

На правах рукописи

БЕЛЯЕВА ЗОЯ ВЛАДИМИРОВНА

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Пермь – 2015

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», г.Екатеринбург

Научный руководитель: Митюшов Евгений Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Кашеварова Галина Геннадьевна,
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой
строительных конструкций и вычислительной механики
Пермского национального исследовательского
политехнического университета

Емельянов Игорь Георгиевич,
доктор технических наук, профессор, главный научный
сотрудник лаборатории конструкционного
материаловедения Института машиноведения
Уральского отделения Российской академии наук

Ведущая организация: Открытое акционерное общество «Уральский научно-
исследовательский институт архитектуры и
строительства», г. Екатеринбург

Защита диссертации состоится 16 июня 2015 г. в 14-00 на заседании диссертационного совета Д 212.188.08 при ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» по адресу: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, ауд. .

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет» и на сайте <http://www.pstu.ru/>.

Автореферат разослан «25» апреля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент

А.И. Швейкин

Актуальность темы

В различных отраслях техники и строительства широкое применение находят аналитические поверхности. Традиционно используется довольно ограниченный круг поверхностей: сферические, цилиндрические, конические, пологие оболочки переноса и некоторые поверхности вращения, но современная архитектура тяготеет к необычным, оригинальным формам, происходит усложнение используемых геометрических форм, появляется необходимость в новых методах моделирования поверхностей, которые могут быть использованы в качестве основы в архитектурно-строительных задачах при проектировании пространственных конструкций. Решение вопросов конструирования поверхностей является одной из основных задач инженерной геометрии. Задачи геометрического моделирования и их приложения в различных областях рассматриваются в работах Н.Н. Голованова, А.Ш. Готмана, А.В. Замятина, В.Н. Иванова, С.Н. Кривошапко, А.В. Крутова, В.А. Лебедева, И.Н. Мишанина, О.В. Мысковой, Е.А. Никулина, Е.В. Попова, В.Г. Рекача, А.Г. Трущева, А.Л. Хейфеца и др.

С усложнением применяемых геометрических форм возникают нетривиальные задачи стыковки или сочленения элементов конструкции с другими конструкциями, привязки этой конструкции к основанию, раскроя элементов конструкций. Существующие программные комплексы позволяют создавать модели и выполнять расчеты конструкций практически любой формы, но при этом встроенные функции комплексов ориентированы, в основном, на использование простейших геометрических форм, что затрудняет решение задач геометрического моделирования при проектировании конструкций. Также в силу сложившейся практики использования разных программных комплексов на разных стадиях наблюдается разрыв между методами и моделями, используемыми в архитектурном моделировании, при проектировании и при изготовлении пространственных конструкций, из-за чего геометрическая форма итоговой конструкции может существенно отличаться от изначально задуманной.

Поэтому актуальным является решение задачи геометрического моделирования поверхностей в общей трехмерной постановке, позволяющей

исследовать особенности применения поверхностей с конструктивной параметризацией для моделирования тонкостенных конструкций в строительной и машиностроительной практике и более полно использовать современные технологии.

Цель работы

Разработка математических векторно-матричных моделей поверхностей, алгоритмов трансформации и развертки поверхностей для решения практических задач конструирования, проектирования и изготовления пространственных конструкций с применением компьютерной геометрии.

Задачи работы

– построение для куполов и сводов на круглом и прямоугольном основании математических моделей поверхностей и определение взаимосвязи параметров математических моделей с конструктивными параметрами покрытия;

– разработка векторно-матричных алгоритмов, реализующих кинематический метод геометрического моделирования при формообразовании тонкостенных и стержневых пространственных конструкций с использованием линейчатых поверхностей;

– разработка алгоритмов трансформации поверхностей с применением линейных и нелинейных преобразований при построении математических моделей поверхностей;

– разработка алгоритмов развертки элементов поверхностей с использованием аналитических методов;

– программная реализация полученных алгоритмов моделирования и раскрытия элементов поверхностей при изготовлении мобильных тентовых конструкций.

Научная новизна

– предложена новая разновидность поверхностей – регулярные коноиды и регулярные цилиндroidы, для которых точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно;

– получен чередующийся сплайн первого порядка гладкости, преимуществом которого является возможность его задания только координатами узловых точек с возможностью его аналитического продолжения, показана возможность применения таких сплайнов для задания образующих сложных поверхностей в задачах моделирования элементов пространственных конструкций;

– предложены алгоритмы моделирования элементов разворачивающихся поверхностей методом центрального и параллельного проецирования;

– предложены алгоритмы аналитического построения кривых (линий кроя) на плоскости развертки для раскроя конструкций из листовых и тканевых материалов;

– на примерах тентовых шатров и куполов проиллюстрировано применение предложенных алгоритмов формообразования элементов поверхностей и построения разверток как для поверхностей, описываемых непрерывными аналитическими функциями, так и для поверхностей, выраженных кусочно-гладкими функциями, задаваемыми на каждом участке произвольными аналитическими кривыми или сплайнами.

Достоверность результатов

подтверждается реализацией на практике предложенных алгоритмов при изготовлении мобильных быстровозводимых конструкций и совпадением следующих из полученных результатов частных случаев с известными, классическими результатами.

Практическая ценность

заключается в возможности применения разработанных алгоритмов и программных комплексов для формообразования и проектирования сводов, куполов и оболочек на круглом и прямоугольном плане, для проектирования и раскроя листовых конструкций и легких тентовых конструкций из винила. Также результаты работы можно использовать при подготовке бакалавров и магистров по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Строительство».

Получен акт о внедрении метода изготовления быстровозводимых сооружений путем раскроя пространственных элементов конструкций из

рулонированных материалов в ООО «Рекламно-производственная компания «Берег».

Диссертационная работа выполнена на кафедрах «Теоретическая механика» и «Строительные конструкции» ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента Б.Н. Ельцина» в рамках госбюджетных тем №815 и №2492.

Апробация работы

Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на Всероссийских школах-конференциях молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2007-2010), 5-й Российской научно-технической конференции «Математическое моделирование и компьютерный инженерный анализ» (Екатеринбург, 2008), Международной научно-практической конференции «XXXIX Неделя науки СПбГПУ» (Санкт-Петербург, 2010).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах кафедр «Теоретическая механика» УрФУ, г. Екатеринбург (рук. д.ф.-м.н., доцент С.А. Берестова), «Строительные конструкции» УрФУ, г. Екатеринбург (рук. к.т.н., доцент В.Г. Крохалев), «Математического моделирования систем и процессов» ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н., профессор П.В. Трусов), «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Соколкин), Института механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь (рук. академик РАН В.П. Матвеевко).

Публикации

Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 15 публикациях; из них 7 статей [1-3, 5, 8, 11-12], 3 из которых опубликованы – в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК, и одна монография [15].

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 176 наименований. Работа содержит 71 рисунок, изложена на 175 страницах.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе получены векторно-матричные алгоритмы геометрического моделирования куполов, сводов и оболочек на круглых, прямоугольных и произвольных четырехугольных основаниях с

использованием поверхностей второго порядка. Особое внимание уделено возможностям представления фрагментов поверхностей, моделирующих элементы конструкции, через конструктивные параметры (высота, размеры в плане).

Получены математические модели поверхностей конического, сферического, параболического и гиперболического куполов на круглом плане без отверстий и с центральным купольным отверстием, поверхностей цилиндрических сводов на прямоугольном основании и сводов на прямоугольном основании с использованием канонических уравнений эллипсоида, сферы, параболоида, двуполостного гиперboloида.

Получены ограничивающие соотношения для задаваемых конструктивных параметров куполов и сводов, в моделях которых используются круговые и эллиптические образующие или направляющие.

Выполнено моделирование оболочек в форме гипара на произвольном четырехугольном основании с использованием параметрического уравнения гиперболического параболоида, полученного кинематическим методом.

На основе предлагаемых в первой главе методов и алгоритмов были разработаны комплексы программ для формообразования сводов и куполов на прямоугольном и круглом плане.

Во второй главе рассмотрены аналитические методы конструирования пространственных конструкций с использованием линейчатых поверхностей. Даны алгоритмы построения простейших линейчатых поверхностей, к которым относятся цилиндры и конусы с произвольными направляющими линиями. Рассмотрены способы аналитического построения поверхностей с плоскостью параллелизма – цилиндрикоидов (рис. 1) и коноидов. Введены в рассмотрение новые линейчатые поверхности – регулярные цилиндрикоиды (рис. 1) и регулярные коноиды, характеризующиеся равномерным распределением точек пересечения образующей во всех ее положениях с направляющими линиями. Уравнение регулярного коноида имеет вид

$$\vec{r} = (1 - v)\vec{r}_{12}(t) + v\vec{r}_{34}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad (1)$$

где $\vec{r}_{12}(t)$, $t_1 < t < t_2$ и $\vec{r}_{34}(u)$, $u_3 < u < u_4$ – функции, задающие направляющий отрезок и направляющую кривую регулярного коноида соответственно, при этом нормировка параметров выполняется согласно равенству

$$t = \int_{u_3}^u |d\vec{r}_{34}| / \int_{u_3}^{u_4} |d\vec{r}_{34}|.$$

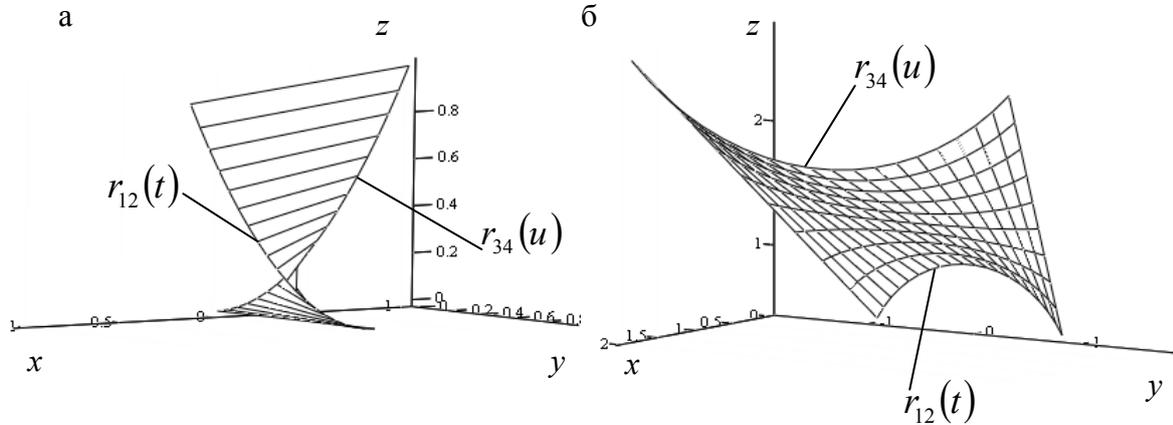


Рис. 1. Примеры линейчатых поверхностей: а – цилиндроид с направляющими в виде парабол и горизонтальной плоскостью параллелизма; б – регулярный цилиндроид с направляющими в виде дуг окружностей (размеры на рисунке указаны в м)

Уравнение регулярного цилиндроида записывается в виде

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_{12}(u(t)) + \lambda\vec{r}_{34}(v(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

где участки направляющих кривых M_1M_2 и M_3M_4 уравнениями

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2,$$

$$\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(v), \quad v_1 \leq v \leq v_2.$$

Нормировка параметров u и v для каждой кривой выполняется через единый параметр t согласно следующим равенствам

$$t = \int_{u_1}^u |d\vec{r}_{12}| / \int_{u_1}^{u_2} |d\vec{r}_{12}| \quad \text{и} \quad t = \int_{v_1}^v |d\vec{r}_{34}| / \int_{v_1}^{v_2} |d\vec{r}_{34}|. \quad (2)$$

Получено общее уравнение линейчатой поверхности

$$\vec{r} = \vec{r}_n(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{\tau}(u)]\vec{\tau}(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{n}(u)]\vec{n}(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{b}(u)]\vec{b}(u), \quad (3)$$

где $\vec{r}_h(u)$ – радиус-вектор точек направляющей кривой, $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} – единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали к направляющей кривой, определяемые соотношениями

$$\vec{\tau}(u) = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right|}, \quad \vec{n}(u) = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right|} \times \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right|}, \quad \vec{b}(u) = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right|}, \quad (4)$$

$\vec{\rho}(u, v)$ – линейная по v вектор-функция скалярных аргументов.

На основе предлагаемых во второй главе методов были разработаны комплексы программ для формообразования оболочек и стержневых конструкций с использованием линейчатых поверхностей.

В общем векторном виде описан метод центрального и параллельного проецирования для получения произвольных по форме и произвольным образом ориентированных в пространстве элементов конических и цилиндрических поверхностей. При этом элемент конической или цилиндрической поверхности задается уравнением

$$\vec{r} = v\vec{r}_h(u) + (1-v)\vec{r}_n(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad (5)$$

где $\vec{r}_h = \vec{r}_h(u)$ – уравнение направляющей кривой, $\vec{r}_n(u)$ – уравнение проекции направляющей кривой на заданную плоскость. Для цилиндрической поверхности уравнение этой линии в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}_n = \vec{r}_h(u) + \frac{(\vec{r}_c - \vec{r}_h(u)) \cdot \vec{n}}{\vec{l} \cdot \vec{n}} \vec{l}, \quad (6)$$

а для конической –

$$\vec{r}_n = \vec{r}_s + \frac{(\vec{r}_c - \vec{r}_s) \cdot \vec{n}}{(\vec{r}_h(u) - \vec{r}_s) \cdot \vec{n}} (\vec{r}_h(u) - \vec{r}_s), \quad (7)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости проецирования; \vec{r}_c радиус-вектор произвольной точки C плоскости проецирования; \vec{l} – единичный вектор образующей цилиндрической поверхности; \vec{r}_s – центр проецирования для конической поверхности.

Третья глава посвящена разработке принципов геометрического моделирования элементов поверхностей на основе применения произвольных направляющих и образующих линий формообразующих поверхностей. Продемонстрированы возможности использования в качестве направляющих линий цепных и сплайновых линий. Для целей геометрического моделирования пространственных конструкций предложен новый вид сплайна – чередующийся сплайн, состоящий из участков алгебраических кривых третьей и четвертой степени, и проиллюстрированы способы его применения. Данный чередующийся сплайн обладает гладкостью первого порядка, и его построение можно выполнять, начиная с четырех узлов. При увеличении числа узлов интерполяции происходит достраивание сплайна с сохранением вида предыдущих его участков. Перечисленные свойства чередующегося сплайна в достаточной степени удовлетворяют требованиям геометрического моделирования образующих и направляющих линий при конструировании элементов пространственных конструкций произвольных криволинейных очертаний. Примеры поверхностей, полученных с использованием чередующихся сплайнов в качестве образующих поверхностей вращения, представлены на рис. 2.

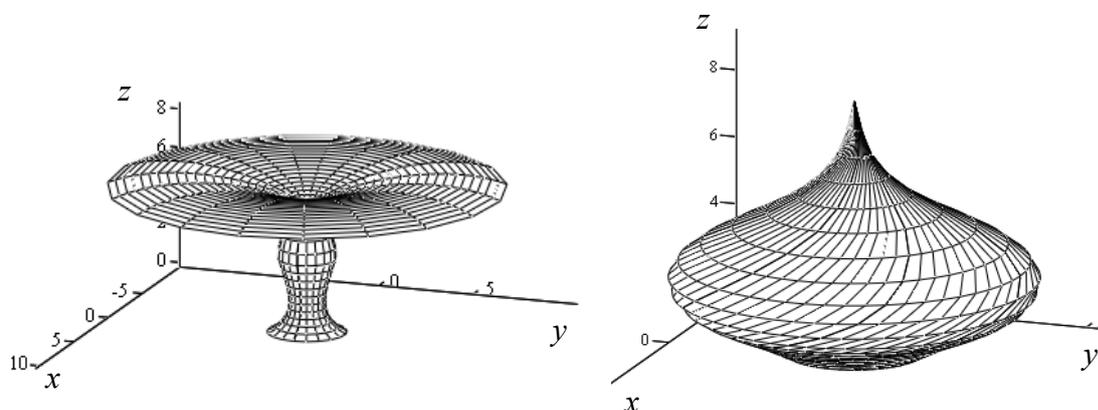


Рис. 2. Примеры поверхностей вращения с образующими в виде чередующихся сплайнов (размеры на рисунке указаны в м)

Получен кинематический метод построения каналовых поверхностей с произвольной направляющей линией и изменяющейся по заданному закону образующей линией. При кинематическом методе построения каналовых поверхностей они генерируются путем перемещения образующей. Это перемещение задается некоторой функцией параметра с физическим смыслом

времени движения. В качестве параметров при получении уравнения поверхности принят угол поворота φ и «время» t при слежении за точками поверхности в винтовом движении наблюдателя вдоль некоторой направляющей кривой $\vec{r}_H = \vec{r}_H(t)$.

В этом случае положение точек поверхности определяется соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_H(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{n}(t)) \vec{n}(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{b}(t)) \vec{b}(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{\tau}(t)) \vec{\tau}(t), \quad (8)$$

где $\vec{\tau}(t)$, $\vec{n}(t)$, $\vec{b}(t)$ – единичные векторы касательной, нормали и бинормали направляющей кривой, $\vec{\rho}(t, \varphi)$ – функция, переменная в общем случае по двум параметрам, определяющая характер изменения координатных линий $t = \text{const}$.

На нескольких примерах проиллюстрирована возможность применения каналовых поверхностей при моделировании сводов и оболочек (рис. 3).

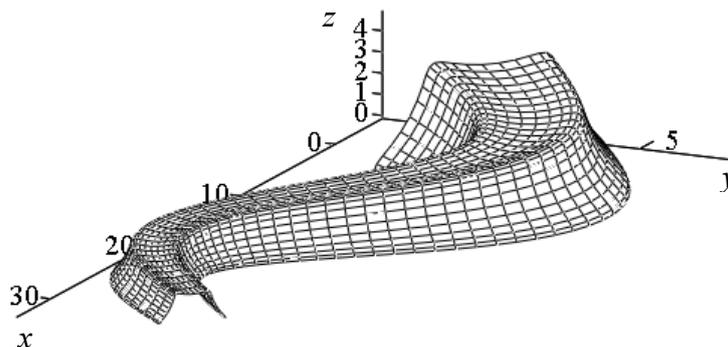


Рис. 3. Поверхность с образующей в виде удлиненной гипоциклоиды и направляющей в виде синусоиды (размеры на рисунке указаны в м)

Описаны возможности использования матричных алгоритмов для расширения форм моделируемых поверхностей за счет применения линейных и нелинейных преобразований и получения сложных сплошных и сетчатых пространственных конструкций методом композиции аналитических примитивов. На рис. 4 представлено применение нелинейных преобразований для моделирования гладких поверхностей на примере трансформации эллипсоида вращения.

Четвертая глава посвящена математическим и технологическим аспектам проектирования тентовых и листовых конструкций, моделируемых элементами развешиваемых поверхностей.

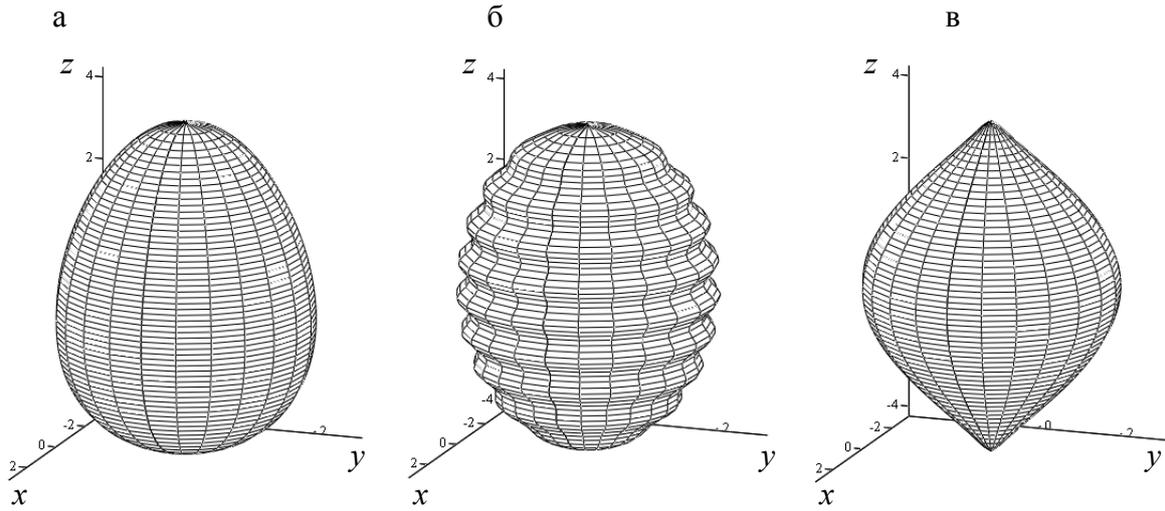


Рис. 4. Трансформации эллипсоида в результате гладких преобразований (размеры на рисунке указаны в м)

Записаны алгоритмы построения кривых на плоскости развертки (линий края), в которые трансформируются кривые, принадлежащие цилиндрическим, коническим и торсовым поверхностям.

Уравнение кривой, в которую трансформируется кривая $\vec{r}_h(u)$ при развертывании цилиндрической поверхности на декартову плоскость развертки (ξ, η) , имеет вид

$$\begin{cases} \xi = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du, \\ \eta = z(u), \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (9)$$

Уравнение развертки кривой $\vec{r}_h = \{x(u), y(u), z(u)\}$, $u_1 \leq u \leq u_2$ на конической поверхности записывается в полярных координатах

$$\begin{cases} R = |\vec{r}_h - \vec{r}_s|, \\ \psi = \int_{u_1}^u \frac{\sqrt{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{du}\right)^2 - \left((\vec{r}_h - \vec{r}_s) \cdot \frac{d\vec{r}_h}{du}\right)^2}}{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2} du, \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (10)$$

Ребро возврата $\vec{r}_h = \vec{r}_h(u)$ торсовой поверхности на плоскости развертки $O\xi\eta$, ось $O\xi$ которой направлена по касательной к ребру возврата в его

начальной точке, описывается следующим уравнением в параметрической форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_H(t)| \cos \left(\int_{u_1}^t \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^2} du \right) dt, \\ \eta = \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_H(t)| \sin \left(\int_{u_1}^t \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^2} du \right) dt, \end{array} \right. \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (11)$$

Показано применение рассмотренных алгоритмов на примере формообразования тентовых шатров и получения выкроек их элементов.

В частности, на примере моделирования купола тентового шатра (рис. 5), представляющего собой наклонную натяжную конструкцию с пятиугольным основанием, продемонстрирован способ моделирования элементов цилиндрических поверхностей методом центрального проецирования.

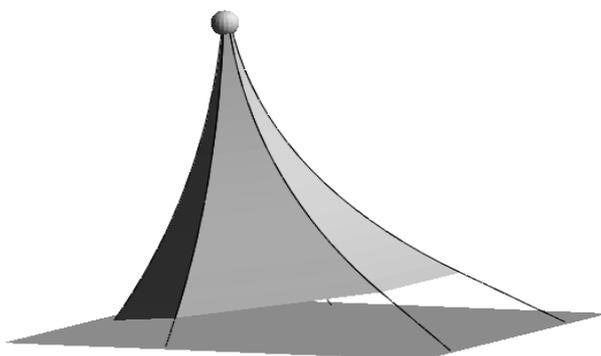


Рис. 5. Модель тентового шатра

После получения математической модели шатра найдены выкройки его формообразующих элементов (рис. 6) с помощью формулы (9), задающей уравнения линий края для произвольных цилиндрических поверхностей.

Методы моделирования элементов конических поверхностей и получения их разверток по формулам (10) продемонстрированы на примере формообразования и раскроя фигурного козырька (рис. 7).

На основе предлагаемых в четвертой главе методов и алгоритмов были разработаны комплексы программ для формообразования и построения линий края для изготовления конструкций из тканевых и листовых материалов.

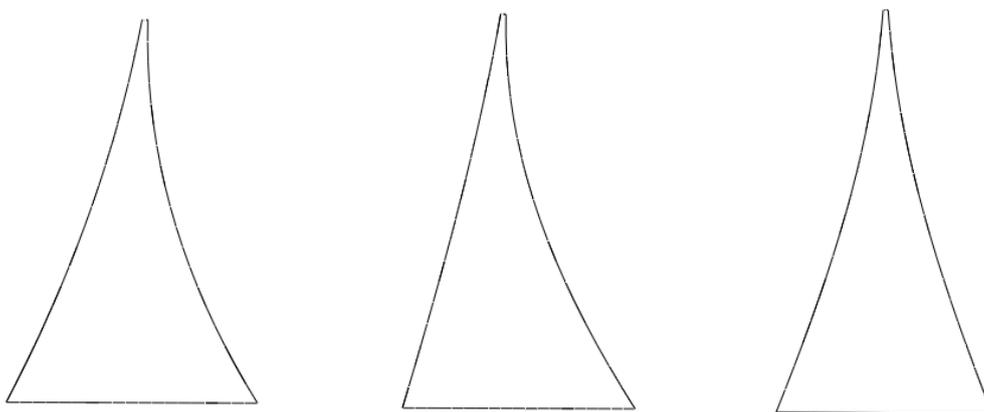


Рис. 6. Развертки формообразующих элементов тентового шатра

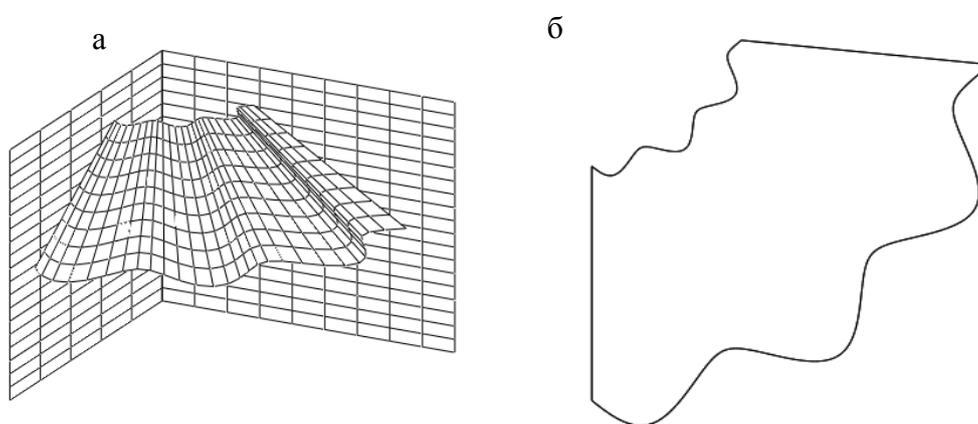


Рис. 7. Фигурный козырек: а – общий вид; б – выкройка

При выполнении диссертационной работы использовались программные комплексы AutoCAD (Serial № 252 52646554) и Mathcad (№ 00-53-45-00-00-00-00-ID-7D-CA-AC-17).

В результате проведенных исследований, в соответствии с поставленной целью и решаемыми задачами, были достигнуты следующие результаты.

Заключение

1. Получены математические модели для конструирования сводов, куполов и оболочек на круглом и прямоугольном плане, позволяющие строить часть поверхности, необходимую для решения практической задачи, и непосредственно использовать конструктивные параметры конструкции при ее моделировании.

2. Построен новый класс поверхностей, называемых регулярными коноидами и регулярными цилиндроидами, для которых точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно,

благодаря чему возможно равномерно располагать армирующие элементы или элементы опалубки при проектировании или изготовлении конструкций.

3. Проведенное исследование показало, что кинематический метод моделирования однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов с использованием операции переноса их прямолинейных образующих позволяет упростить расчеты и технические операции при изготовлении и возведении строительных конструкций на основе этих поверхностей.

4. Разработаны алгоритмы трансформации поверхностей с применением линейных преобразований для построения математических моделей пространственных конструкций.

5. С использованием аналитических методов разработан алгоритм и на его основе реализован программный комплекс по построению разверток элементов конических и цилиндрических поверхностей, ограниченных произвольными линиями.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Геометрическое моделирование пространственных конструкций // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета: научно-технический журнал. – Томск: ТГАСУ, 2010. – № 1 (26). – С. 53-63.
2. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Формообразование и раскрой линейчатых элементов пространственных конструкций // Монтажные и специальные работы в строительстве: научно-технический и производственный журнал. – М., 2011. – № 2 (826). – С. 7-10.
3. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Использование аналитических методов при формообразовании и раскрое линейчатых элементов тентовых конструкций // Промышленное и гражданское строительство. – М.: Изд-во ПГС, 2012. – №2. – С. 29-31.

Публикации в прочих изданиях

4. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование элементов строительных конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 16-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2007. – С. 11.
5. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование гипаров // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. – №10. – С. 66–69.
6. Беляева З.В., Ефремов Н.С. Определение матриц эффективных жесткостей композиционных пространственных конструкций // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: тезисы докладов 5-й Всерос. конференции. – Екатеринбург, 2008. – С. 111.

7. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование элементов поверхностей // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 17-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2008. – С. 11.
8. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование сводов и куполов // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. – №11. – С. 148–153.
9. Беяева З.В., Митюшов Е.А., Митюшова Л. Л. Проектирование натяжных конструкций // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – №12. – С. 77–83.
10. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Проектирование и раскрой тентовых конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 18-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2009. – С. 11.
11. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Определение внутренних усилий в натяжных тентовых конструкциях // Научные труды XVII международной конференции молодых ученых по приоритетным направлениям развития науки и техники: сборник статей. В 3 ч. – Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. – Ч. 3. – С. 257–261.
12. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Кинематический метод построения каналовых поверхностей // Прикладная геометрия: электронный журнал. – М.: МАИ. – Вып. 12, N 25 (2010). – С. 1-8. – http://www.mai.ru/~aprg/Volume12/v12_n25.htm
13. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Применение метода параллельного и центрального проецирования при формообразовании и раскрое линейчатых элементов пространственных конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 19-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2010. – С. 9.
14. Беяева З.В., Митюшов Е.А. Использование аналитических методов при формообразовании и раскрое линейчатых элементов пространственных строительных конструкций // XXXIX Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно-практической конференции. Ч. I. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – С. 361–362.
15. Митюшов Е.А., Беяева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций. – LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 144 с.

Подписано в печать
Формат 60 x 90/16. Набор компьютерный.
Усл. печ. л.1. Тираж 100 экз.
