{F}^*	(2.22)	$24(N-1)$	$24(N-1)$
	M^*	(2.20)	$87(N-1)$	$70(N-1)$
	Q	(2.21)	$6n$	$6n$
	M	(2.19)	$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2 + 8\tau_i + n_i)$	$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2 + 6\tau_i + n_i)$

Требуемое количество флопов для решения СЛАУ с разреженной матрицей системы методом квадратных корней определено в приложении Б.

Если учесть структуру разреженности матрицы масс \mathbf{M} , то объём вычислительной работы алгоритма разрешения уравнений Лагранжа второго рода относительно обобщённых ускорений (третьего этапа) можно выразить следующей формулой:

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{n_i} [(\eta_i - k + 1)^2 + 4(\eta_i - k + 1) - 2] = \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N [2n_i^3 - 6n_i^2\eta_i + 6n_i\eta_i^2 - 15n_i^2 + 30n_i\eta_i + n_i] = \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N [2(\eta_i^3 - (\eta_i - n_i)^3) + 15(\eta_i^2 - (\eta_i - n_i)^2) + n_i].
\end{aligned}$$

Вследствии того, что $\eta_i - n_i = \eta_{\kappa_i}$, окончательно получаем:

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\eta_i^3}{3} + \frac{5\eta_i^2}{2} + \frac{\eta_i}{6} \right] - \sum_{i=2}^N \left[\frac{\eta_{\kappa_i}^3}{3} + \frac{5\eta_{\kappa_i}^2}{2} + \frac{\eta_{\kappa_i}}{6} \right].$$

Для оценки количества флопов необходимых для решения прямой задачи динамики СТГ с использованием уравнений Лагранжа второго рода просуммируем арифметические затраты по всем этапам:

$$\mathbf{N}(\text{DRT}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\eta_i^3}{3} + \frac{17\eta_i^2}{2} + \frac{325\eta_i}{6} + 222 \right] - \sum_{i=2}^N \left[\frac{\eta_{\kappa_i}^3}{3} + \frac{5\eta_{\kappa_i}^2}{2} - \frac{251\eta_{\kappa_i}}{6} \right], \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\text{CBM}) &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\eta_i^3}{3} + \frac{17\eta_i^2}{2} + \frac{109\eta_i}{6} + 222 + 42\tau_i \right] - \\
&\quad - \sum_{i=2}^N \left[\frac{\eta_{\kappa_i}^3}{3} + \frac{17\eta_{\kappa_i}^2}{2} + \frac{109\eta_{\kappa_i}}{6} - 205 \right]. \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Здесь, введены следующие обозначения: DRT — формирования УД прямым методом; CBM — формирования УД методом составных тел.

В качестве примера рассмотрим две системы N тел, графы которых имеют структуры «звезда» и «цепочка» (рис. 2.1), с одинаковым числом степеней свободы в каждом шарнире, равным n_J . В этом случае, $n = N \cdot n_J$. Для системы типа «звезда»: $\eta_{\kappa_i} = \eta_1 = n_1 = n_J$, $\eta_i = n_1 + n_i = 2n_J$, $\tau_1 = n_J$, $\tau_i = 2n_J$ ($i = \overline{2, N}$), а для системы типа «цепочка»: $\eta_i = \sum_{j=1}^i n_j = i \cdot n_J$, $\tau_i = i \cdot n_J$ ($i = \overline{1, N}$).

В табл. 4.3 представлены оценки объёмов вычислительной работы алго-

ритмов моделирования динамики СТТ на основе уравнений Лагранжа второго рода для систем со структурой «звезда» и «цепочка» при $n_J = 1, 2, 3$.

Таблица 4.3

	n_J	«Звезда»	«Цепочка»
DRT	1	$406N$	$\frac{7}{3}N^3 + \frac{107}{2}N^2 + \frac{1375}{6}N$
	2	$667N$	$\frac{32}{3}N^3 + 118N^2 + \frac{715}{3}N$
	3	$1019N$	$27N^3 + \frac{387}{2}N^2 + \frac{499}{2}N$
CBM	1	$557N - 205$	$\frac{1}{3}N^3 + \frac{59}{2}N^2 + \frac{2797}{6}N - 205$
	2	$752N - 205$	$\frac{8}{3}N^3 + 76N^2 + \frac{1516}{3}N - 205$
	3	$1026N - 205$	$9N^3 + \frac{279}{2}N^2 + \frac{1089}{2}N - 205$

Из формул, приведённых в таблице, следует, что в случае СТТ со структурой «звезда» арифметические затраты алгоритмов формирования уравнений Лагранжа второго рода и их разрешения относительно старших производных для обоих методов пропорциональны числу тел. Напротив, в случае СТТ со структурой «цепочка» для составления УД в обобщённых координатах (1.41) и их разрешения относительно обобщённых ускорений требуется порядка $O(N^3)$ флопов.

Подтвердим теоретические выкладки вычислительным экспериментом. На рис. 4.1 и 4.2 показаны зависимости времени интегрирования УД (1.41) от числа тел для систем различной структуры и числа степеней свободы в шарнирах. В легенде графиков к аббревиатуре названия метода добавлен индекс, соответствующий числу степеней свободы в шарнирах. Нетрудно видеть, что оба метода показывают линейную зависимость среднего времени вычисления одного шага интегрирования УД от числа тел для СТТ со структурой «звезда» и кубическую — для СТТ со структурой «цепочка». Кроме того, графики показывают, что метод составных тел с точки зрения времени интегрирования УД эффективнее прямого метода.

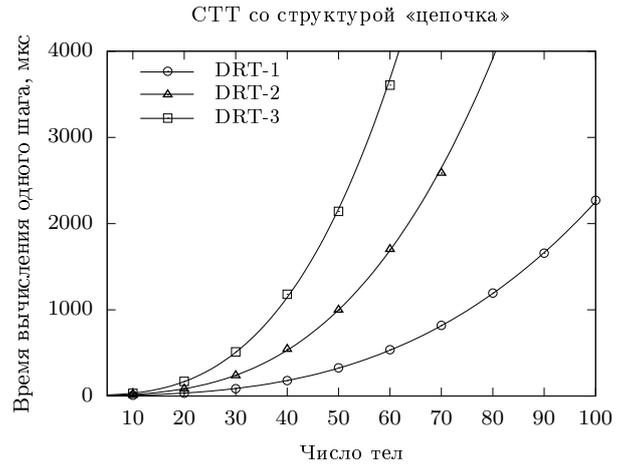
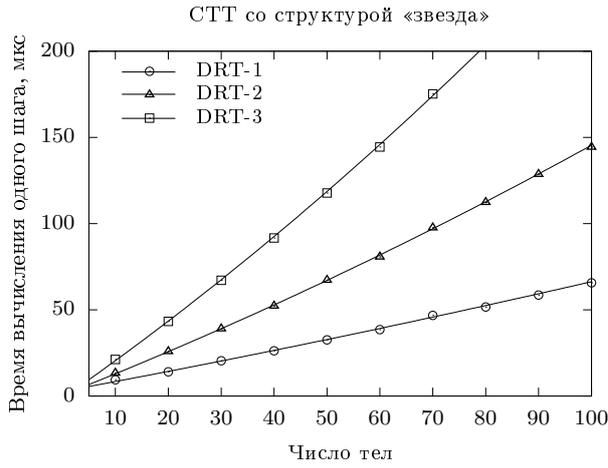


Рис. 4.1. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

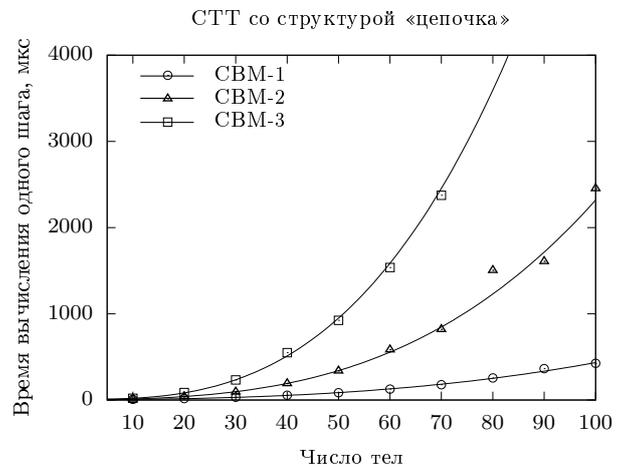
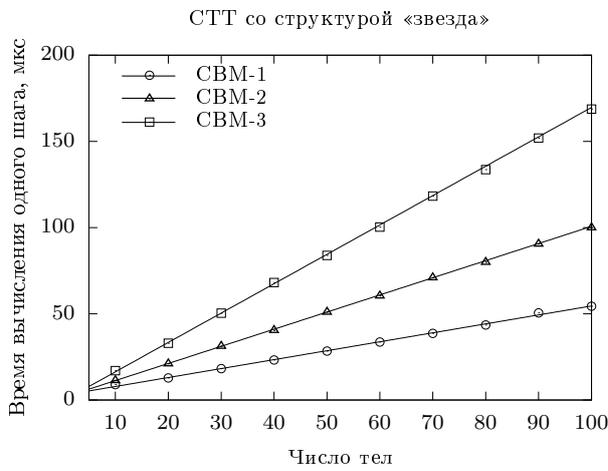


Рис. 4.2. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

4.1.2. Затраты при использовании уравнений Лагранжа первого рода

Метод моделирования динамики СТТ, основанный на применении уравнений Лагранжа первого рода будем обозначать LGR. Для учёта структуры взаимосвязей СТТ при вычислении элементов матриц \mathbf{H} и \mathbf{R} , входящих в уравнение (2.2), введём коэффициенты: $\mu_i = m_i + \sum_{j \in \mathcal{S}_i} m_j$, где $m_i = 6 - n_i$. Коэффициент μ_i характеризует разветвлённость i -го узла в дереве структуры СТТ.

Формулы для определения количества флопов, требуемых для формирования системы уравнений (1.46), её разрешения относительно множителей Лагранжа, вычисления обобщённых ускорений \ddot{q}_i с помощью формул (1.44) и (1.45) представлены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
v	(1.11)	$24N$	$24N$
w'	(1.12)	$30N$	$27N$
F'	(1.36)	$30N$	$21N$
\mathbf{H}	(2.24)	$\sum_{i=1}^N (3\mu_i^2 + 27\mu_i)$	$\sum_{i=1}^N (3\mu_i^2 + 21\mu_i)$
\mathbf{R}	(2.25)	$\sum_{i=1}^N (6\mu_i + 24)$	$\sum_{i=1}^N (6\mu_i + 24)$
λ	(Б.8)	$\sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu_i^3}{3} + \frac{5\mu_i^2}{2} + \frac{\mu_i}{6} \right] - \sum_{i=2}^N \left[\frac{m_i^3}{3} + \frac{5m_i^2}{2} + \frac{m_i}{6} \right]$	
w	(1.45)	$6m + 48N - 24$	$6m + 42N - 24$
\ddot{q}	(1.44)	$6n + 24N$	$6n + 30N$

Суммарный объём вычислительной работы, необходимой для нахождения обобщённых ускорений из уравнений Лагранжа первого рода, выражается следующей формулой:

$$N(\text{LGR}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mu_i^3}{3} + \frac{17\mu_i^2}{2} + \frac{361\mu_i}{6} + 420 \right] - \sum_{i=2}^N \left[\frac{m_i^3}{3} + \frac{5m_i^2}{2} + \frac{m_i}{6} \right] - 48. \quad (4.3)$$

В качестве примера вновь рассмотрим СТТ со структурами «звезда» и «цепочка». Нетрудно видеть, что для систем первого типа $\mu_1 = m = (6 - n_J)N$ и $\mu_i = m_i = 6 - n_J$ ($i = \overline{2, N}$), а для второго типа $\mu_i = 12 - 2 * n_J$ ($i = \overline{1, N - 1}$) и $\mu_N = 6 - n_J$. В табл. 4.5 представлены оценки арифметических затрат алгоритма моделирования динамики СТТ на основе уравнений Лагранжа первого рода для систем со структурой «звезда» и «цепочка» при $n_J = 1, 2, 3$.

Таблица 4.5

n_J	«Звезда»	«Цепочка»
1	$\frac{125N^3}{3} + \frac{425N^2}{2} + \frac{7025N}{6} - 498$	$2100N + 57$
2	$\frac{64N^3}{3} + 136N^2 + \frac{2990N}{3} - 384$	$1554N + 14$
3	$9N^3 + \frac{153N^2}{2} + \frac{1669N}{2} - 282$	$1127N - 16$

Таким образом, для СТТ со структурой «звезда» данный метод моделирования требует порядка $O(N^3)$ флопов, а для СТТ со структурой «цепочка» — $O(N)$. При этом с ростом числа степеней свободы в шарнирах объём вычислительной работы метода снижается.

Результаты вычислительных экспериментов, приведённых на рис. 4.3, демонстрируют, что для систем со структурой «цепочка» данный метод действительно показывает линейную зависимость среднего времени вычисления одного шага интегрирования УД от числа тел в системе, а для систем со структурой «звезда» — кубическую. Причём с ростом числа степеней свободы в шарнирах среднее время выполнения одного шага уменьшается.

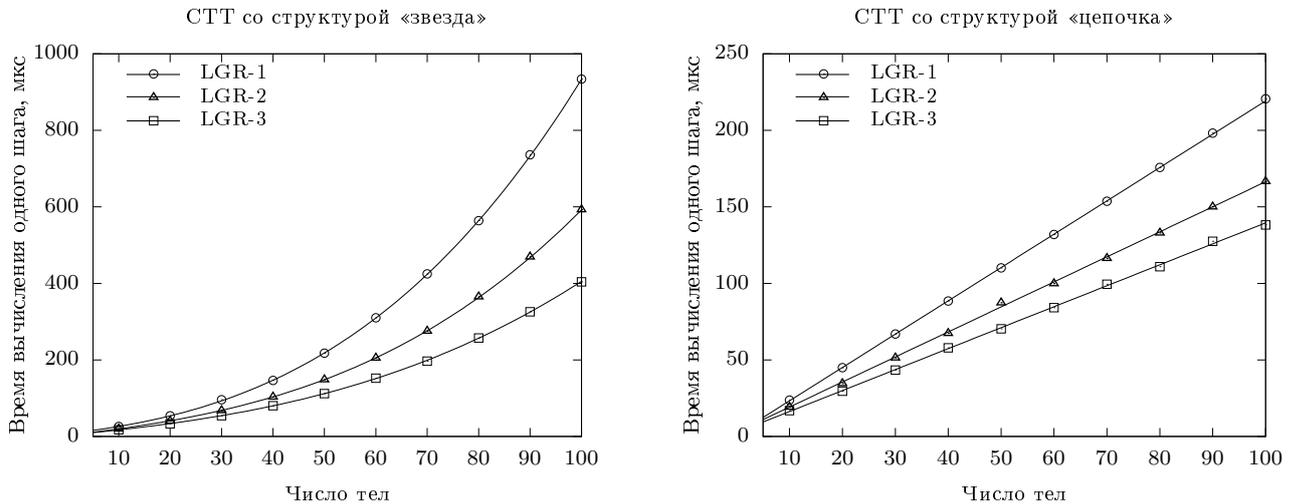


Рис. 4.3. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

4.1.3. Затраты при использовании итерационного алгоритма

В подразделах 4.1.1 и 4.1.2 показано, что в наихудших случаях объём вычислительной работы алгоритмов моделирования динамики СТТ на основе уравнений Лагранжа первого или второго рода пропорционален кубу числа тел в системе. При этом коэффициент пропорциональности зависит от способа разрешения систем уравнений относительно неизвестных (обобщённых ускорений и множителей Лагранжа). Замена метода Холецкого решения СЛАУ обратным итерационным алгоритмом (2.29) позволяет снизить объём вычислений при мо-

делирования этими методами до $O(N^2)$.

Как уже отмечалось в подразделе 2.3.4, существует два варианта вычисления антиградиента на каждом шаге итерационного алгоритма. В табл. 4.6 представлены арифметические затраты на вычисление антиградиента обоими способами.

Таблица 4.6

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
v, \hat{w}, \hat{F} (см. табл. 4.1)		$114N$	$108N$
\hat{F}^*, Q (см. табл. 4.2)		$6n + 24N - 24$	$6n + 24N - 24$
M^*, M (см. табл. 4.2)		$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2 + 8\tau_i + n_i) + 87N - 87$	$3 \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2 + 6\tau_i + n_i) + 70N - 70$
r_k	(2.53)	$\sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2)$	$\sum_{i=1}^N (\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2)$
u_k	(2.54)	$6n + 24N - 24$	$6n + 18N - 24$
r_k	(2.55)	$6n + 48N - 24$	$6n + 45N - 24$

Количество флопов на различных этапах итерационного алгоритма (2.29) (кроме вычисления антиградиента) представлено в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
x_0	(2.30)	n^2	$n^2 - n$
$r_k^T r_k$	(2.28)	n	$n - 1$
s_k, y_k	(2.29)	n^2	n^2
H_k	(2.29)	$n^2 + 2n + 1$	$n^2 + n - 1$
x_k	(2.29)	$2n + 1$	$2n$

Просуммировав вычислительные затраты всех этапов получим формулы для оценки объёма арифметических операций, необходимых для решения прямой задачи динамики СТТ при использовании уравнений Лагранжа второго рода совместно с итерационным алгоритмом их разрешения относительно обобщённых ускорений:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\text{ITR-M}) = \sum_{i=1}^N [(2K + 6)(\eta_i^2 - \eta_{\kappa_i}^2) + 42\tau_i] + \\ + (4K + 2)n^2 + (9K + 19)n + 427N - 206, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$N(\text{ITR-G}) = 2n^2 + 37n + 405N - 145 + (4n^2 + 33n + 135N - 96) K, \quad (4.5)$$

где K — необходимое для сходимости итерационного алгоритма число итераций; ITR-M — вычисление антиградиента по формуле (2.53); ITR-G — вычисление антиградиента по формулам (2.54) и (2.55).

В табл. 4.8 приведены формулы для определения количества флопов, требуемых для нахождения обобщённых ускорений из уравнений Лагранжа второго рода для СТТ со структурой «звезда» и «цепочка» с разным числом степеней свободы в шарнирах при использовании итерационного алгоритма.

Таблица 4.8

	n_j	«Звезда»	«Цепочка»
ITR-M	1	$(4K + 2)N^2 + (15K + 548)N - 206$	$(6K + 29)N^2 + (9K + 467)N - 206$
	2	$(16K + 8)N^2 + (42K + 705)N - 206$	$(24K + 74)N^2 + (18K + 507)N - 206$
	3	$(36K + 18)N^2 + (81K + 898)N - 206$	$(54K + 135)N^2 + (27K + 547)N - 206$
ITR-G	1	$(4K + 2)N^2 + (168K + 442)N - (96K + 145)$	
	2	$(16K + 8)N^2 + (201K + 479)N - (96K + 145)$	
	3	$(36K + 18)N^2 + (234K + 516)N - (96K + 145)$	

Нетрудно видеть, что для механических систем со структурой «цепочка» вариант итерационного алгоритма с вычислением антиградиента по рекуррентным формулам (2.54) и (2.55) предпочтительнее варианта этого метода с явным вычислением матрицы \mathbf{M} . В случае механических систем со структурой «звезда» не всё так однозначно. Вариант итерационного алгоритма (2.29) с вычислением матрицы \mathbf{M} становится менее затратным, если среднее число итераций больше 0,7 для $n_j = 1$, больше 1,4 для $n_j = 2$ и больше 2,5 для $n_j = 3$. Фактически это означает, что для систем со структурой «звезда» вариант с вычислением матрицы \mathbf{M} предпочтительнее.

Исследуем теперь свойства итерационного алгоритма (2.29) с помощью вычислительного эксперимента. В отличие от рассмотренных выше методов, объём вычислительной работы алгоритма моделирования СТТ, основанного на использовании итерационного алгоритма (2.29), зависит не только от структуры

взаимосвязей тел в системе, но и от шага интегрирования.

Из рис. 4.4 видно, что для всех структур взаимосвязей тел в СТТ данный метод показывает квадратичную зависимость вычислительной трудоёмкости от числа тел в системе. При этом уменьшение времени, затраченного на выполнение одного шага интегрирования, для СТТ со структурой «звезда» связано с тем, что при одинаковом шаге интегрирования матрица возмущений для разреженной матрицы квадратичной формы имеет меньший ранг, чем для плотной матрицы, а следовательно, для нахождения решения требуется меньшее число итераций.

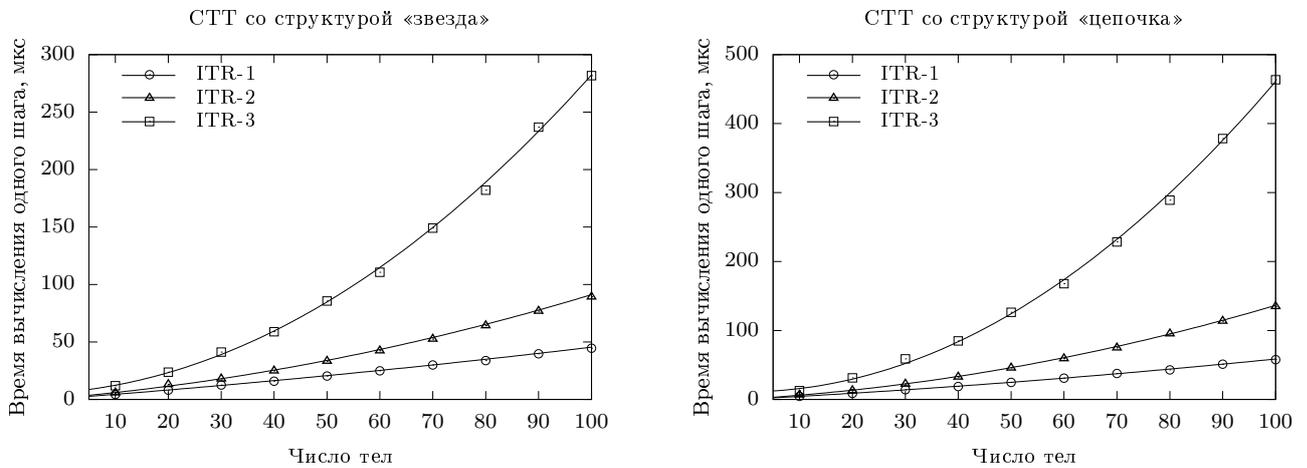


Рис. 4.4. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

Графики на рис. 4.5 показывают, что среднее число итераций итерационного алгоритма существенно меньшего числа степеней свободы механической системы и практически не изменяется с ростом числа тел.

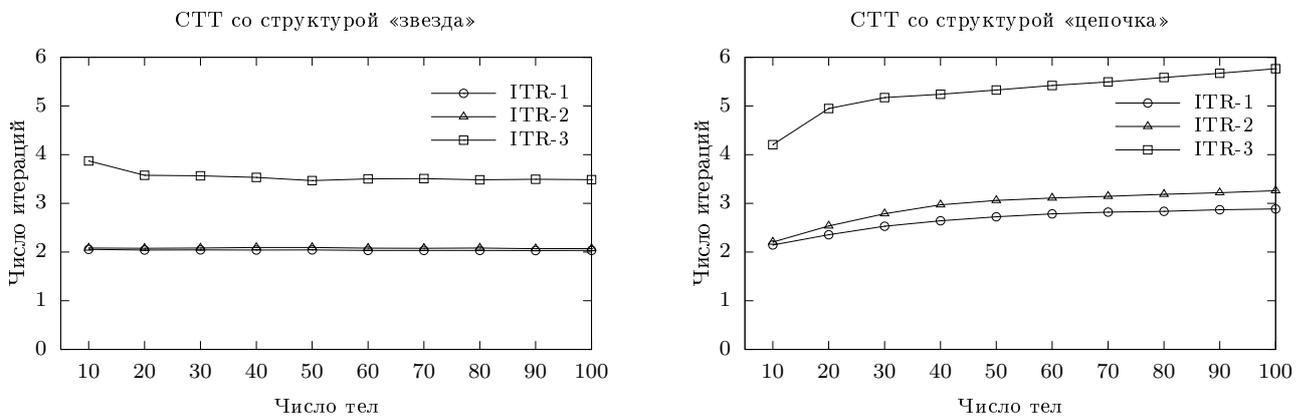


Рис. 4.5. Зависимость среднего числа итераций от числа тел в системе

4.1.4. Затраты при использовании уравнений движения в избыточных переменных

Решение прямой задачи динамики СТТ исходя из расширенной системы уравнений движения (1.38) можно разбить на три этапа: 1) формирование уравнений движения; 2) приведение уравнений движения к двудиagonalному виду или разложение на треугольные множители; 3) решение уравнений движения.

В табл. 4.9 и 4.10 представлены формулы для вычисления числа флопов требуемых на каждом этапе нахождения обобщённых ускорений методами прогонки и L^TDL -разложения. Метод прогонки будем обозначать АВМ, а метод разложения — DEC.

Таблица 4.9

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
v, w', F' (см. табл. 4.4)		$84N$	$72N$
D, U	(3.7)	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^N (n_i^3 + 57n_i^2 + 236n_i)$	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^N (n_i^3 + 48n_i^2 + 161n_i)$
H, M^*, F^*	(3.7)	$\sum_{i=2}^N (36n_i + 600)$	$\sum_{i=2}^N (36n_i + 522)$
\ddot{q}, w	(3.8)	$\sum_{i=1}^N (12n_i + 60)$	$\sum_{i=1}^N (11n_i + 60)$

Таблица 4.10

Объект	Формула	Умножений (N_{\times})	Сложений (N_{+})
v, w', F' (см. табл. 4.4)		$84N$	$72N$
L, U, u	(3.30)	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^N (n_i^3 + 60n_i^2 + 233n_i)$	$\frac{1}{6} \sum_{i=1}^N (n_i^3 + 51n_i^2 + 230n_i)$
H, h, M^*, F^*	(3.30)	$\sum_{i=2}^N (42n_i + 348)$	$\sum_{i=2}^N (42n_i + 312)$
\ddot{q}, w	(3.31)	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (n_i^2 + 23n_i + 48)$	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (n_i^2 + 25n_i + 48)$

Суммируя строки в таблицах получим, что при использовании этих методов объём вычислительной работы для нахождения обобщённых ускорений определяется формулами:

$$N(\text{ABM}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{n_i^3}{3} + \frac{35n_i^2}{2} + \frac{967n_i}{6} + 1242 \right) - (72n_1 + 1122), \quad (4.6)$$

$$N(\text{DEC}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{n_i^3}{3} + \frac{39n_i^2}{2} + \frac{1105n_i}{6} + 864 \right) - (84n_1 + 660). \quad (4.7)$$

В обоих случаях вычислительные затраты пропорциональны числу тел в системе и не зависят от её структуры.

Оценка арифметических затрат методов решения расширенной системы уравнений (1.38) для механических систем с одинаковым числом степеней свободы в шарнирах дана в табл. 4.11.

Таблица 4.11

n_j	Метод прогонки	Метод разложения
1	$1421N - 1194$	$1068N - 744$
2	$1637N - 1266$	$1313N - 828$
3	$1892N - 1338$	$1601N - 912$

Из приведённого сравнения видно, что метод разложения эффективнее метода «прогонки» с точки зрения количества арифметических операций.

Это подтверждают вычислительные эксперименты, результаты которых представлены на рис. 4.6 и 4.7. Нетрудно видеть, что метод DEC эффективнее метода ABM в среднем на 25%.

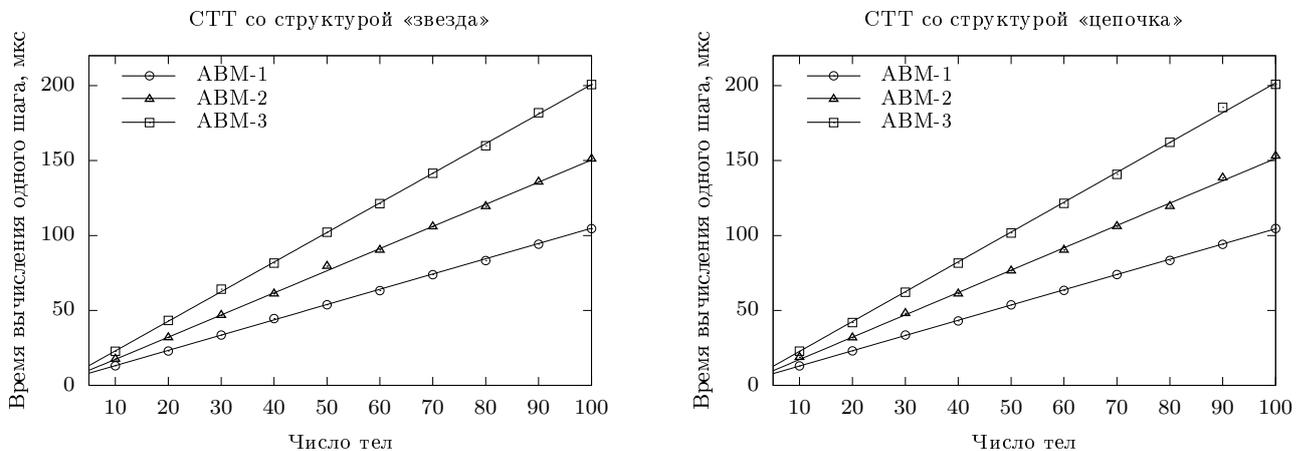


Рис. 4.6. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

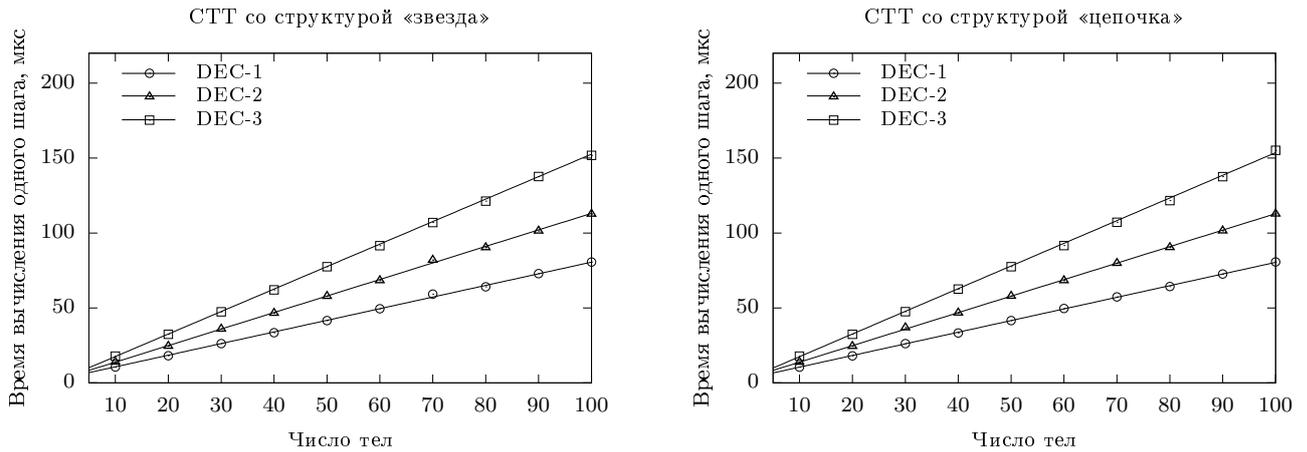


Рис. 4.7. Зависимость времени интегрирования от числа тел в системе

4.2. Сравнение эффективности алгоритмов

моделирования динамики систем твёрдых тел

Проведём сравнительную оценку эффективности различных методов компьютерного моделирования динамики механических систем.

Предварительный анализ, приведённый в предыдущих разделах этой главы, позволил среди всех рассмотренных алгоритмов отделить методом парных сравнений менее эффективные алгоритмы. Среди них оказались прямой метод составления уравнений Лагранжа второго рода (DRT) и метод отдельных тел (ABM).

Поэтому для дальнейшего анализа были выбраны следующие методы: 1) формирование уравнений Лагранжа второго рода методом составных тел и разрешение их блочным методом Холецкого, учитывающим разреженность матрицы системы (CBM); 2) составление уравнений Лагранжа первого рода и разрешение их блочным методом Холецкого, учитывающим разреженность матрицы системы (LGR); 3) итерационный алгоритм разрешения уравнений Лагранжа второго рода (ITR); 4) разрешение расширенных систем уравнений методом L^TDL -разложения (DEC).

Анализ формулы требуемого количества флопов для метода CBM позволяет сделать следующий вывод: данный метод эффективен для СТТ, у которых

малы значения η_i , то есть для систем с короткими кинематическими цепочками и малым числом степеней свободы в шарнирах. Напротив, метод LGR эффективен для систем с большим числом степеней свободы в шарнирах и малым числом ветвлений в древовидной структуре системы (малы μ_i). Вследствие того, что при фиксированном числе тел в механической системе условие минимизации числа ветвлений означает наличие длинных цепочек тел, то эти два метода дополняют друг друга.

Негативной особенностью методов CBM и LGR является сильная зависимость объёма вычислительной работы этих методов от структуры взаимосвязей тел в системе. В лучшем случае арифметические затраты методов пропорциональны числу тел в системе, в худшем — зависят от числа тел по кубическому закону.

Этого недостатка, в некоторой степени, лишён метод ITR: для механических систем любой кинематической структуры объём его вычислительной работы пропорционален квадрату числа степеней свободы этих систем. Связь арифметических затрат данного метода со структурой системы опосредована. Для систем с длинными кинематическими цепочками на шаге численного интегрирования требуется большее число итераций для разрешения УД относительно старших производных, чем для систем с короткими цепочками. Но в любом случае число итераций существенно меньше числа степеней свободы.

Метод DEC совершенно не зависит от кинематической структуры СТТ, и требуемое им количество флопов всегда пропорционально числу тел в системе. Однако коэффициент пропорциональности велик, и поэтому при малом числе тел в системе его арифметические затраты выше, чем у метода CBM.

Формулы (4.1)–(4.7) позволяют в практических задачах для каждой конкретной механической системы выбрать наиболее эффективный метод компьютерного моделирования в смысле наименьшего объёма арифметических затрат, выраженного в флопах. Чтобы определить объём вычислительной работы для методов ITR и DEC достаточно знать только число тел в системе и число сте-

пней свободы в шарнирах. При этом для методов СВМ и LGR необходимо дополнительно знание целочисленного массива $\{\kappa_i\}$, определяющего структуру взаимосвязей СТТ.

Для выбора наиболее эффективного алгоритма моделирования динамики СТТ была написана подпрограмма на языке САВ Maxima, реализующая следующий алгоритм:

- 1) задание параметров N , n_i , κ_i , описывающих кинематическую структуру СТТ;
- 2) вычисление коэффициентов μ_i , η_i , характеризующих степень разветвлённости и глубины дерева-структуры СТТ;
- 3) вычисление количества флопов, требуемых для каждого метода;
- 4) выбор метода с наименьшим количеством флопов.

На рис. 4.8 изображены диаграммы выбора эффективных методов моделирования динамики СТТ, топологическая структура которых может включать в себя различное число закреплённых на базовом теле цепочек тел одинаковой длины. На каждой диаграмме по вертикальной оси отложено количество цепочек, а по горизонтальной оси — их длина. Кроме того, на каждой диаграмме изображены изолинии числа тел в системе.

Из диаграмм на рис. 4.8 видно, что для механических систем с малым числом степеней свободы в шарнирах и с короткими кинематическими цепочками наименьшие вычислительные затраты у метода СВМ. С ростом длин цепочек меньшие затраты начинает показывать метод DEC, причём чем больше степеней свободы в шарнирах, тем раньше это происходит. Метод LGR выигрывает у этих методов только в случае систем с трёхстепенными и четырёхстепенными шарнирами. При этом его эффективность проявляется при одновременном увеличении числа и длины ветвей в механической системе. Метод ITR показывает лучшие результаты по сравнению с методами СВМ и DEC при небольшом числе степеней свободы в шарнирах и малой разветвлённости системы.

Теоретические оценки эффективности алгоритмов формирования УД ме-

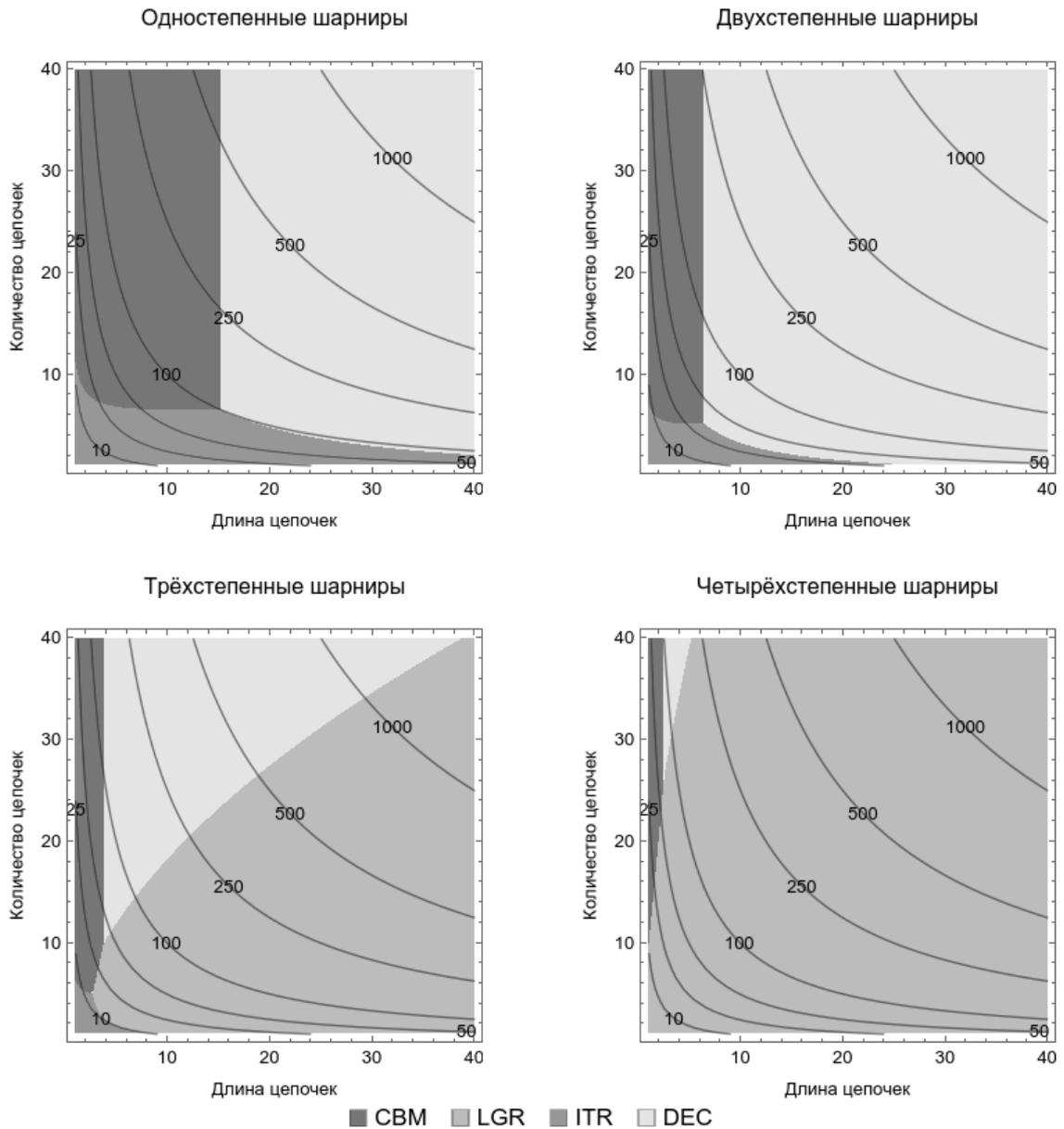


Рис. 4.8. Диаграммы выбора эффективного метода моделирования

ханических систем и их разрешения относительно обобщённых ускорений были подтверждены вычислительными экспериментами на примерах моделирования динамики механических систем, отличающихся числом тел, кинематической структурой и количеством степеней свободы в шарнирах системы.

На рис. 4.9 – 4.11 приведены графики зависимостей времени интегрирования от числа тел в системе для двух типов структур взаимосвязей и трёх типов шарниров. Из рисунков видно, что метод ITR эффективнее других методов численного моделирования динамики СТТ со структурой дерева при относительно небольшом числе тел. В силу того, что вычислительные затраты в этом

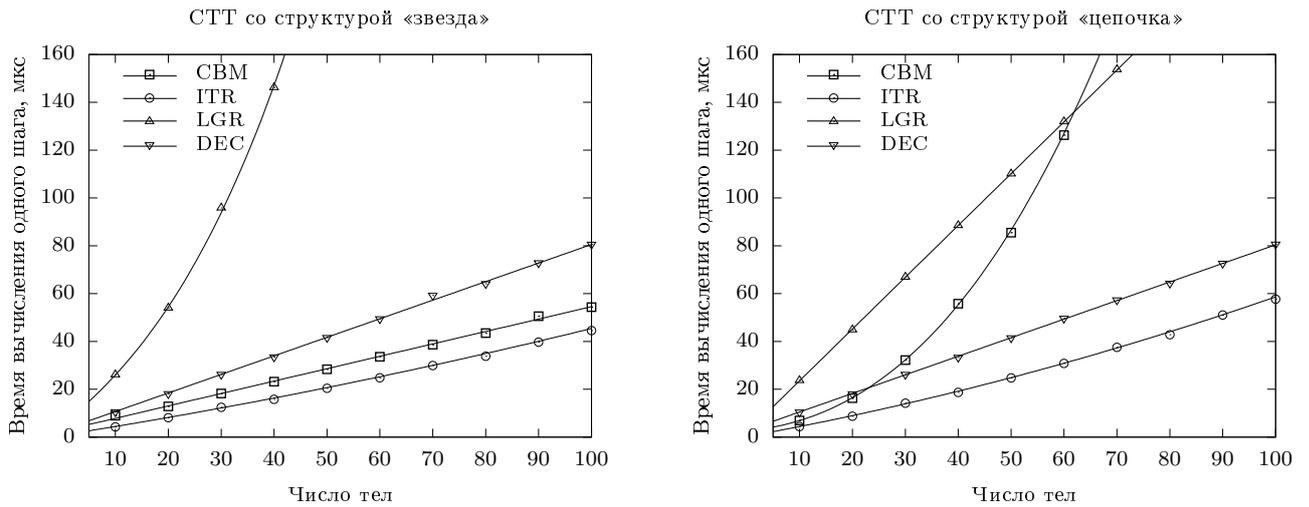


Рис. 4.9. Зависимость времени интегрирования от числа тел для систем с вращательными шарнирами

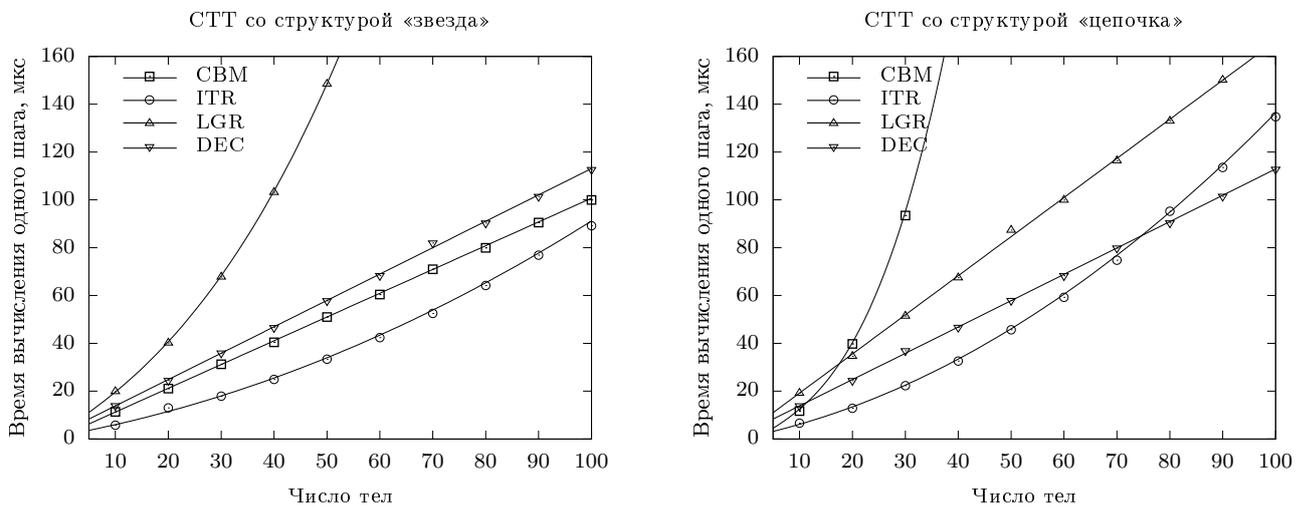


Рис. 4.10. Зависимость времени интегрирования от числа тел для систем с кардановыми шарнирами

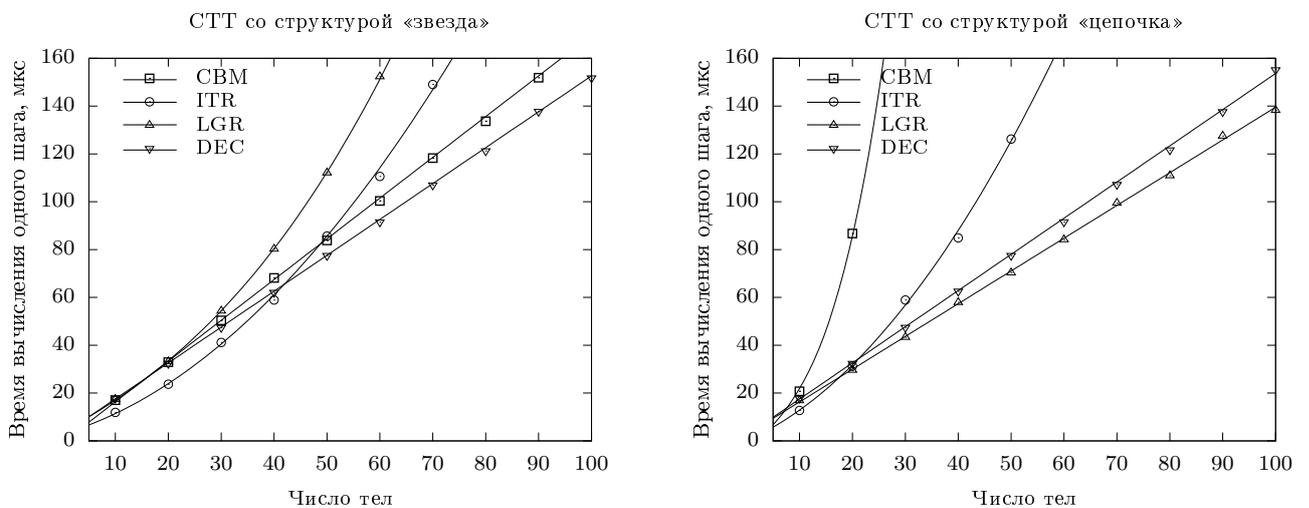


Рис. 4.11. Зависимость времени интегрирования от числа тел для систем с шаровыми шарнирами

методе растут по квадратичному закону, то начиная с некоторого количества тел, зависящего от структуры системы и числа степеней свободы в шарнирах, он начинает уступать методам с линейной зависимостью вычислительных затрат от числа тел. Для систем со структурой «цепь» этим методом является метод DEC, а для систем со структурой «звезда» — метод СВМ. Исключением являются только системы с вращательными шарнирами. Для систем со структурой «цепь» с вращательными шарнирами, содержащими более двадцати тел, меньшие временные затраты показал метод LGR, а для систем со структурой «звезда» с количеством тел более сорока — метод DEC.

Графики на рис. 4.9 – 4.11 показывают, что неправильный выбор метода может привести к существенному увеличению временных затрат при компьютерном моделировании динамики какой-либо конкретной механической системы. Так, например, если вместо использования итерационного алгоритма ITR, исследователь для моделирования СТТ в виде цепочки из 50 тел, связанных вращательными шарнирами (рис. 4.9), пойдёт традиционным путём и выберет метод DEC, то это приведёт к увеличению времени расчёта в два раза, а использование для этой задачи метода СВМ замедлит расчёты в четыре раза. Напротив, для механических систем, состоящих из того же количества тел и имеющих ту же структуру, но соединённых шаровыми шарнирами (рис. 4.11), лучшие результаты обеспечиваются при использовании метода DEC, а выбор метода ITR приводит к увеличению временных затрат более чем в полтора раза. Приведённые примеры иллюстрируют, что в своих исследованиях инженер должен вдумчиво относиться к выбору метода моделирования. Полученные в этой главе формулы и диаграммы, с помощью которых можно прогнозировать временные затраты различных методов моделирования всевозможных СТТ, позволяют инженеру правильно сориентироваться в выборе лучшего подхода к компьютерному моделированию при проектировании новых технических устройств.

Выводы по главе 4

В этой главе для каждого метода компьютерного моделирования динамики СТТ, рассмотренного в первых трёх главах диссертации, построена теоретическая оценка зависимости числа операций с плавающей точкой (флопов), требуемых на каждом шаге численного интегрирования УД, от количества тел в механической системе, её кинематической структуры и числа степеней свободы в шарнирах. В оценку включены затраты на вычисление кинематических характеристик, формирование УД в матричном виде и разрешения их относительно групп независимых переменных.

С помощью полученных формул выполнен анализ вычислительной сложности этих методов для различных классов механических систем. На основе этого анализа были выделены наиболее эффективные группы методов для каждого класса механических систем. Построены диаграммы, которые наглядно демонстрируют преимущества того или иного метода.

Приведён алгоритм выбора оптимального метода в зависимости от характеристик механической системы: количества тел, числа степеней свободы в шарнирах и структуры взаимосвязей.

Проведены многочисленные вычислительные эксперименты по оценке практической эффективности алгоритмов синтеза и разрешения УД на примерах различных механических систем. Построены графики зависимостей затрат времени на один шаг интегрирования УД от числа тел в механической системе, её структуры и числа степеней свободы в шарнирах.

Численные расчёты подтверждают построенные в этой главе теоретические оценки трудоёмкости алгоритмов компьютерного моделирования механических систем.

Комплекс программ для моделирования систем твёрдых тел

Разработанные в диссертации математические методы и численные алгоритмы легли в основу комплекса программ для моделирования динамики изделий машиностроения, математические модели которых могут быть представлены СТТ с переменной кинематической структурой. Отличительной особенностью данного комплекса программ является то, что весь процесс функционирования механической системы разбивается на определённое число временных отрезков, на которых она может иметь разные кинематические структуры.

Комплекс программ предназначен для определения всех кинематических и динамических характеристик изделия при различных условиях его функционирования и эксплуатации, для настройки и оптимизации конструктивных схем изделия и алгоритмов управления, определения динамических реакций в узловых точках, необходимых для прочностных расчётов.

Комплекс программ был разработан в рамках сотрудничества с ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы» и внедрён в практику работы предприятия, что подтверждается Актом внедрения, представленном в приложении А.

На комплекс программ получены Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ в Роспатенте и ОФЭРНиО [202–207].

Комплекс программ состоит из библиотеки подпрограмм *Dynamica90* и программы *D90*. Подпрограммы библиотеки *Dynamica90* используются для описания механических систем со структурой дерева, формирования УД в различных формах, их численного решения и представления результатов моделирования. Программа *D90* предназначена для моделирования динамики механических систем с отделяющимися элементами. Расчётные модули программы *D90* были получены средствами библиотеки подпрограмм *Dynamica90*.

5.1. Комплекс программ *Dynamica90*

5.1.1. Структура комплекса

Комплекс программ *Dynamica90* предназначен для составления УД СТТ и их численного решения. Программы комплекса написаны на языке системы компьютерной алгебры *Maxima* и используют пакет *Gnuplot* для создания графических изображений.

Основные программные модули комплекса *Dynamica90* представлены на рис. 5.1. Программы сгруппированы в три основных блока. Блок описания включает программы ввода и первичной обработки информации о СТТ и порядке её функционирования. Блок уравнений движения служит для выбора оптимального алгоритма и синтеза в полной символьной или символьно-численной форме УД СТТ. Блок моделирования содержит программы интегрирования УД СТТ и построения графиков.

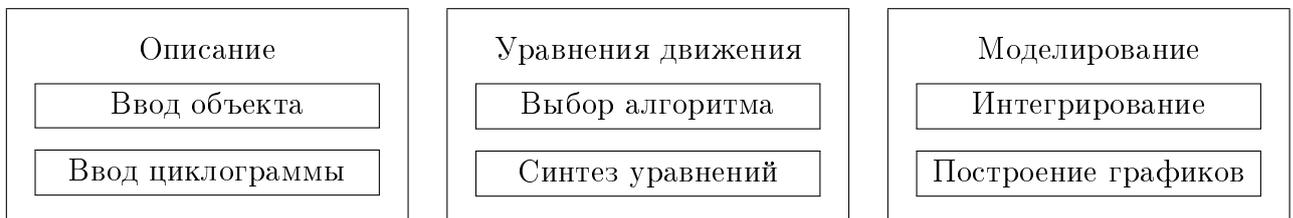


Рис. 5.1. Структурная схема комплекса программ *Dynamica90*

Верификация комплекса программ *Dynamica90* с точки зрения правильности формируемых уравнений движения была проведена на примерах составления УД известных механических систем, таких как манипулятор Пума, тест Бурлаковой — гироскоп в кардановом подвесе на орбите, многозвенный физический маятник с одно-, двух- и трёхстепенными шарнирами.

Комплекс программ *Dynamica90* может использоваться как непосредственно для моделирования динамики СТТ, так и в качестве генератора УД СТТ для использования в других программах моделирования.

5.1.2. Блок описания

Модуль «Ввод объекта» предназначен для ввода и предварительной обработки основной информации о СТТ, к которой традиционно относятся геометрические, масс-инерционные, кинематические и силовые характеристики системы.

Рассмотрим более подробно характеристики вводимых данных, описав тем самым множество объектов, исследование которых возможно с помощью комплекса программ *Dynamica90*.

Перед вводом информации об объекте (СТТ) пользователь определяет базовую (инерциальную) СК или базовое тело, которому присваивается номер «0». Далее нумеруются тела и кинематические связи. С каждым телом связывается СК. Число тел и кинематических связей ограничено лишь ресурсами используемой ЭВМ.

Для каждого тела следует ввести массу, координаты центра масс в связанной с телом СК, осевые и центробежные моменты инерции тела либо в численном виде, либо в виде простых символьных идентификаторов. Параметры, имеющие одинаковые идентификаторы, отождествляются программой.

В программе предусматривается несколько типов кинематических пар (шарниров). В общем случае шарнир описывается номерами связанных тел, радиус-вектором полюса СК, связанной с одним телом, в СК другого тела и матрицей направляющих косинусов между ними.

Наиболее удобным является описание шарнира последовательностью элементарных преобразований (сдвига и поворота), переводящих СК, связанную с одним из тел кинематической пары, в СК, связанную с другим телом. Каждое элементарное преобразование задаётся единичным вектором и параметрами преобразования (величиной сдвига и углом поворота). Параметры преобразования могут быть константами, заданными функциями времени или переменными, подлежащими вычислению в процессе моделирования движения объекта (шарнирными или обобщёнными координатами).

В комплексе программ реализованы следующие типы активных сил: силы тяжести; внешние активные силы, приложенные к одному телу; силы взаимодействия произвольной пары тел; шарнирные силы взаимодействия пары тел.

Модуль «Ввод циклограммы» предназначен для описания порядка функционирования СТТ. При этом весь интервал функционирования разбивается на этапы, с которыми связывается конкретная кинематическая структура исследуемой системы и указываются условия перехода между ними. Кроме того, могут быть заданы правила изменения отдельных параметров на границах этапов.

Одной из основных функций блока описания является предварительная обработка информации, подготовленной пользователем, в частности определяется достаточность и правильность введённой информации. На основе анализа символьных выражений, составляется список идентификаторов параметров и функций. Каждому идентификатору параметра ставится в соответствие его численное значение, а идентификатору функции — подпрограмма.

5.1.3. Блок уравнений движения

УД СТТ синтезируются в символьной или символьно-численной форме с помощью двух модулей комплекса программ.

Первый из них, «Выбор алгоритма», на основе информации о СТТ (числа тел, числа степеней свободы в шарнирах, структуры взаимосвязей тел) позволяет оценить вычислительные затраты формирования системы дифференциальных уравнений движения, разрешённых относительно старших производных, различными способами, рассмотренными в данной работе.

Модуль «Синтез уравнений» предназначен для генерирования программы численного моделирования динамики СТТ на языке Fortran 95. Вывод УД возможен как в полной символьной форме, так и в сокращённом варианте. В последнем случае в символьном виде выводятся лишь соотношения, характеризующие кинематику относительного движения пары тел, а остальные кинематические и динамические характеристики вычисляются численно. В первом случае

можно достичь наибольшей эффективности, так как помимо выбора наименее трудоёмкого метода моделирования учитывается наличие нулевых элементов во входных матрицах. С другой стороны, вывод уравнений в символьно-численной форме позволяет моделировать системы с бóльшим числом тел. В обоих случаях при выводе символьных соотношений проводится исключение общих подвыражений.

5.1.4. Блок моделирования

Рассмотрим основные функции и формы отображения результатов блока моделирования СТТ.

Модуль «Интегрирование» предназначен для численного решения задач кинематики и динамики с использованием символьных дифференциальных уравнений движения. Для решения этих задач используется многошаговый метод прогноза—коррекции с переменными шагом и порядком аппроксимаций (от 1 до 12), основанный на классических соотношениях метода Адамса—Башфорта—Мултона [132].

Перед решением задач кинематики и динамики могут быть изменены значения входных параметров и начальные условия. В процессе счёта определяются и сохраняются в текстовом файле следующие переменные: шарнирные координаты и их производные по времени; координаты, скорости и ускорения заданных точек тел; угловые скорости и ускорения тел; проекции и модули активных сил и моментов, а также сил и моментов реакций связей в шарнирах.

Файл данных может быть обработан модулем «Построение графиков». Данный модуль позволяет строить графики функций с последующим выводом копий на печатающее устройство или в графический файл для создания банка результатов. Модуль содержит различные командные файлы пакета интерактивной графики Gnuplot.

5.2. Программа D90 для моделирования динамики механических систем с отделяющимися элементами

Программа D90 предназначена для определения положений статического равновесия и расчёта динамических характеристик механических систем (изделий машиностроения) с отделяющимися элементами (макетами) и учитывает пространственную структуру многомассовой механической системы, наличие электрических, гидравлических силовых приводов и систем управления ими.

Программа написана на языке Fortran 95, функционирует под управлением операционных систем не ниже MS Windows XP, снабжена графическим интерфейсом, осуществляет взаимодействие с пользователем и запускает на выполнение расчётные модули.

5.2.1. Структура программы

В целом программа делится на три основных блока: блок выбора модели и задания параметров конкретного изделия; расчётный блок; блок обработки и представления результатов расчётов в виде таблиц и графиков.

Расчётный блок включает следующие модули: определения положения статического равновесия в походном положении изделия, с вывешенными домкратами и после отработки углов наведения; расчёта динамики изделия в режиме стабилизации и с застопоренными силовыми приводами; расчёта силовых приводов; расчёта газодинамического воздействия сходящих макетов на неизменяемую часть изделия.

Логическая структура программы приведена на рис. 5.2.

Назначение и выполняемые функции подпрограмм, входящих в каждый блок, приведены в табл. 5.1.

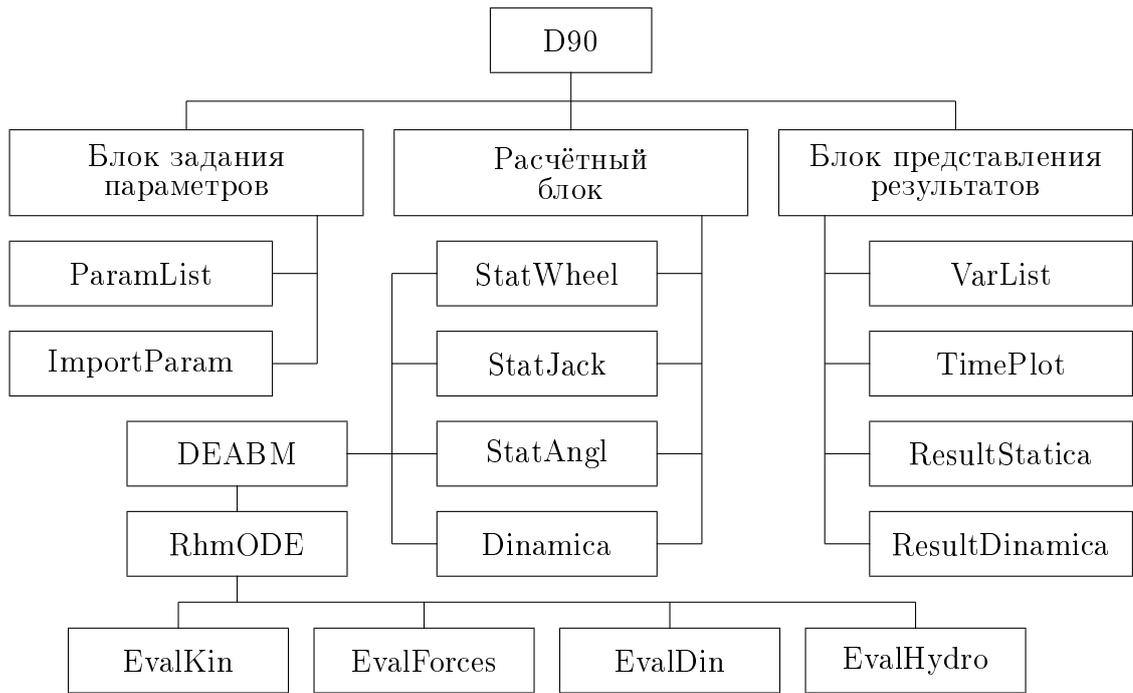


Рис. 5.2. Схема программы D90

Таблица 5.1

Назначение и выполняемые функции подпрограмм

Имя подпрограммы	Назначение подпрограммы
ImportParam	Импорт параметров изделия
StatWheel	Нахождение положения статического равновесия системы на колесах (в походном положении)
StatJack	Нахождение положения статического равновесия системы, вывешанной на домкратах
StatAngl	Нахождение положения статического равновесия системы после выставления углов горизонтального и вертикального наведения
Dinamica	Расчет динамики механической системы с отделяющимися частями
DEABM	Решение системы ОДУ методом Адамса—Бошфорта—Мултона
RhmODE	Вычисление правых частей системы нелинейных дифференциальных уравнений математической модели изделия
EvalKin	Вычисление кинематических характеристик изделия
EvalForces	Вычисление сил, действующих на изделие
EvalDin	Вычисление обобщённых ускорений механической части изделия
EvalHydro	Вычисление правых частей дифференциальных уравнений математической модели гидроприводов
VarList	Редактирование выходных переменных модели изделия
TimePlot	Подготовка и построение графиков изменения рассчитываемых переменных по времени
ResultStatica	Формирование и вывод таблицы результатов расчета статики
ResultDinamica	Формирование и вывод статистических таблиц параметров колебаний

5.2.2. Описание механической системы и порядка её функционирования

В программе D90 моделируется динамика механических систем (изделий), состоящих из неизменяемой части и N однотипных тел (макетов), последовательно отделяющихся от системы в процессе функционирования. В программе предусмотрена возможность выбора различных расчётных схем. Выбор конкретной расчётной схемы обуславливается этапом проектирования и характеристиками моделируемого изделия. Все расчётные схемы выбраны в результате анализа конструкторской документации и обработки результатов натурных испытаний конкретных изделий с отделяющимися элементами. Модель начального уровня представлена на рис. 5.3.

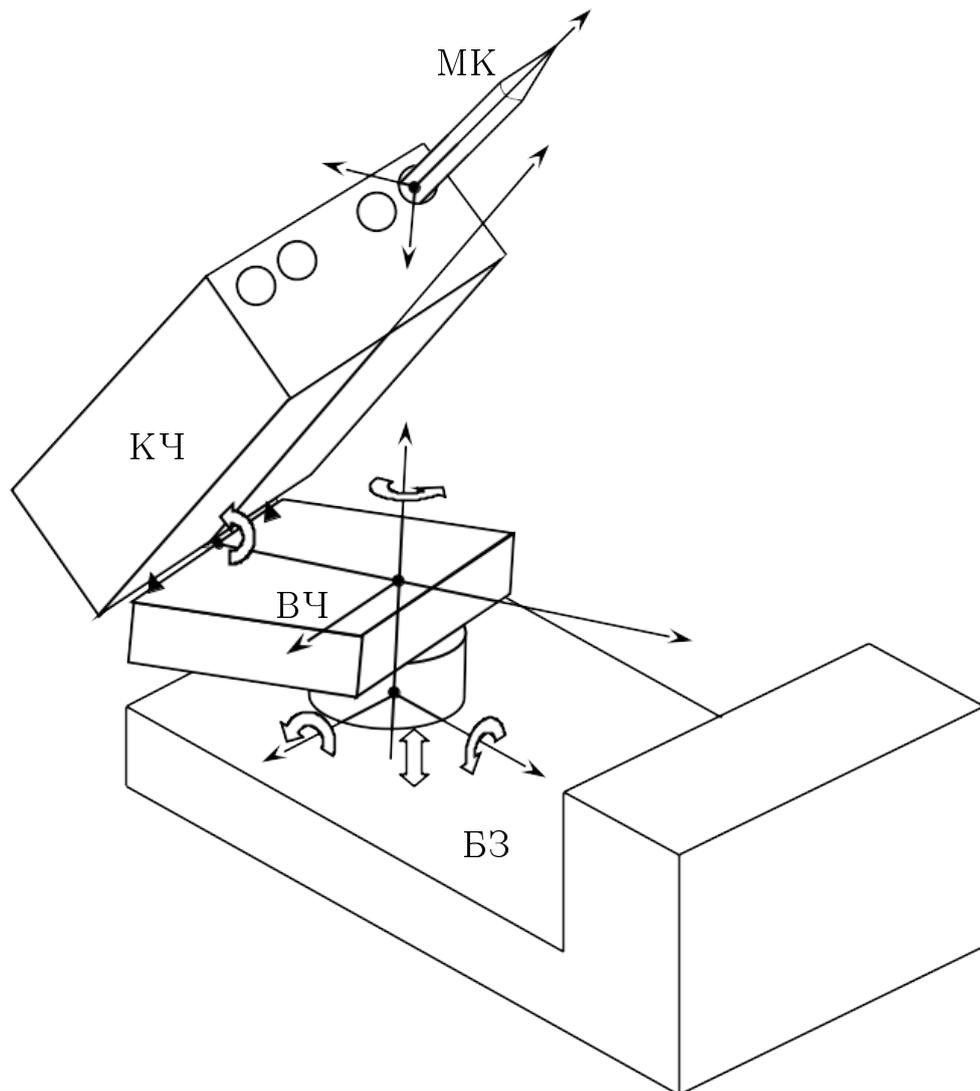


Рис. 5.3. Кинематическая схема механической системы

Описание кинематической структуры. В расчётной схеме модели начального уровня неизменяемая часть механической системы включает в себя три абсолютно твёрдых тела: базу, вращающуюся часть и качающуюся часть. Первое тело — база (БЗ) имеет три степени свободы: линейное перемещение в вертикальной плоскости и два угла поворота (тангажа и крена). Второе тело — вращающаяся часть (ВЧ) — закреплено на базе, совершает вращательное движение вокруг вертикальной оси связанной с базой СК, и обеспечивает горизонтальное наведение изделия. Третье тело — качающаяся часть (КЧ) — закреплено на ВЧ, вращается вокруг горизонтальной оси связанной с ВЧ СК и обеспечивает вертикальное наведение изделия. На КЧ жёстко закреплены пакеты труб—направляющих (до двух пакетов) с отделяющимися элементами — макетами.

В расчётной схеме наиболее детализированной математической модели база делится на три тела: переднюю часть базы (БЗП), заднюю часть базы (БЗЗ) и нижний станок (НС). БЗП и БЗЗ связаны шаровым шарниром, а БЗЗ и НС — кардановым шарниром. Кроме того, в ряде шарнирных соединений увеличено число степеней свободы. БЗЗ в абсолютной системе координат имеет шесть степеней свободы, ВЧ относительно НС — две степени свободы.

Отделяемая часть системы может включать в себя от одного до 50 однотипных абсолютно твёрдых тел — макетов (МК). Каждый МК представляет собой осесимметричное тело и совершает винтовое движение с постоянным шагом по трубе—направляющей (ТН). Макет имеет центрирующие утолщения (ЦУ), в которых происходит его контакт с внутренней поверхностью ТН, и штифты, находящиеся в контакте с винтовым пазом ТН. Макет имеет в расчётной схеме с максимальной конфигурацией шесть степеней свободы: поступательное движение вдоль оси ТН, два линейных отклонения от оси ТН и три угловых перемещения (углы атаки, рысканья и собственного вращения).

Описание силового воздействия. Ко всем телам системы приложены силы тяжести, направленные по вертикальной оси абсолютной СК.

К базе приложены упруго-демпфирующие силы с постоянными коэффици-

ентами жёсткости и демпфирования, моделирующие колеса. На базе или нижнем станке закреплены домкраты. Домкраты моделируются упруго-демпфирующими силами с кусочно-постоянными коэффициентами жёсткости и демпфирования, значения которых зависят от относительного удлинения домкратов. Учтены два варианта: домкраты с механической и гидравлической (двуполостной гидроцилиндр) исполнительной частью. В модели учтена возможность проседания грунта, а также отрыва колёс и домкратов от грунта в процессе функционирования системы.

Для каждой угловой степени свободы в модель введён упруго-демпфирующий момент с постоянными коэффициентами жёсткости и демпфирования. Этими моментами могут быть описаны изгибные жёсткости конструкции и удерживающие моменты, возникающие в поворотных и подъёмно-уравновешивающих механизмах. Кроме того, между телами могут задаваться линейные упруго-демпфирующие силы с переменной жёсткостью и демпфированием, моделирующие различные стяжки элементов конструкции изделия.

Между вращающейся частью и базой заданы силы, моделирующие два гидроцилиндра механизма горизонтального наведения (ГН) изделия. Между КЧ и ВЧ заданы силы, моделирующие подъёмно-уравновешивающий механизм вертикального наведения (ВН).

Кроме того, на качающуюся часть во время движения макета действует сила газодинамического трения, а после отделения макета — сила газодинамического воздействия (ГДВ).

К сходящему макету приложена сила тяги. Макет удерживается в качающейся части стопорным устройством (СУ), которое моделируется упругой силой. В модели учтены силы взаимодействия сходящего макета и ТН, возникающие в точках контакта «штифт макета – паз ТН», «ЦУ макета – ТН».

Описание порядка функционирования. Весь временной промежуток функционирования системы разбивается на три предварительных этапа перевода изделия из походного положения в рабочее и N рабочих этапов, на которых

происходит включение и отделение от системы макетов.

Предварительные этапы включают в себя нахождение положения статического равновесия изделия в походном положении на колёсах, вывешивание изделия на домкратах и отработку углов наведения изделия в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

Каждый рабочий этап разбивается на два подэтапа в зависимости от характера взаимодействия неизменяемой части системы и макета. На первом подэтапе сходящий макет имеет шесть степеней свободы и его взаимодействие с направляющей происходит в точках контакта «штифт – паз», «ЦУ – ТН». В момент включения макет удерживается в СУ упругой силой, действие которой прекращается, когда усилие в СУ превысит заданное значение на срыв. Первый подэтап функционирования системы завершается со сходом макета. На втором подэтапе неизменяемая часть системы с оставшимися макетами совершает колебания под действием ГДВ сошедшего макета до окончания текущего этапа функционирования системы.

5.2.3. Выбор метода моделирования

Воспользуемся результатами предыдущей главы и оценим вычислительные затраты различных методов моделирования рассматриваемой механической системы.

Расчётная схема начального уровня механической системы включает в себя $3 + N$ тел. Найдём число степеней свободы этой системы. Так как $n_1 = n_{бз} = 3$, $n_2 = n_{вч} = 1$, $n_3 = n_{кч} = 1$, $n_4 = \dots = n_{3+N} = n_{мк} = 3$, то общее число степеней свободы $n = \sum_{i=1}^{3+N} n_i = 5 + 3N$.

Вычислим параметры, характеризующие глубину дерева: $\eta_1 = n_{бз} = 3$, $\eta_2 = n_{бз} + n_{вч} = 4$, $\eta_3 = n_{бз} + n_{вч} + n_{кч} = 5$, $\eta_4 = \dots = \eta_{3+N} = n_{бз} + n_{вч} + n_{кч} + n_{мк} = 8$ и его разветвлённость: $\mu_1 = 8$, $\mu_2 = 10$, $\mu_3 = 8$, $\mu_4 = \dots = \mu_{3+N} = 3$.

По формулам (4.2), (4.3), (4.5) и (4.7) вычислим зависимости числа флопов, требуемых на каждом шаге численного интегрирования УД, от числа сходящих

макетов для четырёх алгоритмов, отмеченных в главе 4. Для итерационного алгоритма будем считать, что среднее число итераций на шаге интегрирования $K = 2$. Результаты представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

СВМ	LGR	ITR	DEC
$1757 + 1446N$	$4538 + \frac{2329}{2}N + \frac{243}{2}N^2 + 9N^3$	$1943 + 1004N + 45N^2$	$2825 + 1601N$

Сравнивая формулы из таблицы 5.2 устанавливаем, что наилучшие результаты достигаются при использовании алгоритмов итерационного разрешения уравнений Лагранжа второго рода (ITR) и формирования уравнений Лагранжа второго рода методом составных тел и разрешения их разреженным методом Холецкого (СВМ). При малом числе сходящихся макетов (от 1 до 10) алгоритм ITR незначительно (менее 10%) выигрывает у алгоритма СВМ, а с дальнейшим ростом числа сходящихся макетов алгоритм ITR начинает существенно проигрывать алгоритму СВМ.

Расчётная схема детализированной математической модели включает в себя $5 + N$ тел. Рассмотрим случай, когда число степеней свободы БЗЗ и МК равно трём. Так как $n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 2, n_4 = 2, n_5 = 1, n_6 = \dots = n_{5+N} = 3$, то общее число степеней свободы $n = 11 + 3N$.

Вычислим параметры, характеризующие глубину дерева: $\eta_1 = 3, \eta_2 = 6, \eta_3 = 5, \eta_4 = 7, \eta_5 = 8, \eta_6 = \dots = \eta_{5+N} = 11$ и его разветвлённость: $\mu_1 = 10, \mu_2 = 3, \mu_3 = 8, \mu_4 = 9, \mu_5 = 5 + 3N, \mu_6 = \dots = \mu_{5+N} = 3$.

Зависимости числа флопов, требуемых на каждом шаге численного интегрирования УД, от числа сходящихся макетов для выбранных алгоритмов представлены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

СВМ	LGR	ITR	DEC
$4103 + 1869N$	$7066 + \frac{2329}{2}N + \frac{243}{2}N^2 + 9N^3$	$4131 + 1184N + 45N^2$	$5984 + 1601N$

Сравнивая формулы из таблицы 5.3 можно заключить, что при малом числе макетов (от 1 до 12) наилучшие результаты достигаются при использовании алгоритма ITR. С дальнейшим ростом числа макетов в системе наилучшие результаты показывает алгоритм DEC (разрешение расширенной системы УД методом L^TDL -разложения). Заметим, что на всём промежутке изменения числа макетов алгоритм СВМ проигрывает этим двум методам менее 10%.

Проведённый выше анализ эффективности различных алгоритмов приведения УД к нормальной форме ОДУ для всего спектра расчётных схем, применяемых в программе D90 при моделировании динамики механической системы с отделяющимися элементами, показывает, что использование алгоритма СВМ приводит в среднем к наименьшим вычислительным затратам.

5.2.4. Порядок работы с программой

Программа D90 обладает графическим интерфейсом, полное описание которого представлено в приложении В.

Работа с программой начинается с выбора математической модели механической системы с помощью пункта меню «Модель». Математическая модель изделия генерируется с помощью комплекса программ Dynamic90 в виде двух связанных файлов — описания модели и динамической библиотеки с расчётным модулем.

После выбора математической модели пользователь должен задать конкретные числовые значения параметрам изделия. Для этого вызываются диалоговые окна с помощью пункта меню «Данные». Введённые числовые значения параметров изделия могут быть сохранены для использования их при следующем запуске программы. Реализована возможность импорта значений параметров из других математических моделей изделия.

Расчёт динамического поведения исследуемой механической системы разбит на четыре этапа: нахождения положения статического равновесия изделия на колёсах, установки изделия на домкратах, наведения пакета направляющих

и пуска макетов. С помощью команд пункта меню «Расчёт» можно выполнить вычисления как для всех этапов, так и для части из них.

Результаты расчёта динамического поведения механической системы сохраняются в виде бинарных файлов и могут быть представлены в табличной и графической форме с помощью команд пункта меню «Результаты».

Программа D90 позволяет строить графики обобщённых координат, скоростей и ускорений механической системы, декартовых координат, скоростей и ускорений тел системы, сил реакций связей в шарнирах и различных характеристик активных сил, действующих на механическую систему. На рис. 5.4 приведён пример оформления страницы с графиками.

Результаты моделирования могут быть представлены в виде обобщающих таблиц, содержащих значения выходных переменных в моменты старта или отделения макетов, а также максимальных отклонений этих переменных от начальных значений. Кроме того, каждая таблица содержит начальные значения выходных переменных, их средние значения, среднеквадратичные отклонения от среднего и начального значения переменной. На рисунках 5.5–5.7 представлены примеры обобщающих таблиц для выбранных переменных.

5.2.5. Верификация программы

Переходя от реальной системы к ее математической модели, исследователь упрощает систему, абстрагируется от некоторых ее частных особенностей, пренебрегает факторами, которые в конкретной задаче моделирования являются несущественными. Выбор модели зависит от того, какие особенности поведения исследуемой механической системы интересуют, какие процессы, происходящие в изделии, изучаются. Это означает, что любая математическая модель всегда оказывается ограниченной, пригодной к применению лишь при определённых условиях и в конкретной задаче.

Поэтому при математическом моделировании динамических систем важной становится проблема верификации математической модели. Без её решения

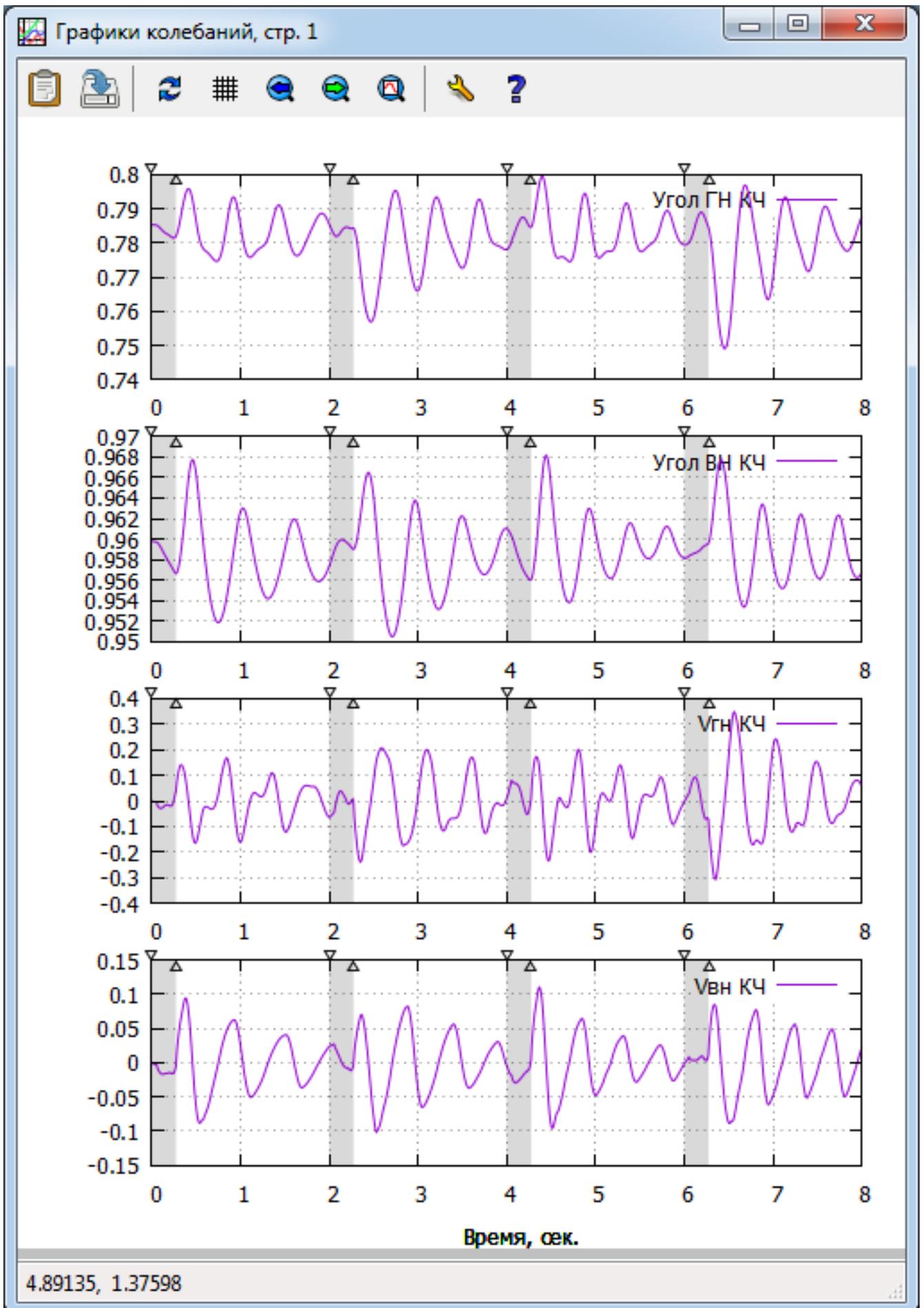


Рис. 5.4. Страница графиков

	Угол ГН КЧ	Угол ВН КЧ	Угн КЧ	Увн КЧ
Начальное положение	0.7853645	0.9597961	0.0000000E+00	0.0000000E+00
Этап 1	0.7853645	0.9597961	0.0000000E+00	0.0000000E+00
Этап 2	0.7855412	0.9573880	-6.3599147E-02	2.3859747E-02
Этап 3	0.7781414	0.9610085	1.0781040E-02	-4.1293767E-03
Этап 4	0.7794685	0.9581574	-4.1786837E-03	-1.1811525E-03
Этап 5	0.7876270	0.9568045	5.4188341E-02	2.1903059E-02
Этап 6	0.7794551	0.9607083	7.2788410E-02	-2.8568218E-02
Этап 7	0.7817807	0.9608037	-1.6869053E-02	-4.2644039E-02
Этап 8	0.7852024	0.9602114	7.2119962E-03	-7.6053822E-03
Этап 9	0.7853220	0.9603970	-8.0554094E-03	1.0865595E-02
Этап 10	0.7850720	0.9600960	7.1420455E-03	-6.5362779E-04
Этап 11	0.7853218	0.9604405	7.5380630E-03	-4.9521234E-03
Этап 12	0.7849362	0.9606338	-3.7989363E-03	-1.1761578E-03
Среднее значение	0.7836027	0.9597037	5.2623893E-03	-2.6607800E-03
СКД	2.9283781E-03	1.3659501E-03	3.2409478E-02	1.7840533E-02
Начальное СКД	3.4174756E-03	1.3690664E-03	3.2833930E-02	1.8037859E-02

Рис. 5.5. Таблица значений переменных на старте

	Угол ГН КЧ	Угол ВН КЧ	Угн КЧ	Увн КЧ
Начальное положение	0.7853645	0.9597961	0.0000000E+00	0.0000000E+00
Этап 1	0.7820506	0.9566526	3.8831916E-02	-4.4833757E-03
Этап 2	0.7843735	0.9590059	1.8148012E-04	-2.8298846E-03
Этап 3	0.7846511	0.9560319	2.8503542E-03	3.6285375E-03
Этап 4	0.7846021	0.9595984	-7.3580317E-02	1.2324428E-02
Этап 5	0.7758712	0.9587342	9.8389491E-02	-1.1935635E-02
Этап 6	0.7779676	0.9573356	-5.1549029E-02	3.0103927E-02
Этап 7	0.7837578	0.9594968	8.0717370E-02	3.9547395E-02
Этап 8	0.7801706	0.9601416	-3.5421252E-02	1.2594221E-02
Этап 9	0.7812064	0.9598131	0.1020319	1.6260955E-02
Этап 10	0.7808067	0.9601809	-7.8670289E-03	1.3731974E-02
Этап 11	0.7811586	0.9597737	0.1817865	1.1438313E-02
Этап 12	0.7818741	0.9604706	1.4512525E-02	4.2079305E-03
Среднее значение	0.7815409	0.9589363	2.9240321E-02	1.0382399E-02
СКД	2.5810562E-03	1.4094322E-03	7.1008958E-02	1.3761300E-02
Начальное СКД	4.6132421E-03	1.6509860E-03	7.6793671E-02	1.7238548E-02

Рис. 5.6. Таблица значений переменных на сходе

	Угол ГН КЧ	Угол ВН КЧ	Угн КЧ	Увн КЧ
Начальное положение	0.7853645	0.9597961	0.0000000E+00	0.0000000E+00
Этап 1	1.0668811E-02	7.9376977E-03	0.1680207	9.4591565E-02
Этап 2	2.8361825E-02	9.2958948E-03	0.2378234	0.1013724
Этап 3	1.4147863E-02	8.3687166E-03	0.2332647	0.1103314
Этап 4	3.6203176E-02	7.9696439E-03	0.3471722	8.8404953E-02
Этап 5	2.4429007E-02	6.0517192E-03	0.3520571	7.5263567E-02
Этап 6	2.4494849E-02	9.7743925E-03	0.3185184	0.1289540
Этап 7	1.1371952E-02	6.9623073E-03	0.1779954	8.7204367E-02
Этап 8	3.9281394E-02	6.0711559E-03	0.4207749	9.3849018E-02
Этап 9	2.0576527E-02	6.5180417E-03	0.3288892	8.1695721E-02
Этап 10	3.6778044E-02	7.5332341E-03	0.4648312	8.9027435E-02
Этап 11	2.1817114E-02	5.5866665E-03	0.4370163	8.6333811E-02
Этап 12	2.3846705E-02	7.6142461E-03	0.3506984	9.7554915E-02
Среднее значение в зале	0.7828720	0.9598014	-1.9002962E-03	-7.1504089E-04
СКД в зале	6.3782777E-03	2.1173342E-03	9.0819880E-02	2.9106501E-02
Размах в зале	6.0329940E-02	1.9070286E-02	0.8891652	0.2398527

Рис. 5.7. Таблица максимальных отклонений переменных

невозможно применять результаты математического моделирования к конкретной технической системе. Таким образом, настройка математической модели является существенным этапом в процессе математического моделирования на стадии отработки конкретного изделия, и пока она не сделана, нельзя говорить о практической значимости результатов математических расчётов.

Верификация математических моделей технических устройств или изделий машиностроения — многоэтапный процесс, который включает в себя:

1. Организацию и планирование натурных экспериментов для получения максимально полной и объективной экспериментальной информации об объекте исследования.

2. Определение и анализ динамических характеристик реального изделия.

3. Структурную и параметрическую идентификацию модели изделия по данным испытаний.

4. Проверку модели с настроенными параметрами по данным испытаний существующих изделий в различных условиях эксплуатации.

Процесс верификации математических моделей наталкивается на ряд сложностей.

Первая особенность состоит в том, что большинство технических систем являются системами с распределёнными параметрами и обладают бесконечным числом степеней свободы. Измерительная аппаратура фиксирует достаточно широкий спектр колебаний упругих элементов конструкции. Однако на стадии проектирования инженера интересует лишь ограниченное количество основных собственных динамических характеристик изделия, позволяющих провести оценку альтернативных вариантов конструкции в кратчайшие сроки, с наименьшими затратами и при отсутствии экспериментальной базы. Такая информация в сжатые сроки может быть получена только на основе достаточно упрощённых математических моделей изделий.

Другая особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что в процессе испытаний изделий в реальных условиях эксплуатации наблюдение ведёт-

ся обычно не за всеми переменными состояния (координатами, скоростями и ускорениями), а только за их частью (например, за перемещениями). Кроме того, регистрируются колебания отдельных узлов конструкции, чаще всего тех, которые реализуют конечные цели работы изделия (исполнительных элементов). Данные наблюдений собираются последовательно с микропроцессорных устройств в виде конечных дискретных выборок.

В целом рассматриваемую задачу верификации модели можно характеризовать как задачу параметрической идентификации непрерывных усечённых математических моделей сложных систем на основе конечных неполных выборок экспериментальных данных, содержащих избыточную информацию.

Верификация программы D90 проводилась по данным стендовых и полигонных испытаний одного из изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы».

На первом этапе проводился анализ результатов стендовых испытаний изделия, который состоял в идентификации параметров колебаний (числа собственных частот, значений собственных частот, логарифмических декрементов колебаний, амплитуд и фаз в двух направлениях — в горизонтальной и вертикальной плоскостях) по записям затухающих колебаний, возникающих при приложении и резком снятии нагрузки, имитирующей силовое воздействие на изделие, возникающее при одиночных стрельбах.

Для решения этой задачи идентификации числа степеней свободы и параметров колебаний был использован один из вариантов метода Прони [65]. Этот метод основывается на адекватности решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений и систем конечно-разностных уравнений одного и того же порядка.

Примеры амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) углов ГН и ВН пакета направляющих одного из изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы» представлены на рис. 5.8.

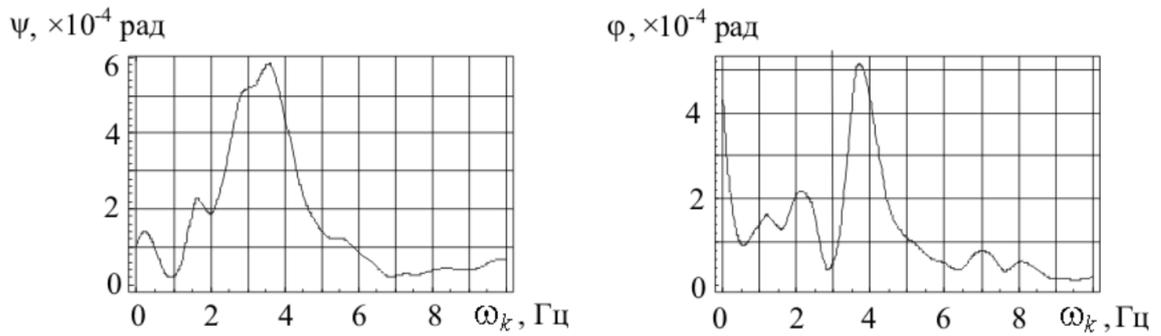


Рис. 5.8. АЧХ углов ГН и ВН пакета направляющих

В табл. 5.4 представлены примеры результатов идентификации параметров колебаний: основные частоты и декременты колебаний, вносящие наибольший вклад в колебания механической системы. В таблице приняты обозначения: ω_k — частота колебаний; β_k — логарифмический декремент колебаний; $-\ln 2/\beta_k$ — период, за который амплитуда колебаний уменьшается в два раза; A_ψ , A_φ — амплитуды колебаний по углам ψ и φ ; $A_\psi^{\text{ср}}$, $A_\varphi^{\text{ср}}$ — средние амплитуды колебаний по углам ψ и φ на отрезке идентификации; $K_{\psi\bar{\psi}}$, $K_{\varphi\bar{\varphi}}$ — коэффициенты корреляции линейной связи между данными наблюдений и результатами идентификации.

Таблица 5.4

Основные параметры колебаний по результатам стендовых испытаний

k	ω_k , Гц	β_k , 1/с	$-\frac{\ln 2}{\beta_k}$, с	A_ψ , рад	A_φ , рад	$A_\psi^{\text{ср}}$, рад	$A_\varphi^{\text{ср}}$, рад	$K_{\psi\bar{\psi}}$	$K_{\varphi\bar{\varphi}}$
1	1,155	-6,77	0,102	0,0112	0,0055	0,0006	0,0003	0,883	0,895
2	2,169	-1,52	0,455	0,0046	0,0008	0,0012	0,0002		
3	3,179	-3,67	0,189	0,0010	0,0062	0,0011	0,0008		
4	3,766	-1,98	0,349	0,0035	0,0069	0,0007	0,0015		

Анализ результатов экспериментов на первом этапе идентификации показал, что после динамического нагружения свободные колебания элементов механической системы приближённо можно описать суммой четырёх гармоник.

Таким образом, результаты первого этапа идентификации параметров изделия позволили сделать вывод, что динамику свободных затухающих колебаний изделия можно приближённо описать системой из 4-х линейных обыкновен-

ных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Представленные в табл. 5.4 результаты показывают, что в вертикальной и горизонтальной плоскостях можно выделить по две основные степени свободы. При этом проявляется взаимосвязь колебаний в плоскостях вертикального и горизонтального наведения, что может быть объяснено влиянием подвижности качающейся части изделия в плоскости крена.

На втором этапе решалась задача определения законов изменения жёсткостных и демпфирующих характеристик математической модели, обеспечивающих наблюдаемые в экспериментах характеристики динамического поведения изделия. Сначала осуществлялась разбивка расчётной схемы изделия на составляющие твёрдые тела и создавалась усечённая модель изделия в виде СТТ со степенями свободы по выбранным обобщённым координатам. УД проектировались на подпространства наблюдаемых координат. Затем построенная математическая модель сопоставлялась с дифференциальными уравнениями, полученными на первом этапе идентификации параметров колебаний изделия. Получаемая при этом система нелинейных алгебраических уравнений решалась относительно неизвестных коэффициентов жёсткости и демпфирования. Масс-инерционные характеристики изделия брались в соответствии с конструкторской документацией.

В результате проведённого исследования и анализа конструкторской документации была построена расчётная схема в виде системы трёх абсолютно твёрдых тел, связанных линейными упруго-демпфирующими элементами, с четырьмя степенями свободы. Кроме того были определены наборы коэффициентов жёсткости и демпфирования модели, при которых результаты численного моделирования соответствовали наблюдаемым выборкам. Используя известные начальные условия (углы отклонения элементов конструкции и нулевые начальные скорости), были выбраны значения коэффициентов жёсткости и демпфирования, примеры которых представлены в табл. 5.5. В этой таблице использованы следующие обозначения обобщённых координат построенной расчётной

схемы изделия: α , β — углы тангажа базы автомобиля и качающейся части; η , γ — углы рысканья и крена вращающейся части. В таблице приведены значения конструктивных параметров, полученные в результате обработки данных двух испытаний.

Таблица 5.5

Значения коэффициентов жёсткости и демпфирования

№	c_α , Нм/рад	d_α , Нмс/рад	c_β , Нм/рад	d_β , Нмс/рад	c_γ , Нм/рад	d_γ , Нмс/рад	c_η , Нм/рад	d_η , Нмс/рад
$\varphi(0) = 16^\circ$, $\psi(0) = -30^\circ$								
1	$4,9 \cdot 10^7$	52000	$9,4 \cdot 10^6$	116000	$1,1 \cdot 10^6$	178000	$5,5 \cdot 10^6$	44000
2	$4,3 \cdot 10^7$	66900	$1,0 \cdot 10^7$	75000	$7,5 \cdot 10^5$	110000	$3,7 \cdot 10^6$	35000
Относительные отклонения результатов двух испытаний, %								
	10	22	6	35	31	38	32	20

Получаемые в разных испытаниях коэффициенты жёсткости и демпфирования, проверялись на согласование друг с другом. Кроме того, вычисленное с использованием конструкторской документации значение коэффициента жёсткости по углу тангажа ($c_\alpha = 4,5 \cdot 10^7$ Нм/рад) базы изделия (автомобиля) сравнивалось со значениями, оценёнными по результатам испытаний.

На третьем этапе верификации сопоставлялись экспериментальные графики и результаты математического моделирования колебаний КЧ в различных режимах функционирования и силового нагружения. Примеры сравнения данных наблюдений и результатов математического моделирования после идентификации параметров математической модели программы D90 приведены на рис. 5.9. Заметим, что во всех экспериментах коэффициент корреляции линейной связи между данными наблюдений и результатами идентификации оказывался не ниже 0,88.

Представленные результаты показывают, что выбранная в программе D90 модель с достаточной для инженерной практики точностью описывает динамическое поведение выбранного класса СТТ с переменной структурой.

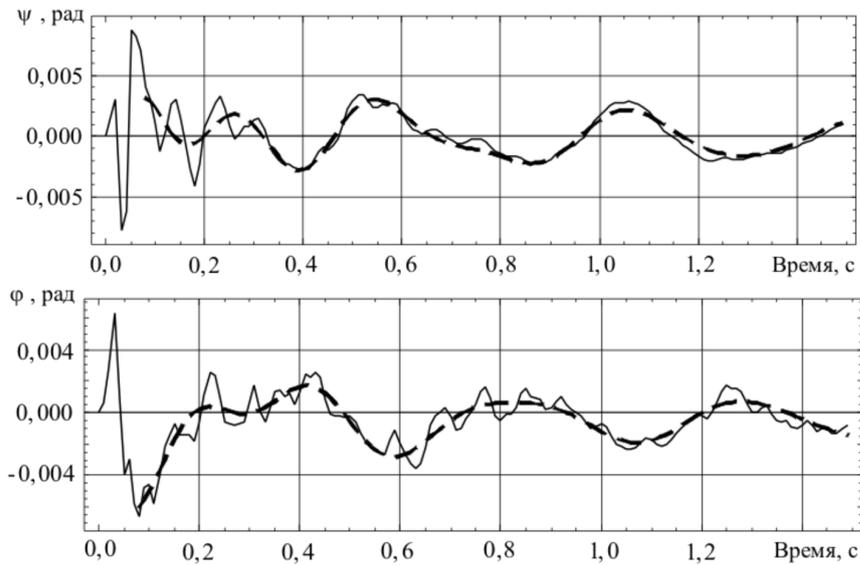


Рис. 5.9. Сравнительные графики колебаний

Выводы по главе 5

В этой главе представлен комплекс программ для моделирования динамики изделий машиностроения, математические модели которых могут быть представлены СТТ. Отличительной особенностью данного комплекса программ является то, что весь процесс функционирования механической системы разбивается на определённое число временных отрезков (этапов) на которых она может иметь разные кинематические структуры.

Основу комплекса программ образует библиотека модулей Dynamics90, которые используются для описания механической системы с переменной кинематической структурой, построения УД в различных формах, их численного решения и представления результатов моделирования. С помощью этой библиотеки были сгенерированы расчётные модули программы D90, предназначенной для моделирования динамики СТТ с отделяющимися элементами.

Комплекс программ был верифицирован на основе экспериментальных данных. Настройка параметров математических моделей проводилась по результатам стендовых испытаний опытных изделий ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы». Адекватность математических моделей проверялась с помощью сравнения экспериментальных данных, полученных при натурных ис-

пытаниях, с результатами численного моделирования полного цикла динамического функционирования ряда изделий. Среднее относительное отклонение результатов численного моделирования от данных наблюдений не превышало 12 процентов.

На комплекс программ получено пять Свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Заключение

Основные научные и практические результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Для описания кинематики СТТ введена матрица кинематической структуры и исследованы её свойства. Использование матрицы кинематической структуры позволило записать УД СТТ в компактной матричной форме. Уравнения движения включают в себя три группы соотношений: общие уравнения динамики твёрдого тела, кинематические соотношения, определяющие взаимосвязь между относительными, переносными и абсолютными ускорениями тел системы, и матричные соотношения принципа идеальности связей. Их особенностью является то, что за счёт расширения пространства лагранжевых переменных (обобщённых координат и скоростей) и введения матрицы кинематической структуры удалось записать дифференциально-алгебраические уравнения движения в виде системы линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей. Показано, что уравнения Лагранжа второго рода являются редукцией этих уравнений в касательное подпространство возможных перемещений СТТ, а уравнения Лагранжа первого рода — в ортогональное подпространство.

2. Из уравнений Эйлера—Лагранжа выведена новая форма уравнений движения СТТ относительно расширенного множества переменных: обобщённых и декартовых скоростей, обобщённых и декартовых импульсов. Кинематическая часть этих уравнений по форме аналогична расширенной системе уравнений в лагранжевых переменных. Получена явная матричная форма уравнений Гамильтона для СТТ с помощью редукции расширенной системы уравнений.

3. Предложен новый подход к классификации УД СТТ со структурой дерева на основе матрицы кинематической структуры. Классификация включает в себя шесть форм записи УД СТТ в лагранжевых и гамильтоновых переменных.

4. Разработан итерационный алгоритм разрешения уравнений движения с

положительно определённой матрицей относительно старших производных, основанный на формуле Пауэлла—Бройдена метода переменной метрики минимизации квадратичной функции и предназначенный для использования совместно со стандартными методами интегрирования ОДУ. Основным отличием предлагаемого алгоритма от классических методов сопряжённых градиентов является то, что помимо нахождения решения системы линейных уравнений вычисляется обратная матрица к матрице системы, которая является аналогом предобусловливателя в методах сопряжённых направлений. С одной стороны, это увеличивает вычислительные затраты на каждой итерации алгоритма, а с другой — на каждом шаге численного интегрирования уравнений движения обеспечивает лучшее начальное приближение и, как следствие, уменьшение числа итераций. Приведённые в работе многочисленные вычислительные эксперименты показывают, что среднее число итераций в данном алгоритме существенно меньше числа степеней свободы механической системы. Кроме того, данный итерационный алгоритм разрешения уравнений движения позволяет отказаться от явного формирования уравнений, особенно от трудоёмкого вычисления матрицы перед старшими производными. Сравнительными вычислительными экспериментами показано, что применение этого метода ускоряет расчёты динамики механических систем с малым числом ветвлений в графе системы по сравнению с классическими итерационными методами разрешения уравнений.

5. Разработан алгоритм приведения системы дифференциально-алгебраических уравнений движения СТТ со структурой дерева относительно расширенного состава переменных состояния к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме, основанный на $L^T DL$ -разложении симметричной матрицы системы и факторизации Холецкого её диагональных блоков. Данный алгоритм имеет линейный закон роста числа арифметических операций (вычислительной трудоёмкости) в зависимости от количества тел. Использование факторизации Холецкого позволило на 20–25% уменьшить общее время моделирования по сравнению с традиционным подходом, основанным на методе

отдельных тел.

6. Получены формулы зависимостей числа арифметических операций с плавающей точкой (флопов) от количества тел в механической системе, её кинематической структуры и числа степеней свободы в шарнирах для всех этапов моделирования динамики СТТ. На их основе проведены анализ и сравнение вычислительной трудоёмкости различных подходов к моделированию СТТ. Указаны условия, при которых тот или иной метод, рассмотренный в диссертации, оказывается наиболее эффективным. Анализ подтверждён многочисленными вычислительными экспериментами. На примерах показано, что неудачный выбор метода может в разы увеличить временные затраты компьютерного моделирования. В работе даны рекомендации по выбору оптимального метода формирования уравнений движения и их разрешения в зависимости от структуры системы, числа тел и типов шарниров.

7. Рассмотренные в диссертационной работе модели и алгоритмы положены в основу программного комплекса моделирования СТТ с переменной кинематической структурой Dynamics90. Реализация принципов универсальности и многоуровневой оптимизации как при разработке алгоритмов, так и при создании программы позволила эффективно моделировать на персональном компьютере сложные технические системы с большим числом тел.

8. Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы при дальнейшей разработке методов компьютерного моделирования и исследования механических систем, а также при решении конкретных задач, возникающих в инженерной практике.

9. Также следует отметить возможность использования теоретических положений диссертации в учебном процессе.

10. Направление дальнейших исследований может быть связано с распространением основных подходов, разработанных в диссертации, к моделированию систем с замкнутыми кинематическими цепями и неголономными связями.

Список литературы

1. Аоки М. Введение в методы оптимизации. — М. : Наука, 1977.
2. Арайс Е. А., Дмитриев В. М. Моделирование неоднородных цепей и систем на ЭВМ. — М. : Радио и связь, 1982.
3. Арайс Е. А., Дмитриев В. М. Автоматизация моделирования многосвязных механических систем. — М. : Машиностроение, 1987.
4. Асланов В. С., Круглов Г. Е., Юдинцев В. В. Матричная форма уравнений движения систем связанных тел РКТ // Полёт. — 2006. — № 4. — С. 40–47.
5. Банщиков А. В. Анализ динамики механических систем большой размерности средствами компьютерной алгебры // Сибирский журнал промышленной математики. — 2009. — Т. XII, № 3. — С. 15–27.
6. Белоусов И. Р. Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2002. — № 45.
7. Бойков В. Г. Моделирование динамики механических систем в программном комплексе EULER // САПР и графика. — 1998. — № 1. — С. 38–48.
8. Бойков В. Г. Программный комплекс автоматизированного динамического анализа многокомпонентных механических систем EULER // САПР и графика. — 2000. — № 9. — С. 17–20.
9. Бойков В. Г., Юдаков А. А. Моделирование динамики системы твёрдых и упругих тел в программном комплексе EULER // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2011. — № 1. — С. 42–52.
10. Борисов А. В., Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г. О математическом моделировании динамики многозвенных систем и экзоскелетов // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2021. — Т. 5, № 5. — С. 162–176.
11. Бурлакова Л. А., Почтаренко М. В. Новые возможности в пакете символьных вычислений для решения задач общей механики // Пакеты прикладных программ. Итоги и применения. — Новосибирск : Наука, 1986. —

- С. 105–112.
12. Бячков А. Б. Теоретические основы формирования моделей механических систем с переменной кинематической структурой : дис. . . . канд. физ.-мат. наук ; ПГУ. — Пермь, 1999.
 13. Бячков А. Б. Уравнения Маджи в квазикоординатах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 4 (20). — С. 82–91.
 14. Бячков А. Б. Классификация форм дифференциально-алгебраических моделей динамики систем твёрдых тел // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 4 (5). — С. 2045–2047.
 15. Бячков А. Б., Иванов В. Н., Суслонов В. М. Символьное построение уравнений динамики систем твердых тел средствами языка аналитических вычислений REDUCE // Пакеты прикладных программ. Программное обеспечение математического моделирования. — М. : Наука, 1992. — С. 77–84.
 16. Бячков А. Б., Иванов В. Н., Шимановский В. А. Классификация форм уравнений динамики систем твердых тел со структурой дерева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — № 7 (33). — С. 21–25.
 17. Величенко В. В. Матрицы, геометрия, механика и ЭВМ. — М. : МФТИ, 1984.
 18. Величенко В. В. Матричные уравнения движения голономных систем // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285, № 6. — С. 1340–1343.
 19. Величенко В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. — М. : Наука, 1988.
 20. Величенко В. В. Матричные уравнения движения неголономных систем // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 321, № 3. — С. 499–504.
 21. Величенко В. В. Механика трансформирующихся систем // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 6. — С. 757–760.
 22. Величенко В. В. Аксиоматика механики. Геометрическая теория и компью-

- терная реализация. — М. : Изд-во ВЦ РАН, 2014.
23. Верещагин А. Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1974. — № 6. — С. 89–94.
 24. Верещагин А. Ф. Принцип наименьшего принуждения Гаусса для моделирования на ЭВМ динамики роботов-манипуляторов // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 220, № 1. — С. 51–53.
 25. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. — М. : Мир, 1980.
 26. Войнов И. В., Телегин А. И., Тимофеев Д. Н. Векторный и скалярный виды уравнений для решения задач динамики платформы Стюарта // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2016. — Т. 16, № 4. — С. 19–28.
 27. Воробьёв Е. И., Диментберг Ф. М. Пространственные шарнирные механизмы. Замкнутые и открытые кинематические цепи. — М. : Наука, 1991.
 28. Вукобратович М. Шагающие роботы и антропоморфные механизмы. — М. : Мир, 1976.
 29. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: теория и приложения. — М. : Наука, 1985.
 30. Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н. Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. — М. : Мир, 1989.
 31. Гаврилов С. В., Занг Д. Т. Компьютерное моделирование динамики движения пятистепенного шагающего робота // Автоматизация в электроэнергетике и электротехнике. — 2016. — № 1. — С. 72–76.
 32. Гаврилов С. В., Коноплёв В. А. Компьютерные технологии исследования многозвенных мехатронных систем. — СПб. : Наука, 2004.
 33. Гетманский В. В., Горобцов А. С. Решение задач большой размерности в системах моделирования многотельной динамики с использованием параллельных вычислений // Известия Волгоградского государственного техни-

- ческого университета. — 2007. — Т. 3, № 9 (35). — С. 10–12.
34. Гетманский В. В., Горобцов А. С., Измайлов Т. Д. Распараллеливание расчёта напряжённо-деформированного состояния тела в многотельной модели методом декомпозиции расчётной области // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2013. — Т. 16, № 18 (111). — С. 5–10.
35. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ. — М. : Мир, 1985.
36. Голуб Д., Ван Лоан Ч. Матричные вычисления. — М. : Мир, 1993.
37. Голубев Ю. Ф. Функция Апшеля в динамике систем твёрдых тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2014. — № 58.
38. Голубев Ю. Ф., Погорелов Д. Ю. Компьютерное моделирование шагающих роботов // Фундаментальная и прикладная математика. — 1998. — Т. 4, № 2. — С. 525–534.
39. Голубев Ю. Ф., Яскевич А. В. Оптимизация вычислений в процедурах расчета динамики систем твердых тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2020. — по. 22.
40. Горобцов А. С. Расчёт ударных взаимодействий в динамике механических систем многих тел // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 2007. — № 4. — С. 58–64.
41. Горобцов А. С., Гетманский В. В., Андреев А. Е. Численный метод решения задач упругости твёрдого деформируемого тела // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2017. — № 1 (196). — С. 27–32.
42. Горобцов А. С., Карцев С. К., Поляков Ю. А. Особенности построения пространственных динамических моделей автомобилей с учётом больших движений твёрдых тел // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. — 2013. — № 6-1. — С. 102–115.
43. Горобцов А. С., Рыжов Е. Н. Задачи нелинейной стабилизации и аналити-

- ческий синтез режимов движения многомерных динамических систем. — Волгоград : ВолгГТУ, 2008.
44. Горобцов А. С., Солоденков С. В. Расчётные задачи динамики систем твёрдых и упругих тел в программном комплексе ФРУНД // Машиностроение и инженерное образование. — 2008. — № 4. — С. 31–38.
 45. Грошева М. В., Ефимов Г. Б., Самсонов В. А. Символьные преобразования на ЭВМ в задачах управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 1998. — Т. 37, № 3. — С. 80–91.
 46. Грошева М. В., Ефимов Г. Б., Самсонов В. А. История использования аналитических вычислений в задачах механики. — М. : ИПМ им.М.В.Келдыша РАН, 2005.
 47. Джордж А., Лю Д. Численное решение больших разреженных систем уравнений: Пер. с англ. — М. : Мир, 1984.
 48. Диментберг Ф. М. Теория пространственных шарнирных механизмов. — М. : Наука, 1982.
 49. Диментберг Ф. М. Теория винтов и её приложения. — М. : Наука, 1987.
 50. Диментберг Ф. М., Саркисян Ю. Л., Усков М. К. Пространственные механизмы. Обзор современных исследований. — М. : Наука, 1983.
 51. Динамика платформы Стюарта / Андриевский Б. Р., Арсеньев Д. Г., Зегжда С. А., Казунин Д. В., Кузнецов Н. В., Леонов Г. А., Товстик П. Е., Товстик Т. П. и Юшков М. П. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4, № 3. — С. 489–506.
 52. Дмитриев В. М., Арайс Е. А., Шутенков А. В. Автоматизация моделирования промышленных роботов. — М. : Машиностроение, 1995.
 53. Добрынина И. С., Карпов И. И., Черноусько Ф. Л. Компьютерное моделирование управления движением системы связанных твёрдых тел // Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1994. — № 1. — С. 167–180.
 54. Ефимов Г. Б., Грошева М. В. Из истории отечественной компьютерной алгебры // Математические машины и системы. — 2009. — Т. 1, № 2. —

- С. 61–67.
55. Ефимов Г. Б., Погорелов Д. Ю. Некоторые алгоритмы автоматизированного синтеза уравнений движения системы твердых тел // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1993. — № 84.
56. Ефимов Г. Б., Погорелов Д. Ю. "Универсальный механизм— комплекс программ моделирования динамики систем твердых тел // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1993. — № 77.
57. Ефимов Г. Б., Погорелов Д. Ю. О численных методах моделирования движения системы твердых тел // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1994. — № 12.
58. Журавлёв В. Ф. Механика систем с односторонними связями // Успехи механики. — 1989. — № 2. — С. 37–69.
59. Журавлёв В. Ф. Динамика тяжёлого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 2006. — № 6. — С. 3–9.
60. Журавлёв В. Ф. Понятие связи в аналитической механике // Нелинейная динамика. — 2012. — Т. 8, № 4. — С. 853–860.
61. Журавлёв В. Ф., Фуфаев Н. А. Механика систем с неудерживающими связями. — М. : Наука, 1993.
62. Задачи механики и компьютерная алгебра / Банщиков А. В., Бурлакова Л. А., Иртегов В. Д. и Титоренко Т. Н. // Математические машины и системы. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 82–97.
63. Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Неголономная механика. Теория и приложения. — М. : Физматлит, 2009.
64. Иванов В. Н. Уравнения движения и алгоритмизация моделирования систем связанных твердых тел : дис. . . . канд. физ.-мат. наук ; ПГУ. — Пермь, 1987.
65. Иванов В. Н., Домбровский И. В., Шевелев Н. А. Численная идентификация параметров динамического поведения элементов машиностроительных конструкций // Вычислительная механика сплошных сред. — 2011. —

- Т. 4, № 3. — С. 58–67.
66. Иванов В. Н., Полосков И. Е. Метод модифицированных функций Лагранжа в задаче моделирования механических систем с дополнительными связями // Современные наукоемкие технологии. — 2016. — № 10-1. — С. 67–73.
67. Иванов В. Н., Полосков И. Е., Шимановский В. А. Математические модели систем связанных твёрдых тел в импульсах Пуассона // Фундаментальные исследования. — 2016. — № 10-3. — С. 493–499.
68. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Использование итерационных алгоритмов разрешения уравнений движения механических систем при их численном интегрировании // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — № 4 (4). — С. 28–38.
69. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Применение итерационных методов для разрешения уравнений движения систем связанных твердых тел // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — № 4 (20). — С. 109–116.
70. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Программа расчёта динамики системы твёрдых тел с переменной структурой «Dynamics90» // Хроники объединённого фонда электронных ресурсов «Наука и образование». — 2014. — Т. 1, № 1 (56). — С. 34.
71. Иванов В. Н., Шимановский В. А. Численные методы формирования и решения уравнений движения в импульсах Пуассона систем твёрдых тел со структурой дерева // Современные наукоемкие технологии. — 2017. — № 10. — С. 13–18.
72. Классификация моделей систем твёрдых тел, используемых в численных расчётах динамического поведения машиностроительных конструкций / Иванов В. Н., Домбровский И. В., Шимановский В. А., Набоков Ф. В. и Шевелёв Н. А. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — № 2. — С. 139–155.
73. Климов Д. М., Руденко В. М. Методы компьютерной алгебры в задачах

- механики. — М. : Наука, 1989.
74. Ковальчук А. К. Модифицированная система координат Денавита-Хартенберга для исполнительных механизмов роботов с древовидной кинематической структурой // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2015. — № 11. — С. 12–30.
75. Компьютерные методы построения и исследования математических моделей динамики конструкций автомобилей / Горобцов А. С., Карцов С. К., Плетнёв А. Е. и Поляков Ю. А. — М. : Машиностроение, 2011.
76. Коноплёв В. А. Агрегативные модели механики систем твёрдых тел со структурой дерева // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. — 1989. — № 6. — С. 46–53.
77. Коноплёв В. А. Конструирование агрегативных моделей механики носителя систем твёрдых тел // Прикладная математика и механика. — 1989. — Т. 53, № 1. — С. 24–31.
78. Коноплёв В. А. Агрегативные модели механики систем твёрдых тел // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 314, № 4. — С. 809–813.
79. Коноплёв В. А. Агрегативная форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // Докл. АН СССР. — 1992. — Т. 322, № 6. — С. 1047–1051.
80. Коноплёв В. А. Новая форма дифференциальных уравнений связей системы тел с телами внешней среды // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 1993. — № 1. — С. 3–9.
81. Коноплёв В. А. Агрегативная механика систем твёрдых тел. — СПб. : Наука, 1996.
82. Коноплёв В. А. Алгебраические методы в механике Галилея. — СПб. : Наука, 1999.
83. Коноплёв В. А., Фишков А. Л. Агрегативные методы конструирования моделей механики систем из упругих элементов // Прикладная механика. — 1991. — Т. 27, № 1. — С. 104–109.

84. Косенко И. И. Реализация компьютерной модели динамики систем твёрдых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, № 12. — С. 95–106.
85. Косенко И. И. Графовые представления моделей динамики систем тел // Математическое моделирование. — 2009. — Т. 21, № 9. — С. 80–88.
86. Косенко И. И. Об одном способе построения компьютерной модели динамики систем твердых тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2022. — Т. 9, № 1. — С. 126–134.
87. Крахмалев О. Н. Объектно-ориентированное моделирование динамики манипуляционных систем на основе матриц преобразования однородных координат // Робототехника и техническая кибернетика. — 2017. — № 2 (15). — С. 32–36.
88. Крахмалев О. Н. Методы объектно-ориентированного подхода моделирования манипуляционных систем роботов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. — 2018. — № 1 (327). — С. 96–105.
89. Ларин В. Б. Алгоритмизация процедуры выбора обобщенных координат // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. — 1993. — № 1. — С. 37–42.
90. Лесков А. Г., Бажинова К. В., Селиверстова Е. В. Описание кинематики антропоморфных роботов методом блочных матриц // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: «Приборостроение». — 2018. — № 6 (123). — С. 102–111.
91. Лилов Л. К. Структура, кинематика и динамика // Успехи механики. — 1983. — № 1–2. — С. 53–90.
92. Лилов Л. К. Моделирование систем связанных тел. — М. : Наука, 1993.
93. Лилов Л. К., Чириков В. А. Об уравнениях динамики систем взаимосвязанных тел // Прикладная математика и механика. — 1981. — Т. 45, № 3. — С. 525–534.
94. Лурье А. И. Аналитическая механика. — М. : ГИФМЛ, 1961.
95. Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М. : Наука, 1992.

96. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. — 2-ое изд. — Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2014.
97. МАРС — среда моделирования технических устройств и систем / Дмитриев В. М., Шутенков А. В., Зайченко Т. Н. и Ганджа Т. В. — Томск : В-Спектр, 2011.
98. Механика промышленных роботов / под ред. Фролова К. В., Воробьева Е. И. — М. : Высш. шк., 1988. — Т. 1. Кинематика и динамика.
99. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование системы связанных тел методом последовательных импульсов // Труды Научно-исследовательского института системных исследований РАН. — 2014. — Т. 4, № 2. — С. 52–60.
100. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Ограничения на параметры относительного движения для основных видов шарниров // Труды Научно-исследовательского института системных исследований РАН. — 2015. — Т. 5, № 1. — С. 130–133.
101. Михайлюк М. В., Страшнов Е. В. Моделирование динамики системы связанных тел с учётом трения в шарнирах // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2016. — № 1. — С. 108–124.
102. Моделирование движения механической системы, состоящей из деформируемых упругих тел, путем интеграции двух пакетов: EULER и FIDESYS / Бойков В. Г., Гаганов И. В., Файзуллин Ф. Р. и Юдаков А. А. // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 3 (63). — С. 131–153.
103. Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов / Горобцов А. С., Андреев А. Е., Марков А. Е., Скориков А. В. и Тарасов П. С. // Труды Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН. — 2019. — Т. 18, № 1. — С. 85–122.
104. Пакет символьных вычислений "Механик". Задачи и структура / Банщиков А. В., Бурлакова Л. А., Иванова Г. И. и Симонов С. А. // Пакеты прикладных программ. Итоги и применения. — Новосибирск : Наука, 1986. —

- С. 96–105.
105. Параметры и алгоритмы управления динамическим механическим движением многозвенных робототехнических систем / Яковлев Р. Н., Черноусова П. М., Крестовников К. Д. и Денисов А. В. // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. — 2018. — № 6-3 (86). — С. 227–242.
106. Погорелов Д. Ю. О кодировании символьных выражений при синтезе уравнений движения системы твёрдых тел // Изв. РАН. Техническая кибернетика. — 1993. — № 6. — С. 207–213.
107. Погорелов Д. Ю. О численных методах моделирования движения системы твёрдых тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1995. — Т. 35, № 4. — С. 631–638.
108. Погорелов Д. Ю. Экономичные алгоритмы кинематики и динамики манипуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1995. — № 1. — С. 231–234.
109. Погорелов Д. Ю. Введение в моделирование динамики систем тел. — Брянск : БГТУ, 1997.
110. Погорелов Д. Ю. Компьютерное моделирование динамики технических систем с использованием программного комплекса «Универсальный механизм» // Вестник компьютерных и информационных технологий. — 2005. — № 4. — С. 27–34.
111. Погорелов Д. Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 4. — С. 5–15.
112. Погорелов Д. Ю. Матрицы Якоби уравнений движения систем тел // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 4. — С. 63–77.
113. Погорелов Д. Ю. Алгоритмы моделирования динамики систем тел с большим числом степеней свободы // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобчевского. — 2011. — № 4-2. — С. 278–279.
114. Погорелов Д. Ю. Моделирование связей податливыми шарнирами // Изв.

- РАН. Теория и системы управления. — 2011. — № 1. — С. 162–177.
115. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Теоретическая механика. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1985.
116. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 314, № 4. — С. 809–813.
117. Попов Е. П., Верещагин А. Ф., Зенкевич С. Л. Манипуляционные роботы: динамика и алгоритмы. — М. : Наука, 1978.
118. Почтаренко М. В. Применение систем аналитических вычислений в задачах механики // Пакеты прикладных программ. Функциональное наполнение. — Новосибирск : Наука, 1985. — С. 3–11.
119. Решение систем дифференциально-алгебраических уравнений последовательным исключением множителей Лагранжа / Шаповалов О. В., Гетманский В. В., Андреев А. Е. и Горобцов А. С. // Известия Волгоградского государственного технического университета. — 2011. — Т. 10, № 3 (76). — С. 31–33.
120. Ручкин Л. В., Ручкина Н. Л. Моделирование трансформируемых механических систем // Сибирский журнал науки и технологий. — 2017. — Т. 18, № 4. — С. 820–824.
121. Сергеев Е. С., Гетманский В. В., Горобцов А. С. Перенос системы многотельной динамики на вычислительный кластер // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2010. — № 3 (101). — С. 93–99.
122. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем / Банщиков А. В., Бурлакова Л. А., Иртегов В. Д. и Титоренко Т. Н. // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 6. — С. 3–18.
123. Солтаханов Ш. Х., Шугайло Т. С., Юшков М. П. К вопросу о векторной

- записи вариационных дифференциальных принципов механики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2018. — Т. 5, № 1. — С. 147–153.
124. Суслонов В. М., Иванов В. Н. Уравнение движения механических систем со структурой дерева // Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. — Пермь, 1984. — С. 154–158.
125. Сухов Е. А., Чекина Е. А. Программный комплекс для численного моделирования движения систем многих тел // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 1. — С. 161–174.
126. Телегин А. И. Новые уравнения для решения задач динамики и синтеза систем твёрдых тел // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. — 2006. — № 11 (66). — С. 3–14.
127. Телегин А. И. Общий и частные виды уравнения динамики систем абсолютно твёрдых тел // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. — 2007. — № 11 (83). — С. 3–13.
128. Телегин А. И. Новый векторный вид уравнений динамики систем тел // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. — 2014. — Т. 14, № 1. — С. 33–40.
129. Телегин А. И. Формализм выписывания уравнения динамики манипуляторов // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2021. — Т. 21, № 4. — С. 52–68.
130. Телегин А. И. Выделение гироскопических инерционных сил из центробежных и кориолисовых инерционных сил // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. — 2024. — Т. 24, № 1. — С. 63–74.
131. Уточнённая модель разгона автомобиля как задача с освобождающей связью / Бячков А. Б., Зегжда С. А., Каттани К. и Юшков М. П. // Вест-

- ник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2008. — № 3. — С. 97–105.
132. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежёсткие задачи: Пер. с англ. — М. : Мир, 1990.
133. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ: Пер. с англ. — М. : Мир, 1989.
134. Черноусько Ф. Л. Оптимальное управление движением многозвенной системы в среде с сопротивлением // Прикладная математика и механика. — 2012. — Т. 76, № 3. — С. 355–373.
135. Черноусько Ф. Л. Поступательное движение цепочки тел в сопротивляющейся среде // Прикладная математика и механика. — 2017. — Т. 81, № 4. — С. 380–388.
136. Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Лещенко Д. Д. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс. — М.–Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2015.
137. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М. : Физматлит, 2006.
138. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. — М. : Наука, 1989.
139. Шимановский В. А. Метод компьютерного моделирования динамики систем связанных твёрдых тел // Фундаментальные исследования. — 2017. — № 8-1. — С. 104–109.
140. Шимановский В. А. Эффективное разложение матрицы масс системы многих тел с разветвлённой древовидной структурой взаимосвязей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2018. — № 4 (43). — С. 37–44.
141. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Формирование уравнений движения механических систем в обобщенных координатах // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. — Пермь, 2005. — Вып. 37. — С. 188–201.

142. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Методы составления уравнений движения систем связанных твердых тел в декартовых координатах // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермский ун-т. — Пермь, 2007. — Вып. 39. — С. 248–262.
143. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Уравнения движения систем связанных твёрдых тел в канонических переменных // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — № 2 (21). — С. 76–82.
144. Шимановский В. А., Иванов В. Н. Анализ вычислительной эффективности матричных уравнений движения систем твёрдых тел со структурой дерева в гамильтоновых переменных // Инженерный вестник Дона. — 2023. — № 8. — Режим доступа: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n8y2023/8620.
145. Юдаков А. А., Бойков В. Г. Численные методы интегрирования уравнений движения многокомпонентных механических систем, основанные на методах прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — № 1. — С. 131–144.
146. Advanced Multibody System Dynamics: Simulation and Software Tools / ed. by Schiehlen W. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993.
147. Afzali-Far B., Lidström P. Coordinate representations for rigid parts in multibody dynamics // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 21, no. 8. — P. 990–1025.
148. Amirouche F. M. L. Computational methods in multibody dynamics. — New York : Prentice Hall, 1992.
149. Amirouche F. M. L. Fundamentals of multibody dynamics: theory and applications. — Basel : Birkhauser, 2006.
150. Amirouche F. M. L., Ider S. K., Trimble J. Analytical method for the analysis and simulation of human locomotion // Journal of Biomechanical Engineering. — 1990. — Vol. 112, no. 4. — P. 379–386.
151. Amirouche F. M. L., Xie M. An explicit matrix formulation of the dynamical

- equations for flexible multibody systems: A recursive approach // Computers and Structures. — 1993. — Vol. 46, no. 2. — P. 311–321.
152. Burkhardt M., Seifried R., Eberhard P. Aspects of Symbolic Formulations in Flexible Multibody Systems // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. — 2014. — Vol. 9, no. 4. — P. 041013–1–041013–8.
153. Chernousko F. L. Dynamics and optimization of multibody systems in the presence of dry friction // Springer Optimization and its Applications. — 2014. — Vol. 87. — P. 71–100.
154. The Control System Structure for the Stable Biped Robot Motion / Gorobtsov A. S., Ryzhov E. N., Polyamina A. S., Andreev A. E., and Kohtashvili N. I. // Creativity in Intelligent Technologies and Data Science. — 2017. — Vol. 754. — P. 231–241.
155. Distributed Operational Space Formulation of Serial Manipulators / Bhalerao K. D., Critchley J., Oetomo D., Featherstone R., and Khatib O. // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. — 2014. — Vol. 9, no. 2.
156. Featherstone R. Robot Dynamics Algorithms. — New York : Springer, 1987.
157. Featherstone R. A Divide-and-Conquer Articulated-Body Algorithm for Parallel $O(\log(n))$ Calculation of Rigid-Body Dynamics. Part 1: Basic Algorithm // The International Journal of Robotics Research. — 1999. — Vol. 18, no. 9. — P. 867–875.
158. Featherstone R. A Divide-and-Conquer Articulated-Body Algorithm for Parallel $O(\log(n))$ Calculation of Rigid-Body Dynamics. Part 2: Trees, Loops, and Accuracy // The International Journal of Robotics Research. — 1999. — Vol. 18, no. 9. — P. 876–892.
159. Featherstone R. Efficient Factorization of the Joint Space Inertia Matrix for Branched Kinematic Trees // The International Journal of Robotics Research. — 2005. — Vol. 24, no. 6. — P. 487–500.
160. Featherstone R. Rigid Body Dynamics Algorithms. — New York : Springer, 2008.

161. Fijany A., Featherstone R. A new factorization of the mass matrix for optimal serial and parallel calculation of multibody dynamics // *Multibody System Dynamics*. — 2013. — Vol. 29, no. 2. — P. 169–187.
162. Fischer U., Lilov L. Dynamik von Mehrkörpersystemen // *Techn. Mech.* — 1985. — nu. 4. — S. 40–45.
163. García de Jalón J., Bayo E. Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. — Berlin : Springer, 1994.
164. Gil G., Nikravesh P. E. Flexible multibody simulation using hybrid integration scheme // *Multibody System Dynamics*. — 2016. — Vol. 37, no. 1. — P. 3–13.
165. Ivanov V., Shimanovskiy V. Matrix Equations of the Motion of Multibody Systems with a Tree Structure in Hamiltonian Variables // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. — 2023. — Vol. 9, no. 4. — P. 1107–1121.
166. Jung J., Bae D. Accelerating implicit integration in multi-body dynamics using GPU computing // *Multibody System Dynamics*. — 2018. — Vol. 42, no. 2. — P. 169–195.
167. Kane T. R., Levinson D. A. *Multibody Dynamics* // *Journal of Applied Mechanics*. — 1983. — Vol. 50, no. 4. — P. 1071–1078.
168. Kane T. R., Levinson D. A. *Dynamics: Theory and Applications*. — McGraw-Hill, 1985.
169. Kingsley C., Poursina M. Extension of the divide-and-conquer algorithm for the efficient inverse dynamics analysis of multibody systems // *Multibody System Dynamics*. — 2018. — Vol. 42, no. 2. — P. 145–167.
170. Krakhmalev O. N. Mathematical model manipulator robots // *International Journal of Advanced Studies*. — 2015. — Vol. 5, no. 4. — P. 31–35.
171. Lankarani H. M., Nikravesh P. E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems // *Nonlinear Dynamics*. — 1994. — Vol. 5, no. 2. — P. 193–207.
172. Levinson D. A. Equation of motion for multi-rigid-body systems via symbolic manipulations // *Journal of Spacecraft and Rockets*. — 1977. — no. 14. —

- P. 479–487.
173. Marques F., Souto A. P., Flores P. On the constraints violation in forward dynamics of multibody systems // *Multibody System Dynamics*. — 2017. — Vol. 39, no. 4. — P. 385–419.
 174. Müller A. Screw and Lie group theory in multibody dynamics // *Multibody System Dynamics*. — 2018. — Vol. 42, no. 2. — P. 219–248.
 175. Müller A., Terze Z. Geometric methods and formulations in computational multibody system dynamics // *Acta Mechanica*. — 2016. — Vol. 227, no. 12. — P. 3327–3350.
 176. *Multibody Systems Handbook* / ed. by Schiehlen W. — Berlin : Springer, 1990.
 177. Nikravesh P. E. *Computer-aided Analysis of Mechanical Systems*. — Upper Saddle River : Prentice-Hall, 1988.
 178. Nikravesh P. E. Systematic reduction of multibody equations of motion to a minimal set // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. — 1990. — Vol. 25, no. 2-3. — P. 143—151.
 179. Nikravesh P. E. Initial condition correction in multibody dynamics // *Multibody System Dynamics*. — 2007. — Vol. 18, no. 1. — P. 107–115.
 180. Nikravesh P. E. *Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications*. — Boca Raton : CRC Press, 2007.
 181. Nikravesh P. E. Newtonian-based methodologies in multi-body dynamics // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*. — 2008. — Vol. 222, no. 4. — P. 277–288.
 182. Nikravesh P. E., Lin Y. Use of Principal Axes as the Floating Reference Frame for a Moving Deformable Body // *Multibody System Dynamics*. — 2005. — Vol. 13, no. 2. — P. 211–231.
 183. Pereira M. S., Nikravesh P. E. Impact dynamics of multibody systems with frictional contact using joint coordinates and canonical equations of motion // *Nonlinear Dynamics*. — 1996. — Vol. 9, no. 1-2. — P. 53–71.
 184. Phillips J. R., Amirouche F. M. L. A momentum form of Kane's equations for

- scleronomic systems // *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. — 2018. — Vol. 24, no. 2. — P. 143–169.
185. Pogorelov D. Differential-algebraic equation in multibody system modeling // *Numerical Algorithms*. — 1998. — Vol. 19, no. 1–4. — P. 183–194.
186. Pogorelov D. Y. On numerical methods of modeling large multibody systems // *Mechanism and Machine Theory*. — 1999. — Vol. 34, no. 5. — P. 791–800.
187. Roberson R. E., Schwertassek R. *Dynamics of Multibody Systems*. — Berlin : Springer, 1988.
188. Schiehlen W. *Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives* // *Multibody System Dynamics*. — 1997. — Vol. 1, no. 2. — P. 149–188.
189. Schwerin R. V. *MultiBody System SIMulation: Numerical Methods, Algorithms, and Software*. — Berlin : Springer, 1999.
190. Shabana A. A. *Computational dynamics*. — 3rd ed. — New York : Wiley, 2010.
191. Shabana A. A. *Dynamics of Multibody Systems*. — 4th ed. — Cambridge : Cambridge University Press, 2013.
192. Shah S. V., Saha S. K., Dutt J. K. A new perspective towards decomposition of the generalized inertia matrix of multibody systems // *Multibody System Dynamics*. — 2018. — Vol. 43, no. 2.
193. Terze Z., Müller A., Zlatar D. Lie-group integration method for constrained multibody systems in state space // *Multibody System Dynamics*. — 2015. — Vol. 34, no. 3. — P. 275–305.
194. Train 3D: the technique for inclusion of three-dimensional models in longitudinal train dynamics and its application in derailment studies and train simulators / Pogorelov D., Yazykov V., Lysikov N., Oztemel E., Arar O. F., and Rende F. S. // *Vehicle System Dynamics*. — 2017. — Vol. 55, no. 4. — P. 583–600.
195. Vukobratović M. K., Filaretov V. F., Korzun A. I. A unified approach to mathematical modelling of robotic manipulator dynamics // *Robotica*. — 1994. — Vol. 12, no. 5. — P. 411–420.

196. Wang J. Y., Liu Z. Y., Hong J. Z. Partition method and experimental validation for impact dynamics of flexible multibody system // *Acta Mechanica Sinica*. — 2018. — Vol. 34, no. 3. — P. 482–492.
197. Wittenburg J. *Dynamics of multibody systems*. — 2nd ed. — Berlin : Springer, 2008.
198. Wittenburg J. *Kinematics: Theory and Applications*. — Berlin : Springer, 2016.
199. Zhang J., Liu D., Liu Y. A constraint violation suppressing formulation for spatial multibody dynamics with singular mass matrix // *Multibody System Dynamics*. — 2016. — Vol. 36, no. 1. — P. 87–110.
200. Zhou X., Draganich L. F., Amirouche F. M. L. A dynamic model for simulating a trip and fall during gait // *Medical Engineering and Physics*. — 2002. — Vol. 24, no. 2. — P. 121–127.
201. Zivanovic M. D., Vukobratovic M. K. *Multi-Arm Cooperating Robots. Dynamics and Control*. — Dordrecht : Springer, 2006.

Охранные документы на объекты интеллектуальной собственности

202. Свидетельство ИНИПИ РАО ОФЭРНиО о регистрации электронного ресурса № 19864. Программа расчёта динамики системы твёрдых тел с переменной структурой «Dynamics90» : дата регистр. 10.01.2014 / Иванов В. Н., Шимановский В. А. ; организация-разработчик ФГБОУ ВПО «Пермский государственный национальный исследовательский университет».
203. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661787 Российская Федерация. Моделирование динамики механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90) : № 2015615714 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.

204. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661788 Российская Федерация. Моделирование влияния упругих свойств грунта на динамику механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90grunt) : № 2015615716 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
205. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661789 Российская Федерация. Идентификация математической модели механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90ident) : № 2015615718 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
206. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661790 Российская Федерация. Моделирование системы стабилизации колебаний механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами с предварительной компенсацией возмущений (D90komp) : № 2015615721 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.
207. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661791 Российская Федерация. Построение оптимального управления динамическим поведением механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами (D90opt) : № 2015615724 : заявл. 29.06.2015 : опубл. 09.11.2015 / В. Н. Иванов, В. А. Шимановский, И. В. Домбровский, Ф. В. Набоков, И. Н. Емшанов ; заявитель ЗАО «Специальное конструкторское бюро» ; Бюл. № 12. — 1 с.

Приложение А

Акты о внедрении результатов диссертационного исследования



ПАО «МОТОВИЛИХИНСКИЕ ЗАВОДЫ»



Закрытое акционерное общество
«СПЕЦИАЛЬНОЕ
КОНСТРУКТОРСКОЕ БЮРО»

ул. 1905 года, д.35, г.Пермь, 614014
Тел./факс (342) 260-57-90; 260-73-60
E-mail: sdg@mz.perm.ru
ОКПО 44821531, ОГРН 1025901364026
ИНН/КПП 5906034720/590601001

26.12. 2017 г. № 107 - 4991

УТВЕРЖДАЮ

Исполнительный директор ЗАО «СКБ»

С.В. Рожков

2017 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы
Шимановского Владимира Александровича

Комиссия в составе:

Председатель: Секлецов А.В., главный конструктор по направлению,
члены комиссии: Емшанов И.Н., начальник конструкторского отдела;
Набоков Ф.В., советник, канд. техн. наук,

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы В.А. Шимановского «Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных алгоритмов компьютерного моделирования систем связанных твёрдых тел и их реализация в виде комплекса программ для ЭВМ», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук:

1. Методика расчёта динамических характеристик определенного класса механических систем с переменной кинематической структурой;
 2. Комплекс программ D90, предназначенный:
 - для исследования динамики механической системы с переменной кинематической структурой со следящими гидроприводами при различных условиях ее работы;
 - определения влияния порядка и темпа схода отделяющихся элементов на динамику механической системы;
 - оценки энергетических затрат и оптимизации параметров гидроприводов и системы управления;
 - определения влияния различных характеристик опорных поверхностей (грунта) на колебания элементов конструкции механической системы
- внедрены в практику работы ЗАО «СКБ» ПАО «Мотовилихинские заводы».

Председатель комиссии

Члены комиссии

 А.В. Секлецов
 И.Н. Емшанов
 Ф.В. Набоков

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕРМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ПГНИУ)

ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, 614990
Тел. (342) 239-63-26, факс (342) 237-16-11

24.06.2019 № 116-3/2821
На № _____ от _____



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
Пермского государственного
национального исследовательского
университета

д.ф.-м.н. Макаров С. О.

2019 г.

АКТ

о внедрении в учебный процесс
результатов диссертационной работы

Мы, нижеподписавшиеся, составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы В. А. Шимановского «Разработка, обоснование и тестирование эффективных численных алгоритмов компьютерного моделирования систем связанных твёрдых тел и их реализация в виде комплекса программ для ЭВМ», представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, внедрены в учебный процесс при чтении курса «Компьютерное моделирование систем твёрдых тел» для студентов магистратуры механико-математического факультета федерального бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Пермский государственный национальный исследовательский университет».

Декан
механико-математического
факультета, к.т.н.

А. Г. Кузнецов

Заведующий кафедрой
вычислительной и экспериментальной
механики, к.т.н.

В. Н. Терпугов

Доцент кафедры
вычислительной и экспериментальной
механики, к.т.н.

Е. Н. Остапенко

Приложение Б

Оценка вычислительных затрат решения СЛАУ с разреженной матрицей системы

Рассмотрим систему уравнений

$$Ax = b, \quad (\text{Б.1})$$

где A — квадратная симметричная положительно определённая матрица коэффициентов n -го порядка; b — вектор правых частей уравнения длины n ; x — вектор неизвестных длины n .

Метод Холецкого решения этой системы уравнений задаётся следующими формулами:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=i+1}^n l_{ki}^2}, \quad i = n, n-1, \dots, 1; \quad (\text{Б.2})$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} l_{kj} \right) / l_{ii}, \quad j = i-1, i-2, \dots, 1; \quad (\text{Б.3})$$

$$y_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} y_j \right) / l_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad (\text{Б.4})$$

$$x_i = \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right) / l_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{Б.5})$$

Определим число операций, необходимых для вычисления треугольного множителя L матрицы A . На i -м шаге разложения по формулам (Б.2) и (Б.3) требуется $(n-i+1) \cdot i - 1$ мультипликативных операций (умножение и деление), $(n-i) \cdot i$ аддитивных операций (сложение и вычитание) и одно извлечение квадратного корня. Суммированием по всем шагам алгоритма получаем, что для нахождения множителя Холецкого требуется $(2n^3 + 3n^2 + n)/6$ флопов.

Для нахождения решения системы необходимо решить две треугольные системы. Оценим вычислительную трудоёмкость их решения. Нетрудно видеть, что число арифметических операций в формулах (Б.4) и (Б.5) одинаково и суммарно равно n^2 флопов.

Таким образом полное число арифметических операций, требуемых для решения системы уравнений (Б.1), в случае, если матрица A является симметричной положительно определённой полностью заполненной матрицей, выражается формулой

$$\mathbf{N} = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (\text{Б.6})$$

Рассмотрим теперь вопрос о вычислительной трудоёмкости метода Холецкого, когда матрица A является разреженной. Для этого запишем k -й шаг алгоритма факторизации матрицы A в форме внешних произведений:

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= \begin{pmatrix} H_{k-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{H}_k & v_k & 0 \\ v_k^\top & d_k & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E & \frac{v_k}{\sqrt{d_k}} & 0 \\ 0 & \sqrt{d_k} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{H}_k - \frac{v_k v_k^\top}{d_k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ \frac{v_k^\top}{\sqrt{d_k}} & \sqrt{d_k} & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix} = \\ &= L_k^\top \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} L_k = L_k^\top A_k L_k. \quad (\text{Б.7}) \end{aligned}$$

Введём символ $\eta(\square)$ для числа ненулевых коэффициентов в \square , где символ \square замещает название вектора или матрицы. Очевидно, что число ненулевых элементов в L выражается формулой

$$\eta(L) = n + \sum_{k=1}^{n-1} \eta(v_k).$$

Из соотношения (Б.7) следует, что на k -м шаге требуется: 1) одно вычисление квадратного корня, 2) $\eta(v_k)$ операций деления, 3) $\frac{1}{2}\eta(v_k)[\eta(v_k) + 1]$ операций умножения, 4) $\frac{1}{2}\eta(v_k)[\eta(v_k) + 1]$ операций вычитания. Суммируя по всем шагам получаем, что число арифметических операций, необходимых для вычисления треугольного множителя L матрицы A , равно

$$n + \sum_{k=1}^{n-1} \eta(v_k)[\eta(v_k) + 2] = n + \sum_{k=1}^n [\eta(L_{k*}) - 1][\eta(L_{k*}) + 1] = \sum_{k=1}^n [\eta(L_{k*})]^2,$$

где L_{k*} — k -я строка матрицы L . Для решения каждой из треугольных систем требуется число арифметических операций, равное

$$\sum_{k=1}^n [2\eta(L_{k*}) - 1] = 2\eta(L) - n.$$

Таким образом полное число арифметических операций, требуемых для решения системы уравнений (Б.1), в случае, если учитывается разреженность матрицы A , выражается формулой

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^n [\eta(L_{k*})]^2 + 4\eta(L) - 2n. \quad (\text{Б.8})$$

Приложение В

Интерфейс программы D90

Рабочее окно программы D90 (рис. В.1) имеет структуру, традиционную для оконного интерфейса среды MS Windows.

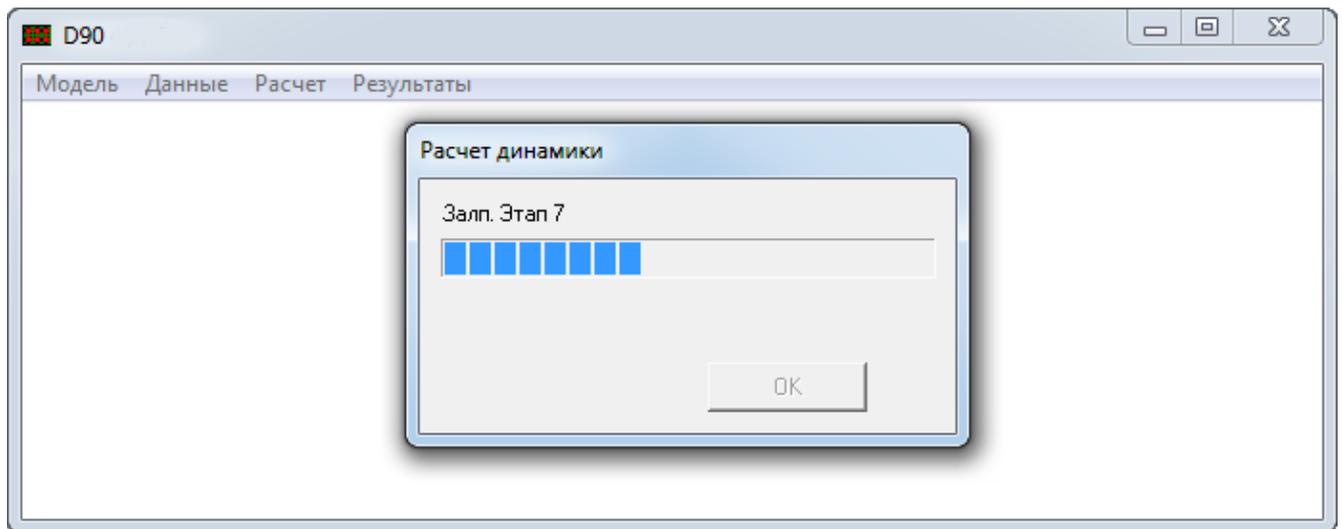


Рис. В.1. Внешний вид программы D90

Строка заголовка содержит название программы, имя модели и имя файла с вариантом расчёта. Под строкой заголовка расположена строка меню, в которой содержатся четыре основные группы: МОДЕЛЬ, ДАННЫЕ, РАСЧЁТ, РЕЗУЛЬТАТЫ. Каждому пункту меню соответствует свой набор команд.

МОДЕЛЬ:

- Открыть (окно выбора файла с описанием модели. При выборе модели проверяется наличие соответствующей динамической библиотеки с расчётным модулем и осуществляется её загрузка).
- Сохранить (описание текущей модели. Команда доступна, если модель была модифицирована).
- Выход (из программы).

ДААННЫЕ:

- Параметры (вызов диалогового окна «Параметры» со списком входных параметров).
- Импорт (вызов окна выбора файла с описанием модели и копирует значения параметров из выбранной модели в текущую модель при совпадении имён параметров).

РАСЧЁТ:

- Статика К (запуск расчёта этапа стабилизации изделия на колесах).
- Статика Д (запуск расчёта этапа установки изделия на домкратах).
- Наведение (запуск расчёта этапа определения статического равновесия и стабилизации параметров гидроприводов после наведения КЧ и ВЧ).
- Динамика (запуск полного расчёт).

РЕЗУЛЬТАТЫ:

- Переменные (вызов диалогового окна «Переменные» со списком выходных параметров).
- Статика (вызов диалогового окна «Результаты статики» для просмотра результатов статики).
- Временные графики (вызов диалогового окна «Создание временных графиков» для построения графиков выходных параметров).
- Таблицы (вызов диалогового окна «Создание таблицы» для формирования обобщённых таблиц с результатами расчётов динамики).

В ряде случаев при выборе пункта меню открывается специальное диалоговое окно для редактирования данных или для указания более подробной информации перед выполнением команды. Опишем эти диалоговые окна.

Диалоговое окно «Параметры» (рис. В.2) предназначено для задания входных параметров конкретного изделия. Окно содержит таблицу параметров, в которой отображается имя параметра, его тип и размерность, значение и описание параметра.

Для редактирования выбранного параметра нужно дважды щёлкнуть «мы-

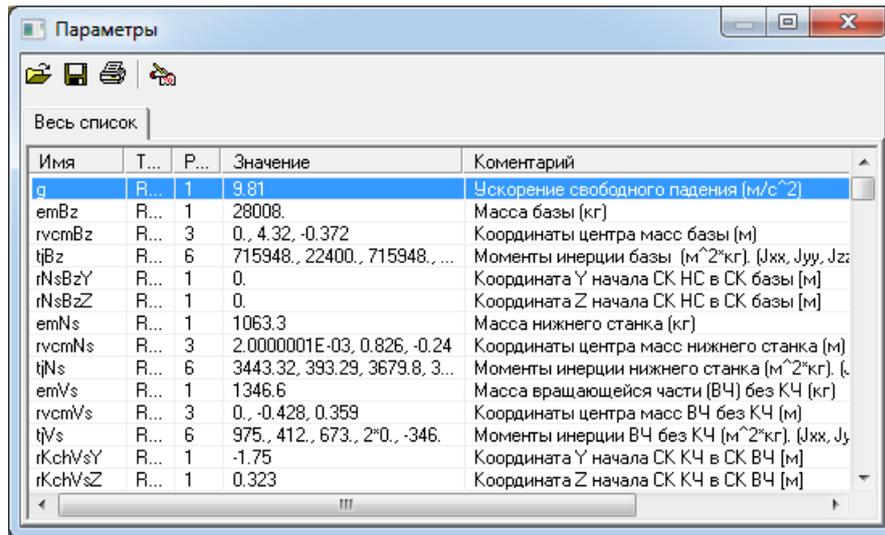


Рис. В.2. Диалоговое окно «Параметры»

щью» по выбранному параметру. В результате откроется окно редактирования входного параметра (рис. В.3), в котором можно изменить поля «Значение» и «Комментарий». Если параметр имеет размерность, большую чем один, то значения вводятся через запятую.

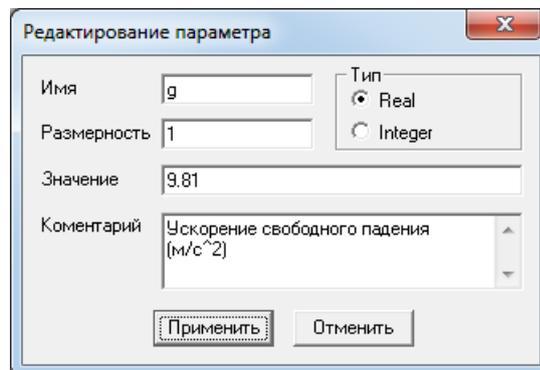


Рис. В.3. Диалоговое окно «Редактирование параметра»

Кроме того, диалоговое окно «Параметры» позволяет вывести в текстовый файл имена входных параметров, их значения и описание.

Диалоговое окно «Переменные» (рис. В.4) предназначено для просмотра и редактирования имён выходных параметров. Окно содержит таблицу выходных параметров, в которой отображается имя параметра и его описание.

Для редактирования выбранного параметра нужно дважды щёлкнуть «мышью» по выбранному параметру. В результате откроется окно редактирования выходного параметра (рис. В.5), в котором можно изменить поля «Имя» и «Ком-

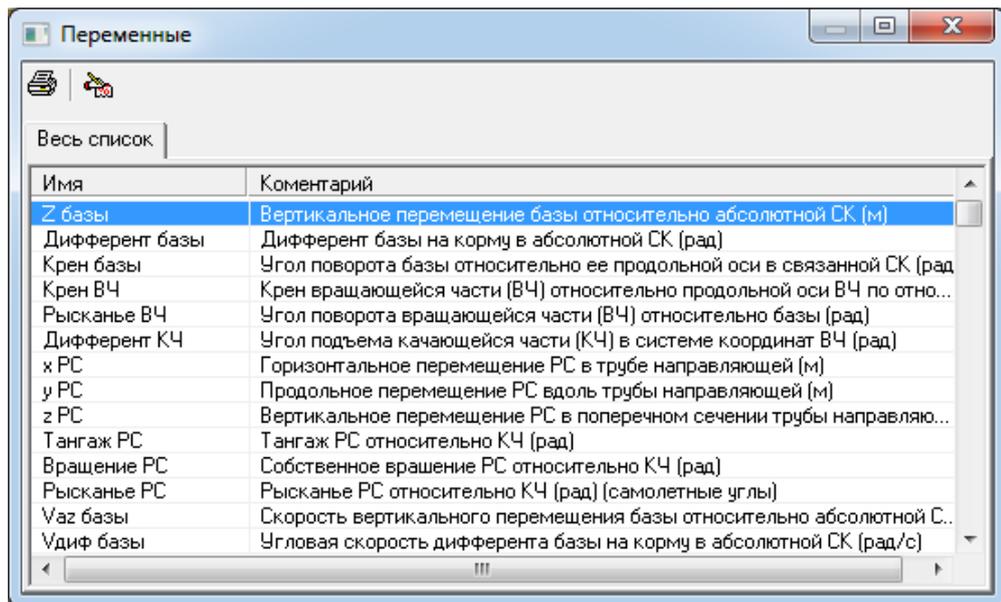


Рис. В.4. Диалоговое окно «Переменные»

ментарий». Кроме того, диалоговое окно «Переменные» позволяет вывести в текстовый файл имена выходных параметров и их описание.

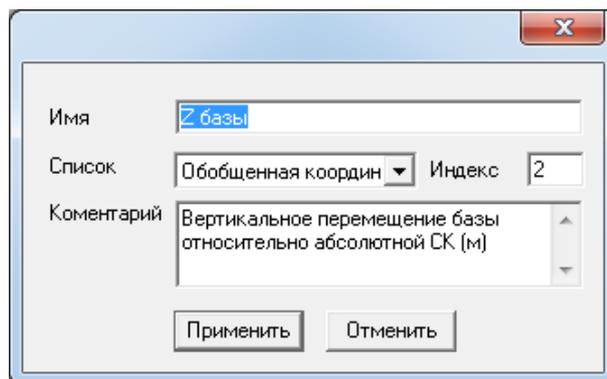


Рис. В.5. Диалоговое окно «Редактирование переменной»

Диалоговое окно «Формирование списка вывода» (рис. В.6) предназначено для задания списка вывода и сортировки его элементов. Окно содержит два списка: а) список всех доступных выходных переменных; б) список вывода.

Выбор элементов списка осуществляется при помощи клавиш перемещения курсора или щелчком «мыши» по выбранному элементу. При этом выбранный элемент отмечается инверсионной полосой. Для осуществления множественного выбора используются клавиши Ctrl и Shift.

По команде «Добавить» выбранные элементы из общего списка добавля-

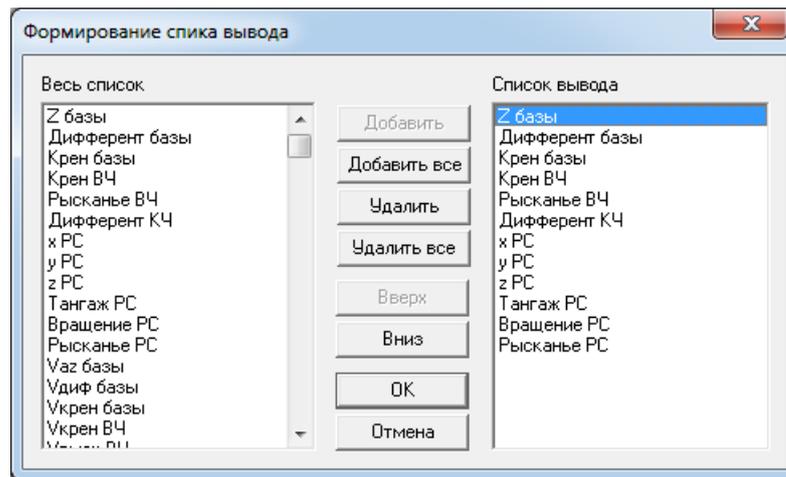


Рис. В.6. Диалоговое окно «Формирование списка вывода»

ются в конец списка вывода. По команде «Добавить все» в список вывода добавляются все выходные переменные. По команде «Удалить» выбранные элементы списка вывода удаляются из него. По команде «Удалить все» очищается список вывода. Элементы списка вывода могут быть отсортированы с помощью кнопок «Вверх» и «Вниз».

Диалоговое окно «Результаты статики» (рис. В.7) предназначено для просмотра результатов определения положения статического равновесия изделия при заданных углах горизонтального и вертикального наведения. Окно содержит таблицу, в которой отображены имя переменной, найденное значение и её описание.

Имя	Значение	Комментарий
Z базы	-2.6196873E-02	Вертикальное перемещение
Дифферент базы	-1.1348944E-02	Дифферент базы на корму
Крен базы	5.5341690E-04	Угол поворота базы относи
Крен ВЧ	3.8201990E-05	Крен вращающейся части (
Рысканье ВЧ	0.7976032	Угол поворота вращающей
Дифферент КЧ	0.9673787	Угол подъема качающейся
Угол ГН КЧ	0.7853645	Угол горизонтального наве
Угол ВН КЧ	0.9597961	Угол вертикального наве

Рис. В.7. Диалоговое окно «Результаты статики»

Кнопка «Список» предназначена для вызова диалогового окна «Формирование списка вывода» (рис. В.6), в котором определяются переменные, значения которых требуется вывести. Содержание таблицы результатов статики можно сохранить в csv-файл с помощью кнопки «Печать».

Диалоговое окно «Создание временных графиков» (рис. В.8 – В.11) предназначено для построения временных графиков выбранных выходных переменных на заданном промежутке времени. Окно содержит четыре закладки.

Закладка «Данные» (рис. В.8) предназначена для задания списка выводимых переменных и выбора промежутка времени. Она содержит таблицу выводимых переменных, в которой отображены имя переменной и ее описание.

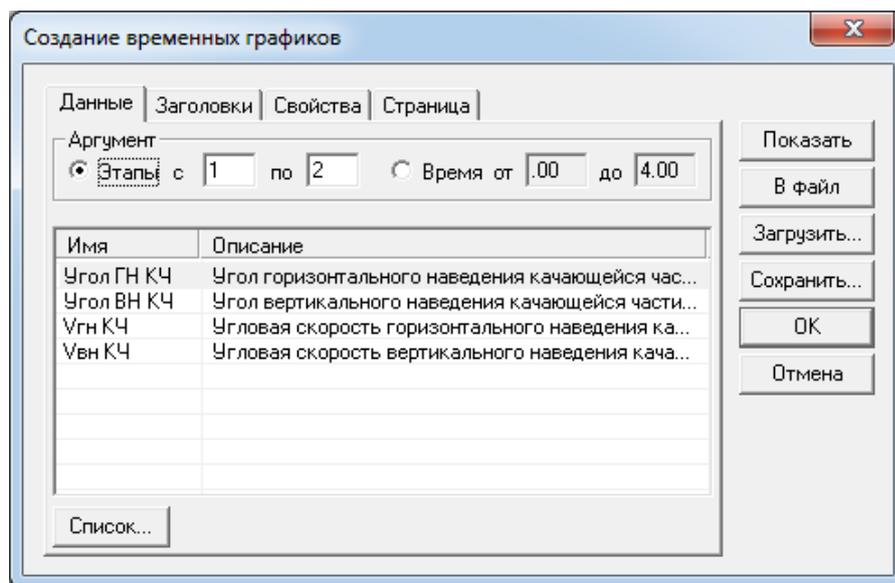


Рис. В.8. Диалоговое окно «Создание временных графиков» (закладка «Данные»)

С помощью селекторных кнопок можно выбрать один из двух возможных режимов для определения временного интервала. В режиме «Этапы» задаются номера первого и последнего выводимых этапов. В режиме «Время» — начальный и конечный момент времени.

Для изменения списка выводимых переменных необходимо нажать кнопку «Список». В результате откроется диалоговое окно «Формирование списка вывода» (рис. В.6), в котором определяются переменные, графики которых тре-

буется построить.

Закладка «Заголовки» (рис. В.9) предназначена для задания шрифта текстовых меток, имени окна с графиками, общего заголовка страницы с графиками и подписи временной оси.

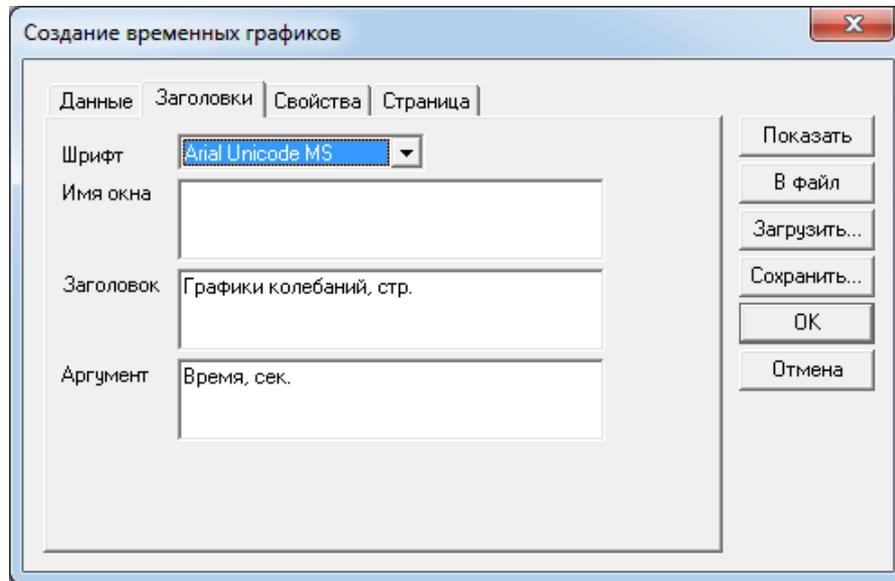


Рис. В.9. Диалоговое окно «Создание временных графиков» (закладка «Заголовки»)

Закладка «Свойства» (рис. В.10) предназначена для задания внешнего вида графиков и определения дополнительной информации, которая должна быть выведена вместе с графиками выбранных переменных.

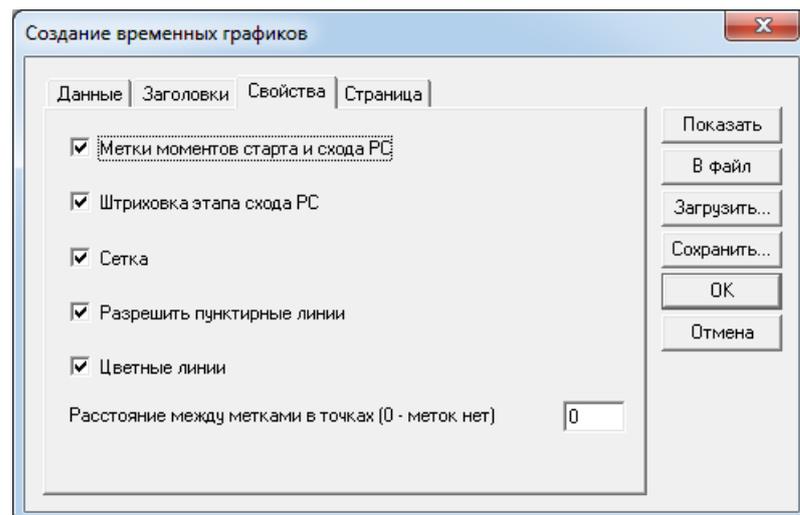


Рис. В.10. Диалоговое окно «Создание временных графиков» (закладка «Свойства»)

Закладка «Страница» (рис. В.11) предназначена для определения формы представления графиков на странице.

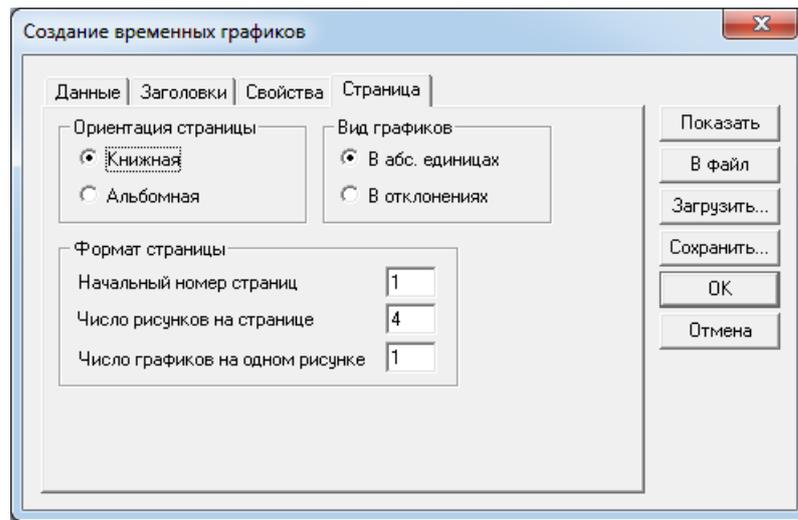


Рис. В.11. Диалоговое окно «Создание временных графиков» (закладка «Страница»)

Элементы управления закладкой позволяют определить ориентацию страницы, вид графиков (в абсолютных единицах или в отклонениях от начального значения), задать количество рисунков на странице и количество графиков на одном рисунке.

По командам «Показать» и «В файл» запускается пакет Gnuplot и его средствами строятся графики выбранных переменных. В первом случае графики выводятся на экран, во втором случае создаётся pdf-файл с графиками.

По команде «Сохранить» список вывода и параметры построения графиков можно сохранить во внешний файл (с расширением “.grf”). При этом открывается диалоговое окно выбора файла. Ранее сохранённые данные загружаются по команде «Загрузить».

Диалоговое окно «Создание таблицы» (рис. В.12) предназначено для просмотра значений выходных параметров в моменты старта и схода РС, а также максимальных отклонений этих параметров от начальных значений. Окно содержит таблицу, в которой отображены имя и описание переменной.

Кнопка «Список» предназначена для вызова диалогового окна «Формирование списка вывода» (рис. В.6), в котором определяются переменные, значения которых требуются вывести.

При нажатии кнопок «На старте», «На сходе», «Макс. откл.» на экран

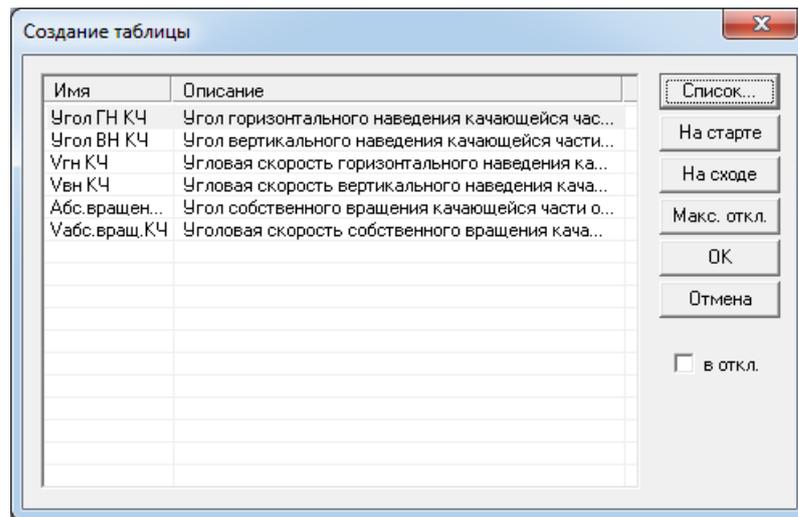


Рис. В.12. Диалоговое окно «Создание таблицы»

выводится таблица со значениями выбранных переменных в начале каждого этапа, в момент схода РС на каждом этапе, максимального отклонения от начального значения на каждом этапе соответственно. Кроме того, выводится их средние значения и среднеквадратичные отклонения. Таблицы можно сохранить в текстовый csv-файл. Выключатель «в откл.» задаёт режим отображения результатов в отклонениях от начального значения.