

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский федеральный университет  
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

На правах рукописи

БЕЛЯЕВА ЗОЯ ВЛАДИМИРОВНА

**ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

05.13.18 Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Диссертация  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук,  
профессор Е. А. Митюшов

Екатеринбург  
2015

## СОДЕРЖАНИЕ

Содержание .....	2
Введение .....	4
1. Моделирование сводов и куполов поверхностями второго порядка с использованием конструктивных параметров .....	12
1.1. Применение поверхностей вращения при моделировании куполов на круглом плане .....	15
1.2. Использование поверхностей второго порядка при моделировании сводов и оболочек на прямоугольном плане .....	26
1.2.1. Моделирование сводов и оболочек на прямоугольном плане цилиндрическими поверхностями второго порядка .....	26
1.2.2. Моделирование сводов и оболочек на прямоугольном плане произвольными поверхностями второго порядка .....	32
1.3. Моделирование оболочек на произвольном четырехугольном плане с использованием поверхности гиперболического параболоида .....	41
Выводы по главе 1 .....	46
2. Применение линейчатых поверхностей при моделировании элементов тонкостенных пространственных конструкций .....	47
2.1. Применение векторно-матричных алгоритмов при моделировании элементов пространственных конструкций (мембран и оболочек) линейчатыми поверхностями .....	47
2.2. Применение методов центрального и параллельного проецирования при моделировании формообразующих элементов тентовых конструкций .....	71
Выводы по главе 2 .....	76
3. Применение линейных и нелинейных преобразований поверхностей, заданных произвольными образующими и направляющими линиями, для формообразования элементов пространственных конструкций .....	77

3.1. Моделирование куполов и других пространственных конструкций поверхностями вращения с произвольными образующими .....	80
3.2. Применение цепной линии при моделировании поверхностей .....	87
3.3. Применение кинематического метода при моделировании элементов пространственных конструкций каналовыми поверхностями .....	95
3.4. Моделирование пространственных конструкций путем трансформации поверхностей .....	104
3.5. Моделирование сложных сплошных и сетчатых пространственных конструкций методом композиции аналитических примитивов.....	109
Выводы по главе 3 .....	116
4. Технология проектирования тентовых и листовых конструкций, моделируемых элементами разворачивающихся поверхностей.....	117
4.1. Использование аналитических методов при раскрое линейчатых элементов тентовых конструкций в форме цилиндрической, конической и торсовой поверхностей .....	119
4.2. Описание алгоритма и программы для раскроя элементов поверхностей конструкций .....	123
4.3. Раскрой элементов поверхностей конструкций с использованием аналитических алгоритмов .....	125
Выводы по главе 4 .....	144
Заключение .....	145
Приложение 1 .....	146
Приложение 2 .....	147
Приложение 3 .....	156
Библиографический список .....	158

## ВВЕДЕНИЕ

В строительной и машиностроительной практике изначально и достаточно долго применяли простые геометрические модели (параллелепипеды, призмы, пирамиды, конусы, сферы). Развитие культуры, науки, накопление практического опыта людей привели к фантастическим достижениям в строительстве самых разнообразных зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения. Эти достижения отражаются в архитектурном облике зданий, в используемых при строительстве материалах, а также в технологии их возведения.

Со временем простых геометрических форм оказалось недостаточно для нужд архитекторов и строителей. Появилась потребность в использовании новых, более сложных математических моделей, а, следовательно, и необходимость выявления взаимосвязи между параметрами геометрической модели и параметрами проектируемого сооружения.

Тем не менее, вопросам геометрического моделирования и формообразования поверхностей уделялось незначительное внимание. В последние годы за счет развития и активного внедрения информационных технологий появились принципиально новые возможности в использовании пространственных конструкций при проектировании зданий и сооружений, машиностроительных конструкций, трубопроводов и т.д. Современные системы автоматизированного проектирования и программы конечно-элементного анализа (ArchiCAD, AutoCAD, Компас, Лира, MicroFe, ANSYS и другие) позволяют легко построить образ проектируемой конструкции на основе имеющихся примитивов, выполнить ее статический и конструктивный расчеты и разработать проектную документацию. Несмотря на очевидные достоинства современных программных комплексов, стоит отметить, что используемые в этих комплексах алгоритмы скрыты от пользователя, что затрудняет эффективное и полное применение встроенных функций, а также осложняет дополнение программного продукта собственными разработками. С

другой стороны, применение встроенных графических редакторов систем компьютерной математики – Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad позволяет по аналитическим уравнениям вида  $F(x, y, z) = 0, z = f(x, y)$  или  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  получить бесчисленное количество поверхностей, которые теоретически можно использовать для формообразования некоторой гипотетической пространственной конструкции.

Очевидно, что выбор пространственной формы конструкции продиктован ее функциональным предназначением и имеющимися материалами, и при этом не является самоцелью. Форма конструкции обязательно позволять осуществлять стыковку или сочленение с другими конструкциями или их элементами, привязку этой конструкции к плану.

Эти компоновочные задачи могут успешно решаться при помощи нового раздела прикладной математики – компьютерной геометрии, которая использует фундаментальные результаты теории матриц, математического анализа, дифференциальной геометрии, аналитической и начертательной геометрий, векторной и линейной алгебр, вычислительной математики.

#### **Актуальность темы.**

В различных отраслях техники и строительства широкое применение находят аналитические поверхности. Традиционно используется довольно ограниченный круг поверхностей: сферические, цилиндрические, конические, пологие оболочки переноса и некоторые поверхности вращения, но современная архитектура тяготеет к необычным, оригинальным формам, происходит усложнение используемых геометрических форм, появляется необходимость в новых методах моделирования поверхностей, которые могут быть использованы в качестве основы в архитектурно-строительных задачах при проектировании пространственных конструкций. Решение вопросов конструирования поверхностей является одной из основных задач инженерной геометрии. Задачи геометрического моделирования и их приложения в различных областях рассматриваются в работах Н.Н. Голованова, А.Ш.

Готмана, А.В. Замятина, В.Н. Иванова, С.Н. Кривошапко, А.В. Крутова, В.А. Лебедева, И.Н. Мишанина, О.В. Мысковой, Е.А. Никулина, Е.В. Попова, В.Г. Рекача, А.Г. Трущева, А.Л. Хейфеца и др.

С усложнением применяемых геометрических форм возникают нетривиальные задачи стыковки или сочленения элементов конструкции с другими конструкциями, привязки этой конструкции к основанию, раскроя элементов конструкций. Существующие программные комплексы позволяют создавать модели и выполнять расчеты конструкций практически любой формы, но при этом встроенные функции комплексов ориентированы, в основном, на использование простейших геометрических форм, что затрудняет решение задач геометрического моделирования при проектировании конструкций. Также за счет использования разных программных комплексов на разных стадиях наблюдается разрыв между методами и моделями, используемыми в архитектурном моделировании, при проектировании и при изготовлении пространственных конструкций, из-за чего геометрическая форма итоговой конструкции может существенно отличаться от изначально задуманной.

Поэтому актуальным является решение задачи геометрического моделирования поверхностей в общей трехмерной постановке, позволяющей исследовать особенности применения поверхностей с конструктивной параметризацией для моделирования тонкостенных конструкций в строительной и машиностроительной практике и более полно использовать современные технологии.

### **Цель работы**

Разработка математических векторно-матричных моделей поверхностей, алгоритмов трансформации и развертки поверхностей для решения практических задач формообразования, проектирования и изготовления пространственных конструкций с применением компьютерной геометрии.

### **Задачи работы**

- построение для куполов и сводов на круглом и прямоугольном плане математических моделей поверхностей и определение взаимосвязи параметров математических моделей с конструктивными параметрами покрытия;
- разработка векторно-матричных алгоритмов, реализующих кинематический метод геометрического моделирования при формообразовании тонкостенных и стержневых пространственных конструкций с использованием линейчатых поверхностей;
- разработка алгоритмов трансформации поверхностей с применением линейных и нелинейных преобразований при построении математических моделей пространственных конструкций;
- разработка алгоритмов развертки элементов поверхностей с использованием аналитических методов;
- реализация полученных алгоритмов формообразования и раскроя элементов поверхностей при изготовлении мобильных тентовых конструкций.

### **Научная новизна**

- построен новый класс поверхностей, называемых регулярными коноидами и регулярными цилиндроидами, для которых точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно, благодаря чему возможно равномерно располагать армирующие элементы или элементы опалубки при проектировании или изготовлении конструкций;
- получен чередующийся сплайн первого порядка гладкости, преимуществом которого является возможность его задания только координатами узловых точек с возможностью его аналитического

продолжения, показана возможность применения таких сплайнов для задания образующих сложных поверхностей в задачах моделирования элементов пространственных конструкций;

- предложены алгоритмы формообразования элементов развертывающихся поверхностей методом центрального и параллельного проецирования;

- предложены алгоритмы аналитического построения кривых (линий кроя) на плоскости развертки для раскроя конструкций из листовых и тканевых материалов;

- на примерах тентовых шатров и куполов проиллюстрировано применение предложенных алгоритмов формообразования элементов поверхностей и построения разверток как для поверхностей, описываемых непрерывными аналитическими функциями, так и для поверхностей, выраженных кусочно-гладкими функциями, задаваемыми на каждом участке произвольными аналитическими кривыми или сплайнами.

### **Достоверность результатов**

Достоверность результатов подтверждается возможностью визуализации результатов, полученных в программных комплексах с использованием предлагаемых математических моделей, и реализацией на практике предложенных алгоритмов при изготовлении мобильных быстровозводимых конструкций.

### **Практическая ценность**

Практическая ценность работы заключается в возможности применения разработанных алгоритмов и программных комплексов для формообразования и проектирования сводов, куполов и оболочек на круглом и прямоугольном плане, для проектирования и раскроя листовых конструкций и легких тентовых конструкций из винила, а также для подготовки бакалавров и магистров по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Строительство».



Получен акт о внедрении метода изготовления конструкций путем раскрытия пространственных элементов конструкций из рулонированных материалов.

Диссертационная работа выполнена на кафедрах «Теоретическая механика» и «Строительные конструкции» ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента Б.Н. Ельцина» в рамках госбюджетных тем №815 и №2492.

### **Апробация работы**

Основные результаты исследований, представленные в диссертационной работе, докладывались и обсуждались на Всероссийских школах-конференциях молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (Пермь, 2007-2010), 5-й Российской научно-технической конференции «Математическое моделирование и компьютерный инженерный анализ» (Екатеринбург, 2008), Международной научно-практической конференции «XXXIX Неделя науки СПбГПУ» (Санкт-Петербург, 2010).

Полностью диссертация обсуждалась на семинарах кафедр «Теоретическая механика» УрФУ, г. Екатеринбург (рук. д.ф.-м.н., доцент С.А. Берестова), «Строительные конструкции» УрФУ, г. Екатеринбург (рук. к.т.н., доцент В.Г. Крохалев), «Математического моделирования систем и процессов» ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н., профессор П.В. Трусов), «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ, г. Пермь (рук. д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Соколкин), Института механики сплошных сред, г. Пермь (рук. академик РАН В.П. Матвеевко).

### **Публикации**

Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 17 публикациях; из них 9 статей [2-3, 6, 8, 10-11, 14-16], 3 из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК, и одна монография [17]. Подана заявка на регистрацию программного

комплекса по построению разверток элементов конических и цилиндрических поверхностей, ограниченных произвольными линиями.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы, содержащего 177 наименований. Работа содержит 71 рисунок, изложена на 175 страницах.

В первой главе предложены векторно-матричные алгоритмы геометрического моделирования куполов, сводов и оболочек на круглых, прямоугольных и произвольных четырехугольных планах с использованием поверхностей второго порядка. Особое внимание уделено возможностям представления моделирующих элементы конструкции фрагментов поверхностей через конструктивные параметры (высота, размеры в плане).

Во второй главе предложены аналитические методы формообразования пространственных конструкций с использованием линейчатых поверхностей. Даны алгоритмы построения простейших линейчатых поверхностей, к которым относятся цилиндры и конусы с произвольными направляющими линиями. Рассмотрены способы аналитического построения поверхностей с плоскостью параллелизма – цилиндроидов и коноидов. Введены в рассмотрение новые линейчатые поверхности – регулярные цилиндроидов и регулярные коноидов, характеризующиеся равномерным распределением точек пересечения образующей во всех ее положениях с направляющими линиями. Получено общее уравнение линейчатой поверхности и приведены примеры его использования при моделировании некоторых элементов пространственных конструкций. В общем векторном виде аналитически реализован метод центрального и параллельного проецирования для получения произвольных по форме и произвольным образом ориентированных в пространстве конических и цилиндрических поверхностей.

Третья глава посвящена разработке принципов моделирования элементов пространственных конструкций на основе применения произвольных

направляющих и образующих линий формообразующих поверхностей. Продемонстрированы возможности использования в качестве направляющих линий, моделирующих конструкцию поверхности, цепных и сплайновых линий. Предложен для целей геометрического моделирования пространственных конструкций новый вид сплайна – чередующийся сплайн, и проиллюстрированы способы его применения. Рассмотрен кинематический метод построения каналовых поверхностей с произвольной направляющей линией и изменяющейся по заданному закону образующей линией. Показаны возможности матричных алгоритмов для расширения форм моделируемых поверхностей за счет применения линейных и нелинейных преобразований и получения сложных сплошных и сетчатых пространственных конструкций методом композиции аналитических примитивов.

Четвертая глава посвящена математическим и технологическим аспектам проектирования тентовых и листовых конструкций, моделируемых элементами развертывающихся поверхностей. Приводятся соотношения для получения линий края элементов произвольных конических, цилиндрических и торсовых поверхностей. Показано применение рассмотренных алгоритмов на примере формообразования тентовых шатров и получения выкроек их элементов.

Для визуализации многочисленных моделей пространственных конструкций, представленных в диссертационной работе и полученных методами геометрического моделирования, использовались универсальные математические системы Mathcad и Mathematica, предназначенные для символьного и численного решения математических задач.

## **1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОДОВ И КУПОЛОВ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ**

Исторически первыми пространственными строительными конструкциями видимо были примитивные жилища, которые начали сооружать первобытные люди. Некоторое представление о первобытных жилищах можно получить, изучая постройки тех народов, которые еще сохранили в своем укладе черты родового общества. Это, например, мазанки африканских племен, типи и вигвамы североамериканских индейцев, палатки бедуинов, яранги, чумы и иглы народов Севера, а также другие простейшие жилые постройки. С точки зрения архитектуры к примитивным строениям относятся также культовые мегалитические сооружения – дольмены и пирамиды. Начиная с примитивных и культовых строений, достаточно долго в строительстве применяли простые геометрические модели (параллелепипеды, призмы, пирамиды, конусы, сферы). Развитие культуры, науки, накопление практического опыта людей привели к фантастическим достижениям в строительстве самых разнообразных зданий и сооружений промышленного и гражданского назначения. Эти достижения отражаются в используемых при строительстве материалах, в архитектурном облике зданий, а также в технологии их возведения. История и основные этапы развития строительного искусства и эволюции форм пространственных конструкций рассматривается в работах [36, 62-63, 112-113, 127-128, 138, 147].

Со временем простых геометрических форм оказалось недостаточно для нужд архитекторов и строителей. Появилась потребность в использовании новых геометрических моделей, а, следовательно, и необходимость выявления взаимосвязи между параметрами геометрической модели и параметрами проектируемого сооружения. Тем не менее, вопросам геометрического моделирования и формообразования поверхностей уделялось незначительное внимание. В большинстве работ по пространственным конструкциям рассматриваются в основном вопросы расчета самих конструкций и узлов их

соединения [6, 30, 46, 47, 50, 86-87, 89, 91, 119, 130, 132-133, 139, 142-144, 146, 148, 155, 158], а проблемам геометрического моделирования уделяется существенно меньшее внимание. Формообразование поверхностей для пространственных покрытий затрагивается в работах [7, 29, 32, 39, 45, 61, 71, 74, 77, 93, 100, 101, 145, 149].

В настоящее время за счет активного использования информационных технологий появились принципиально новые возможности в расчете и конструировании зданий и сооружений. С помощью прикладных пакетов САПР можно выполнять расчет конструкций практически любой формы, моделируя конструкцию на основе имеющихся примитивов. При этом сами алгоритмы этих пакетов скрыты от пользователя, что во многих случаях не позволяет эффективно дополнять прикладные пакеты собственными разработками. Возможности формообразования поверхностей с использованием прикладных пакетов САПР можно увидеть в работах А.Л. Хейфеца [151-154], Е.В. Попова [124-125], И.С. Рыбкина [136], А.Б. Адамовича [1], В.В. Лисяка [90], В.С. Полозова [118]. В этих работах рассмотрены некоторые частные случаи формообразования поверхностей с использованием встроенных средств прикладных пакетов. Но можно более полно использовать возможности современных средств САПР, если дополнить их макросами, написанными на основе аналитических соотношений, позволяющих связать параметры геометрической модели и конструктивные параметры пространственной конструкции, выполнять стыковку или сочленение с другими конструкциями или их элементами, привязку этой конструкции к плану. Применение математических методов при построении поверхностей с помощью САПР рассматривается в книгах [37, 40, 69]

Одним из основных элементов пространственных строительных конструкций является свод. Свод может иметь самую разнообразную геометрическую форму, являясь важным средством обогащения архитектурной выразительности строительного сооружения. Многообразие форм покрытий

зданий чрезвычайно велико. Это могут быть купольные, шатровые, коньковые и прочие своды на круглом и прямоугольных планах. Источником создаваемого многообразия форм покрытий зданий и сооружений служит разнообразие описываемых математическими средствами геометрических объектов. Однако прямой перенос результатов математического описания геометрических объектов в практику проектирования строительных конструкций невозможен, поскольку математическое моделирование и проектирование строительных конструкций имеют разные цели и используют разные средства. Строгое и полное математическое описание геометрических объектов при использовании в строительной практике следует дополнить возможностями представления математических моделей основных геометрических объектов конструктивными параметрами сооружения. К этим параметрам в первую очередь следует отнести высоту и размеры в плане.

В данной главе рассматривается задача представления параметров математических моделей, используемых при создании сводов и куполов на круглом и прямоугольном плане, через заданные конструктивные параметры моделируемой конструкции. В качестве поверхностей, моделирующих рассматриваемые покрытия, используются поверхности второго порядка, представленные в векторно-матричной форме. Показана возможность визуализации результатов моделирования, позволяющая путем варьирования конструктивных параметров получать (в частности, на экране монитора с использованием соответствующих средств компьютерной графики) разнообразные по форме поверхности и выбирать из них наиболее выразительную, удовлетворяющую архитектурному замыслу или конструктивным требованиям. Предлагаемые методы моделирования поверхностей могут быть использованы при расчете сочленений и привязки к плану элементов пространственных строительных конструкций.

### 1.1. Применение поверхностей вращения при моделировании куполов на круглом плане

При моделировании куполов на круглом плане поверхностями вращения удобно воспользоваться параметрическим способом их задания. С использованием цилиндрических координат  $\varphi$  и  $\rho$  общий вид уравнения поверхности может быть представлен в виде:

$$\vec{r} = \{\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, f(\rho)\}, \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (1.1)$$

где  $f(\rho)$  – функция, которая задает образующую поверхности свода.

С учетом поставленных задач моделирования в дальнейшем будем также использовать следующие конструктивные параметры купола: для купола без отверстий –  $H$  – высота подъема купола,  $R$  – радиус основания купола; для купола с купольным отверстием (центральным кольцом) –  $H_1$  – высота купола, то есть расстояние от основания купола до отверстия,  $R_2$  – радиус основания купола и  $R_1$  – радиус отверстия (центрального кольца).

Для конического купола образующей является прямая линия. Ее уравнение с использованием конструктивных параметров можно записать в виде

$$f(\rho) = H \left( 1 - \frac{\rho}{R} \right), \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (1.2)$$

Для купола с центральным отверстием уравнение образующей записывается равенством

$$f(\rho) = \frac{H_1}{R_1 - R_2} (R_1 - \rho), \quad R_1 \leq \rho \leq R_2. \quad (1.3)$$

Подстановка функций, заданных уравнениями (1.2) и (1.3), в равенство (1.1) позволяет получить математическую модель соответствующих куполов, поверхности которых представлены на рис. 1.1.

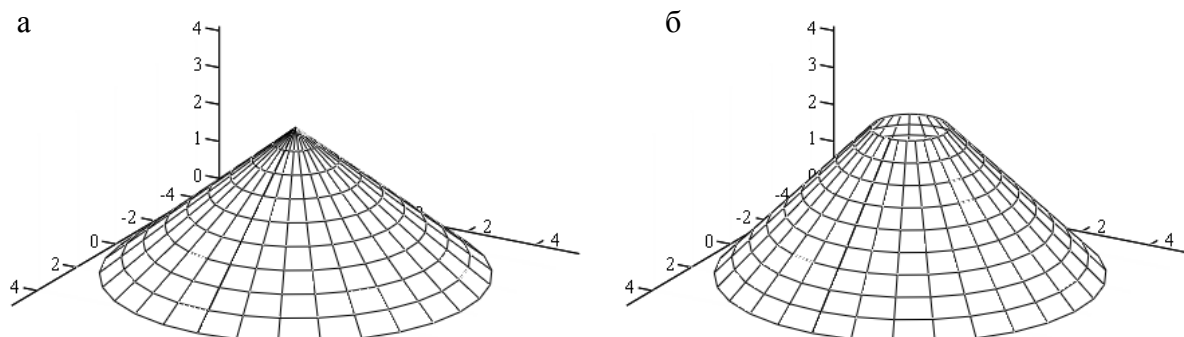


Рис. 1.1. Конический купол: а – купол без отверстия при  $R = 5$  м и  $H = 4$  м;  
б – купол с отверстием при  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 5$  м и  $H_1 = 4$  м

Для сферического купола функцию  $f(\rho)$  получим с учетом вида уравнения его образующей в системе координат  $O\rho z$ , где ось  $Oz$  вертикальна, а ось  $O\rho$  лежит в основании купола (рис. 1.2):

$$\rho^2 + (z + r - H)^2 = r^2, \quad (1.4)$$

где  $r$  – радиус окружности

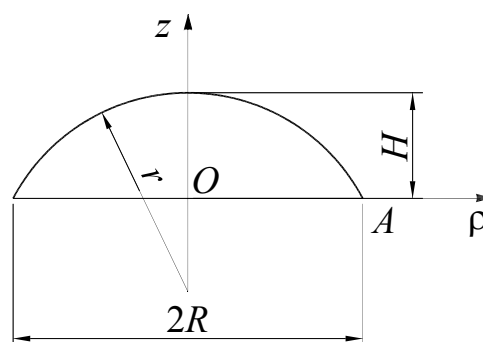


Рис. 1.2. Образующая сферического свода

Решая уравнение (1.4) относительно переменной  $z$  и принимая во внимание равенство  $z = f(\rho)$ , записываем уравнение образующей сферического купола в виде



$$f(\rho) = H - r + \sqrt{r^2 - \rho^2}, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (1.5)$$

Подстановка функции  $f(\rho)$ , заданной равенством (1.5), в уравнение (1.1) дает математическую модель сферического свода.

С использованием уравнения (1.4), подставляя в него координаты точки  $A$  –  $z = 0, \rho = R$ , лежащей в основании купола (см. рис. 1.2), можно выразить параметр математической модели  $r$  через конструктивные параметры:

$$r = \frac{H^2 + R^2}{2H}.$$

Так как предполагается, что диаметр перекрываемого куполом сооружения меньше диаметра моделирующей купол сферической поверхности, то его конструктивные параметры следует назначать таким образом, чтобы выполнялось соотношение  $r \geq H$ , чему соответствует следующая зависимость (см. прил. 2):

$$R \geq H.$$

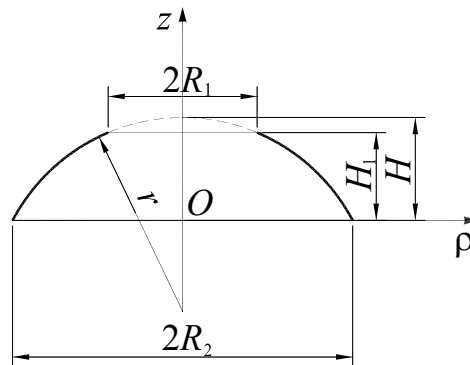


Рис. 1.3. Образующая сферического купола с отверстием

Для сферического свода с отверстием математическая модель получается путем подстановки функции  $f(\rho)$ , задаваемой равенством (1.5), в уравнение (1.1). При этом параметр  $\rho$  изменяется в пределах  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ .

Связь между конструктивными параметрами сферического купола с отверстием (см. рис. 1.3) и параметрами математической модели можно получить из решения системы уравнений, получаемых подстановкой координат  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$  точек, лежащих на образующей сферического купола, в уравнение (1.4). Соответствующая связь дается соотношениями (см. прил. 2):

$$r = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1},$$

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1}.$$

Для модели купола с отверстием конструктивные параметры следует принимать такими, чтобы, как и для купола без отверстия, выполнялось неравенство  $r \geq H$ . Этому неравенству в данном случае соответствует следующее соотношение между конструктивными параметрами (см. прил. 2):

$$R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 \leq 0.$$

На рис. 1.4 изображены поверхности сферических сводов без купольного отверстия и с отверстием

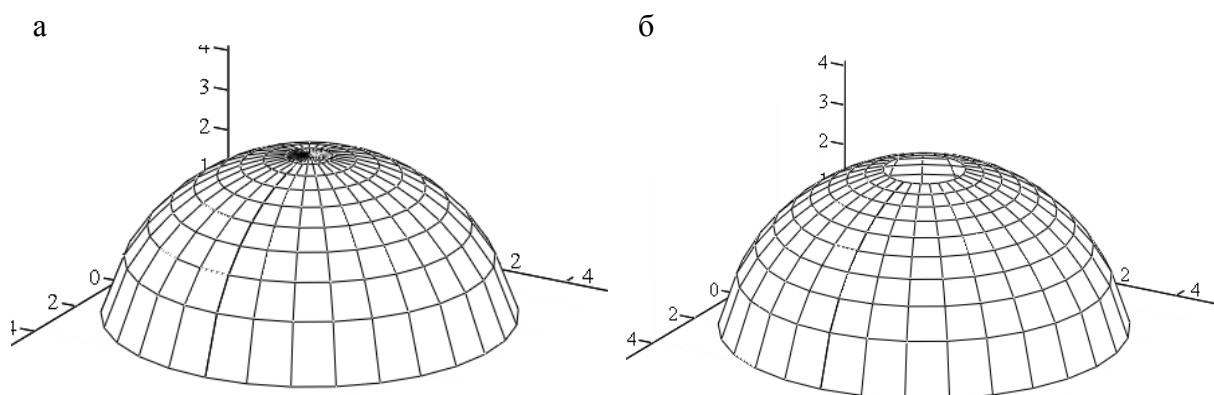


Рис. 1.4. Сферический купол: а – купол без отверстия при  $R = 5$  м и  $H = 4$  м;  
б – купол с отверстием при  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 5$  м и  $H_1 = 4$  м

Рассмотрим случай, когда в качестве математической модели купола используется параболоид вращения. В этом случае функцию  $f(\rho)$  общей математической модели купола в виде поверхности вращения получим с использованием записи уравнения параболы в системе координат  $O\rho z$ , которая вводится так же, как и при моделировании сферических сводов:

$$z = H - a\rho^2, \quad (1.6)$$

где  $a$  – параметр математической модели,  $H$  – высота купола.

Принимая во внимание равенство  $z = f(\rho)$ , переписываем уравнение (1.6) для образующей параболического купола в виде

$$f(\rho) = H - a\rho^2, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (1.7)$$

Подстановка функции  $f(\rho)$ , задаваемой равенством (1.7), в уравнение (1.1) дает математическую модель параболического купола.

Параметр математической модели  $a$  выражается через конструктивные параметры купола с помощью уравнения (1.6) путем подстановки в него координат  $z = 0, \rho = R$  точки, лежащей в основании купола:

$$a = \frac{H}{R^2}.$$

Если параболический купол имеет центральное отверстие, для моделирования также используется уравнение образующей в виде (1.7), но при этом параметр  $\rho$  принимается изменяющимся в пределах  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ .

Параметры математической модели  $a$  и  $H$  для купола с отверстием могут быть выражены через его конструктивные параметры с использованием уравнения (1.6). Для этого необходимо выполнить подстановку в уравнение образующей купола (1.6) координаты двух ее точек  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$ , решая затем полученную систему уравнений (см. прил. 2). Связь

между параметрами математической модели и конструктивными параметрами в данном случае дается равенствами:

$$a = \frac{H_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad H = \frac{H_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Математическая модель купола с отверстием, позволяющая управлять его формой за счет изменения конструктивных параметров, задается подстановкой функции  $f(\rho)$ , задаваемой равенством (1.7), в уравнение (1.1).

Купола на круглом плане, имеющие форму параболоида вращения, представлены на рис. 1.5.

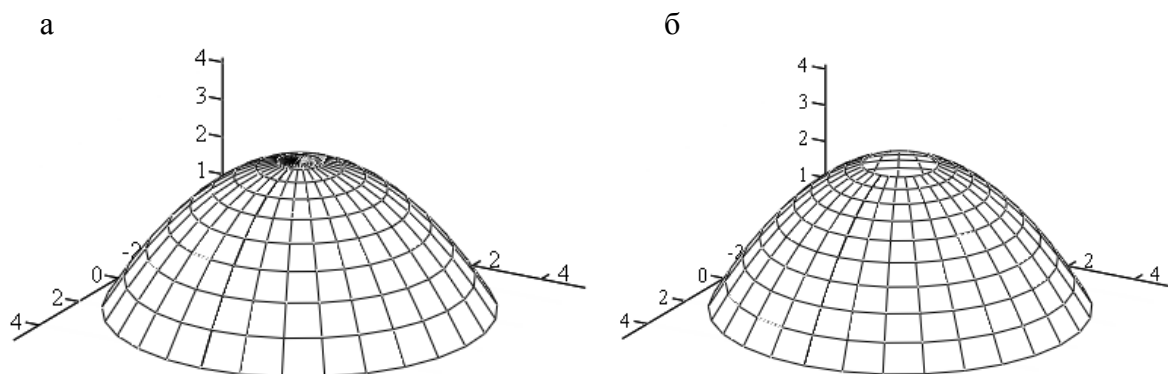


Рис. 1.5. Параболический купол: а – купол без отверстия при  $R = 5$  м и  $H = 4$  м;  
б – купол с отверстием при  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 5$  м и  $H_1 = 4$  м

В тех случаях, когда в качестве формообразующей поверхности используется эллипсоид вращения, функцию  $f(\rho)$  общей модели купола (1.1) получим с использованием следующего уравнения образующей в системе координат  $O\rho z$ :

$$\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{(z + b - H)^2}{b^2} = 1, \quad (1.8)$$

здесь, как и раньше ось,  $Oz$  вертикальна, а ось  $O\rho$  лежит в основании купола,  $a$  и  $b$  – полуоси образующей поверхности эллипса,  $H$  – высота купола.

Выражая переменную  $z$  из равенства (1.8) и принимая во внимание равенство  $z = f(\rho)$ , записываем уравнение образующей эллиптического купола в виде

$$f(\rho) = H - b + b\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{a^2}}, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (1.9)$$

Подстановка функции  $f(\rho)$ , задаваемой равенством (1.9), в уравнение (1.1) дает математическую модель эллиптического купола.

Полуоси эллиптической образующей, входящие в математическую модель купола, выражаются через его конструктивные параметры (см. прил. 2), с помощью уравнения (1.8). Подстановка в это уравнение координат  $z = 0, \rho = R$  точки, лежащей в основании купола, дает

$$a = \frac{R^2 + (Hk)^2}{2Hk}, \quad b = \frac{R^2 + (Hk)^2}{2Hk^2},$$

где  $k = a/b$ .

С учетом функциональных особенностей купольного покрытия необходимо, чтобы выполнялось очевидное соотношение  $b \geq H$ . При переходе к конструктивным параметрам модели этому неравенству соответствует следующее неравенство:  $R \geq Hk$  (см. прил. 2).

Для эллиптического купола с центральным отверстием математическая модель может быть получена подстановкой функции  $f(\rho)$ , задаваемой равенством (1.9), в уравнение (1.1), при этом значения параметра  $\rho$  изменяются в пределах  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ . Параметры математической модели  $a$  и  $b$ , а также высота  $H$ , могут быть выражены через конструктивные параметры путем подстановки координат  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$  точек купола в выражение (1.9). Из решения получаемой системы уравнений находим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2},$$

$$a = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 k^2 R_2^2}}{2H_1 k}, \quad b = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 k^2 R_2^2}}{2H_1 k^2},$$

где  $k = a/b$ .

Как и для эллиптического купола без отверстия, конструктивные параметры в данном случае должны выбираться таким образом, чтобы выполнялось соотношение  $b \geq H$  (см. прил. 2), что соответствует неравенству

$$R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2 \leq 0.$$

На рис. 1.6 изображены эллиптические купола без купольного отверстия и с отверстием.

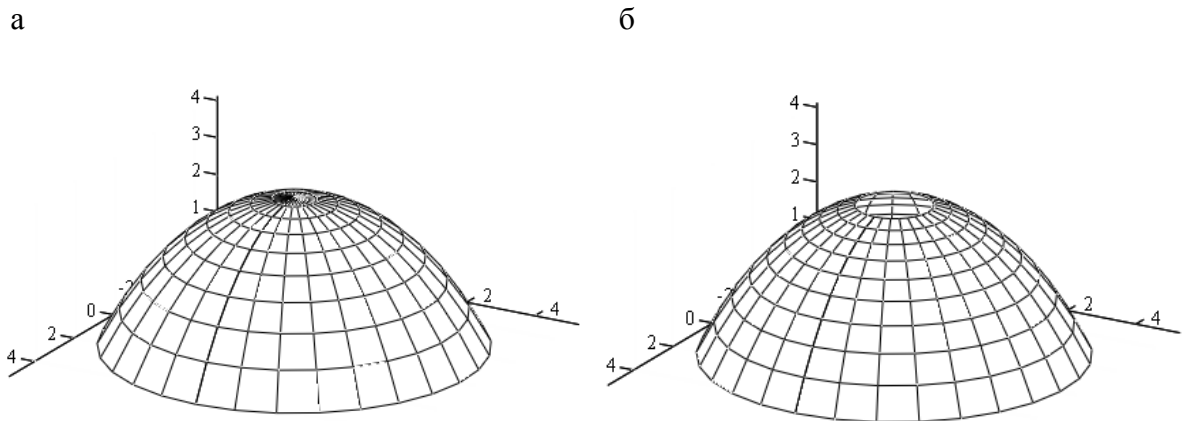


Рис. 1.6. Эллиптический купол: а – купол без отверстия при  $R = 5$ ,  $H = 4$ ,  $k = 0,67$ ;  
б – купол с отверстием при  $R_1 = 1$ ,  $R_2 = 5$ ,  $H_1 = 4$  и  $k = 0,67$

Рассмотренный метод моделирования эллиптического купола на круглом плане может легко быть обобщен на случай, когда план имеет овальную форму. В этом случае поверхность перестает быть поверхностью вращения, и для ее моделирования следует воспользоваться общим уравнением поверхности эллипсоида или применить операцию аффинного преобразования растяжения к

полученной выше поверхности вращения. Использование аффинных преобразований для трансформации поверхностей будет рассмотрено подробно в разделе 3.4.

При проектировании купола гиперболической формы для записи функции  $f(\rho)$  основной модели купола (1.1) воспользуемся каноническим уравнением гиперболы в той же, что и в предыдущих моделях, системе координат  $O\rho z$ :

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{(z - b - H)^2}{b^2} = -1, \quad (1.10)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры гиперболы.

Выражая из уравнения (1.10) переменную  $z$  и принимая во внимание равенство  $z = f(\rho)$ , находим уравнение образующей гиперболического купола в виде

$$f(\rho) = H + b - b\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{a^2}}, \quad 0 \leq \rho \leq R. \quad (1.11)$$

Подстановка функции  $f(\rho)$ , заданной равенством (1.11), в уравнение (1.1) дает математическую модель купола в форме одной чаши двуполостного гиперболоида вращения.

Как и в предыдущих случаях, параметры математической модели купола, в данном случае параметры  $a$  и  $b$  гиперболы, могут быть выражены через конструктивные параметры. Для этого необходимо выполнить подстановку координат  $z = 0$ ,  $\rho = R$  точки, лежащей в основании купола, в уравнение (1.10). В результате находим (см. прил. 1), что

$$a = \frac{R^2 - (Hk)^2}{2Hk}, \quad b = \frac{R^2 - (Hk)^2}{2Hk^2},$$

где  $k = a/b$ .

Для получения математической модели гиперболического купола с отверстием также достаточно выполнить подстановку функции  $f(\rho)$ , заданной равенством (1.11), в уравнение (1.1), при этом параметр  $\rho$  изменяется в пределах  $R_1 \leq \rho \leq R_2$ . Параметры математической модели  $a$  и  $b$ , а также высота  $H$  могут быть выражены через конструктивные параметры путем подстановки координат  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H, \rho = R_1$  точек гиперболического купола в выражение (1.10). Из решения получаемой системы уравнений (см. прил. 1) находим

$$a = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k}, \quad b = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2},$$

$$H = \frac{-R_1^2 + R_2^2 + H_1^2 k^2 - \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2}$$

На рис. 1.7 изображены гиперболические купола без купольного отверстия и с отверстием.

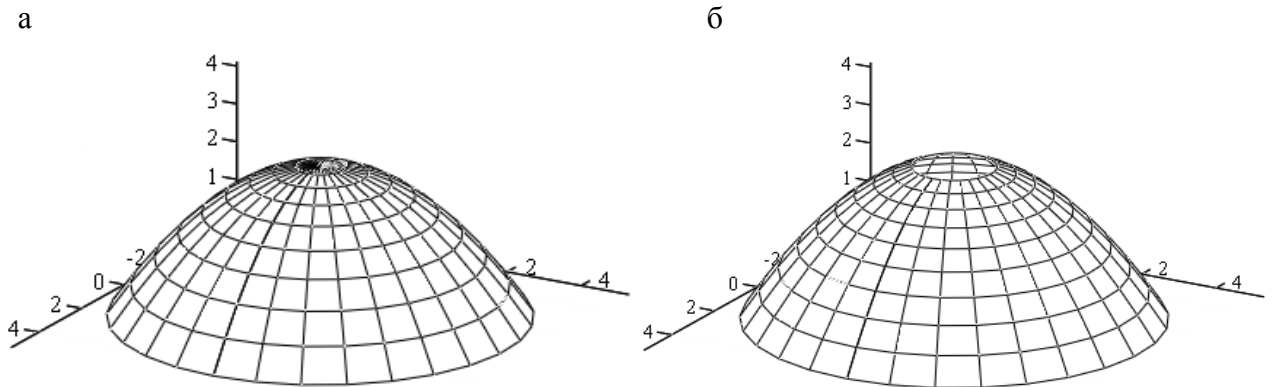


Рис. 1.7. Гиперболический купол: а – купол без отверстия при  $R = 5$  м,  $H = 4$  м,  $k = 0,25$ ;  
б – купол с отверстием при  $R_1 = 1$  м,  $R_2 = 5$  м,  $H_1 = 4$  м и  $k = 0,25$

Следует отметить, что для конического, сферического и параболического куполов при заданных высоте и радиусе основания вид поверхности однозначен. Но при проектировании эллиптического и гиперболического



куполов, задавая только высоту купола и радиус его основания, однозначно определить оба параметра математической модели  $a$  и  $b$  нельзя. В этом случае при моделировании поверхности необходимо задать один из этих параметров или коэффициент  $k$ , выражающий их отношение. То есть в этих случаях при одних и тех же конструктивных параметрах купола, изменяя лишь один параметр математической модели, можно получить довольно большое количество однотипных, но разнообразных по форме поверхностей.

## **1.2. Использование поверхностей второго порядка при моделировании сводов и оболочек на прямоугольном плане**

Достаточно общей математической моделью прямоугольных в плане сводов и оболочек являются аналитические поверхности. К наиболее простым поверхностям относятся поверхности второго порядка: эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды, параболоиды, гиперболические параболоиды, конические поверхности, а также эллиптические, гиперболические и параболические цилиндры. Все эти поверхности могут служить основой для моделирования сводов на прямоугольном плане. Рассмотрим некоторые принципы геометрического моделирования таких сводов.

### **1.2.1. Моделирование сводов и оболочек на прямоугольном плане цилиндрическими поверхностями второго порядка**

Рассмотрение принципов моделирования сводов начнем на примере использования цилиндрических поверхностей второго порядка. В общем случае цилиндрическая поверхность получается поступательным движением прямой линии в пространстве [92]. Если связанная с этой прямой линией точка описывает некоторую кривую второго порядка (эллипс, парабола, гипербола), лежащую в плоскости, перпендикулярной этой линии, то получаемая цилиндрическая поверхность является цилиндрической поверхностью второго порядка.

Применение произвольных цилиндрических поверхностей будет рассмотрено в разделе 2.1.

Общий вид уравнения части цилиндрической поверхности, моделирующей свод, может быть записан в виде

$$\vec{r} = \{x, y, f(y)\}, \quad -\frac{l_1}{2} \leq x \leq \frac{l_1}{2}, \quad -\frac{l_2}{2} \leq y \leq \frac{l_2}{2}, \quad (1.12)$$

где  $f(y)$  – функция, задающая направляющую линию,  $f(0) = H$  – высота свода,  $l_1$  и  $l_2$  – поперечные размеры свода или оболочки в плане.

При моделировании оболочек и сводов в форме цилиндрических поверхностей второго порядка направляющие линии в частных случаях задаются теми же уравнениями, что и образующие поверхностей вращения, рассмотренных в разделе 1.1. Исключение составляет простейшая цилиндрическая поверхность, являющаяся моделью конькового свода.

Для конькового свода функция, задающая направляющую линию, может быть записана в следующем виде:

$$f(y) = H - \frac{2H}{l_2}|y|. \quad (1.13)$$

Подстановка функции (1.13) в уравнение (1.12) дает математическую модель конькового свода, который изображен на рис. 1.8

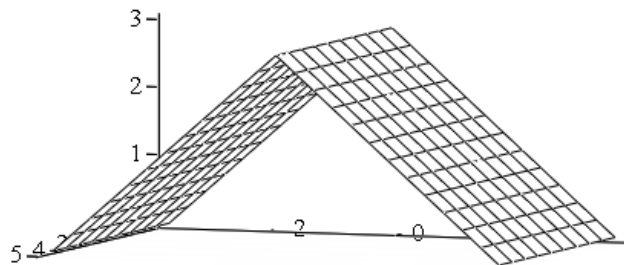


Рис. 1.8. Коньковый свод при  $H = 3$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м

Для кругового свода функция, задающая направляющую линию, имеет вид

$$f(y) = H - r + \sqrt{r^2 - y^2}. \quad (1.14)$$

Радиус  $r$  дуги окружности направляющей линии может быть выражен через конструктивные параметры свода аналогично тому, как это делалось при моделировании сферического купола, по формуле

$$r = \frac{H^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2}{2H},$$

при этом следует подбирать конструктивные параметры в соотношении  $l_2/2 \geq H$ . Пролет перекрываемого сводом сооружения должен быть меньше диаметра направляющей линии моделирующей свод цилиндрической поверхности.

Подстановка функции  $f(y)$ , задаваемой равенством (1.14), в уравнение (1.12) дает математическую модель кругового свода, который представлен на рис. 1.9.

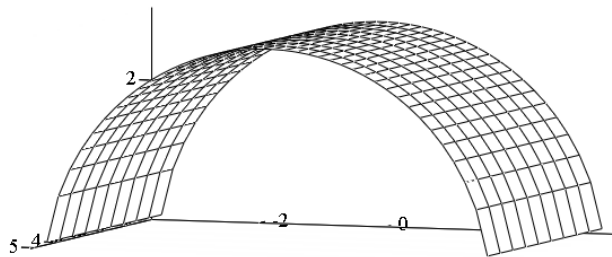


Рис. 1.9. Круговой свод при  $H = 3$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м

Для параболического свода функция, задающая направляющую линию, имеет вид

$$f(y) = H - \frac{H}{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2} y^2. \quad (1.15)$$

При подстановке функции  $f(y)$ , заданной равенством (1.15), в уравнение (1.12) получаем математическую модель параболического свода, вид которого представлен на рис. 1.10.

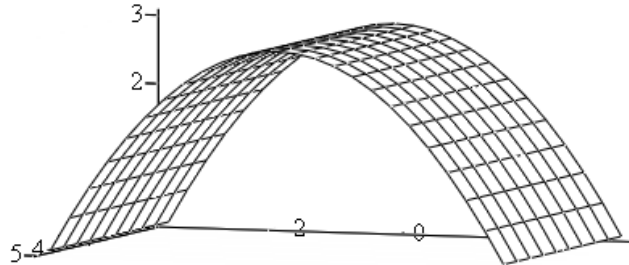


Рис. 1.10. Параболический свод при  $H = 3$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м

Для эллиптического свода функция, задающая направляющую линию, имеет вид

$$f(y) = H - b + b \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}, \quad (1.16)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры математической модели (полуоси эллипса), которые могут быть выражены через конструктивные параметры свода аналогично тому, как это было сделано в разделе 1.1. Эти выражения имеют вид

$$b = \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + (Hk)^2}{2Hk^2}, \quad a = \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + (Hk)^2}{2Hk},$$

где  $k = a/b$  – отношение полуосей эллипса.

При этом с учетом функциональных особенностей свода (поперечный пролет свода должен быть больше удвоенной вертикальной полуоси моделирующего свод эллипса) необходимо, чтобы конструктивные параметры удовлетворяли соотношению  $l_2/2 \geq Hk$ .

При подстановке функции  $f(y)$ , заданной равенством (1.16), в уравнение (1.12) получаем математическую модель эллиптического свода, который представлен на рис. 1.11.

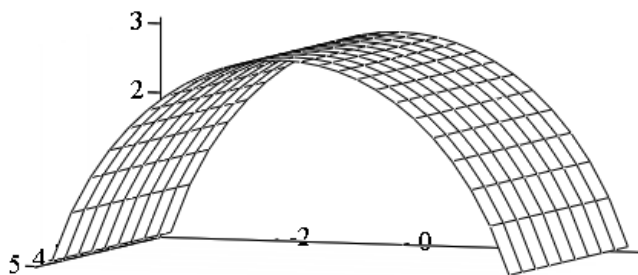


Рис. 1.11. Эллиптический свод при  $H = 3$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м,  $k = 0,75$

Для гиперболического свода функция, задающая направляющую линию, имеет вид

$$f(y) = H + b - b\sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2}}, \quad (1.17)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры математической модели (в данном случае параметры гиперболы).

Параметры  $a$  и  $b$  определяются через конструктивные параметры гиперболического свода аналогично процедуре, описанной в разделе 1.1, равенствами

$$b = \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 - (Hk)^2}{2Hk^2}, \quad a = \frac{\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 - (Hk)^2}{2Hk},$$

здесь  $k = a/b$  – отношение параметров гиперболы.

При подстановке функции  $f(y)$ , заданной равенством (1.17), в уравнение (1.12) получаем математическую модель гиперболического свода, который изображен на рис. 1.12.

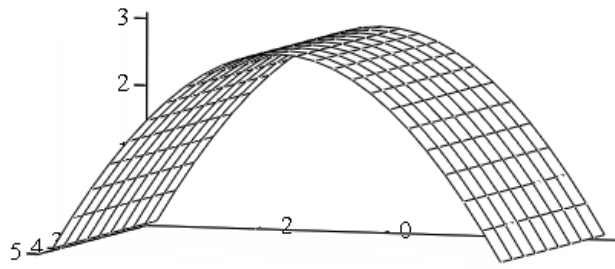


Рис. 1.12. Гиперболический свод при  $H = 3$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м,  $k = 0,75$

Для сводов, моделируемых цилиндрическими поверхностями, так же как и для куполов, рассмотренных в разделе 1.1, не всегда можно однозначно определить параметры модели через конструктивные параметры свода. В случае конькового, кругового и параболического сводов при заданных высоте и размерах в плане вид поверхности определяется однозначно. При проектировании эллиптического и гиперболического сводов необходимо задать один из параметров математической модели либо  $a$ , либо  $b$ , или коэффициент  $k$ , выражающий их отношение. То есть при одних и тех же конструктивных параметрах свода, изменяя лишь один параметр математической модели, можно получить довольно большое количество однотипных, но разнообразных по форме цилиндрических поверхностей.

### 1.2.2. Моделирование сводов и оболочек на прямоугольном плане произвольными поверхностями второго порядка

Широкое применение в строительной практике при проектировании сводов и оболочек находят выпуклые поверхности (поверхности положительной гауссовой кривизны), в частности, наиболее простой их класс – поверхности второго порядка. В общем случае математическую модель произвольных оболочек на прямоугольном плане можно задать уравнением

$$\vec{r} = \{x, y, f(x, y)\}, \quad -\frac{l_1}{2} \leq x \leq \frac{l_1}{2}, \quad -\frac{l_2}{2} \leq y \leq \frac{l_2}{2}, \quad (1.18)$$

где  $f(x, y)$  – функция, задающая поверхность свода,  $l_1$  и  $l_2$  – поперечные размеры оболочки в плане.

В случаях, когда поверхность оболочки является сферической, для ее описания удобно воспользоваться уравнением сферы [56] со смещенным по вертикали центром

$$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \quad (1.19)$$

Функцию  $f(x, y)$ , задающую поверхность сферического свода, можно получить из уравнения (1.19), принимая во внимание равенство  $z = f(x, y)$ . С учетом выбранного смещения центра сферы по вертикальной оси на расстояние  $z_0 = H - r$  имеем

$$f(x, y) = H - r + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}. \quad (1.20)$$

Подстановка функции  $f(x, y)$ , выраженной равенством (1.20), в уравнение (1.18) дает математическую модель сферической оболочки на прямоугольном плане. Радиус сферической оболочки  $r$  можно выразить через



ее конструктивные параметры (высоту и размеры в плане) с использованием уравнения (1.20). Принимая во внимание условие  $f(l_1/2, l_2/2) = 0$ , находим

$$0 = H - r + \sqrt{r^2 - \frac{l_1^2}{4} - \frac{l_2^2}{4}},$$

$$H^2 - 2Hr + r^2 = r^2 - \frac{l_1^2}{4} - \frac{l_2^2}{4},$$

откуда

$$r = \frac{4H^2 + l_1^2 + l_2^2}{8H}.$$

С учетом функциональных особенностей сводов без обратного ската конструктивные параметры сферической оболочки (см. прил. 1) должны отвечать соотношению

$$l_1^2 + l_2^2 - 4H^2 \geq 0,$$

обеспечивающему условие, что высота сферического свода должна быть не больше радиуса моделирующей его сферической поверхности.

На рис. 1.13 представлен вид сферической оболочки на прямоугольном плане.

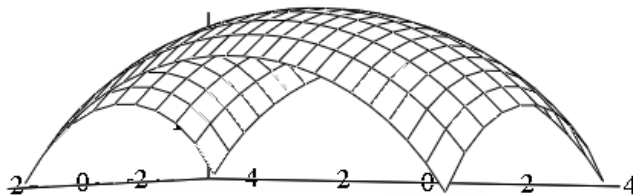


Рис. 1.13. Сферический свод при значениях параметров  $H = 3$  м,  $l_1 = 6$  м,  $l_2 = 8$  м

Предложенная модель сферического свода на прямоугольном плане позволяет определить высоты подъема свода  $h_1$  и  $h_2$  в средних точках сторон периметра основания, имеющих размеры  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Из уравнения (1.20) высоты подъема находятся с помощью равенств

$$h_1 = f\left(0, \frac{l_2}{2}\right) = H - r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_2^2}, \quad h_2 = f\left(\frac{l_1}{2}, 0\right) = H - r + \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l_1^2}.$$

При моделировании сводов на прямоугольном плане на основе эллиптического параболоида [56] удобно воспользоваться его уравнением в виде

$$z - z_0 = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad (1.21)$$

где  $a$  и  $b$  – параметры эллиптического параболоида,  $z_0$  – смещение вершины эллиптического параболоида по вертикали.

Функцию  $f(x, y)$ , задающую поверхность параболического свода, можно получить из уравнения (1.21), принимая во внимание равенство  $z = f(x, y)$ . С учетом выбранного смещения центра сферы по вертикальной оси на расстояние  $z_0 = H$  ( $H$  – как и в предыдущем случае, высота свода) имеем

$$f(x, y) = H - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (1.22)$$

Подставляя функцию, заданную равенством (1.22), в уравнение (1.18), получаем математическую модель оболочки на прямоугольном плане в виде эллиптического параболоида.

Параметры эллиптического параболоида  $a$  и  $b$  можно выразить через конструктивные параметры оболочки с использованием уравнения (1.22), подставляя в него координаты угловой точки плана и принимая во внимание

равенство  $f(l_1/2, l_2/2) = 0$  (см. прил. 1). Параметры математической модели свода  $a$  и  $b$  выражаются через конструктивные параметры равенствами

$$a^2 = \frac{l_1^2 + k^2 l_2^2}{4H}; \quad b^2 = \frac{l_1^2 + k^2 l_2^2}{4Hk^2},$$

где  $k = a/b$ .

На рис. 1.14. представлены примеры сводов на основе эллиптических параболоидов, моделируемых при одинаковых значениях параметров  $H$ ,  $l_1$  и  $l_2$ , но при разных значениях коэффициента  $k$ .

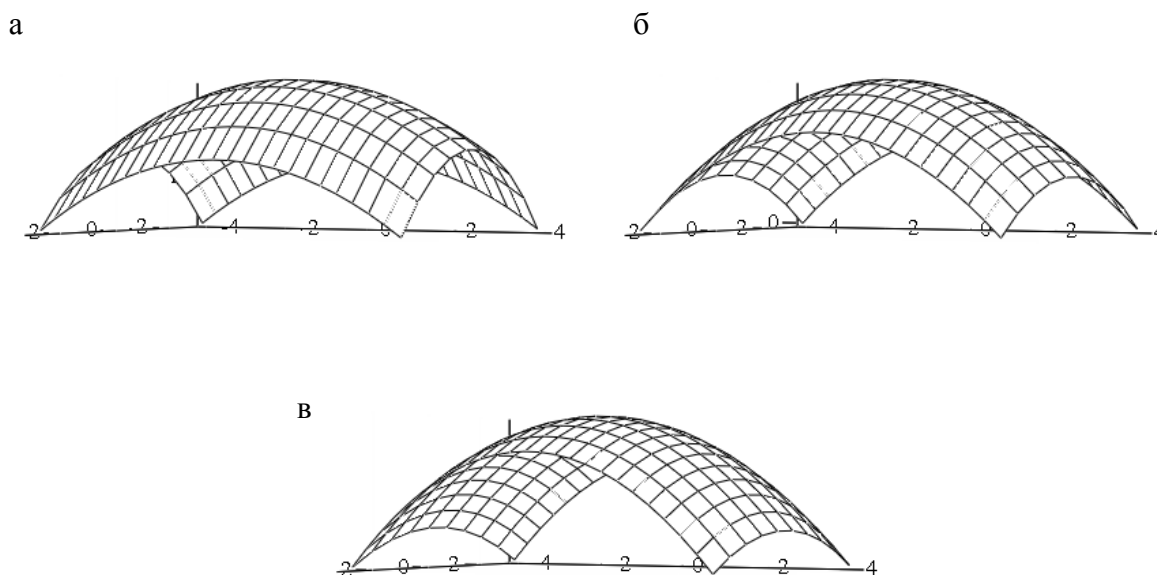


Рис. 1.14. Примеры сводов на основе эллиптических параболоидов с размерами  $H = 3$  м,  $l_1 = 6$  м,  $l_2 = 8$  м: а – при  $k = 0,7$ ; б – при  $k = 1$ ; в – при  $k = 1,5$

Для моделирования выпуклых сводов на прямоугольном плане на основе поверхности эллипсоида [56] можно воспользоваться его уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1, \quad (1.23)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – полуоси эллипсоида,  $z_0$  – смещение центра эллипсоида по вертикали.

Функцию  $f(x, y)$ , задающую поверхность эллиптической оболочки, принимая, что центр эллипсоида смещается по вертикали на расстояние  $z_0 = H - c$ , можно получить из уравнения (1.23). Учитывая равенство  $z = f(x, y)$ , находим

$$f(x, y) = H - c + c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad (1.24)$$

Математическую модель оболочки на прямоугольном плане в форме эллипсоида получаем при подстановке функции  $f(x, y)$ , выраженной равенством (1.24), в уравнение (1.18).

Параметры математической модели свода (полуоси эллипсоида  $a$ ,  $b$  и  $c$ ) можно выразить через его конструктивные параметры из уравнения (1.24), воспользовавшись условием  $f(l_1/2, l_2/2) = 0$ . Параметры математической модели свода  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражаются через конструктивные параметры равенствами

$$a = \frac{4H^2k_2^2 + l_1^2 + k_1^2l_2^2}{8Hk_2}, \quad b = \frac{4H^2k_2^2 + l_1^2 + k_1^2l_2^2}{8Hk_2k_1}, \quad c = \frac{4H^2k_2^2 + l_1^2 + k_1^2l_2^2}{8Hk_2^2},$$

где  $k_1 = a/b$  и  $k_2 = a/c$ .

При проектировании сводов без обратного ската на основе поверхности эллипсоида необходимо, чтобы высота свода  $H$  была не больше полуоси  $c$  эллипсоида. Откуда с учетом введенных конструктивных параметров и их связи с параметрами математической модели находим необходимое функциональное соотношение

$$l_1^2 + k_1^2l_2^2 - 4H^2k_2^2 \geq 0.$$

На рис. 1.15. представлены примеры сводов на основе эллипсоида, получаемых при одинаковых значениях параметров  $H$ ,  $l_1$  и  $l_2$  и при разных значениях коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

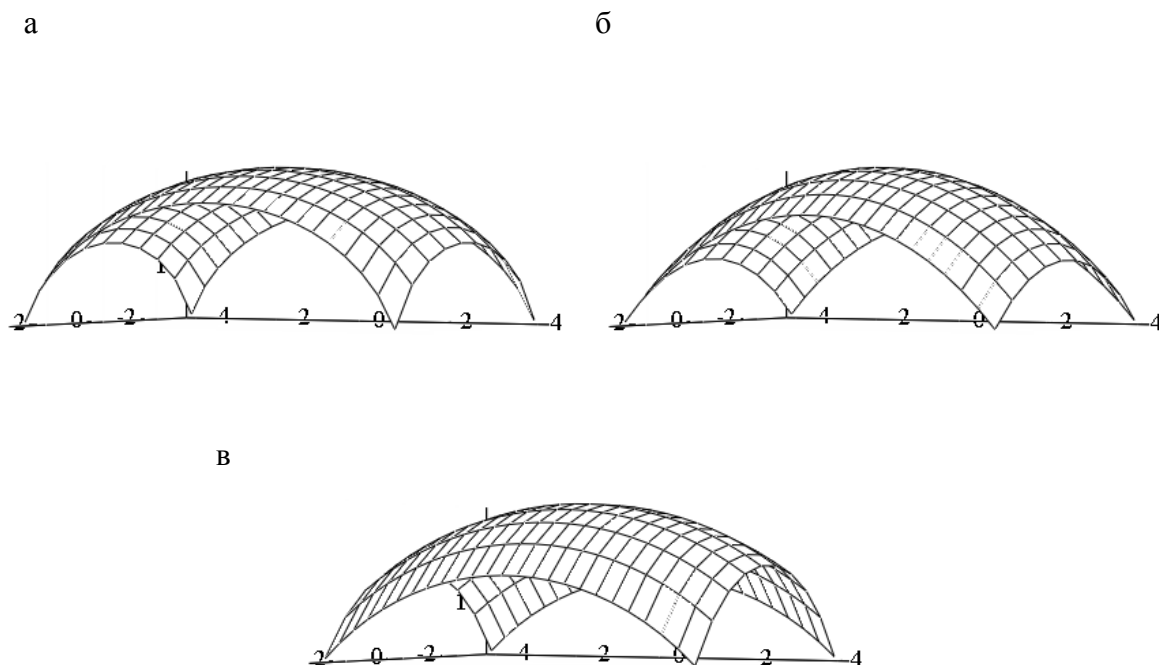


Рис. 1.15. Примеры сводов на основе эллипсоида с размерами  $H = 3$  м,  $l_1 = 6$  м,  $l_2 = 8$  м: а – при  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 1,3$ ; б – при  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0,7$ ; в – при  $k_1 = 0,7$ ,  $k_2 = 0,7$

В зависимости от отношений полуосей эллипсоида поверхность свода может принимать весьма разные очертания.

Высоты подъема свода  $h_1$  и  $h_2$  могут быть определены с помощью уравнения (1.24) равенствами

$$h_1 = f\left(0, \frac{l_2}{2}\right) = H - c + c\sqrt{1 - \frac{l_2^2}{4b^2}}, \quad h_2 = f\left(\frac{l_1}{2}, 0\right) = H - c + c\sqrt{1 - \frac{l_1^2}{4a^2}}.$$

Для моделирования сводов на прямоугольном плане на основе одной из чаш двуполостного гиперboloида [56] можно воспользоваться его уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = -1, \quad (1.25)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – параметры двуполостного гиперboloида,  $z_0$  – смещение чаши гиперboloида по вертикали.

Задавая смещение равенством  $z_0 = H + c$ , можно получить с помощью уравнения (1.25) функцию  $f(x, y)$ , описывающую поверхность гиперболической оболочки, принимая во внимание равенство  $z = f(x, y)$ :

$$f(x, y) = H + c - c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}. \quad (1.26)$$

Подстановка функции  $f(x, y)$ , заданной выражением (1.26), в уравнение (1.18) дает математическую модель оболочки на прямоугольном плане в виде чаши двуполостного гиперboloида. Пример свода представлен на рис. 1.16.

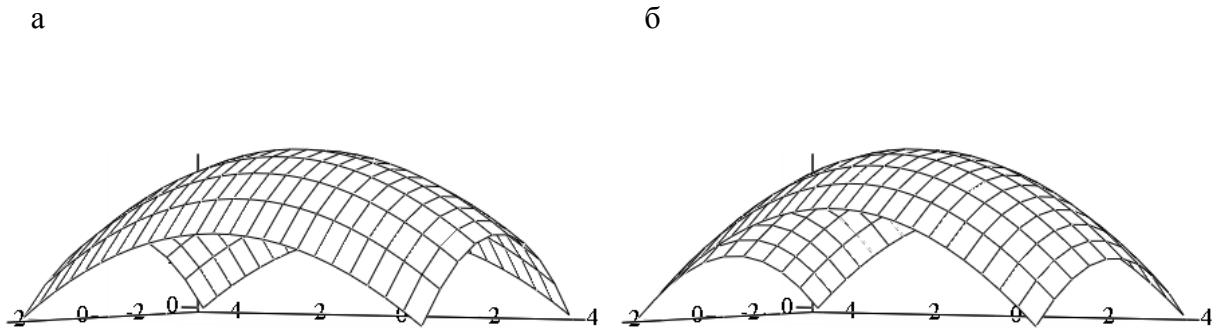


Рис. 1.16. Гиперболический свод при значениях параметров  $H = 3$  м,  $l_1 = 6$  м,  $l_2 = 8$  м: а – при  $k_1 = 0,75$  и  $k_2 = 0,25$ ; б – при  $k_1 = 1$  и  $k_2 = 0,25$

Параметры двуполостного гиперboloида  $a$ ,  $b$  и  $c$  можно выразить через конструктивные параметры оболочки с помощью уравнения (1.26), воспользовавшись условием  $f(l_1/2, l_2/2) = 0$ . Параметры математической модели свода  $a$ ,  $b$  и  $c$  выражаются через конструктивные параметры равенствами

$$a = \frac{l_1^2 + k_1^2 l_2^2 - 4H^2 k_2^2}{8Hk_2}, \quad b = \frac{l_1^2 + k_1^2 l_2^2 - 4H^2 k_2^2}{8Hk_2 k_1}, \quad c = \frac{l_1^2 + k_1^2 l_2^2 - 4H^2 k_2^2}{8Hk_2^2},$$

где  $k_1 = a/b$  и  $k_2 = a/c$ .

Высоты подъема свода  $h_1$  и  $h_2$  в средних точках сторон периметра основания могут быть определены с помощью уравнения (1.26) равенствами

$$h_1 = f\left(0, \frac{l_2}{2}\right) = H + c - \frac{c}{2}\sqrt{4 + l_2^2}, \quad h_2 = f\left(\frac{l_1}{2}, 0\right) = H + c - \frac{c}{2}\sqrt{4 + l_1^2}.$$

Для оболочек на прямоугольном плане, при описании которых используются поверхности эллипсоида, эллиптического параболоида и двуполостного гиперболоида, параметры математической модели через конструктивные параметры однозначно не определяются. Из трех параметров модели  $a$ ,  $b$  и  $c$  два необходимо предварительно задать, или можно задать их отношения коэффициентами  $k_1 = a/b$  и  $k_2 = a/c$ . При одних и тех же конструктивных параметрах свода, изменяя коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$ , можно получить довольно большое количество однотипных, плавно перетекающих одна в другую поверхностей, как показано на рис. 1.14 и 1.15.

При задании уравнения поверхности функцией  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$  ее дифференциальные свойства [4, 131] в окрестности произвольной точки определяются коэффициентами ее первой и второй квадратичных форм:

$$\begin{aligned} dr^2 &= E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2, \\ -d\vec{r} \cdot d\vec{n} &= L(u, v)du^2 + 2M(u, v)du dv + N(u, v)dv^2, \end{aligned}$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности в заданной точке

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$E(u, v) = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right)^2, \quad F(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad G(u, v) = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)^2;$$

$$L(u, v) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^2} \cdot \vec{n}, \quad M(u, v) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u \partial v} \cdot \vec{n}, \quad N(u, v) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial v^2} \cdot \vec{n}$$

(точкой обозначается операция скалярного произведения двух векторов, а крестиком – операция векторного умножения).

Поведение поверхности в окрестности рассматриваемой точки связано со знаком полной (гауссовой) кривизны  $K$  поверхности, которая определяется равенством

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

При  $K > 0$  соответствующая точка поверхности называется эллиптической, при  $K < 0$  точка поверхности называется гиперболической и при  $K = 0$  – параболической.

Все точки выпуклых поверхностей, изображенных на рис. 1.4-1.7 и рис. 1.13-1.16 являются эллиптическими. Все точки поверхностей, изображенных на рис. 1.1, 1.8-1.12, являются параболическими.

С учетом того, что для всех точек поверхности выполняется неравенство  $EG - F^2 > 0$ , знак гауссовой кривизны определяется знаком выражения  $LN - M^2$ .



### 1.3. Моделирование оболочек на произвольном четырехугольном плане с использованием поверхности гиперболического параболоида

Широкое применение в строительной практике находят элементы пространственных конструкций в форме гиперболического параболоида («гипара») в силу их уникальных архитектурных и технологических особенностей [127, 161, 165]. Поверхность гиперболического параболоида является дважды линейчатой поверхностью, то есть в каждой ее точке проходит две прямые целиком на ней лежащие. Наличие двух прямолинейных образующих предоставляет широкие возможности при решении технологических задач – формирование опалубки, если покрытие железобетонное, или изготовление непосредственно несущих элементов конструкции, если она стержневая. Выразительные возможности применения гипаров в строительстве и архитектуре связаны с тем, что эти поверхности являются поверхностями отрицательной гауссовой кривизны – каждая ее точка является гиперболической (седловидной). Коэффициенты второй квадратичной формы удовлетворяют неравенству

$$LN - M^2 < 0.$$

Образование составных конструкций с использованием гипаров позволяет создавать достаточно сложные по форме, но легкие и прочные конструкции.

Классическое представление гиперболического параболоида как поверхности второго порядка имеет следующий вид [56]:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Это уравнение может быть использовано для моделирования оболочек отрицательной гауссовой кривизны аналогично тому, как было выполнено моделирование выпуклых сводов в предыдущем разделе. Однако, для

моделирования элементов конструкций, отражающего линейчатость гиперболического параболоида, удобнее воспользоваться иной параметризацией, когда сетка координатных линий поверхности совпадает с ее линейными образующими. Для получения нужного параметрического уравнения поверхности гиперболического параболоида предварительно запишем векторные уравнения двух его линейных образующих для случая, когда параметры  $a$  и  $b$ , входящие в каноническое уравнение гиперболического параболоида, принимают значения равные единице [95]. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{l}_1 t \text{ и } \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{l}_2 t,$$

где  $\vec{r}_1 = \{0,5; 0,5; 0\}$ ,  $\vec{r}_2 = \{-0,5; -0,5; 0\}$  – радиус-векторы точек, принадлежащих образующим,  $\vec{l}_1 = \{-1; 1; -1\}$ ,  $\vec{l}_2 = \{-1; 1; 1\}$  – направляющие векторы образующих.

В матричных обозначениях соответствующие векторные величины представимы в виде

$$\hat{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \hat{r}_1 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{r}_2 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{l}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \hat{l}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение поверхности гиперболического параболоида для произвольных значений параметров  $a$ , и  $b$  можно записать в виде

$$\hat{r} = M \left[ (1 - \nu) (\hat{r}_1 + \hat{l}_1 t) + \nu (\hat{r}_2 + \hat{l}_2 t) \right],$$

где

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Изменение параметров в пределах  $-\infty \leq t \leq \infty$  и  $-\infty \leq v \leq \infty$  дает всю поверхность гиперболического параболоида. Для получения части поверхности необходимо задать конечные пределы изменения параметров, например  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ . Пример оболочки в форме гипара представлен на рис. 1.17.

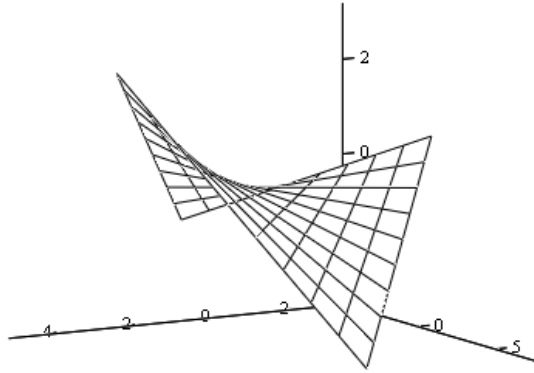


Рис. 1.17. Оболочка в форме гипара при  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ ,  $-1 \leq v \leq 1$

Для определения координат вершин элемента конструкции в форме гипара необходимо решить дополнительную задачу.

При проектировании оболочки в форме гипара на произвольном четырехугольном плане конструктивными параметрами являются координаты угловых точек плана и соответствующие им высоты. Для удовлетворения требованиям формообразования с учетом заданных конструктивных параметров удобно воспользоваться другим параметрическим уравнением гиперболического параболоида. Кинематический способ образования гипара реализуется путем движения двух образующих линий, проходящих последовательно через все точки попарно противоположных скрещивающихся отрезков, его ограничивающих [95]. Для получения фрагмента поверхности гиперболического параболоида зададим направляющие отрезки  $M_1M_2$  и  $M_3M_4$  уравнениями

$$\vec{r}^{(12)} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\vec{r}^{(34)} = \vec{r}_3 + (\vec{r}_4 - \vec{r}_3)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$  – радиусы-векторы вершин гипара  $M_1, M_2, M_3$  и  $M_4$  (см. рис. 1.18).

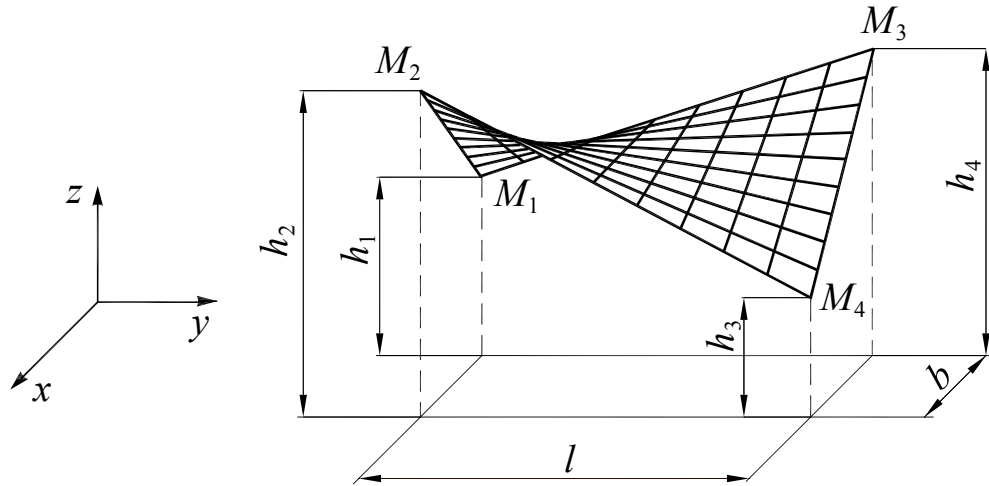


Рис. 1.18. Гипар, проходящий через 4 точки

С использованием уравнения направляющих отрезков фрагмент поверхности гиперболического параболоида записывается равенством

$$\vec{r} = (1-v)\vec{r}^{(12)}(t) + v\vec{r}^{(34)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

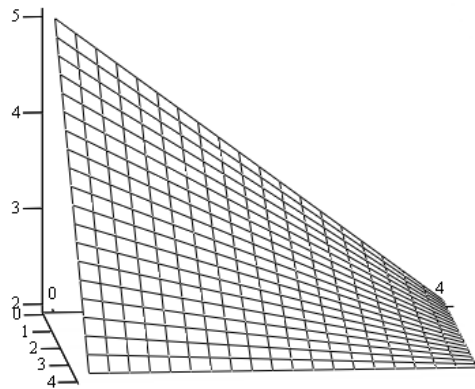
или

$$\vec{r} = (1-v)(1-t)\vec{r}_1 + (1-v)t\vec{r}_2 + v(1-t)\vec{r}_3 + vt\vec{r}_4, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (1.27)$$

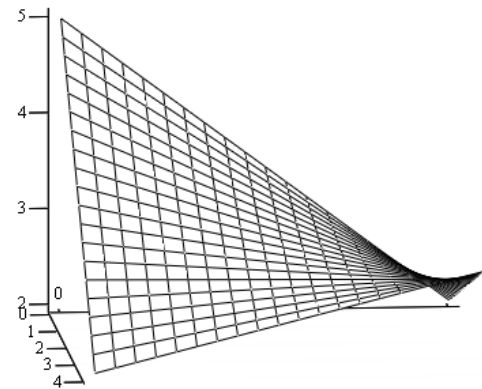
При проектировании гипара на прямоугольном плане координаты его четырех вершин выражаются через конструктивные параметры оболочки  $M_1(0; 0; h_1)$ ,  $M_2(b; 0; h_2)$ ,  $M_3(b; l; h_3)$ ,  $M_4(0; l; h_4)$ ; здесь  $b, l$  – ширина и длина оболочки в плане,  $h_1, h_2, h_3$  и  $h_4$  – высоты в крайних точках (см. рис. 1.18).

На рис. 1.19 представлены модели оболочек в форме гипаров на одинаковых по размерам прямоугольных планах, когда одна из угловых точек гипара расположена на различной высоте.

а



б



в

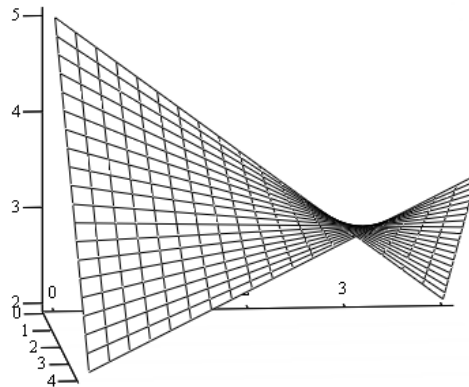


Рис. 1.19. Примеры оболочек в форме гипара на одинаковых прямоугольных планах:  
 а – с вершинами  $M_1(0; 0; 5)$ ,  $M_2(4; 0; 2)$ ,  $M_3(0; 4; 2)$ ,  $M_4(4; 4; 2)$ ;  
 б – с вершинами  $M_1(0; 0; 5)$ ,  $M_2(4; 0; 2)$ ,  $M_3(0; 4; 2)$ ,  $M_4(4; 4; 3)$ ;  
 в – с вершинами  $M_1(0; 0; 5)$ ,  $M_2(4; 0; 2)$ ,  $M_3(0; 4; 2)$ ,  $M_4(4; 4; 4)$

Применение поверхностей в виде гиперболических параболоидов было начато испанским архитектором Феликсом Канделой в первой половине XX века, который спроектировал на их основе различные промышленные и общественные здания [161]. Гипары также были использованы при решении покрытий нескольких зданий и сооружений Великобритании, большое количество покрытий в форме гиперболических параболоидов возведено в бывшем ГДР, Испании, Чехословакии и других странах [127, 142].

## **Выводы по главе 1**

1. Предложен способ задания поверхностей, позволяющий моделировать пространственные объекты, используя векторно-матричный аппарат, и создавать изображение моделируемых объектов непосредственно на экране компьютера с помощью прикладных пакетов.

2. Получены формулы, выражающие взаимосвязь между параметрами математической модели свода или купола и конструктивными параметрами самой конструкции (высота, размеры в плане) для широкого класса поверхностей.

3. Получены ограничивающие соотношения для задаваемых конструктивных параметров куполов и сводов, математическими моделями которых являются сферические и эллиптические оболочки и в моделях которых используются круговые и эллиптические образующие (направляющие).

4. Предложен кинематический метод построения элемента поверхности в форме гиперболического параболоида, проходящего через 4 заданные точки.

## **2. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

В разделе 1.2 уже отмечались конструктивные и технологические преимущества линейчатых поверхностей при проектировании покрытий на прямоугольном плане. Эти же преимущества могут быть использованы при проектировании других элементов пространственных конструкций и сооружений как стержневых, так сплошностенчатых. При этом могут быть использованы не только линейчатые поверхности второго порядка.

В частности, широкое применение в строительной практике получили мачтовые конструкции в форме однополостных гиперboloидов, которые, также как и гиперболический гиперboloид, являются дважды линейчатыми поверхностями отрицательной гауссовой кривизны.

### **2.1. Применение векторно-матричных алгоритмов при моделировании элементов пространственных конструкций (мембран и оболочек) линейчатыми поверхностями**

Каноническое уравнение поверхности однополостного гиперboloида [56, 92] имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Для моделирования элементов конструкций, отражающего линейчатость однополостного гиперboloида, удобнее, как и в случае гиперболического параболоида, воспользоваться другой параметризацией. Новая параметризация должна обеспечить совпадение сетки координатных линий поверхности с ее линейными образующими. Для получения нужного параметрического уравнения поверхности однополостного гиперboloида [95] запишем векторные

уравнения двух его линейных образующих для случая, когда параметры  $a$ ,  $b$  и  $c$ , входящие в каноническое уравнение однополостного гиперболоида, принимают значения равные единице. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{l}_1 t \text{ и } \vec{r}_2 = \vec{r}_0 + \vec{l}_2 t,$$

где  $\vec{r}_0 = \{1; 0; 0\}$  – точка, через которую проходят обе образующие,  $\vec{l}_1 = \{0; 1; 1\}$ ,  $\vec{l}_2 = \{0; -1; 1\}$  – направляющие векторы образующих  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$  и  $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$  соответственно.

С использованием матричных обозначений

$$\hat{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{l}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

уравнение поверхности гиперболоида для произвольных значений параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$  можно записать в следующем виде

$$\hat{r} = M A(\varphi) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \text{ и}$$

$$\hat{r} = M A(\varphi) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (2.1)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При моделировании сплошностенчатых конструкций с использованием однополостного гиперболоида для задания элемента формообразующей поверхности достаточно одного из этих уравнений (см. рис. 2.1). В случае проектирования стержневой конструкции (рис. 2.2), жесткость которой



определяется стержневыми элементами, соответствующими двум семействам образующих, поверхность однополостного гиперболоида задается обоими уравнениями с дискретным набором углов поворота  $\varphi$ , входящих в матрицу поворота  $A(\varphi)$ .

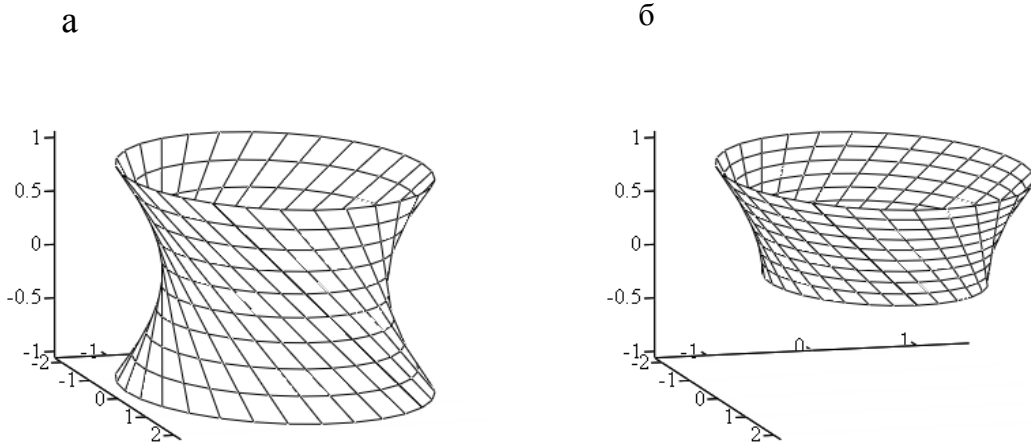


Рис. 2.1. Поверхность однополостного гиперболоида:  
 а – при значениях параметров  $a = 1,5, b = c = 1, t_1 = -1, t_2 = 1$ ;  
 б – при значениях параметров  $2a = b = c = 1, t_1 = 0, t_2 = 1$

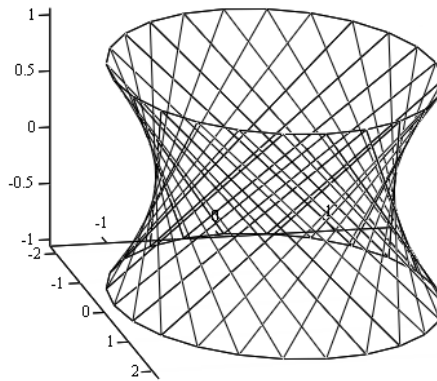


Рис. 2.2. Модель стержневой конструкции в форме однополостного гиперболоида при значениях параметров  $a = 1,5, b = c = 1, t_1 = -1, t_2 = 1$

Пусть  $H$  – высота элемента конструкции в форме однополостного гиперболоида с параметрами  $a = b = c = 1$ . Выразим параметры  $t_1$  и  $t_2$  через

конструктивный параметр  $H$ . Радиус-вектор точки  $A$  на нижней границе элемента определяется выражением

$$\vec{r}_A = \vec{r}_0 + \vec{l}_1 t_1,$$

тогда  $\vec{r}_A = \{1, t_1, t_1\}$ , а радиус-вектор одной из точек на верхней границе элемента определяется выражением

$$\vec{r}_B = \vec{r}_0 + \vec{l}_1 t_2,$$

тогда  $\vec{r}_B = \{1, t_2, t_2\}$ .

Высота элемента конструкции  $H$  определяется по формуле

$$H = |z_B - z_A| = |t_2 - t_1|.$$

При параметрах  $a$ ,  $b$  и  $c$ , отличных от 1, высота элемента конструкции  $H$  равна

$$H = c|t_2 - t_1|.$$

Если  $|t_1| = |t_2|$ , имеем поверхность, симметричную относительно плоскости, проходящей через вершины гипербол.

На основе однополостных гиперболоидов Владимиром Григорьевичем Шуховым разработана достаточно простая в изготовлении конструкция сетчатых (ажурных, как их называл сам Шухов) башен [57, 85, 94, 99]. Стержневые конструкции в виде нескольких секций, устанавливаемых одна на другую, образовывали башни, которые широко использовались в качестве водонапорных башен, маяков и даже мачт кораблей. Самой известной из сетчатых башен Шухова является радиобашня на Шаболовке, построенная в 1922 г. Идея использования однополостных гиперболоидов в качестве формообразующих поверхностей различных сооружений в последнее время

получила новый импульс и была реализована при строительстве таких объектов, как башня в порту Кобе в Японии (проект архитектурно-строительной компании NIKKEN SEKKEI) [171], телебашня Гуанчжоу (проект компании ARUP), башня Aspire Tower в Дохе (архитектор Хади Симан).

Применение линейчатых поверхностей было проиллюстрировано в разделе 1.2 на примере формообразования цилиндрических сводов на прямоугольном плане, где в качестве направляющих линий были использованы кривые второго порядка. Набором этих направляющих многообразие цилиндрических поверхностей [127], очевидно, не исчерпывается.

В общем случае цилиндрическая поверхность может быть получена следующим образом. Пусть задана произвольная пространственная направляющая линия уравнением  $\vec{r}_h = \vec{r}_h(u)$ , и задан единичный вектор  $\vec{l}$  образующей прямой. Тогда уравнение цилиндрической поверхности может быть записано векторным равенством [95]

$$\vec{r} = \vec{r}_h(u) + v\vec{l},$$

где  $u$  и  $v$  – параметры.

В качестве примера приведем уравнение и форму цилиндрической поверхности с направляющей в виде удлиненной гипоциклоиды, заданной уравнением

$$\vec{r}_h = \left\{ (b-a)\cos\varphi + a\lambda \cos\left(\frac{b-a}{a}\varphi\right); 0; (b-a)\sin\varphi - a\lambda \sin\left(\frac{b-a}{a}\varphi\right) \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

единичный вектор образующей определим равенством  $\vec{l} = \{0; 1; 0\}$ .

Уравнение соответствующей цилиндрической поверхности, представленной на рис. 2.3, имеет вид:

$$\vec{r} = \left\{ (b-a)\cos\varphi + a\lambda \cos\left(\frac{b-a}{a}\varphi\right); v; (b-a)\sin\varphi - a\lambda \sin\left(\frac{b-a}{a}\varphi\right) \right\},$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 6.$$

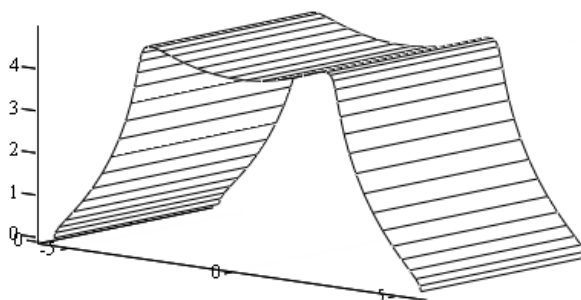


Рис. 2.3. Цилиндрическая поверхность с направляющей в виде удлиненной гипоциклоиды при значениях параметров  $a = 1$ ,  $b = 6$ , и  $\lambda = 0,5$

Параметры, входящие в математическую модель цилиндрической поверхности, можно выразить через конструктивные параметры конструкции. Например, через размеры в плане и высоту, если речь идет о моделировании сводов. При этом границы области значений параметра  $v$  выражаются через длину конструкции (размер, измеряемый вдоль образующей цилиндрической поверхности), а параметры направляющей кривой связаны с шириной и высотой конструкции. Определить эту взаимосвязь можно, подставляя координаты характерных точек (например, точки в основании конструкции и крайняя верхняя точка) в уравнение направляющей кривой.

Другой достаточно простой линейчатой поверхностью, используемой при моделировании пространственных конструкций, является коническая поверхность. Эта поверхность образуется движением прямой линии (образующей), проходящей через некоторую неподвижную точку (вершину) и последовательно через все точки некоторой кривой линии (направляющей).

Пусть произвольная пространственная направляющая линия конической поверхности задана уравнением  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(u)$ , и задана ее вершина  $S$  радиус-

вектором  $\vec{r}_S$ . Тогда уравнение конической поверхности записывается векторным равенством

$$\vec{r} = (1 - v)\vec{r}_H(u) + v\vec{r}_S,$$

где  $u$  и  $v$  – параметры.

В качестве примера приведем уравнение и форму конической поверхности с вершиной, заданной радиус-вектором  $\vec{r}_S = \{0; 3; 5\}$  и направляющей в виде эллипса, заданного уравнением

$$\vec{r}_H = \{6 \cos u; 4 \sin u; 0\}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi.$$

Уравнение соответствующей несимметричной конической поверхности (рис. 2.4) принимает вид

$$\vec{r} = \{6(1 - v)\cos u; 4(1 - v)\sin u + 3v; 5v\}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

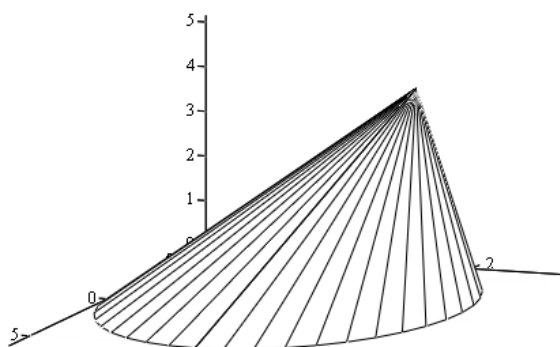


Рис. 2.4. Несимметричная коническая поверхность с эллиптической направляющей линией

Рассмотренная в разделе 1.1 модель конического купола является частным случаем изображенной на рис. 2.4 конической поверхности.

Обобщение линейчатой конической поверхности может быть выполнено средствами начертательной геометрии с использованием некоторой

зафиксированной в пространстве плоскости, называемой плоскостью параллелизма. Одной из таких поверхностей является коноид [68, 76]. Эта поверхность образована движением прямой линии, во всех своих положениях параллельной плоскости параллелизма и пересекающей две направляющие, одна из которых кривая, а другая прямая линия.

Рассмотрим аналитический аналог формообразования коноидальной поверхности. Пусть плоскость параллелизма задана единичным вектором нормали  $\vec{n}$ , а направляющие прямая и кривая заданы векторными уравнениями

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{l}t \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(u).$$

Устанавливая соответствие параметров  $t$  и  $u$  равенством

$$(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(u)) \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.2)$$

выражающим условие параллельности образующей коноида плоскости параллелизма, находим зависимость  $u = u(t)$  или  $t = t(u)$ .

Тогда уравнение коноида может быть представлено в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) + (\vec{r}_2(u(t)) - \vec{r}_1(t))v, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_2(u) + (\vec{r}_1(t(u)) - \vec{r}_2(u))v, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Для примера построим поверхность коноида с направляющими в виде прямой линии и параболы, заданных уравнениями

$$\vec{r}_1 = \{t; 0; 0\}, \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \{u; 2; 1 - u^2\},$$

если плоскость параллелизма задана вектором  $\vec{n}_1 = \{1; 0; 0\}$ .

Записывая уравнение (2.2) связи между параметрами  $t$  и  $u$

$$(t - u) \cdot 1 + (0 - 2) \cdot 0 + (u^2 - 1) \cdot 0 = 0,$$

находим  $t = u$ .

Тогда уравнение коноида может быть записано в виде

$$\vec{r} = \{u; 2; 1 - u^2\} + (\{u; 2; 1 - u^2\} - \{u; 0; 0\})v, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2$$

или

$$\vec{r} = \{u; 2; 1 - u^2\} + \{0; -2; u^2 - 1\}v, \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Результирующая поверхность, для случая, когда параметр  $u$  меняется в пределах  $-1 \leq u \leq 1$ , показана на рис. 2.5.

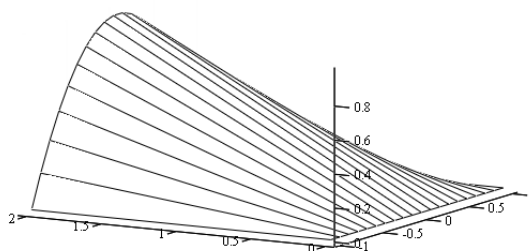


Рис. 2.5. Поверхность коноида с направляющими в виде прямой линии и параболы

Геометрическое условие формообразования линейчатой поверхности, образующие которой пересекают кривую и прямую линии, основанное на использовании плоскости параллелизма можно заменить другими аналитическими условиями. Получаемые при этом поверхности не являются тождественными, но близки по форме и могут быть ограничены одинаковыми отрезками направляющих линий.

Регулярным коноидом назовем поверхность, образованную движением прямой образующей вдоль двух направляющих (одна из которых прямая,

другая – кривая) таким образом, что точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно.

Пусть задан направляющий отрезок  $M_1M_2$  уравнением

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

а участок  $M_3M_4$  направляющей кривой уравнением

$$\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(u), \quad u_3 \leq u \leq u_4. \quad (2.3)$$

Перейдем в уравнении направляющей кривой к нормированному параметру  $t$  согласно равенству

$$t = \frac{\int_{u_3}^u |d\vec{r}_{34}|}{\int_{u_3}^{u_4} |d\vec{r}_{34}|}, \quad (2.4)$$

обеспечивающему равномерность распределения точек пересечения линейной образующей и направляющими линиями. После определения обратной функции для функции, заданной интегралом (2.4) с переменным верхним пределом, уравнение (2.3) может быть переписано в виде

$$\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(u(t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Тогда уравнение регулярного коноида записывается равенством

$$\vec{r} = (1 - v)\vec{r}_{12}(t) + v\vec{r}_{34}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

Или

$$\vec{r} = (1 - v)(1 - t)\vec{r}_1 + (1 - v)t\vec{r}_2 + v\vec{r}_{34}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (2.5)$$



Для иллюстрации предложенного метода построения регулярного коноида зададим направляющий отрезок прямой векторным уравнением

$$\vec{r}_{12} = \{0,5; 0; 0\} + \{-0,5; 0; 0\}t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

а участок криволинейной направляющей зададим в виде дуги окружности

$$\vec{r}_{34} = \left\{ \cos u; 1; \sin u - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}, \quad \frac{\pi}{4} \leq u \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Воспользуемся равенством (3.4) и выполним нормировку параметра

$$t = \frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^u \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} du}{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} du} = \frac{4u - \pi}{2\pi},$$

откуда находим  $u = \frac{2\pi t + \pi}{4}$ .

Подстановка найденных функций  $\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(u)$ , и  $u = u(t)$  в равенство (2.5) дает следующее уравнение искомого элемента поверхности (рис. 2.6):

$$\vec{r} = (1-v)(1-t)\{0,5, 0, 0\} + (1-v)t\{-0,5, 0, 0\} + v \left\{ \cos \frac{2\pi t + \pi}{4}, 1, \sin \frac{2\pi t + \pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right\},$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

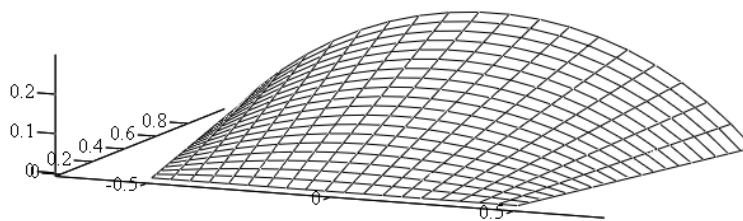


Рис. 2.6. Регулярный коноид с направляющими в виде дуги окружности и отрезка прямой

Рассмотренные математические модели конических и коноидальных элементов пространственных конструкций в строительной практике находят широкое применение при проектировании шедовых покрытий. Эти покрытия обладают рядом достоинств – рассеянное освещение без прямого попадания солнечных лучей, благоприятные условия для отопления и вентиляции помещений [127]. В силу равномерности узлов пересечения образующей с направляющими линиями использование регулярных коноидов может дать дополнительные преимущества в части повышения их несущей способности и упрощения организации узлов соединения элементов конструкции.

При использовании поверхностей коноида и регулярного коноида для проектирования шедовых покрытий параметры направляющей кривой выразить через требуемые конструктивные параметры шедового покрытия (высота и размеры в плане). Связь между этими параметрами может быть определена из решения системы уравнений, полученных подстановкой координат точек на шедовом покрытии в уравнения направляющих линий.

С использованием плоскости, занимающей фиксированное положение в пространстве, – плоскости параллелизма можно получить линейчатую поверхность, пересекающую две кривые направляющие и называемую цилиндроидом [95].

Пусть плоскость параллелизма задана вектором нормали  $\vec{n}$ , а направляющие кривые заданы уравнениями

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t) \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2(u).$$

Соответствие параметров  $t$  и  $u$  установим аналогично тому, как это делалось при построении коноида, равенством

Соответствие параметров  $t$  и  $u$  установим аналогично тому, как это делалось при построении коноида, равенством

$$(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(u)) \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.6)$$

Откуда можно найти зависимость  $u = u(t)$  или  $t = t(u)$ .

В зависимости от выбора независимого параметра  $t$  или  $u$  уравнение цилиндриоида представимо в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_1(t) + (\vec{r}_2(u(t)) - \vec{r}_1(t))v,$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_2(u) + (\vec{r}_1(t(u)) - \vec{r}_2(u))v.$$

В качестве примера запишем уравнение и изобразим поверхность цилиндриоида с направляющими в виде парабол

$$\vec{r}_1 = \{t, 0, t^2\}, \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \{u, 1, u^2\},$$

если плоскость параллелизма задана вектором  $\vec{n} = \{0, 0, 1\}$ .

Записывая уравнение (2.6) связи между параметрами  $t$  и  $u$ , находим

$$(t - u) \cdot 0 + (0 - 1) \cdot 0 + (t^2 - u^2) \cdot 1 = 0,$$

откуда находим  $t = -u$ .

Тогда уравнение цилиндрида в области изменения параметра  $u$  в заданных пределах, например  $0 \leq u \leq 1$ , примет вид

$$\vec{r} = \{u; 1; u^2\} + (\{-u; 0; u^2\} - \{u; 1; u^2\})v, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

или

$$\vec{r} = \{u; 1; u^2\} + \{-2u; -1; 0\}v, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Соответствующая поверхность показана на рис. 2.7.

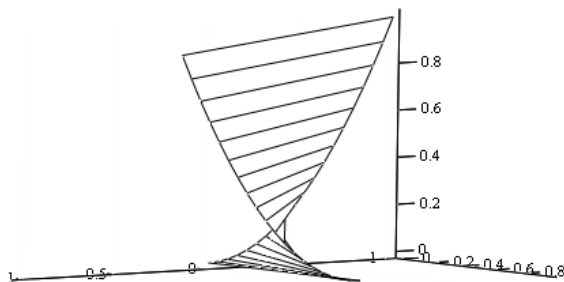


Рис. 2.7. Цилиндрод с направляющими в виде парабол и горизонтальной плоскостью параллелизма

Обобщение поверхности цилиндрида, обеспечивающее равномерность распределения точек пересечения образующих с направляющими кривыми, можно осуществить так же, как и в случае построения регулярного коноида. Регулярным цилиндридом назовем поверхность, образованную движением прямой образующей вдоль двух криволинейных направляющих так, чтобы точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределяются равномерно.

Пусть заданы участки направляющих кривых  $M_1M_2$  и  $M_3M_4$  уравнениями

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(u), \quad u_1 \leq u \leq u_2,$$

$$\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(u), \quad u_3 \leq u \leq u_4.$$

Для записи уравнения регулярного цилиндриоида в уравнениях направляющих кривых необходимо выполнить нормировку параметров для каждой кривой согласно следующим равенствам

$$t = \frac{\int_{u_2}^u |d\vec{r}_{12}|}{\int_{u_1}^u |d\vec{r}_{12}|} \quad \text{и} \quad t = \frac{\int_{u_4}^u |d\vec{r}_{34}|}{\int_{u_3}^u |d\vec{r}_{34}|}. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение регулярного цилиндриоида может быть записано с использованием обратных функций, заданных интегралами (2.7), в виде

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_{12}(u(t)) + \lambda\vec{r}_{34}(v(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Примером построения регулярного цилиндриоида может служить построение поверхности с направляющими в виде дуг окружностей

$$\vec{r}_{12} = \{0; \cos u; \sin u\}, \quad \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$\vec{r}_{34} = \{2; -2,5 \cos v; 2,5 \sin v + 4,5\}, \quad \frac{5\pi}{4} \leq v \leq \frac{7\pi}{4}.$$

Выполним нормировку параметров, используя равенства (2.7). Для направляющей кривой, заданной уравнением  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(u)$ , получим условие

$$u = \frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6},$$

а для направляющей кривой, заданной уравнением  $\vec{r}_{34} = \vec{r}_{34}(v)$ , получим другое условие

$$v = \frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{4}.$$

С учетом полученных соотношений между параметрами уравнение регулярного цилиндроида принимает вид

$$\vec{r} = (1-v) \left\{ 0; \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right); \sin\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \right\} + \\ + v \left\{ 2; -2,5 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{4}\right); 2,5 \sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{5\pi}{4}\right) + 4,5 \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

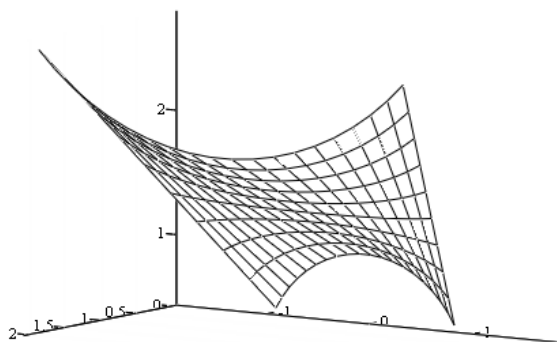


Рис. 2.8. Регулярный цилиндرويد с направляющими в виде дуг окружностей

Соответствующая поверхность регулярного цилиндроида показана на рис. 2.8. Стоит обратить внимание на тот факт, что кривизна построенной поверхности меняется плавным образом при движении вдоль каждой из ее образующих, а сами образующие равномерным образом распределены по этой поверхности. Это, безусловно, открывает большие возможности по созданию многообразных пространственных конструкций, обеспечивающих соединение технологичности в их изготовлении с высокой несущей способностью за счет равномерного расположения несущих элементов.

Очевидно, что в качестве направляющих кривых для цилиндроидов и регулярных цилиндроидов можно использовать не только параболы и дуги

окружностей, но и другие аналитические кривые. В этом случае можно получить большое количество разнообразных поверхностей, которые можно применять как для моделирования строительных конструкций, так и в других отраслях промышленности.

Особым классом линейчатых поверхностей, которые могут быть использованы при геометрическом моделировании, являются торсовые поверхности – поверхности касательных к произвольной гладкой пространственной кривой. Торсовая поверхность имеет нулевую гауссову кривизну в каждой своей точке, и как доказывается методами дифференциальной геометрии, является развешиваемой линейчатой поверхностью. Это означает, что фрагмент торсовой поверхности может быть без складок и разрывов совмещен всеми его точками с плоскостью. Данное свойство торсовой поверхности может быть использовано в технологии изготовления железобетонных конструкций с использованием рулонированных арматурных сеток, при раскрое элементов тентовых или листовых конструкций, при укреплении откосов с использованием различных листовых материалов. Вопросам геометрического моделирования торсовых поверхностей в частных случаях посвящены работы С.Н. Кривошапка [66-67, 72-73, 75, 80], А.В. Крутова [82].

Общее уравнение торсовой поверхности, исходя из ее определения как поверхности касательных к некоторой пространственной кривой, можно записать в виде

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_n(u) + v\vec{\tau}(u), \quad (2.8)$$

где  $\vec{r}_n(u)$  – радиус-вектор точек направляющей кривой,  $\vec{\tau}$  – единичный вектор касательной к направляющей кривой, определяемый соотношением

$$\vec{\tau}(u) = \frac{d\vec{r}_H}{\left| \frac{d\vec{r}_H}{du} \right|}. \quad (2.9)$$

С использованием соотношения (2.9) общее уравнение торсовой поверхности может быть записано в виде

$$\vec{r}(u, v) = \vec{r}_H(u) + v \frac{d\vec{r}_H/du}{\left| d\vec{r}_H/du \right|}. \quad (2.10)$$

В качестве примера запишем уравнение и выполним построение торсовой поверхности с направляющей кривой в виде винтовой линии, заданной уравнением

$$\vec{r}_H(u) = \{5 \cos u, 5 \sin u, u\}, \quad 0 \leq u \leq 3\pi.$$

Определяя с помощью соотношения (2.9) вектор касательной в каждой точке направляющей кривой

$$\vec{\tau}(u) = \frac{d\vec{r}_H/du}{\left| d\vec{r}_H/du \right|} = \left\{ \frac{-5 \sin u}{\sqrt{29}}, \frac{5 \cos u}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}} \right\},$$

с помощью уравнения (2.8) получаем уравнение торсовой поверхности в следующем виде:

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 5 \cos u \\ 5 \sin u \\ 2u \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -5 \sin u \\ 5 \cos u \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 3\pi.$$

На рис. 2.9 а представлена торсовая поверхность при изменении параметра  $v$  в пределах  $0 \leq v \leq 8$ . Эта поверхность известна в технике как винт Архимеда и применялась еще в античности при создании простейших гидротехнических сооружений. На рис. 2.9 б представлен вид этой же торсовой



поверхности, когда параметра  $v$  изменяется в пределах  $-8 \leq v \leq 8$ , что хорошо иллюстрирует тот факт, что направляющая кривая является ребром возврата торсовой поверхности, а сама торсовая поверхность состоит из двух полостей.

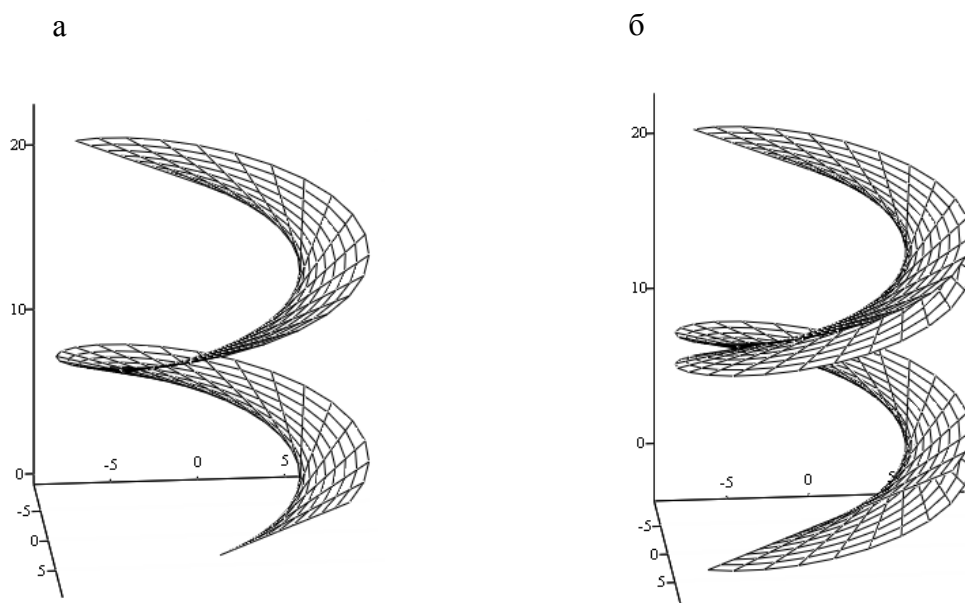


Рис. 2.9. Торсовая поверхность с направляющей в виде винтовой линии:  
а – при  $0 \leq v \leq 8$ ; б – при  $-8 \leq v \leq 8$

В качестве другого примера торсовой поверхности рассмотрим поверхность с ребром возврата в виде винтовой спирали, заданной уравнением

$$\vec{r}_h(u) = \{u \cos u; u \sin u; u\}, \quad 0 \leq u \leq 3\pi. \quad (2.13)$$

Определяя вектор касательной к заданной направляющей кривой в виде

$$\vec{\tau}(u) = \frac{d\vec{r}_h/du}{|d\vec{r}_h/du|} = \left\{ \frac{\cos u - u \sin u}{\sqrt{2+u^2}}; \frac{\sin u + u \cos u}{\sqrt{2+u^2}}; \frac{1}{\sqrt{2+u^2}} \right\},$$

находим согласно равенству (2.10) уравнение торсовой поверхности

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos u \\ u \sin u \\ u \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{2+u^2}} \begin{pmatrix} \cos u - u \sin u \\ \sin u + u \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 3\pi, \quad 0 \leq v \leq 7.$$

Полученная торсовая поверхность представлена на рис. 2.10.

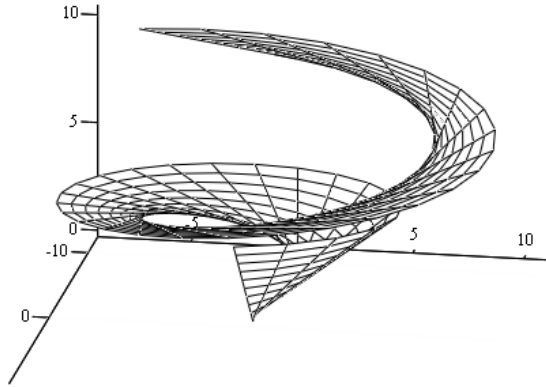


Рис. 2.10. Горбсовая поверхность с направляющей в виде винтовой спирали

Рассмотренные в этом разделе линейчатые поверхности, описанные в специальной литературе, используются при проектировании пространственных конструкций. Эти поверхности не исчерпывают всего возможного разнообразия линейчатых поверхностей. Большого их разнообразия можно добиться на основе кинематического алгоритма, опирающегося на определение линейчатой поверхности. Пусть задана произвольная пространственная направляющая кривая, с которой связана образующая линейчатой поверхности, совершающая движение в пространстве. Тогда общее уравнение линейчатой поверхности может быть записано в виде [95]

$$\vec{r} = \vec{r}_h(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{\tau}(u)]\vec{\tau}(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{n}(u)]\vec{n}(u) + [\vec{\rho}(u, v) \cdot \vec{b}(u)]\vec{b}(u), \quad (2.14)$$

где  $\vec{r}_h(u)$  – радиус-вектор точек направляющей кривой,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  – единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали к направляющей кривой, определяемые соотношениями

$$\vec{\tau}(u) = \frac{d\vec{r}_h}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right|}, \quad \vec{n}(u) = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right|} \times \frac{d\vec{r}_h}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right|}, \quad \vec{b}(u) = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right|}, \quad (2.15)$$

$\vec{\rho}(u, v)$  – линейная по  $v$  вектор-функция скалярных аргументов.

Если в качестве функции  $\vec{\rho}(u, v)$  взять функцию вида  $\vec{\rho}(u, v) = v\vec{c}(u)$ , то приходим к описанной выше торсовой поверхности. Функции вида  $\vec{\rho}(u, v) = v\vec{n}(u)$  и  $\vec{\rho}(u, v) = v\vec{b}(u)$  определяют поверхности, которые называются поверхностями главных нормалей и бинормалей соответственно.

Построим в качестве примера поверхность главных нормалей с направляющей в виде винтовой спирали, заданной уравнением (2.13). Выполняя последовательно операции дифференцирования радиус-вектора направляющей кривой, вычисления соответствующих векторных производений и их модулей, находим выражение для единичного вектора главной нормали в каждой точке направляющей кривой:

$$\frac{d\vec{r}_h}{du} = \{\cos u - u \sin u; \sin u + u \cos u; 1\},$$

$$\frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} = \{-2 \sin u - u \cos u; 2 \cos u - u \sin u; 0\},$$

$$\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} = \{-2 \cos u + u \sin u; -2 \sin u - u \cos u; 2 + u^2\},$$

$$\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right| = \sqrt{2 + u^2}, \quad \left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right| = \sqrt{8 + 5u^2 + u^4},$$

и

$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \times \frac{d^2\vec{r}_h}{du^2} \right|} \times \frac{\frac{d\vec{r}_h}{du}}{\left| \frac{d\vec{r}_h}{du} \right|} =$$

$$= \left\{ \frac{-(4 + u^2)\sin u - (u^3 + 3u)\cos u}{\sqrt{16 + 18u^2 + 7u^4 + u^6}}; \frac{-(u^3 + 3u)\sin u + (4 + u^2)\cos u}{\sqrt{16 + 18u^2 + 7u^4 + u^6}}; \frac{-u}{\sqrt{16 + 18u^2 + 7u^4 + u^6}} \right\}.$$

Уравнение поверхности главных нормалей для заданной направляющей кривой с использованием общего уравнения линейчатой поверхности (2.14) можно записать в виде

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos u \\ u \sin u \\ u \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{16 + 18u^2 + 7u^4 + u^6}} \begin{pmatrix} -(4 + u^2)\sin u - (u^3 + 3u)\cos u \\ -(u^3 + 3u)\sin u + (4 + u^2)\cos u \\ -u \end{pmatrix},$$

$$0 \leq u \leq 3\pi, 0 \leq v \leq 7.$$

Полученная поверхность главных нормалей представлена на рис. 2.11.

Построение поверхности бинормалей проиллюстрируем с применением уже рассмотренной выше направляющей кривой, заданной равенством (2.13). Выполняя процедуру определения единичного вектора бинормали согласно последнему из равенств (2.15) и подставляя полученную функцию в уравнение (2.14), получим искомое уравнение поверхности бинормалей

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos u \\ u \sin u \\ u \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{8 + 5u^2 + u^4}} \begin{pmatrix} -2 \cos u + u \sin u \\ -2 \sin u - u \cos u \\ 2 + u^2 \end{pmatrix}, 0 \leq u \leq 3\pi, 0 \leq v \leq 7.$$

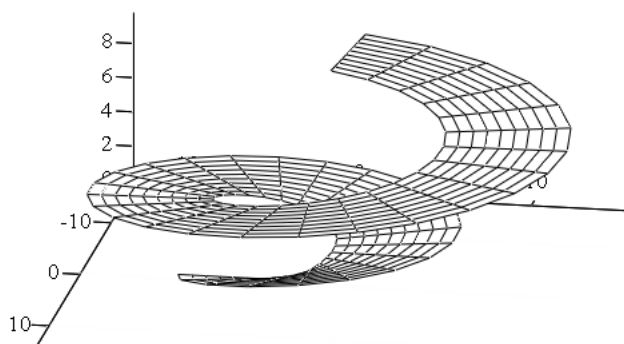


Рис. 2.11. Поверхность главных нормалей с направляющей в виде винтовой спирали

Соответствующая поверхность главных бинормалей на рис. 2.12.

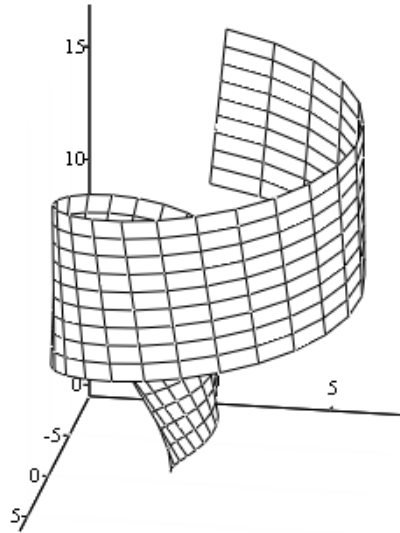


Рис. 2.12. Поверхность бинормалей с направляющей в виде винтовой спирали

Для моделирования линейчатых поверхностей с прямолинейной направляющей целесообразно общему уравнению линейчатой поверхности (2.14) придать частную форму, в которой образующая линия  $\vec{\rho}(u, v)$  записывается не в подвижном базисе  $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ , а в фиксированном. Если направляющую прямую совместить с осью  $Oz$ , то в качестве фиксированного следует выбрать базис  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , и уравнение линейчатой поверхности может быть записано в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_n(z) + [\vec{\rho}(z, v) \cdot \vec{i}(u)] \vec{i}(u) + [\vec{\rho}(z, v) \cdot \vec{j}(u)] \vec{j}(u) + [\vec{\rho}(z, v) \cdot \vec{k}(u)] \vec{k}(u), \quad (2.16)$$

где  $\vec{r}_n(z) = \{0; 0; z\}$ .

В качестве примера применения уравнения линейчатой поверхности вида (2.16) воспользуемся им для построения прямого и наклонного геликоидов.

Геликоидом (винтом) называется поверхность, образованная движением некоторой линии (образующей), вращающейся вокруг произвольной оси с одновременным поступательным движением вдоль этой оси. Скорости этих движений пропорциональны. Если образующая является прямой линией, то соответствующая поверхность геликоида получается линейчатой.

Если функцию  $\vec{\rho}(z, v)$  выбрать в виде

$$\vec{\rho}(z, v) = \{v \cos cz; v \sin cz; 0\},$$

то получаемая поверхность является прямым геликоидом. Уравнение этой поверхности

$$\vec{r}(z, v) = \{v \cos cz; v \sin cz; z\}.$$

Элемент поверхности прямого геликоида при значениях параметров  $c = \pi$ ,  $0 \leq z \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq 2$  изображен на рис. 2.13 а.

Задавая функцию  $\vec{\rho}(z, v)$  равенством

$$\vec{\rho}(z, v) = \{v \cos cz; v \sin cz; bv\},$$

находим уравнение наклонного геликоида

$$\vec{r}(z, v) = \{v \cos cz; v \sin cz; bv + z\}.$$

Элемент поверхности наклонного геликоида при значениях параметров  $c = \pi$ ,  $b = 1$ ,  $0 \leq z \leq 3$ ,  $0 \leq v \leq 2$  изображен на рис. 2.13 б.

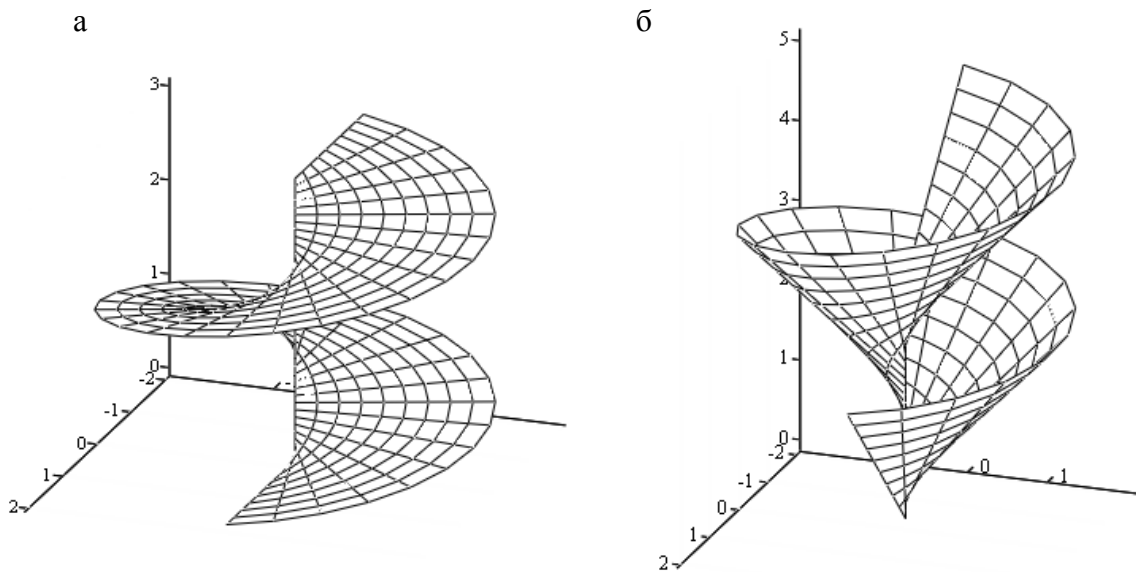


Рис. 2.13. Поверхности геликоидов: а – прямой геликоид; б – наклонный геликоид

## 2.2. Применение методов центрального и параллельного проецирования при моделировании формообразующих элементов тентовых конструкций

Как уже упоминалось в разделе 2.1, широкое применение в практике строительного производства и не только в качестве формообразующих конструктивных элементов находят разворачивающиеся поверхности [43, 49, 67, 98, 102, 120]. Это позволяет, благодаря их большому разнообразию, реализовать широкий спектр оригинальных архитектурно-планировочных решений, отвечающих различным художественным, эстетическим и конструктивным предпочтениям, включая возможность создавать здания и сооружения в произвольных стилях – от псевдорусского до хай-тэка. Кроме того, наличие прямолинейной образующей позволяет создавать различные пространственные конструкции причудливых форм только с использованием прямолинейных несущих элементов.

В частности, разворачивающиеся поверхности очень востребованы при проектировании тентовых конструкций, изготавливаемых из композитных виниловых тканей, так как это позволяет выполнять предварительно крой плоских заготовок с дальнейшим их изгибанием и стыковкой по линиям края.

Один из возможных, и достаточно простых, методов формообразования отдельных элементов листовых конструкций в виде разворачивающихся поверхностей аналитически может быть реализован на основе процедуры параллельного или центрального проецирования произвольной направляющей линии на заданную плоскость (рис. 2.14). В первом случае получаемый элемент поверхности является цилиндрическим, а во втором случае – коническим.

Для аналитического представления цилиндрического или конического элементов поверхности необходимо задать:

- уравнение направляющей кривой  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(u)$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$ ;
- единичный вектор нормали  $\vec{n}$  к плоскости проецирования;
- положение произвольной точки  $C$  плоскости проецирования  $\vec{r}_C$ ;

– единичный вектор  $\vec{l}$  образующей – для цилиндрической поверхности или центр проецирования  $\vec{r}_S$  – для конической поверхности.

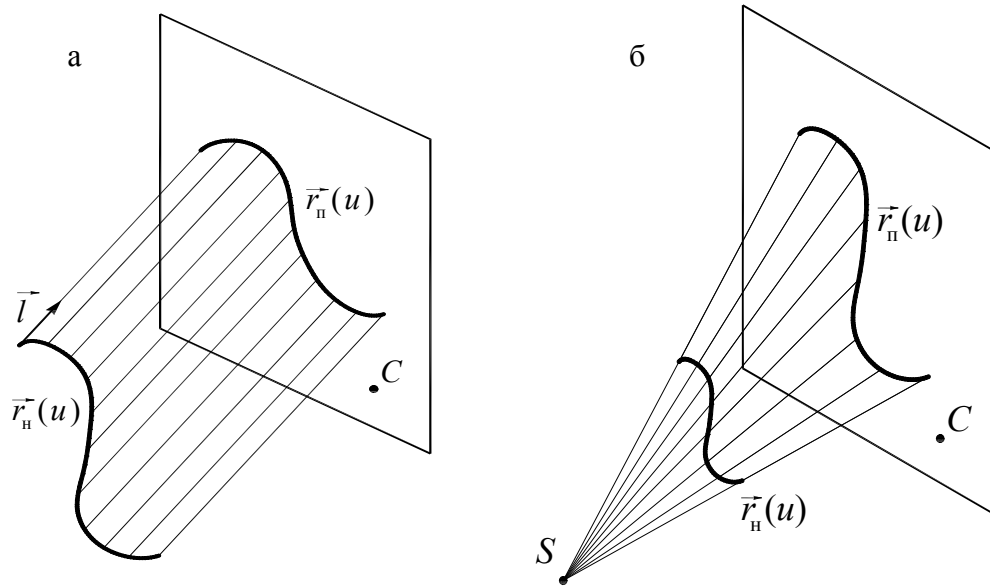


Рис. 2.14. Схемы проецирования: а – схема параллельного проецирования; б – схема центрального проецирования

Тогда искомый элемент формообразующей поверхности описывается уравнением

$$\vec{r} = v\vec{r}_n(u) + (1-v)\vec{r}_H(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad (2.17)$$

здесь  $\vec{r}_H(u)$  – радиус-вектор точек, принадлежащих спроецированной на заданную плоскость линии. Для цилиндрической поверхности уравнение этой линии в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}_n = \vec{r}_H(u) + \frac{(\vec{r}_C - \vec{r}_H(u)) \cdot \vec{n}}{\vec{l} \cdot \vec{n}} \vec{l}, \quad (2.18)$$

а для конической –

$$\vec{r}_n = \vec{r}_S + \frac{(\vec{r}_C - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}}{(\vec{r}_H(u) - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}} (\vec{r}_H(u) - \vec{r}_S). \quad (2.19)$$



Представленную аналитическую процедуру формообразования цилиндрической поверхности проиллюстрируем на примере моделирования восьмигранного церковного купола (рис. 2.15). Модель купола описывается следующими параметрами:  $r_1 = 2,42$  м – радиус окружности, вписанной в основание купола,  $r_2 = 3,67$  м – радиус окружности, вписанной в наиболее широкую часть купола,  $h_1 = 7$  м – высота купола,  $h_2 = 2$  м – расстояние от основания купола до его наиболее широкой части,  $h_3 = 0,7$  м – высота опорного кольца под куполом. Первый формообразующий элемент ограничивается двумя кривыми линиями – проекциями  $\vec{r}_{n1}$  и  $\vec{r}_{n2}$  направляющей кривой  $\vec{r}_n$  на плоскости с нормальными векторами  $\vec{n}_1 = \{\sin \pi/8; -\cos \pi/8; 0\}$  и  $\vec{n}_2 = \{\sin \pi/8; \cos \pi/8; 0\}$ . Остальные семь формообразующих элементов получены поворотом первого элемента вокруг оси  $Oz$  на углы  $\pi/8, 2\pi/8, 3\pi/8, 4\pi/8, 5\pi/8, 6\pi/8, 7\pi/8$  соответственно. В качестве направляющей кривой  $\vec{r}_n$  принят кубический сплайн, проходящий через точки  $M_0(2,42; 0; 0), M_1(3,17; 0; 0,67), M_2(3,67; 0; 2), M_3(3,5; 0; 2,83), M_4(3; 0; 3,67), M_5(2,33; 0; 4,25), M_6(1,5; 0; 4,92), M_7(1,18; 0; 5,67), M_8(0,33; 0; 6,33), M_9(0; 0; 7)$ .

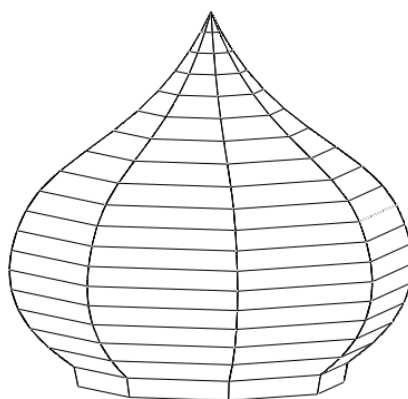


Рис. 2.15. Модель восьмигранного церковного купола

Использование метода центрально проецирования для построения конической поверхности проиллюстрируем на примере модели фигурного

козырька. В данной модели в качестве одной образующей кривой принята плоская кривая, заданная уравнением

$$r_n(\varphi) = \begin{pmatrix} (5 + 0,5 \sin 12\varphi) \cos \varphi \\ (5 + 0,5 \sin 12\varphi) \sin \varphi \\ 5 \end{pmatrix},$$

а вторая образующая кривая  $r_n(\varphi)$  получена проецированием кривой  $r_n(\varphi)$  на плоскость, заданную нормалью к плоскости  $\vec{n} = \{0; 0; 1\}$  и точкой  $M_0(0; 0; 0)$ , принадлежащей плоскости. Центр проецирования расположен в точке  $M_1(0; 0; 8)$ . Уравнение кривой  $r_n(\varphi)$ , полученное с помощью формулы (2.19) имеет вид

$$r_n(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}(5 + 0,5 \sin 12\varphi) \cos \varphi \\ \frac{8}{3}(5 + 0,5 \sin 12\varphi) \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фигурный козырек в виде конической поверхности, модель которой, получена с помощью формулы (2.17), изображен на рис. 2.16.

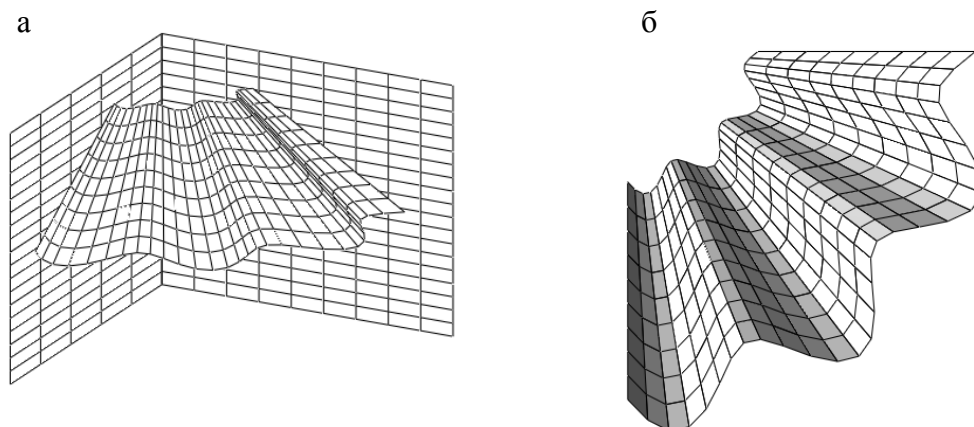


Рис. 2.16. Фигурный козырек: а – общий вид; б – вид сверху

Рассмотренные классы линейчатых поверхностей позволяют моделировать весьма разнообразные по форме поверхности пространственных конструкций, описываемые большим числом параметров (не только длина, ширина, высота). Поэтому задача определения взаимосвязи между параметрами модели и параметрами конструкции не может быть решена в общем виде, как это было выполнено в главе 1. Для предлагаемых в главе 2 линейчатых поверхностей эту задачу решать необходимо для каждого варианта поверхности отдельно, подставляя в уравнение поверхности или направляющей кривой координаты точек пространной конструкции.

## **Выводы по главе 2**

1. Впервые построен новый класс поверхностей, называемых регулярными коноидами и регулярными цилиндроидами, для которых точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно, благодаря чему возможно равномерно располагать армирующие элементы или элементы опалубки при проектировании или изготовлении конструкций.

2. С использованием предложенных алгоритмов моделирования поверхностей однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов выполнена привязка параметров модели к параметрам конструкций.

3. Проведенное исследование показало, что кинематический метод моделирования однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов с использованием операции переноса их прямолинейных образующих позволяет упростить расчеты и технические операции при изготовлении строительных конструкций на основе этих поверхностей благодаря тому, что модель позволяет получить координаты соответствующих несущих элементов.

4. Предложено моделирование конических и цилиндрических поверхностей с произвольной направляющей методом центрального или параллельного проецирования, позволяющим проектировать разнообразные листовые или тентовые конструкции с возможностью в дальнейшем получать плоские выкройки элементов конструкций.

### **3. ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ И НАПРАВЛЯЮЩИМИ ЛИНИЯМИ, ДЛЯ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Препятствием усложнению геометрических форм конструкций долгое время было то, что расчет конструкции сложной геометрической формы «в ручную» в достаточной степени сложен, требует больших затрат времени. Развитие компьютерной техники и программных комплексов систем автоматизированного проектирования (САПР), позволяющих быстро и достаточно точно выполнять расчет конструкций практически любой формы, привело к резкому увеличению количества геометрических форм, применяемых при проектировании пространственных конструкций, что прослеживается в истории развития оболочек и сетчатых (стержневых) конструкций. Стержневые пространственные конструкции в известной мере аналогичны сплошным конструкциям – плитам, оболочкам. С другой стороны – эти конструкции являются дальнейшим развитием плоских стержневых конструкций.

Принцип стержневой конструкции известнее человеку с древнейших времен – он использовался в монгольских юртах, в хижинах тропической Африки. Основные заслуги в современном развитии теории расчета стержневых конструкций принадлежат прежде всего Беллу, Фепплю, Шведлеру, работавшим на рубеже 19-20 веков. А в 20 веке – Блумфилду, Ледереру, Маковскому, Отто, Райту, Фуллеру [128]. В середине XIX века в строительстве начали активно использовать сталь и чугун. Успешное и активное развитие строительных материалов и теории расчета этих конструкций создало необходимый «базис» для возникновения целого спектра новых пространственных конструкций.

В это время, в период расцвета «первой металлической революции» и возникли первые сетчатые оболочки и другие несущие конструкции на их основе. Сначала сетчатые оболочки чаще всего применялись в промышленном

строительстве. Их использовали при перекрытии выставочных павильонов, производственных цехов, где требовалось с минимальными затратами металла перекрыть пролеты более 30-40 м.

Поскольку стержневые конструкции в некоторой степени аналогичны сплошным конструкциям, то и их геометрическая форма, в основном повторяет формы сплошных конструкций. Кроме предложенных Шуховым [85, 94] однополостных гиперболоидов, удобных для высотных сооружений, при перекрытии больших пролетов применялись стержневые конструкции в форме сферических, конических поверхностей, цилиндрических поверхностей с круговой или параболической направляющей, а также плоские структурные плиты. До 80-х годов XX века сетчатые оболочки при строительстве жилых и административных зданий применялись крайне редко. Вторую жизнь сетчатым оболочкам вернуло увлечение многих мировых архитекторов стилем «Hi-Tech» [175] и деконструктивизмом.

Ричард Роджерс, Сантьяго Калатрава, Франк О. Гери и многие идеологи стиля Hi-Tech в своих проектах часто используют конструкции с криволинейными очертаниями [60, 109-110, 109, 172, 176,]. Один из способов создания сооружений с криволинейными очертаниями – это использование покрытий на основе сетчатых оболочек [106, 140]. В в 1974-76 годах немецкие архитекторы Хьюго Херинг и Фрай Отто применили сетчатые оболочки при строительстве торгового павильона в Мангейме, с блеском продемонстрировав возможности этого вида конструкций. Сетчатые оболочки применяет в своих проектах и самый яркий представитель направления Hi-Tech в архитектуре Норманн Фостер [105, 174].

Еще одним ярким примером оригинальной сетчатой конструкции является павильон Японии на выставке ЭКСПО 2000. [107].

С использованием предложенных в главах 1 и 2 поверхностей второго порядка и линейчатых поверхностей можно смоделировать достаточно большое, но, все же, ограниченное количество сетчатых пространственных

конструкций. Эта ограниченность обусловлена использованием при задании направляющих и образующих линий поверхности простейших геометрических образов. В рассмотренных случаях формообразования использовались, в основном, прямые линии, кривые второго порядка, а также поверхности второго порядка. В данной главе рассматриваются методы моделирования, позволяющие существенно расширить класс поверхностей

### **3.1. Моделирование куполов и других пространственных конструкций поверхностями вращения с произвольными образующими**

В первой главе при моделировании куполов и сводов на круглом плане поверхностями вращения второго порядка было рассмотрено пять вариантов образующих линий – прямая линия, дуги окружности, эллипса, параболы и гиперболы, что позволяет моделировать различные по форме поверхности, но близкие по типу. Если использовать при построении поверхности вращения произвольную образующую, можно получить новые типы поверхностей (см. рис. 3.1). Безграничные возможности при формообразовании сводов и куполов дает использование в качестве образующей сплайновых линий [31, 104, 134] – гладких линий, проходящих через заданные точки пространства (узлы сплайна).

Для получения кривых, проходящих через заданные точки, используются различные методы интерполяции. В практике интерполирования широко распространены полиномы Лагранжа и Ньютона, имеющие степени, зависящие от количества узлов. Их главный недостаток – большие межузловые осцилляции, возникающие уже при степенях полинома, равных шести-восемью, поэтому при числе узловых точек больше десяти интерполяция глобальным полиномом становится непрактичной. При большом количестве узловых точек более предпочтительной оказывается кусочная интерполяция гладкими полиномами невысоких степеней (сплайнами). Наиболее известными сплайнами являются кубический сплайн, *B*-сплайн, *L*-сплайн, кривые Безье, сплайн Эрмита, Акима-сплайн [134, 156].

Наибольшее распространение в задачах интерполяции получили кубические сплайны [25-26], к основным достоинствам которых следует отнести их гладкость второго порядка. Недостатками этих сплайнов является то, что они склонны сильно осциллировать в сравнении с линейной интерполяцией, соединяющей соседние узловые точки, а также необходимость



при их построении дополнительно задавать значения производных сплайновой функции в некоторых узловых точках.

По сравнению с кубическими сплайнами, в сплайне Акимы практически отсутствуют признаки осцилляции. К его недостаткам можно отнести те обстоятельства, что он имеет гладкость только первого порядка, и для его построения требуется не менее пяти точек.

Достаточно универсальным видом сплайна, пригодным для использования в задачах геометрического моделирования пространственных конструкций, является чередующийся сплайн, состоящий из участков алгебраических кривых третьей и четвертой степени. Принцип создания чередующегося сплайна основан на возможности проведения через любые четыре точки пространства, не лежащие на одной прямой, алгебраической кривой третьей степени и усреднения серии этих кривых, соответствующих разным точкам сплайновой кривой. Получаемый таким образом сплайн обладает гладкостью первого порядка, и его построение можно выполнять, начиная с четырех узлов. При увеличении числа узлов интерполяции происходит достраивание сплайна с сохранением вида предыдущих его участков, кроме последнего межузлового участка. Перечисленные свойства чередующегося сплайна в достаточной степени удовлетворяют требованиям геометрического моделирования образующих и направляющих линий при формообразовании элементов пространственных конструкций произвольных криволинейных очертаний.

Рассмотрим процедуру построения чередующегося сплайна. Пусть в общем случае задана система точек их радиус-векторами  $\{\vec{r}_0, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n\}$  и требуется непрерывным образом провести через эти точки гладкую кривую.

При построении сплайновой кривой используем для ее параметризации модель линейной аппроксимации, когда через узловые точки проводится ломаная линия и вводится параметр  $t$ , определяемый как расстояние от начальной точки до текущей, измеренное вдоль ломаной линии. Тогда

уравнение чередующегося сплайна, проходящего через первые четыре точки, может быть записано следующим матричным уравнением

$$\hat{r} = S_1 T,$$

где  $\hat{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ,  $T = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ , а  $S_1$  – матрица размером  $3 \times 4$  кубического сплайна на

первом участке кривой.

Матрицу  $S_1$  находим из решения матричного уравнения

$$R_{0:3} = S_1 T_{0:3},$$

где

$$R_{0:3} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

– матрица, составленная из координат первых четырех узлов сплайна,

$$T_{0:3} = \begin{pmatrix} 0 & t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \\ 0 & t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ 0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

– матрица, определяемая расстояниями от начальной точки до узловых точек вдоль ломаной линии. При этом

$$t_k = \sum_{j=1}^k |\vec{r}_j - \vec{r}_{j-1}|, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.1) находится матрица  $S_1$  кубического сплайна на первом участке кривой

$$S_1 = R_{0\div 3} T_{0\div 3}^{-1}.$$

Аналогичным образом может быть построена кривая, проходящая через точки  $\{\vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4, \vec{r}_5\}$ , затем – кривая, проходящая через точки  $\{\vec{r}_4, \vec{r}_5, \vec{r}_6, \vec{r}_7\}$  и так далее. Матрицы  $S_2, S_3, \dots$  соответствующих кубических сплайнов находятся из равенств

$$S_2 = R_{2\div 5} T_{2\div 5}^{-1}, S_3 = R_{4\div 7} T_{4\div 7}^{-1} \text{ и т.д.}$$

Используя полученные соотношения, можно найти путем усреднения уравнение гладкой кривой в виде чередующихся алгебраических кривых третьей и четвертой степени

$$\hat{r} = R_{0\div 3} T_{0\div 3}^{-1} T, \quad t_0 \leq t \leq t_2,$$

$$\hat{r} = R_{0\div 3} T_{0\div 3}^{-1} T \left( \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} \right) + R_{2\div 5} T_{2\div 5}^{-1} T \left( 1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} \right), \quad t_2 \leq t \leq t_3,$$

$$\hat{r} = R_{2\div 5} T_{2\div 5}^{-1} T, \quad t_3 \leq t \leq t_4, \quad (3.4)$$

$$\hat{r} = R_{2\div 5} T_{2\div 5}^{-1} T \left( \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} \right) + R_{4\div 7} T_{4\div 7}^{-1} T \left( 1 - \frac{t_5 - t}{t_5 - t_4} \right), \quad t_4 \leq t \leq t_5,$$

$$\hat{r} = R_{4\div 7} T_{4\div 7}^{-1} T, \quad t_5 \leq t \leq t_6,$$

и т.д.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что введенный в рассмотрение чередующийся сплайн обладает гладкостью первого порядка (см. прил. 3).

Примеры поверхностей, полученных с использованием чередующихся сплайнов в качестве образующих поверхностей вращения, представлены на рис. 3.1.

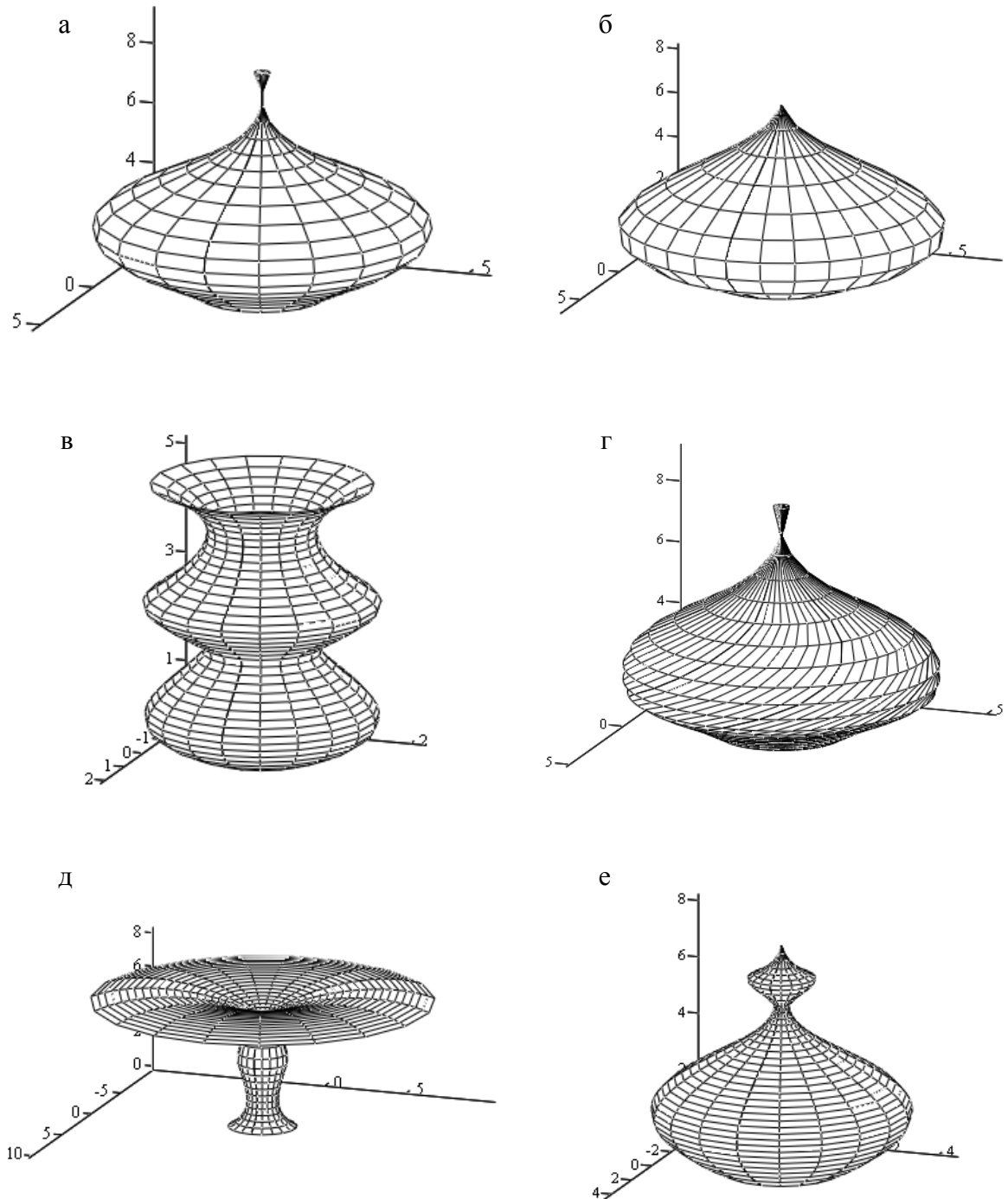


Рис. 3.1. Примеры поверхностей вращения с образующими в виде чередующихся сплайнов

В примере поверхности, представленной на рис. 3.1 а, образующая в виде чередующегося сплайна проходит через шесть точек:  $M_0(2; 0; 1,5)$ ,  $M_1(3; 0; 2)$ ,  $M_2(5; 0; 3)$ ,  $M_3(2; 0; 6)$ ,  $M_4(0; 0; 8)$ , и  $M_5(0,25; 0; 9)$ . Соответствующие им матрицы  $R_{0\div 3}$  и  $R_{2\div 5}$  имеют вид

$$R_{0\div 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ и } R_{2\div 5} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Выполняя вычисление параметров  $t_k$  по формуле (3.3), находим следующие их значения:

$$t_1 = 1,12; t_2 = 3,35; t_3 = 7,60; t_4 = 10,43; t_5 = 11,46.$$

Вычисление матриц  $T_{0\div 3}$  и  $T_{2\div 5}$  осуществляется по формуле (3.2)

$$T_{0\div 3} = \begin{pmatrix} 0 & 1,40 & 37,37 & 438,41 \\ 0 & 1,25 & 11,25 & 57,71 \\ 0 & 1,12 & 3,35 & 7,60 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{2\div 5} = \begin{pmatrix} 0 & 438,41 & 1133 & 1503 \\ 0 & 57,71 & 108,68 & 131,24 \\ 0 & 7,60 & 10,43 & 11,46 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные матрицы  $T_{0\div 3}$  и  $T_{2\div 5}$ , а также значения параметров  $t_k$  в формулы (3.4), находим уравнение образующей. Уравнение соответствующей поверхности удобно записать с использованием аффинного преобразования поворота вокруг вертикальной оси  $Oz$

$$\hat{r} = A(\varphi)\hat{r}(t), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где  $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  – матрица поворота вокруг оси  $Oz$ .

На рис. 3.1 б представлена поверхность с образующей в виде чередующегося сплайна, проходящего через точки  $M_0(3; 0; 0)$ ,  $M_1(7; 0; 3)$ ,

$M_2(4; 0; 5)$  и  $M_3(0; 0; 8)$ ; поверхность, представленная на рис. 3.1 в, имеет образующую в виде чередующегося сплайна, проходящего через точки  $M_0(1; 0; 0)$ ,  $M_1(2; 0; 1)$ ,  $M_2(1; 0; 2)$ ,  $M_3(2; 0; 3)$ ,  $M_4(1; 0; 4)$  и  $M_5(2; 0; 5)$ ; образующая поверхности, изображенной на рис. 3.1 г, представляет собой пространственный чередующийся сплайн, который проходит через точки  $M_0(2; 0; 1,5)$ ,  $M_1(1,5; 1,5\sqrt{3}; 2)$ ,  $M_2(-2,5; 2,5\sqrt{3}; 3)$ ,  $M_3(-2; 0; 6)$ ,  $M_4(0; 0; 8)$  и  $M_5(0,125; 0,125\sqrt{3}; 9)$ ; образующая поверхности в виде чередующегося сплайна на рис. 3.1 д проведена через точки  $M_0(2; 0; 0)$ ,  $M_1(1; 0; 1)$ ,  $M_2(1,5; 0; 4)$ ,  $M_3(1; 0; 7)$ ,  $M_4(8; 0; 8)$  и  $M_5(10; 0; 7,5)$ ; образующая в виде чередующегося сплайна поверхности на рис. 3.1 е проведена через точки  $M_0(2; 0; 0)$ ,  $M_1(4; 0; 3)$ ,  $M_2(0,25; 0; 6)$ ,  $M_3(1; 0; 7)$ ,  $M_4(0,25; 0; 7,5)$  и  $M_5(0; 0; 8)$ .

Поскольку для построения чередующегося сплайна необходимо задать координаты его узлов, задача определения взаимосвязи между параметрами модели и параметрами конструкции решается автоматически при определении матриц чередующегося сплайна.

### 3.2. Применение цепной линии при моделировании поверхностей

В строительной практике достаточно широко используют поверхности с образующей или направляющей в форме цепной линии. Цепной линией [92] называют линию, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжелая нить или цепь (отсюда название) с закрепленными концами в однородном гравитационном поле. Перевернутая цепная линия – идеальная форма для арок, так как однородная арка в форме перевернутой цепной линии испытывает только напряжения сжатия. Перевернутая цепная линия применяется при проектировании так называемых горбатых мостов, также ее можно использовать для проектирования опор виадуков (рис. 3.2).



Рис. 3.2. Viaduc de Garabit во Франции

Целесообразность использования цепной линии в архитектуре в XVII веке продемонстрировал великий английский экспериментатор Роберт Гук [62]. Как свидетельствует история науки, одна из расшифрованных записей-анаграмм Роберта Гука гласит: «Как провисает гибкая веревка, так же, но в перевернутом виде будет стоять жесткая арка». Но широко применять ее в проектах первым стал Антонио Гауди. Он находил форму сводов будущих зданий, используя перевернутые модели – подвешивая грузы на нитках [135]. В музее при церкви Святого Семейства в Барселоне есть экспозиция –

конструкция из цепочек и грузов, которую использовал архитектор для нахождения правильной формы сводов церкви. У Гауди не было компьютера, который позволил бы ему выполнить расчет. Он предложил более простой и, в известном смысле, более эффективный метод.

Перевернутыми моделями после Гауди воспользовались и некоторые современные архитекторы. На берегу реки Миссисипи в городе Сент-Луисе стоит арка Gateway Arch (см. рис. 3.3 а) высотой 192 м, символизирующая поворотный пункт в американской истории и географии [177]. Проект этой арки был выполнен одним из самых известных архитекторов США Эро Саариненом. Ему помогал математик и инженер Ганнскарл Бандель, который подсказал Сааринену использовать для арки форму цепной линии с высотой равной ширине у основания.

Цепная линия также широко применяется при строительстве висячих конструкций – мостов и покрытий. В 1885 году В.Г. Шухов запатентовал в России метод перекрытия здания несущими стальными тентами. В следующем году на Всероссийской выставке в Нижнем Новгороде по этому методу было перекрыто пять павильонов, но эти здания были разрушены и забыты [63]. Только постройка Релей-арены в 1952 году в США наглядно продемонстрировала широкие возможности применения тросов в конструкциях покрытия. С тех пор в мире сооружено множество висячих вантовых покрытий различных форм и конструктивных систем [128]. При этом, несмотря на все многообразие форм висячих вантовых мостов и покрытий [112-113], в силу характера их работы [59, 157] при моделировании однопоясных и двухпоясных вантовых конструкций на круглом и прямоугольном планах применяются в основном поверхности вращения и цилиндрические поверхности на основе цепной линии.

Уравнение цепной линии имеет вид

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left( e^{x/a} + e^{-x/a} \right). \quad (3.5)$$



При проектировании куполов на круглом плане перевернутую цепную линию можно использовать в качестве образующей поверхности вращения. При этом уравнение образующей купола можно получить, записав уравнение перевернутой цепной линии в системе координат, смещенной вверх на  $a + H$ ,

$$f(\rho) = a + H - \frac{a}{2} \left( e^{\rho/a} + e^{-\rho/a} \right), 0 \leq \rho \leq R, \quad (3.6)$$

здесь  $H$  – высота купола,  $R$  – радиус основания купола.

Подстановка функции, заданной выражением (3.6), в уравнение (1.1) дает математическую модель купола с образующей в виде цепной линии, изображенного на рис. 3.3.

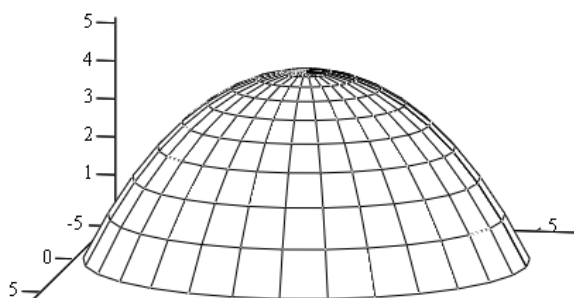


Рис. 3.3. Купол с образующей в форме цепной линии при значении параметров  $h = 5$ ,  $a = 4$

При использовании цепной линии в качестве образующей для поверхности вращения связать аналитически параметры конструкции (высота и диаметр основания) и параметр модели ( $a$ ) в явном виде не представляется возможным. Эта задача может быть при необходимости решена численно.

Для удобства проектирования можно ввести дополнительный параметр конструкции и с его помощью выразить взаимосвязь параметров модели и конструкции. В качестве дополнительного параметра конструкции удобно использовать угол наклона  $\alpha$  касательной к поверхности купола в его основании. В этом случае взаимосвязь конструктивных параметров купола и

параметров математической модели находится из решения системы уравнений, одно из которых получается подстановкой в выражение (3.6) координат точки, лежащей в основании купола, а другое выражает значение угла  $\alpha$  наклона касательной к образующей купола в его основании (см. прил. 3). При заданных радиусе основания  $R$  и параметре  $a$  цепной линии высота купола  $H$  и угол  $\alpha$  наклона касательной определяются выражениями

$$H = -a + \frac{a}{2} \left( e^{\frac{R}{a}} + e^{-\frac{R}{a}} \right), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{R}{a}} - e^{-\frac{R}{a}}}{2};$$

при заданных радиусе основания  $R$  и угле  $\alpha$  наклона касательной параметр  $a$  цепной линии и высота купола  $H$  –

$$a = \frac{R}{\ln(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1})}, \quad H = -a + \frac{a}{2} \left( e^{\frac{R}{a}} + e^{-\frac{R}{a}} \right);$$

при заданных высоте купола  $H$  и параметре  $a$  цепной линии радиус основания  $R$  и угол  $\alpha$  наклона касательной –

$$R = a \ln \left( \frac{H + a + \sqrt{H^2 + 2aH}}{a} \right), \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{e^{\frac{R}{a}} - e^{-\frac{R}{a}}}{2};$$

при заданных высоте купола  $H$  и угле  $\alpha$  наклона касательной радиус основания  $R$  и параметр  $a$  цепной линии –

$$R = a \ln \left( \frac{H + a + \sqrt{H^2 + 2aH}}{a} \right), \quad a = \frac{H}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} - 1}.$$

Математическую модель арки или свода на прямоугольном плане с направляющей в виде цепной линии можно получить, подставляя функцию,

заданную равенством (3.6), в уравнение цилиндрической поверхности (1.12). Модель такого свода представлена на рис. 3.4.

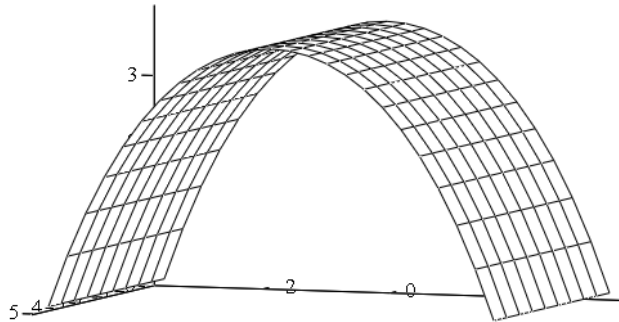


Рис. 3.4. Цилиндрический свод по цепной линии при значениях параметров  $a = 2$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м

Подобным способом было выполнено моделирование арки Gateway Arch, упомянутой выше. Форма этой арки, полученная с помощью уравнения (3.6), представлена на рис. 3.5 б.

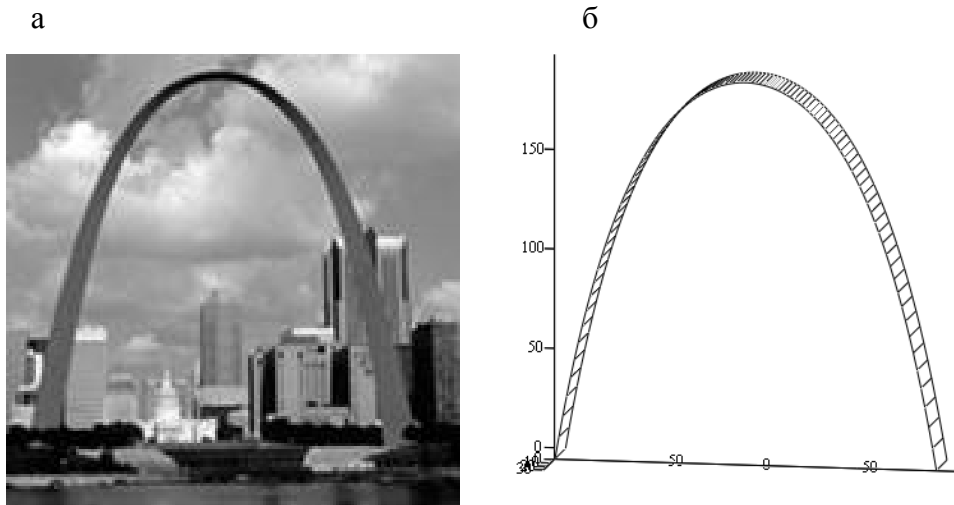


Рис. 3.5. Арка Gateway Arch в Сент-Луисе: фотография; б – модель

При моделировании стрельчатых арок или сводов непосредственное использование канонического уравнения цепной линии (3.6) становится неудобным. В подобных случаях уравнение цепной линии целесообразно записать в новой системе координат с началом в точке  $O_1(b, c)$ , принадлежащей цепной линии (рис. 3.6).

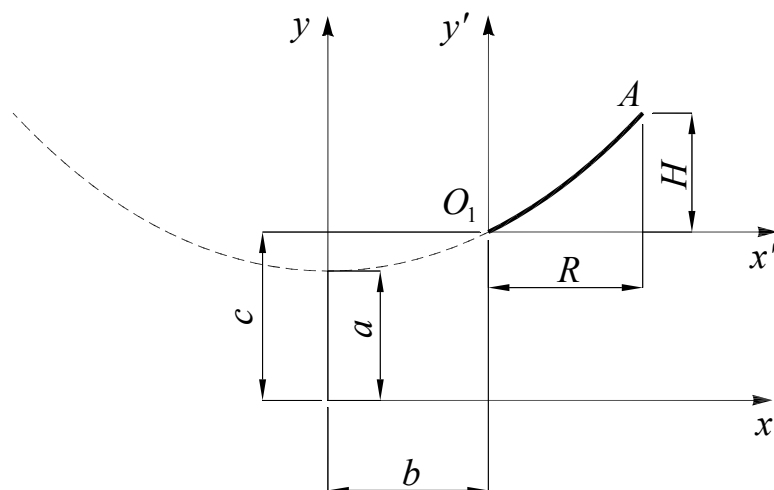


Рис. 3.6. Цепная линия

Соответствующее уравнение имеет вид

$$y' + c = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x'+b}{a}} + e^{-\frac{x'+b}{a}} \right).$$

Подставляя в это уравнение значения координат  $x' = y' = 0$ , находим

$$c = \frac{a}{2} \left( e^{b/a} + e^{-b/a} \right).$$

Тогда уравнение цепной линии в новой системе координат записывается равенством

$$y' = \frac{a}{2} e^{\frac{b}{a}} \left( e^{\frac{x'}{a}} - 1 \right) + \frac{a}{2} e^{-\frac{b}{a}} \left( e^{\frac{x'}{a}} - 1 \right).$$

Если ввести обозначение  $u = e^{\frac{b}{a}}$ , то значение параметра  $u$  может быть связано с конструктивными параметрами стрельчатого свода  $R$  и  $H$  (см. рис. 3.6). Подстановка координат  $(x' = R, y' = H)$  точки  $A$  цепной линии в ее уравнение дает следующее соотношение:

$$H = \frac{a}{2}u \left( e^{\frac{R}{a}} - 1 \right) + \frac{a}{2}u^{-1} \left( e^{-\frac{R}{a}} - 1 \right)$$

или

$$\frac{a}{2}u^2 \left( e^{\frac{R}{a}} - 1 \right) - Hu + \frac{a}{2} \left( e^{-\frac{R}{a}} - 1 \right) = 0.$$

Решая это уравнения относительно переменной  $u$ , находим

$$u = \frac{H + \sqrt{H^2 - a^2 \left( 2 - e^{\frac{R}{a}} - e^{-\frac{R}{a}} \right)}}{a \left( e^{\frac{R}{a}} - 1 \right)}.$$

С учетом этого решения и введенного обозначения  $u = e^{\frac{b}{a}}$ , уравнение формообразующего элемента цепной линии переписывается через конструктивные параметры свода в виде

$$y' = \frac{a}{2}u \left( e^{\frac{x'}{a}} - 1 \right) + \frac{a}{2}u^{-1} \left( e^{-\frac{x'}{a}} - 1 \right), \quad 0 \leq x' \leq R. \quad (3.7)$$

При моделировании стрельчатых сводов уравнение направляющей кривой удобно записать с использованием конструктивного параметра  $l_2$ , задающего ширину свода в плане. Необходимое для моделирования уравнение перевернутого отрезка цепной линии со смещением вверх на величину  $H$  может быть записано системе координат, принятой для моделирования сводов на прямоугольном плане (раздел 1.2), в следующем виде:

$$z = H - \left[ \frac{a}{2}u \left( e^{\frac{|y|}{a}} - 1 \right) + \frac{a}{2}u^{-1} \left( e^{-\frac{|y|}{a}} - 1 \right) \right], \quad -\frac{l_2}{2} \leq y \leq \frac{l_2}{2}. \quad (3.8)$$

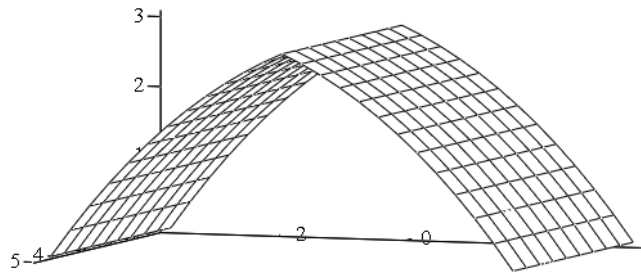


Рис. 3.7. Стрельчатый свод по цепной линии при значениях параметров  
 $H = 3$  м,  $a = 5$  м,  $l_1 = 5$  м,  $l_2 = 7$  м

Подставляя функцию  $z = f(y)$ , заданную уравнением (3.8), в равенство (1.12), получаем математическую модель стрельчатого свода, изображенную на рис. 3.7.

### 3.3. Применение кинематического метода при моделировании элементов пространственных конструкций каналовыми поверхностями

Каналовые поверхности (кинематические поверхности заметания, обобщенные цилиндры) относятся к нелинейчатым поверхностям, образованным движением непрерывного каркаса, вдоль некоторой криволинейной направляющей [78]. Если каркас является окружностью, то поверхность – циклическая, а при постоянном радиусе окружности – трубчатая. Такие поверхности могут быть использованы при проектировании пространственных конструкций [53], обладающих высокими эстетическими характеристиками и архитектурными достоинствами, также при проектировании соединительных поверхностей различным образом ориентированных участков трубопроводов разного диаметра [28, 33, 52, 69, 103], в авиастроении [88]. Существует несколько способов образования циклических поверхностей – инженерный [2, 5], метод сложения выпуклых кривых [108], метод переноса [55], ротативный [51, 158] и другие.

При геометрическом моделировании разнообразных поверхностей достаточно удобным оказывается кинематический метод построения поверхности [81, 83-84, 111, 141]. Рассмотрим общий кинематический метод построения каналовых поверхностей [95], в котором поверхность генерируется путем перемещения образующей. Это перемещение задается некоторой функцией параметра с физическим смыслом времени движения. В качестве параметров при получении уравнения поверхности примем угол поворота  $\varphi$  и «время»  $t$  при слежении за точками поверхности в винтовом движении наблюдателя вдоль некоторой направляющей кривой  $\vec{r}_n = \vec{r}_n(t)$  (рис. 3.8).

В этом случае положение точек поверхности можно определить равенством

$$\vec{r} = \vec{r}_n(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{n}(t)) \vec{n}(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{b}(t)) \vec{b}(t) + (\vec{\rho}(t, \varphi) \cdot \vec{\tau}(t)) \vec{\tau}(t), \quad (3.9)$$

где  $\vec{\tau}(t)$ ,  $\vec{n}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – единичные векторы касательной, нормали и бинормали направляющей кривой,  $\vec{\rho}(t, \varphi)$  – функция, переменная в общем случае по двум параметрам, определяющая характер изменения координатных линий  $t = \text{const}$ .

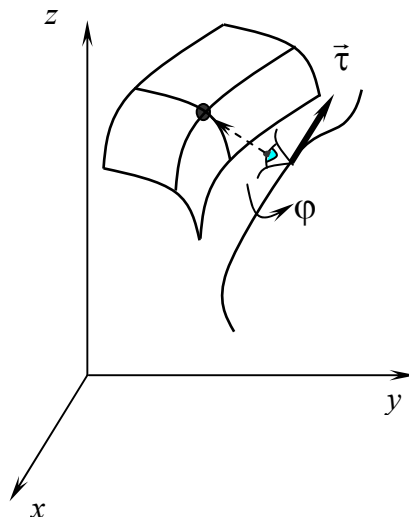


Рис. 3.8. Схема кинематического описания поверхности

При этом единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали определяются равенствами (2.12).

В случае замкнутого каркаса угол  $\varphi$  меняется в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Если каркас, задаваемый функцией  $\vec{\rho}(t, \varphi)$ , расположен в нормальной плоскости к направляющей кривой, то получаемая поверхность относится к так называемым нормальным поверхностям. Если  $\rho = \rho(t)$ , то поверхность циклическая, а при  $\rho = \text{const}$  – трубчатая.

Единичные векторы касательной, нормали и бинормали образуют подвижный ортогональный базис, перемещающийся вдоль кривой. Получаемая при этом координатная сетка каналовой поверхности согласована с изгибами направляющей кривой (без перекручивания координатных линий  $\varphi = \text{const}$ ).

Матричное представление равенства (3.9) для случая нормальной каналовой поверхности имеет вид

$$\hat{r}(t, \varphi) = \hat{r}_H(t) + \rho(t, \varphi) \cos \varphi \hat{n}(t) + \rho(t, \varphi) \sin \varphi T(t) \hat{n}(t), \quad (3.10)$$



где  $\hat{r}_h(t)$  – вектор-столбец координат точек направляющей кривой,  $\hat{n}(t)$  – вектор-столбец единичного вектора нормали направляющей кривой,  $T(t)$  – кососимметрическая вектор-матрица единичного вектора касательной к направляющей кривой

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_z & \tau_y \\ \tau_z & 0 & -\tau_x \\ -\tau_y & \tau_x & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве примера применения данной модели рассмотрим построение каналовой поверхности переменного сечения с синусоидальной направляющей. При этом направляющую кривую зададим равенством

$$\hat{r}_h(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ a \sin kt \end{pmatrix},$$

а переменный радиус циклической поверхности уравнением

$$\rho(t, \varphi) = d + r \sin \omega t.$$

Единичный вектор касательной к направляющей кривой в данном случае с использованием одного из уравнений (2.12) может быть записан в виде

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2 kt}} \{0; 1; ak \cos kt\}.$$

Векторы-функции  $\vec{n}(t)$  и  $\vec{b}(t)$  терпят разрывы в точках перегиба направляющей кривой. При этом векторы меняют направления на противоположные. Для упрощения кинематической модели поверхности векторы бинормали и нормали примем равными

$$\vec{b} = \{-1; 0; 0\}, \quad \vec{n}(t) = \vec{b} \times \vec{\tau}.$$

В матричных обозначениях

$$\hat{n}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ak \cos kt \end{pmatrix}.$$

Допущение о постоянстве направления вектора  $\vec{b}$  приводит к сдвигу координатных линий на величину  $\pi$  в точках перегиба. При визуализации поверхности с использованием сетки координатных линий этот «дефект» будет исключен, если интервалы разбиения для параметра  $\varphi$  выбирать в долях  $\pi$ .

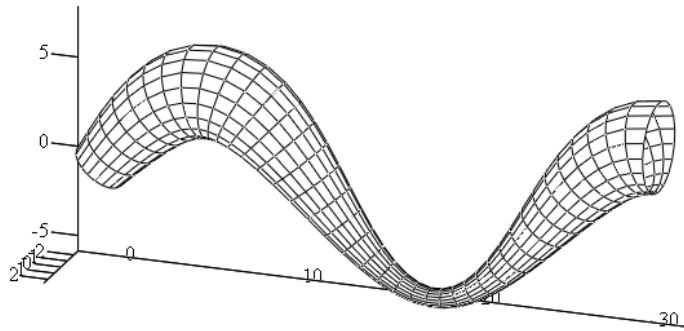


Рис. 3.9. Каналовая поверхность переменного сечения с синусоидальной направляющей

Подстановка в равенство (3.10) заданных и полученных функций дает модель искомой поверхности

$$\hat{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ a \sin kt \end{pmatrix} + \frac{(d + r \sin \omega t) \cos \varphi}{\sqrt{1 + a^2 k^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 0 \\ ak \cos kt \\ -1 \end{pmatrix} + (d + r \sin \omega t) \sin \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Соответствующая поверхность изображена на рис 3.9.

Рассмотрим другие примеры построения каналовых поверхностей. В качестве направляющей кривой возьмем дугу окружности

$$\hat{r}_H(t) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi,$$

а в качестве кривой, определяющей контур каналовой поверхности, выберем эпициклоиду, задав ее следующим уравнением:

$$\vec{p}(\varphi, t) = \left[ (a+b)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right] \vec{n} + \left[ (a+b)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right] \vec{b}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

В данном случае вектор бинормали  $\vec{b}$  направлен параллельно оси  $Oz$ , а векторы касательной  $\vec{\tau}$  и нормали  $\vec{n}$  вычислим, используя уравнения (2.12)

$$\vec{b} = \{0; 0; 1\}, \quad \vec{\tau} = \{-\sin t; \cos t; 0\}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \{-\cos t; -\sin t; 0\}.$$

Подставляя заданные и найденные функции в уравнение (3.9), получим математическую модель поверхности

$$\begin{aligned} \hat{r}(t, \varphi) = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} - \left[ (a+b)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right] \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \left[ (a+b)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\hat{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos t \left( R + (a+b)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right) \\ \sin t \left( R + (a+b)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \right) \\ (a+b)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{a+b}{a}\varphi\right) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Вид этой поверхности представлен на рис. 3.10.

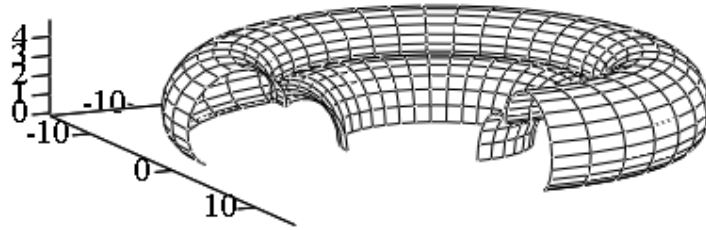


Рис. 3.10. Поверхность с образующей в виде эпициклоиды и направляющей в виде дуги окружности при значениях параметров  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $R = 10$

Если в качестве направляющей кривой выбрать синусоиду, заданную уравнением

$$\hat{r}_n(t) = \begin{pmatrix} 5t \\ 5 \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

а в качестве образующей кривой – удлиненную гипоциклоиду, заданную уравнением

$$\vec{\rho}(\varphi, t) = e^{kt} \left[ (b-a) \cos \varphi + a\lambda \cos\left(\frac{b-a}{a} \varphi\right) \right] \vec{n} + e^{kt} \left[ (b-a) \sin \varphi - a\lambda \sin\left(\frac{b-a}{a} \varphi\right) \right] \vec{b},$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi, \quad \lambda < 1,$$

то получим поверхность, вид которой представлен на рис. 3.11.

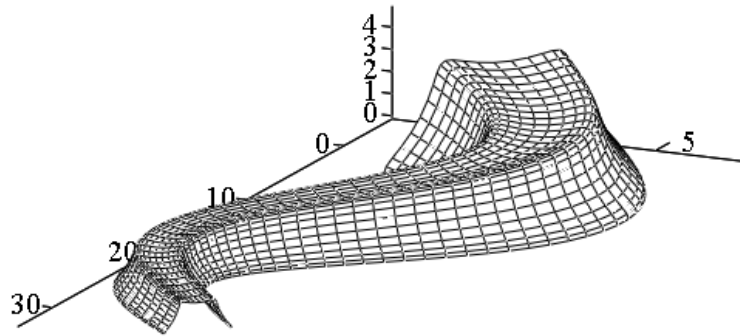


Рис. 3.11. Поверхность с образующей в виде удлиненной гипоциклоиды и направляющей в виде синусоиды при значениях параметров  $a = 1$ ,  $b = 6$ ,  $\lambda = 0,5$ ,  $k = -0,2$

В этом случае орт бинормали  $\vec{b}$  также направлен параллельно оси  $Oz$ , а векторы касательной  $\vec{\tau}$  и нормали  $\vec{n}$  вычисляются с использованием уравнений (2.12). При этом находим

$$\vec{b} = \{0; 0; 1\}, \quad \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \{1; \cos t; 0\}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \{-\cos t; 1; 0\}.$$

Подставляя заданные и найденные функции в уравнение (3.9) получаем математическую модель этой поверхности

$$\begin{aligned} \hat{r}(\varphi, t) = & \begin{pmatrix} 5t \\ 5 \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{kt} \left[ (b-a) \cos \varphi + a\lambda \cos\left(\frac{b-a}{a} \varphi\right) \right]}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\cos t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \\ & + e^{kt} \left[ (b-a) \sin \varphi - a\lambda \sin\left(\frac{b-a}{a} \varphi\right) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\hat{r}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 5t - \frac{e^{kt} \cos t \left[ (b-a) \cos \varphi + a\lambda \cos \left( \frac{b-a}{a} \varphi \right) \right]}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \\ 5 \sin t + \frac{e^{kt} \left[ (b-a) \cos \varphi + a\lambda \cos \left( \frac{b-a}{a} \varphi \right) \right]}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} \\ e^{kt} \left[ (b-a) \sin \varphi - a\lambda \sin \left( \frac{b-a}{a} \varphi \right) \right] \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Продemonстрируем возможность моделирования оболочки на прямоугольном плане в виде поверхности эллиптического тора, когда образующая – дуга окружности радиуса  $R$ , а направляющая – дуга эллипса, описываемого уравнением

$$\hat{r}_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

В данном примере направляющая кривая лежит в плоскости  $Oyz$ , и вектор бинормали  $\vec{b}$  направляющей кривой направлен вдоль оси  $Ox$ . Вычислим векторы касательной и нормали по формулам (2.12)

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \sin t \\ \frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{n} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix}.$$

Подстановка заданных и полученных уравнений в равенство (3.9) дает математическую модель искомой поверхности

$$\hat{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} - \frac{R \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \begin{pmatrix} 0 \\ b \cos t \\ a \sin t \end{pmatrix} + R \sin \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\hat{r}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} R \sin \varphi \\ a \cos t - \frac{R b \cos \varphi \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ b \sin t - \frac{R a \cos \varphi \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Вид этой поверхности при значении параметров  $a = 3$ ,  $b = 4$  и  $R = 1$  представлен на рис. 3.12.

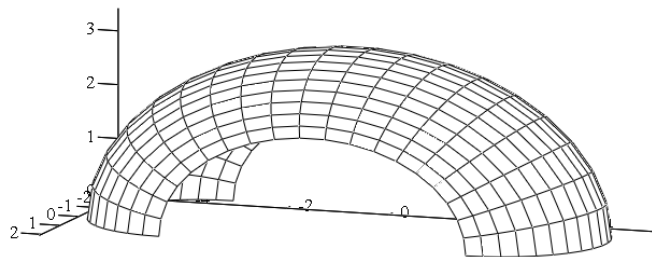


Рис. 3.12. Оболочка в форме фрагмента эллиптического тора

### 3.4. Моделирование пространственных конструкций путем трансформации поверхностей

Любую поверхность, заданную аналитическим уравнением, можно изменить путем применения линейных или нелинейных преобразований, заданных соответствующими матрицами. К линейным преобразованиям относятся, в частности, аффинные преобразования трехмерного пространства [92]. К аффинным преобразованиям относятся преобразования параллельного переноса, вращения, сдвига, растяжения (сжатия), зеркального отражения, подобия и гомотетии [95]. Для трансформации поверхности с помощью линейного преобразования могут быть использованы преобразования сдвига или растяжения. Примером использования преобразования растяжения может служить вывод общего уравнения однополостного гиперболоида в разделе 2.1.

Преобразование растяжения задается следующим матричным уравнением

$$\hat{r}_1(u, v) = A_D \hat{r}(u, v) + B_D \hat{r}_0 \quad (D - \text{от англ. } Dilate - \text{расширять}) \quad (3.11)$$

где

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 + (k-1)n_x^2 & (k-1)n_y n_x & (k-1)n_z n_x \\ (k-1)n_x n_y & 1 + (k-1)n_y^2 & (k-1)n_z n_y \\ (k-1)n_x n_z & (k-1)n_y n_z & 1 + (k-1)n_z^2 \end{pmatrix},$$

$$B_D = \begin{pmatrix} (1-k)n_x^2 & (1-k)n_y n_x & (1-k)n_z n_x \\ (1-k)n_x n_y & (1-k)n_y^2 & (1-k)n_z n_y \\ (1-k)n_x n_z & (1-k)n_y n_z & (1-k)n_z^2 \end{pmatrix},$$

$\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости, относительно которой происходит растяжение,  $\hat{r}_0$  – радиус-вектор точки, принадлежащей этой плоскости,  $k$  – коэффициент деформации ( $k > 1$  – растяжение,  $k < 1$  – сжатие).

Преобразование сдвига задается матричным уравнением



$$\hat{r}_2(u, v) = A_S \hat{r}(u, v) - B_S \hat{r}_0, \quad (S - \text{от англ. Shift} - \text{сдвиг}) \quad (3.12)$$

где

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 + n_x l_x & n_y l_x & n_z l_x \\ n_x l_y & 1 + n_y l_y & n_z l_y \\ n_x l_z & n_y l_z & 1 + n_z l_z \end{pmatrix}, \quad B_S = \begin{pmatrix} n_x l_x & n_y l_x & n_z l_x \\ n_x l_y & n_y l_y & n_z l_y \\ n_x l_z & n_y l_z & n_z l_z \end{pmatrix},$$

$\vec{n}$  – единичный вектор нормали к плоскости, относительно которой происходит сдвиг,  $\hat{r}_0$  – радиус-вектор произвольной точки этой плоскости,  $\vec{l}$  – вектор, задающий направление сдвига.

Иллюстрацией применения преобразований сдвига и растяжения может служить моделирование формы Лондонской мэрии (архитектор Норман Фостер, построена в 2002 году), изображенной на рис. 3.13 б, которая в линейном приближении может быть представлена в виде деформированной сферы. Процедура геометрического моделирования заключается в том, что для векторной функции, определяющей сферу,

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq \frac{9\pi}{16}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

последовательно применяются преобразования растяжения и сдвига, заданные матричными уравнениями (3.11) и (3.12). Соответствующая модель здания мэрии в Лондоне изображена на рис. 3.13 а. При моделировании были приняты следующие значения параметров преобразования растяжения:

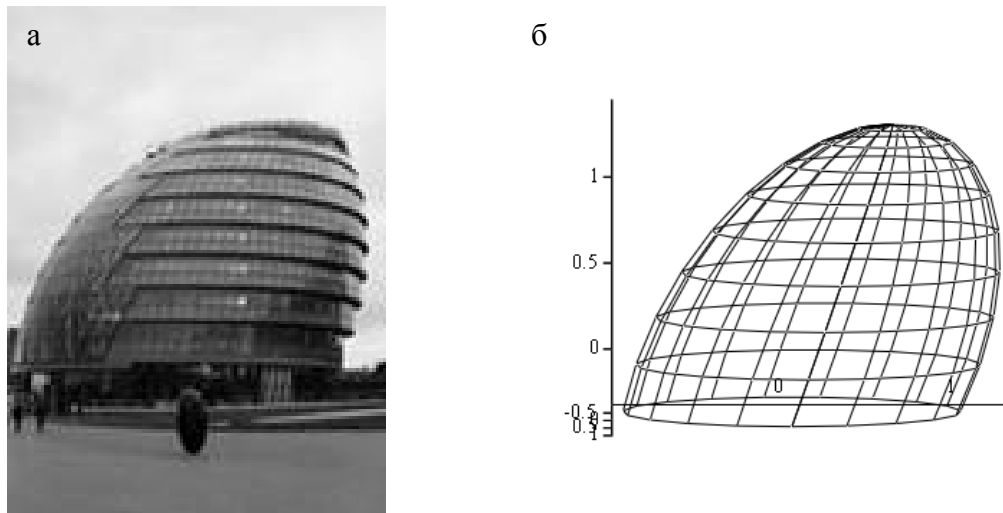


Рис. 3.13. Здание мэрии в Лондоне: а – фотография; б – модель

Более широкие возможности для получения разнообразных аналитических поверхностей дает применение нелинейных преобразований с использованием соответствующих функциональных матриц. Пусть задана некоторая поверхность следующим уравнением в параметрической форме:

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}.$$

где  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$ ,  $z(u, v)$  – непрерывные функции вместе со своими производными до второго порядка включительно.

Введем в рассмотрение функциональную матрицу  $A(u, v)$  размером  $3 \times 3$ . Результатом преобразования

$$\hat{r}' = A(u, v)\hat{r}(u, v)$$

является вектор-функция  $\hat{r}'(u, v)$ , которая определяет новую поверхность, удовлетворяющую заданным требованиям гладкости, если функция  $\hat{r}(u, v)$  имеет гладкость того же порядка, что и элементы функциональной матрицы.

Проиллюстрируем предложенный метод трансформации поверхностей примером преобразования эллипсоида, заданного уравнением

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}}} \cos u \\ \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}}} \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

где  $a, b, c$  – полуоси эллипсоида.

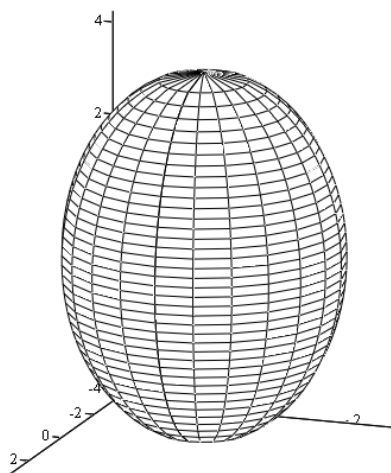


Рис. 3.14. Поверхность эллипсоида вращения

При значениях полуосей  $a = 3$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$  и области изменения переменных  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-4 \leq v \leq 4$  имеем поверхность эллипсоида вращения, изображенную на рис. 3.14.

Заданную уравнением (3.13) поверхность эллипсоида вращения можно трансформировать в яйцевидную поверхность с помощью матрицы

$$A_1(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 - 0,05v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - 0,05v} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение новой поверхности, получаемой путем нелинейного преобразования с использованием указанной матрицы записывается в виде

$$\hat{r}'(u, v) = A_1(v)\hat{r}(u, v).$$

Соответствующая поверхность изображена на рис. 3.15 а. Выбирая для нелинейного преобразования поверхности эллипсоида вращения матрицы

$$A_2(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-0,05v} + 0,05 \sin(7v) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0,05v} + 0,05 \sin(7v) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-0,05v^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-0,05v^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

получаем новые поверхности, представленные на рис. 3.15 б, в соответственно.

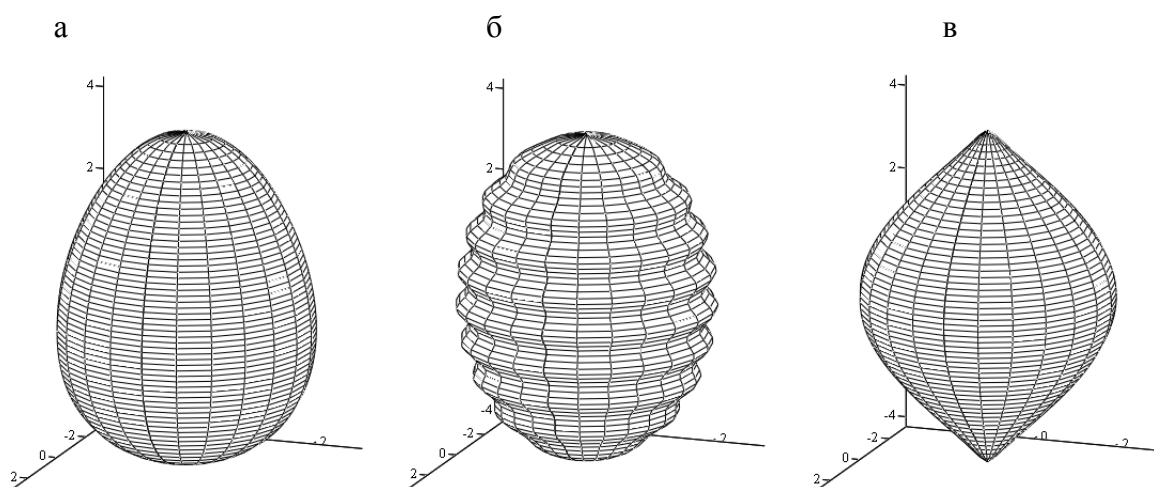


Рис. 3.15. Трансформации эллипсоида в результате гладких преобразований: а – поверхность при  $A_1(v)$ ; б – поверхность при  $A_2(v)$ ; в – поверхность при  $A_3(v)$

### 3.5. Моделирование сложных сплошных и сетчатых пространственных конструкций методом композиции аналитических примитивов

В предыдущих разделах были рассмотрены методы моделирования пространственных конструкций путем использования аналитического представления поверхностей и их фрагментов, которые могут быть названы аналитическими примитивами. Составные конструкции могут быть получены из соответствующих аналитических примитивов методом композиции, когда каждый элемент сложной конструкции представлен разными аналитическими выражениями, но благодаря возможностям геометрического моделирования происходит формирование цельной конструкции, удовлетворяющей заданным конструктивным требованиям. Объединение аналитических примитивов может быть выполнено с использованием группы аффинных преобразований движения, к которым относятся преобразования поворота и параллельного переноса.

Рассмотрим кратко возможности матричного представления преобразований группы движения. Для этого формализуем понятия преобразования поворота (вращения) и параллельного переноса.

Вращение вокруг оси – это преобразование, при котором все точки оси остаются неподвижными, а остальные точки пространства поворачиваются в плоскостях, перпендикулярных этой оси, на один и тот же угол  $\varphi$ . Пусть ось вращения проходит через произвольно заданную точку  $M_1$  пространства с радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , а ее положение определяется единичным вектором  $\vec{l}$ . Тогда преобразование поворота вокруг этой оси на угол  $\varphi$  записывается следующим матричным уравнением:

$$\hat{r}' = \hat{r} + [L^2(1 - \cos \varphi) + L \sin \varphi](\hat{r} - \hat{r}_1),$$

где  $L = \begin{pmatrix} 0 & -l_z & l_y \\ l_z & 0 & -l_x \\ -l_y & l_x & 0 \end{pmatrix}$ .

Вид матрицы  $L$  соответствует направлению поворота против хода часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{l}$ .

В частном случае вращения вокруг оси  $Oz$  преобразование поворота [95] записывается в виде

$$\hat{r}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{r}. \quad (3.14)$$

Параллельный перенос – это преобразование, при котором все точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Параллельный перенос задается постоянным вектором  $\vec{a}$ , следовательно, положение произвольной точки  $M$  после параллельного переноса определяется векторным равенством

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$$

или в матричной форме

$$\hat{r}' = \hat{r} + \hat{a},$$

где

$$\hat{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \hat{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

В качестве примера использования преобразований движения составим пространственную конструкцию из четырех одинаковых элементов, моделируемых поверхностями регулярных коноидов, состыкованных друг с

другом. Для задания базового элемента регулярного коноида воспользуемся уравнением

$$\vec{r} = (1-v)(1-t)\left\{\frac{1}{2}; 0; 1\right\} + (1-v)t\left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\} + v\left\{\cos\frac{\pi}{2}t; \sin\frac{\pi}{2}t; 0\right\}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1,$$

полученным согласно методу, изложенному в разделе 2.1, при условии, что отрезки направляющей прямой и криволинейной направляющей заданы уравнениями

$$\vec{r}_{12} = \{0,5; 0; 1\} + \{0; 0,5; 1\}t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\vec{r}_{34} = \{\cos u; \sin u; 0\}, \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

Стыковку элементов конструкции осуществим путем преобразования поворота на углы  $\varphi_1 = \pi/4$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_3 = 3\pi/4$  вокруг вертикальной оси  $Oz$  с использованием матриц поворота (3.14). Результат моделирования представлен на рис 3.16.

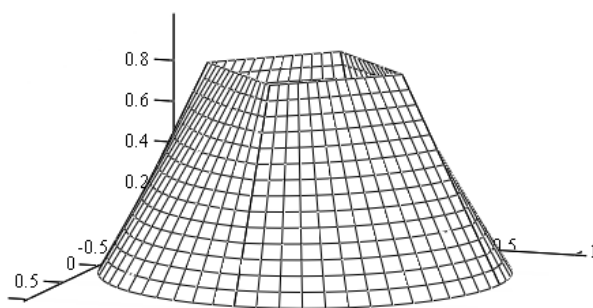


Рис. 3.16. Составная поверхность из элементов в форме регулярного коноида

В качестве другого примера композиционного моделирования рассмотрим формирование конструкции из отдельных элементов, имеющих форму гипаров. Каждый элемент представляет собой гипар на плане в виде симметричного выпуклого четырехугольника. Как было показано в разделе 1.3, для построения базового элемента составной конструкции необходимо

воспользоваться уравнением (1.27), задав четыре вершины одного гипара. Остальные элементы поверхности задаются поворотом первого элемента относительно одной из вершин на угол, определяемый количеством элементов.

Смоделируем пятилепестковую поверхность, задав следующие координаты вершин базового элемента:

$$M_1\left(15; 15\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}; 0\right), M_2(0; 0; 7), M_3\left(15; 15\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}; 0\right), M_4(20; 0; 10).$$

Стыковку элементов конструкции осуществим путем преобразования поворота на углы  $\varphi_1 = 2\pi/5$ ,  $\varphi_2 = 4\pi/5$ ,  $\varphi_3 = 6\pi/5$  и  $\varphi_4 = 8\pi/5$  вокруг вертикальной оси  $Oz$  с использованием матриц поворота (3.14). Результат моделирования представлен на рис. 3.17.

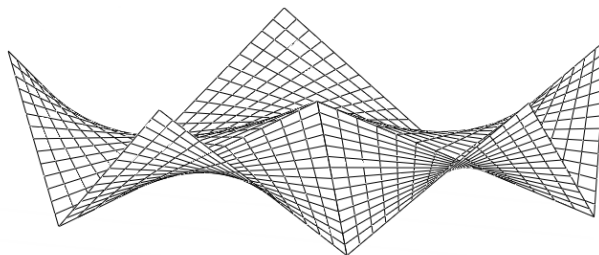


Рис. 3.17. Составная поверхность из элементов в форме гипаров

Подобным образом можно моделировать зонтичные купола и оболочки – циклически симметричные пространственные конструкции, образованные из  $m$  тождественных элементов. Зонтичные оболочки образуются из повторяющихся в круговом направлении однотипных отсеков. В плане зонтичные оболочки могут описываться непрерывной плавной замкнутой кривой, например круговой синусоидой, или повторяющие отсеки оболочки могут пересекаться под некоторым углом [54, 65, 70, 79, 86, 117, 155]. Зонтичные купола или так называемые купола с распалубками являются элементами большой архитектурно-художественной ценности [150]. Распалубки зонтичных куполов, помимо придания конструкции легкости, воздушности, создают возможность



многочисленных вариаций декора, а игра света и тени на криволинейных поверхностях делает их достаточно живописными и привлекательными [44].

В общем случае компоновка составной конструкции может быть осуществлена путем совместного применения преобразований поворота и параллельного переноса. Проиллюстрируем этот прием примером моделирования башни Шухова на Шаболовке в Москве. В качестве базового элемента могут быть выбраны два стержня нижней секции, являющимися образующими двухпараметрического семейства линейчатой поверхности однополостного гиперboloида. Уравнение (2.1) этой поверхности было получено в разделе 2.1 с использованием матриц преобразований поворота и растяжения. Математические модели поверхности второй и следующих секций могут быть получены аналогично, а их перемещение в пространстве выполнены с использованием преобразования параллельного переноса по вертикали. Уравнения секций имеют следующий вид:

– первая секция

$$\hat{r}_{11} = M_1 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{12} = M_1 A(\varphi_k) \left( \hat{r}_0 + \hat{l}_2 t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} \right), -\frac{25}{c_1} \leq t \leq 0;$$

– вторая секция

$$\hat{r}_{21} = M_2 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{22} = M_2 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}, -\frac{25}{c_2} \leq t \leq 0;$$

– третья секция

$$\hat{r}_{31} = M_3 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{32} = M_3 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \end{pmatrix}, -\frac{25}{c_3} \leq t \leq 0;$$

– четвертая секция

$$\hat{r}_{41} = M_4 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{42} = M_4 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad -\frac{25}{c_4} \leq t \leq 0;$$

– пятая секция

$$\hat{r}_{51} = M_5 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{52} = M_5 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix}, \quad -\frac{20}{c_5} \leq t \leq \frac{5}{c_5};$$

– шестая секция

$$\hat{r}_{61} = M_6 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_1 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 140 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{r}_{62} = M_6 A(\varphi_k) (\hat{r}_0 + \hat{l}_2 t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 140 \end{pmatrix}, \quad -\frac{20}{c_6} \leq t \leq \frac{5}{c_6},$$

где  $\varphi_k = 2\pi k/n_i$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_i$ ;  $n_i$  – количество стержней в  $i$ -ой секции, совпадающих с образующей одного семейства во всех ее положениях;

$$\hat{r}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} a_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} a_6 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & c_6 \end{pmatrix};$$

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a_1 = b_1 = 16,25$ ;  $c_1 = 34,844$ ;  $a_2 = b_2 = 13,0$ ;  $c_2 = 33,333$ ;  $a_3 = b_3 = 9,2$ ;  $c_3 = 25,316$ ;  
 $a_4 = b_4 = 6,5$ ;  $c_4 = 24,691$ ;  $a_5 = b_5 = 3,5$ ;  $c_5 = 12,78$ ;  $a_6 = b_6 = 1,8$ ;  $c_6 = 10,912$ .

Параметры однополостных гиперboloидов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ , моделирующих данную стержневую конструкцию, а также границы изменения параметра  $t$  определяются через конструктивные параметры башни (размеры секций в горизонтальных сечениях и их высоту). Система уравнений для определения этих параметров получается путем подстановки координат точек секции в любое из уравнений однополостного гиперboloида (2.1) или в его каноническое уравнение.

Модель составной стержневой конструкции и фотография башни Шухова изображены на рис. 3.18.

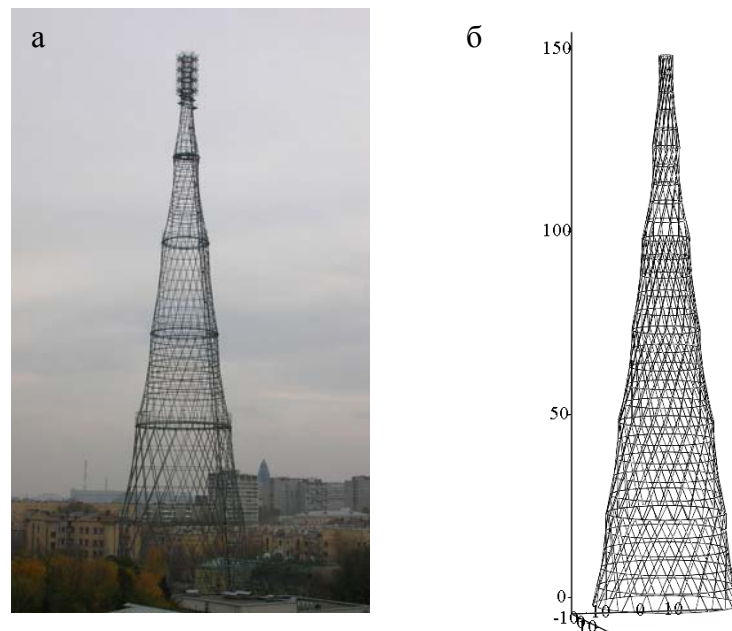


Рис. 3.18. Составные поверхности из элементов в форме однополостных гиперboloидов:  
 а – башня Шухова на Шаболовке; б – математическая модель

### **Выводы по главе 3**

1. Получен чередующийся сплайн первого порядка гладкости, преимуществом которого является возможность его задания только координатами узловых точек, возможность использования его в качестве 3D-сплайна и слабая осцилляция в окрестности этих точек. Показана возможность применения таких сплайнов для задания образующих сложных поверхностей в задачах моделирования элементов пространственных конструкций.

2. Показана возможность практически неограниченного увеличения количества поверхностей за счет использования произвольных кривых в качестве образующих или направляющих линий поверхностей, а также с помощью матричных алгоритмов различных линейных и нелинейных преобразований.

3. Предлагаемые алгоритмы позволяют для достижения архитектурной выразительности использовать произвольное сочетание, неограниченное имеющимся примитивами в стандартных прикладных графических пакетах, образующих и направляющих линий при моделировании поверхностей.

#### **4. ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТЕНТОВЫХ И ЛИСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ, МОДЕЛИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТАМИ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ**

В последние годы наряду с традиционными листовыми конструкциями широкое распространение получили легкие тентовые конструкции, которые обладают рядом преимуществ – дешевизна, быстрота сборки, мобильность, многообразие форм и цветовой гаммы, архитектурная выразительность. В отечественной и зарубежной строительной практике тентовые покрытия применяются для перекрытия больших открытых площадей, торговых центров, выставочных площадей, а также могут быть использованы в спортивных сооружениях, например для покрытия теннисных кортов, плавательных бассейнов, стадионов, и для сезонных сооружений (мини-кафе, места проведения культурно-массовых мероприятий) [27, 64, 97, 129, 160]. При этом область применения тентовых покрытий непрерывно расширяется, чему способствует совершенствование материалов мягких оболочек, а также развитие компьютерных технологий, позволяющих моделировать и рассчитывать конструкции.

В целом тентовые конструкции подразделяются на пневматические – воздухоопорные и воздуонесомые, каркасные и натяжные [48]. В пневматических конструкциях форма поддерживается давлением воздуха внутри оболочки, в каркасных конструкциях металлический каркас несет все нагрузки, в натяжных конструкциях сама оболочка за счёт своей геометрии является несущим элементом, при этом конструкция поддерживается с помощью стоек и мачт, снабжённых системой канатных растяжек или винтовых распорок.

При проектировании листовых и тентовых тканевых конструкций принята следующая технологическая последовательность: на первом этапе определяется форма конструкции, далее в необходимых случаях проводится анализ ее нагружения и затем выполняется построение карт раскроя элементов

конструкции (ее выкройка) [169]. В основном проектирование натяжных тентовых оболочек идет с использованием различных численных [58, 123, 126, 163-164, 170] и приближенных методов [3, 8, 137, 162]. В мировой практике проектирования тентовых конструкций используются САД системы на основе численных методов, но эти программные комплексы предназначены в основном для проектирования парусного оснащения судов [122], что значительно ограничивает их область применения, и они используют в основном громоздкий аппарат метода конечных элементов, либо упрощенный вариант геометрического моделирования, позволяющий решать только узкие задачи нахождения формы. К тому же стоят эти программные комплексы достаточно дорого для российского рынка. В работах [121, 167-168] предложен метод натянутых сеток, который реализуется в программных комплексах для проектирования тентовых конструкций FabricCAD и КЗ-тент [173]. Также численные методы построения разверток используются при проектировании обводов судов [34-35, 41-42], конструкций в машиностроении [38, 116], при изготовлении одежды [115, 114]

С учетом большого разнообразия форм разворачивающихся поверхностей (см. главу 3) в технологии проектирования тентовых и листовых конструкций могут с успехом быть применены аналитические методы.

В данной главе предлагаются аналитические алгоритмы построения кривых (линий кроя) на плоскости развертки, в которые трансформируются кривые, принадлежащие разворачивающимся поверхностям. Эти алгоритмы могут быть легко импортированы в существующие компьютерные математические и графические пакеты при создании соответствующих функций пользователя.

#### 4.1. Использование аналитических методов при раскрое линейчатых элементов тентовых конструкций в форме цилиндрической, конической и торсовой поверхностей

В главе 2 был рассмотрен один из возможных, и достаточно простых, методов формообразования конструктивных элементов в виде развертывающихся поверхностей, который аналитически реализуется на основе процедуры параллельного или центрального проецирования произвольной направляющей линии на заданную плоскость. В этом случае для элемента тентовой конструкции известны аналитические выражения кривых линий его ограничивающих.

Рассмотрим общий алгоритм построения кривых (линий края) на плоскости развертки, в которые трансформируются кривые, принадлежащие цилиндрическим и коническим поверхностям [95].

Пусть задана гладкая кривая  $\vec{r}_n = \{x(u), y(u), z(u)\}$  ( $u_1 \leq u \leq u_2$ ) на цилиндрической поверхности таким образом, что один из векторов координатного базиса  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  совпадает с вектором  $\vec{l}$  и  $\dot{\vec{r}}_n \times \vec{l} \neq 0$  (точкой сверху обозначена производная по параметру). Для определенности положим  $\vec{k} = \vec{l}$ . Найдем уравнение той кривой, в которую трансформируется кривая  $\vec{r}_n(u)$  при развертывании цилиндрической поверхности. Введем в рассмотрение декартову плоскость развертки  $(\xi, \eta)$ . Тогда одна из координат получаемой кривой определяется как длина проекции заданной направляющей кривой на плоскость, перпендикулярную образующей цилиндрической поверхности, а другая совпадает с пространственной координатой  $z$ . То есть:

$$\begin{cases} \xi = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du, \\ \eta = z(u), \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (4.1)$$

Если задана гладкая кривая  $\vec{r}_h = \{x(u), y(u), z(u)\}$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$  на конической поверхности, то преобразованную кривую, получаемую в результате разворачивания конической поверхности, удобнее искать в полярных координатах

$$\begin{cases} R = R(u), \\ \psi = \psi(u), \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

При этом элементарный полярный угол  $d\psi$  находим как отношение «приведенной» элементарной дуги  $ds' = \sqrt{ds^2 - dR^2}$  к расстоянию  $R$  от произвольной точки кривой до вершины  $\vec{r}_s = \{x_s, y_s, z_s\}$  конической поверхности

$$d\psi = \frac{\sqrt{ds^2 - dR^2}}{R} \quad \text{или} \quad d\psi = \frac{\sqrt{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2 \dot{r}_h^2 - ((\vec{r}_h - \vec{r}_s) \cdot \dot{r}_h)^2}}{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2} du.$$

Уравнения искомой кривой на развертке конической поверхности в параметрической форме принимают вид

$$\begin{cases} R = |\vec{r}_h - \vec{r}_s|, \\ \psi = \int_{u_1}^u \frac{\sqrt{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{du}\right)^2 - \left((\vec{r}_h - \vec{r}_s) \cdot \frac{d\vec{r}_h}{du}\right)^2}}{(\vec{r}_h - \vec{r}_s)^2} du, \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (4.2)$$

Если требуется выполнить разворачивание торсовой поверхности, заданной уравнением (2.8), то процедуру разворачивания поверхности можно связать с нахождением той кривой, в которую преобразуется ребро возврата  $\vec{r}_h = \vec{r}_h(u)$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$  при разворачивании поверхности касательных в плоскость. Развертку этой кривой будем искать из условия, что длины дуг  $ds$  и кривизны  $\kappa$  для направляющей кривой и ее развертки в соответствующих точках совпадают. С учетом определений кривизны плоских и пространственных



кривых находим приращение угла  $\varphi$  при перемещении точки на расстояние  $ds$  вдоль плоской кривой на развертке

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^3} \quad \text{или} \quad d\varphi = \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^3} ds = \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^2} du.$$

Вводя в рассмотрение плоскость развертки  $O\xi\eta$ , ось  $O\xi$  которой направлена по касательной к направляющей кривой в ее начальной точке, уравнения искомой линии в параметрической форме на плоскости развертки принимают вид

$$\begin{cases} \xi = \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_H(t)| \cos \left( \int_{u_1}^t \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^2} du \right) dt, \\ \eta = \int_{u_1}^u |\dot{\vec{r}}_H(t)| \sin \left( \int_{u_1}^t \frac{|\dot{\vec{r}}_H(u) \times \ddot{\vec{r}}_H(u)|}{|\dot{\vec{r}}_H(u)|^2} du \right) dt, \end{cases} \quad u_1 \leq u \leq u_2. \quad (4.3)$$

В качестве примера рассмотрим построение развертки элемента поверхности касательных (рис. 4.1 а), заданной уравнением

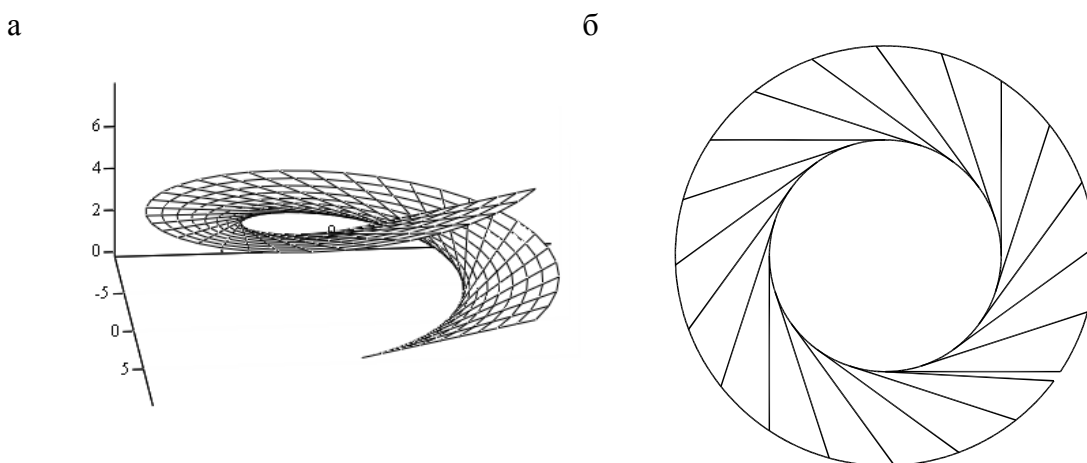


Рис. 4.1. Поверхность касательных и ее развертка: а – поверхность касательных; б – развертка

$$\hat{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 5 \cos u \\ 5 \sin u \\ u \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \sin u \\ 5 \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 8.$$

Кривые  $r_1(u, 0)$  и  $r_2(u, 8)$ , ограничивающие элемент торсовой поверхности, задаются уравнениями:

$$\hat{r}_1(u, 0) = \begin{pmatrix} 5 \cos u \\ 5 \sin u \\ u \end{pmatrix}, \quad r_2(u, 8) = \begin{pmatrix} 5 \cos u - \frac{40 \sin u}{\sqrt{26}} \\ 5 \sin u + \frac{40 \cos u}{\sqrt{26}} \\ u + \frac{8}{\sqrt{26}} \end{pmatrix}.$$

Для получения развертки рассматриваемой торсовой поверхности в соответствии с алгоритмом (4.3) выполнено численное интегрирование и построены развертки линий  $\hat{r}_1(u)$  и  $\hat{r}_2(u)$ . Соответствующий результат представлен на рис. 4.1. Аналогичный результат может быть получен аналитически с учетом того, что кривизна винтовой линии постоянна и интегралы в равенствах (4.3) могут быть вычислены в конечном виде.

## 4.2. Описание алгоритма и программы для раскроя элементов поверхностей конструкций

В разделе 4.1. был предложен аналитический метод построения кривых, принадлежащих коническим, цилиндрическим и торсовым поверхностям, на плоскости развертки. Для некоторых кривых можно получить решение в аналитическом виде, в остальных случаях требуется применение численных методов.

Эскизное проектирование пространственных конструкций и их выкроек целесообразно проводить с использованием универсальных математических систем, приспособленных для символического и численного решения математических задач – Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad.

При изготовлении пространственных тентовых конструкций нужна программная среда, позволяющая согласно предложенным алгоритмам визуализировать трехмерные модели пространственных конструкций, выполнять расчет линий края с применением одного из встроенных языков программирования и получать выкройки с назначенными припусками на швы в требуемом масштабе. Для реализации алгоритма была выбрана программа AutoCAD. Алгоритм реализован для тентовых конструкций в форме многоклинного шатра (рис. 4.2). Клинья шатра моделируются поверхностью эллиптического цилиндра.

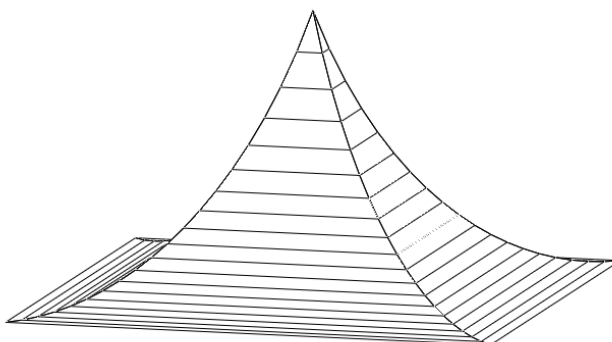


Рис. 4.2. Модель многоклинного шатра

Вводными данными для алгоритма являются конструктивные параметры шатра: высота купола  $h$ , радиус окружности, описанной около основания  $R$  и количество сторон основания  $n$ . Выходными данными является чертеж выкройки элементов поверхности.

Алгоритм состоит из следующих блоков.

1. Ввод исходных данных – высоты купола  $h$ , радиуса окружности, описанной около основания  $R$  и количества сторон основания  $n$ .
2. Нахождение в символьном виде кривых, описывающих границы клиньев.
3. Запись в символьном виде выражений, описывающих развертки кривых на плоскости.
4. Построение разверток с использованием численных методов.

Описанный алгоритм реализован в программе AutoCAD с применением встроенного языка программирования VBA. При написании программы были использованы операторы ветвления, операторы цикла, операторы изменения естественного порядка выполнения программы, а также команды AutoCAD.

Результат работы программы представлены в разделе 4.3.

### 4.3. Раскрой элементов поверхностей конструкций с использованием аналитических алгоритмов

Рассмотрим алгоритм построения математических моделей поверхностей и их разверток на примере четырехклинного шатра, модель которого изображена на рис. 4.2

Данный шатер в случае использования тентовых материалов представляет собой натяжную конструкцию, опирающуюся на многоугольное основание и натягиваемую при помощи центральной стойки. В общем случае конструктивными параметрами такого шатра являются три величины: высота купола  $h$ , радиус окружности, описанной около основания  $R$  и количество сторон основания  $n$ . В данном примере эти параметры соответственно равны  $h = 3,5$  м,  $R = 5$  м,  $n = 4$ . Поверхность шатра составлена из клиньев, каждый из которых будем моделировать поверхностью эллиптического цилиндра.

Первый клин задается уравнением эллиптического цилиндра

$$\left(\frac{x - R \cos \alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{z - b}{b}\right)^2 = 1, \quad (4.4)$$

ограниченного плоскостями

$$z = 0, \quad y = \pm x \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $R$  – радиус окружности, описанной около основания шатра,  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса,  $\alpha = \pi/n$  – половина внутреннего угла сектора шатра (см. рис. 4.3),  $n$  – количество сторон основания шатра.

Полуоси эллипса (см. рис. 4.4) можно выразить через конструктивные параметры шатра, подставляя в уравнение (4.4) координаты точки  $A$  и вводя обозначение  $a = kb$ :

$$\left(\frac{R \cos \alpha}{kb}\right)^2 + \left(\frac{h-b}{b}\right)^2 = 1.$$

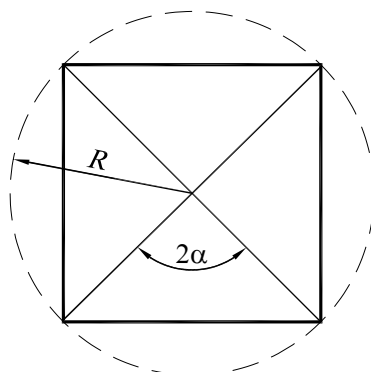


Рис. 4.3. Схема основания купола

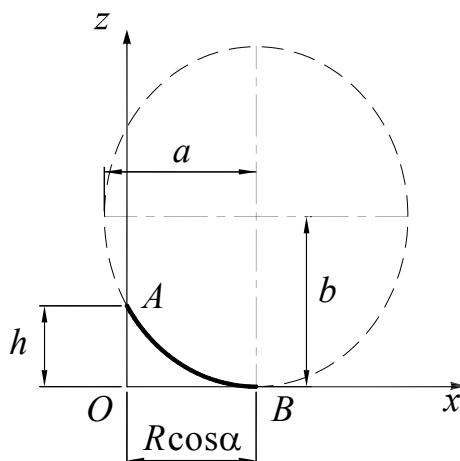


Рис. 4.4. Сечение эллиптического цилиндра

Отсюда

$$b = \frac{(R \cos \alpha)^2 + h^2 k^2}{2hk^2} \text{ и } a = \frac{(R \cos \alpha)^2 + h^2 k^2}{2hk}.$$

Математическая модель клина в форме элемента цилиндрической поверхности описывается уравнением

$$\vec{r}_1 = v\vec{r}_1(t) + (1-v)\vec{r}_2(t), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq t \leq R \cos \alpha,$$

$$\text{где } \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \operatorname{tg} \alpha \\ b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \operatorname{tg} \alpha \\ b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \end{pmatrix} -$$

функции, задающие направляющие кривые элемента линейчатой поверхности.

Элементы остальных клиньев шатра получены поворотом первого клина относительно оси  $Oz$  на углы  $\pi/2$ ,  $\pi$  и  $3\pi/2$  с помощью соответствующих матриц аффинного преобразования.

Так как данный шатер составлен из элементов цилиндрической поверхности, то для получения выкройки элементов шатра можно использовать метод, изложенный в разделе 4.1. Запишем уравнение направляющей эллиптического цилиндра в следующей параметрической форме:

$$\begin{cases} \left( \frac{x - R \cos \alpha}{a} \right)^2 = \sin^2 \varphi, \\ \left( \frac{z - b}{b} \right)^2 = \cos^2 \varphi; \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x - R \cos \alpha}{a} = \pm \sin \varphi, \\ \frac{z - b}{b} = \pm \cos \varphi; \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a},$$

для изображенной на рис 4.4 части эллипса находим

$$\begin{cases} x = R \cos \alpha - a \sin \varphi, \\ z = b - b \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a}.$$

Тогда уравнение направляющей линии цилиндрической поверхности принимает вид

$$\vec{r}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \alpha - a \sin \varphi \\ -(R \cos \alpha - a \sin \varphi) \operatorname{tg} \alpha \\ b - b \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a}.$$

Линия, ограничивающая элемент цилиндрической поверхности шатра, заданная уравнением  $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ , после разворачивания цилиндрической поверхности в плоскость  $O\xi\eta$  согласно формуле (4.1) описывается равенствами

$$\begin{cases} \xi = \int_s ds, \\ \eta = y(\varphi); \end{cases}$$

где  $ds = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ .

Так как  $dx = -a \cos \varphi d\varphi$ , а  $dz = b \sin \varphi d\varphi$ , то

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi + b^2} d\varphi.$$

С учетом найденных выражений получаем уравнение линии края

$$\begin{cases} \xi = \int_0^\varphi \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi + b^2} d\varphi, \\ \eta = -(R \cos \alpha - a \sin \varphi) \operatorname{tg} \alpha. \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a}.$$

Аналогично можно получить уравнение линии края, которая соответствует ребру шатра  $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$ . Выкройка клина шатра, полученная с помощью разверток линий  $\vec{r}_1(t)$  и  $\vec{r}_2(t)$ , представлена на рис. 4.5.



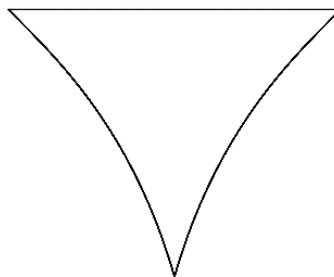


Рис. 4.5. Выкройка клина шатра

Рассмотренную модель тентового шатра можно несколько видоизменить (см. рис. 4.6) для придания визуально воспринимаемой гладкости перехода от одного клина к другому. Для этого разобьем каждый клин (грань) на три элемента, при этом средний элемент на каждой «грань» также моделируется поверхностью эллиптического цилиндра, а крайние элементы моделируются коническими поверхностями.

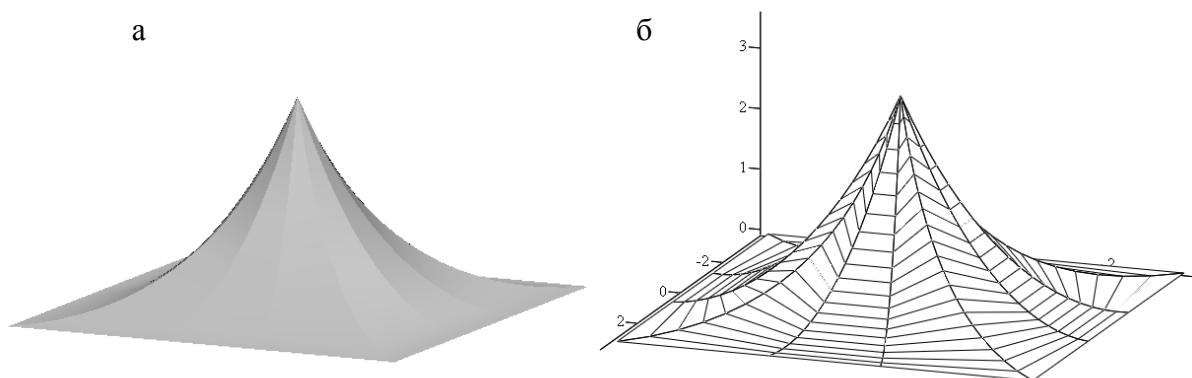


Рис. 4.6. Модель тентового шатра: а – общий вид модели; б – схема расположения образующих цилиндрических и конических элементов

Средний элемент передней «грань» купола (рис. 4.7) зададим уравнением эллиптического цилиндра (4.4), ограниченного плоскостями

$$z = 0, \quad y = \pm x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$$

(при этом используются те же параметры модели, что и в рассмотренном выше случае четырехклинного шатра).

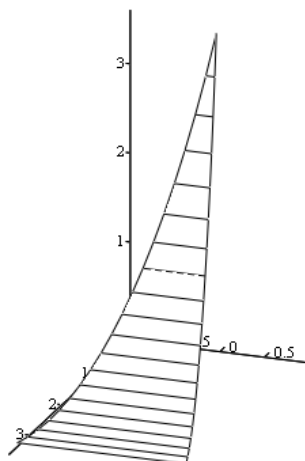


Рис. 4.7. Модель среднего элемента грани

Крайний левый элемент шатра (см. рис. 4.8) на передней «грани» моделируются уравнением

$$\vec{r}_{II} = v\vec{r}_2(t) + (1-v)\vec{r}_3(t), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad 0 \leq t \leq R \cos \alpha,$$

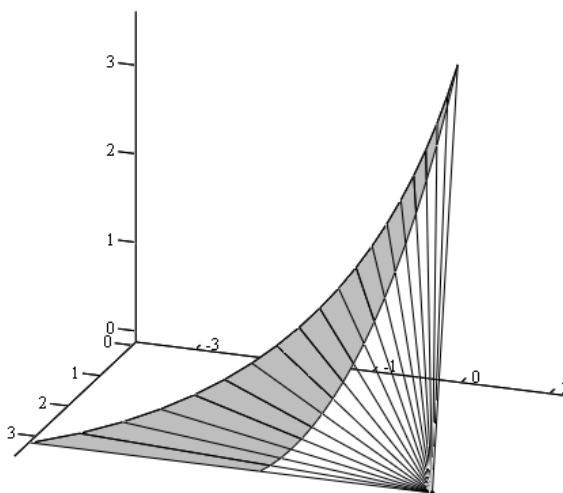


Рис. 4.8. Модель крайнего левого элемента грани

где функция, задающая направляющую кривую  $\vec{r}_3(t)$  конической поверхности, может быть получена центральным проецированием по формуле (4.18) направляющей кривой  $\vec{r}_2(t)$  на плоскость  $y = -xtg\alpha$ , при этом центр

проецирования расположен в точке  $M_S(R \cos \alpha, d, 0)$  в основании шатра. Вид функции  $\vec{r}_3(t)$  определяется равенством

$$\vec{r}_3(t) = \vec{r}_S + \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}}{(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}} (\vec{r}_2(t) - \vec{r}_S),$$

здесь  $\vec{r}_S = \{R \cos \alpha; d; 0\}$  – радиус-вектор вершины конической поверхности,  $\vec{n} = \{\sin \alpha; \cos \alpha; 0\}$  – нормаль к плоскости проецирования,  $\vec{r}_0 = \{0; 0; 0\}$  – радиус-вектор точки, принадлежащей плоскости проецирования.

Для получения уравнения линии  $\vec{r}_3(t)$  выполним следующие вычисления

$$(\vec{r}_0 - \vec{r}_S) \cdot \vec{n} = -R \cos \alpha \sin \alpha - d \cos \alpha = -(R \sin \alpha + d) \cos \alpha,$$

$$(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_S) = \left\{ (t - R \cos \alpha), -\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right), b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right\},$$

$$(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_S) \cdot \vec{n} = (t - R \cos \alpha) \sin \alpha - \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right) \cos \alpha.$$

Для удобства введем обозначения

$$\begin{aligned} f &= \frac{(\vec{r}_0 - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}}{(\vec{r}_2(t) - \vec{r}_S) \cdot \vec{n}} = \frac{-\cos \alpha (R \sin \alpha + d)}{(t - R \cos \alpha) \sin \alpha - \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right) \cos \alpha} = \\ &= \frac{-\cos \alpha (R \sin \alpha + d)}{t \sin \alpha - R \cos \alpha \sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \cos \alpha - d \cos \alpha} = \\ &= \frac{-\cos \alpha (R \sin \alpha + d)}{t \left(\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \cos \alpha\right) - \cos \alpha (R \sin \alpha + d)} = -\frac{v}{tu - v}, \end{aligned}$$

$$v = \cos \alpha (R \sin \alpha + d), \quad u = \sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \cos \alpha.$$

С учетом введенных обозначений функция, задающая линию  $\vec{r}_3(t)$ , принимает вид

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} R \cos \alpha + \frac{v}{v-tu} (t - R \cos \alpha) \\ d - \frac{v}{v-tu} \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d \right) \\ \frac{v}{v-tu} \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

На рис. 5.6 приведена поверхность шатра, построенная с помощью приведенной математической модели. При этом средний и крайний левый элементы передней «грани» задавались уравнениями (2.16). Крайний правый элемент передней «грани» находится с помощью преобразования зеркального отражения крайнего левого элемента относительно плоскости  $Ozx$ . Элементы остальных «граней» получены преобразованием поворота соответствующих элементов передней «грани» относительно оси  $Oz$  на углы  $\pi/2$ ,  $\pi$  и  $3\pi/2$  соответственно.

Для получения выкроек клиньев шатра осуществляется развертка цилиндрических и конических элементов в соответствии с алгоритмами, изложенными в разделе 4.1.

Построение развертки элемента цилиндрической поверхности выполняется так же, как было рассмотрено выше для четырехклинного тентового шатра с клиньями в форме элементов цилиндрических поверхностей. Уравнения линий края записываются в виде

$$\begin{cases} \xi = \int_0^{\varphi} \sqrt{(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi + b^2} d\varphi, \\ \eta = \pm (R \cos \alpha - a \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{R \cos \alpha}{a}.$$

Для построения развертки конического элемента шатра необходимо задать радиус-вектор вершины конической поверхности и ее направляющую линию. Соответствующие рассматриваемому случаю равенства принимают вид

$$\vec{r}_s = \{R \cos \alpha; d; 0\},$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \\ b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq R \cos \alpha.$$

Развертку линии  $\vec{r}_2(t)$  на плоскости развертки конической поверхности находим согласно тождественным формуле (4.2) соотношениям

$$\begin{cases} R = |\vec{r}_2(t) - \vec{r}_s|, \\ \Psi = \int_s \frac{\sqrt{(ds)^2 - (dR)^2}}{R}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq R \cos \alpha, \quad (4.6)$$

где  $R$  – полярный радиус,  $ds$  – элементарная дуга разворачиваемой линии,  $\Psi$  – полярный угол.

В условиях данной задачи входящие в формулу (4.6) величины определяются равенствами

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d \right)^2 + \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right)^2}, \\ dR &= \frac{(t - R \cos \alpha) + \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d \right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}}{\sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d \right)^2 + \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right)^2}} + \\ &+ \frac{\left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right) \frac{b(t - R \cos \alpha)}{a \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}}}{\sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left( t \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d \right)^2 + \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right)^2}}, \end{aligned}$$

$$ds = dt \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}\right)^2 + \frac{b^2(t - R \cos \alpha)^2}{a^2(a^2 - (t - R \cos \alpha)^2)}}.$$

При подстановке этих величин в уравнение (4.6) находится одна из линий края для конического элемента шатра.

Для получения другой линии края необходимо выполнить разворачивание кривой  $\vec{r}_3(t)$ , заданной уравнением (4.5) и принадлежащей конической поверхности. Полярный радиус, его приращение и элементарная дуга разворачиваемой линии, входящие в уравнение линии края (4.6) в этом случае определяются равенствами

$$\begin{aligned} R &= f \sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right)^2 + \left(b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}\right)^2}, \\ dR &= f' \sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right)^2 + \left(b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}\right)^2} + \\ &+ \frac{f \left( (t - R \cos \alpha) + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \right)}{\sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right)^2 + \left(b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}\right)^2}} + \\ &+ \frac{f \left( \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right) \frac{b(t - R \cos \alpha)}{a \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}} \right)}{\sqrt{(t - R \cos \alpha)^2 + \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right)^2 + \left(b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}\right)^2}}, \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

где  $dx = (f'(t - R \cos \alpha) + f)dt$ ,  $dy = \left(f' \left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + d\right) + f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}\right)dt$ ,

$$dz = \left( \left( b - \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2} \right) f' + \frac{fb(t - R \cos \alpha)}{a \sqrt{a^2 - (t - R \cos \alpha)^2}} \right) dt$$

$$\text{(здесь } f' = \frac{vu}{(tu - v)^2} = -f \frac{u}{tu - v} \text{)}.$$

При подстановке найденных выражений для  $R$ ,  $ds$  и  $dR$  в выражение (4.6) получаем уравнения второй линии края конического элемента шатра.

Развертки цилиндрического и конического элементов представлены на рис. 4.9 и 4.10.

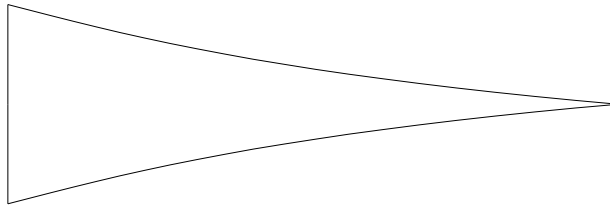


Рис. 4.9. Развертка цилиндрического элемента шатра

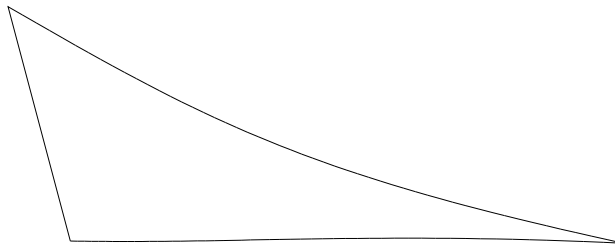


Рис. 4.10. Развертка конического элемента шатра

Возможности моделирования пространственных конструкций из развертываемых поверхностей не исчерпываются рассмотренными примерами и могут быть значительно расширены путем изменения положения направляющих линий цилиндрических и конических линий в пространстве. Даже ограничиваясь использованием только цилиндрических поверхностей можно получить пространственную конструкцию достаточно сложной формы.

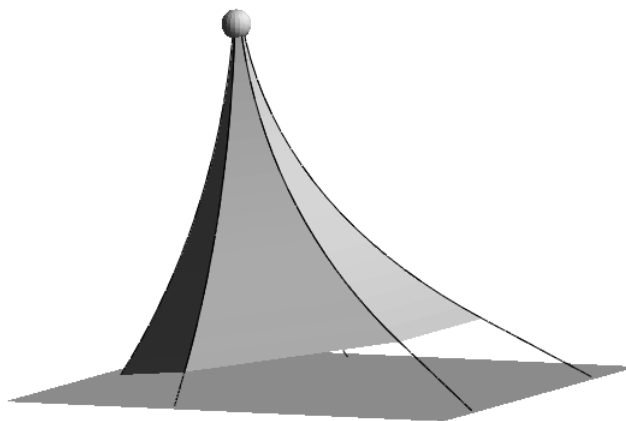


Рис. 4.11. Модель тентового шатра

Рассмотрим этот подход на примере моделирования купола тентового шатра, изображенного на рис. 4.11. Данный шатер представляет собой наклонную натяжную конструкцию с пятиугольным основанием, натягиваемую при помощи центральной стойки и оттяжек. Поверхность купола шатра составлена из пяти формообразующих элементов – «граней», четыре из которых попарно симметричны.

Конструктивные элементы (грани) представляют собой элементы цилиндрических поверхностей, образованных по заданной базовой кривой произвольного очертания. Аналитическое моделирование шатра реализуется на основе метода последовательного параллельного проецирования (см. раздел 2.2) произвольной направляющей линии на плоскости, проходящие через вершину шатра.

В качестве базовой кривой  $\vec{r}_1(u)$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$  взят участок  $AB$  эллипса (рис. 4.12) такой, что касательные к нему в крайних точках не параллельны координатным осям (не горизонтальны и не вертикальны). Данная модель кривой имеет пять основных параметров (полуоси эллипса  $a$  и  $b$ , начальный и конечный параметр  $u_1$  и  $u_2$ , смещение по вертикали  $c$ ), четыре из которых независимы, так как все эти параметры связаны четырьмя уравнениями для координат точек  $A$  и  $B$ , выражающими зависимость параметров модели от



конструктивных параметров шатра. Следовательно, один из параметров можно предварительно назначить. В данном примере назначено отношение полуосей эллипса  $k = a/b$ , а остальные параметры определены решением соответствующей системы уравнений.

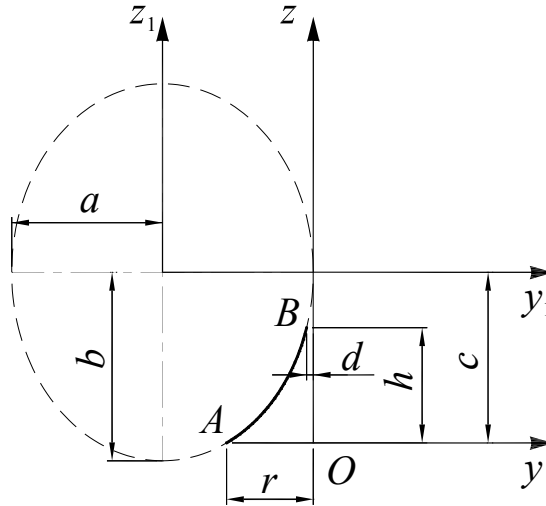


Рис. 4.12. Схема к параметризации базовой кривой

Базовая направляющая кривая  $\vec{r}_1(u)$  формообразующих элементов шатра задается уравнением

$$\hat{r}_1(u) = \begin{pmatrix} x_1(u) \\ y_1(u) \\ z_1(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(a - a \cos u) \\ c - b \sin u \end{pmatrix}, \quad u_1 \leq u \leq u_2, \quad (4.7)$$

где с учетом связи координат точек  $A$  и  $B$  (рис. 4.12) с параметрами модели выполняются соотношения

$$b = \frac{8k^3 h^2 r - 4k(r-d)(k^2 h^2 + d^2 - r^2)}{8k^2 (r-d)^2} + \sqrt{\frac{(8k^3 h^2 r - 4k(r-d)(k^2 h^2 + d^2 - r^2))^2 - 16k^2 (r-d)^2 (4k^2 h^2 r^2 + (k^2 h^2 + d^2 - r^2)^2)}{8k^2 (r-d)^2}},$$

$$a = kb,$$

$$c = \frac{4k(r-d)b + (k^2h^2 + d^2 - r^2)}{2k^2h},$$

здесь  $h$ ,  $r$ ,  $d$  – конструктивные параметры шатра, а именно:  $h$  – высота шатра,  $r$  – расстояние по горизонтали от вершины шатра до крайней его точки,  $d$  – радиус технологического отверстия в верхней части шатра.

Начальный и конечный параметры определяются на основании равенства (4.7) формулами

$$u_1 = \arccos\left(1 - \frac{d}{kb}\right), \quad u_2 = \arcsin\left(\frac{c}{b}\right),$$

где точке  $B$  соответствует равенство  $u = u_1$ , а точке  $A$  равенство  $u = u_2$ .

В рассматриваемом примере для конструктивных параметров шатра приняты следующие значения:  $h = 12$  м,  $r = 4,33$  м,  $d = 0,1$  м,  $k = 1$  и тогда параметры базовой кривой  $a = b = 25,656$  м,  $c = 14,263$  м,  $u_1 = 0,088$ ,  $u_2 = 0,589$ .

Уравнение второй кривой (рис. 4.13), ограничивающей конструктивный элемент в форме цилиндрической поверхности, получим методом параллельного проецирования базовой кривой на вертикальную плоскость с нормалью  $\vec{n}_1$ , при этом направление проецирования зададим вектором  $\vec{l}_1$ . Векторы  $\vec{n}_1$  и  $\vec{l}_1$  определяются из соображений организации внутреннего пространства шатра и в данном случае приняты равными

$$\hat{n}_1 = \begin{pmatrix} -0,67 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

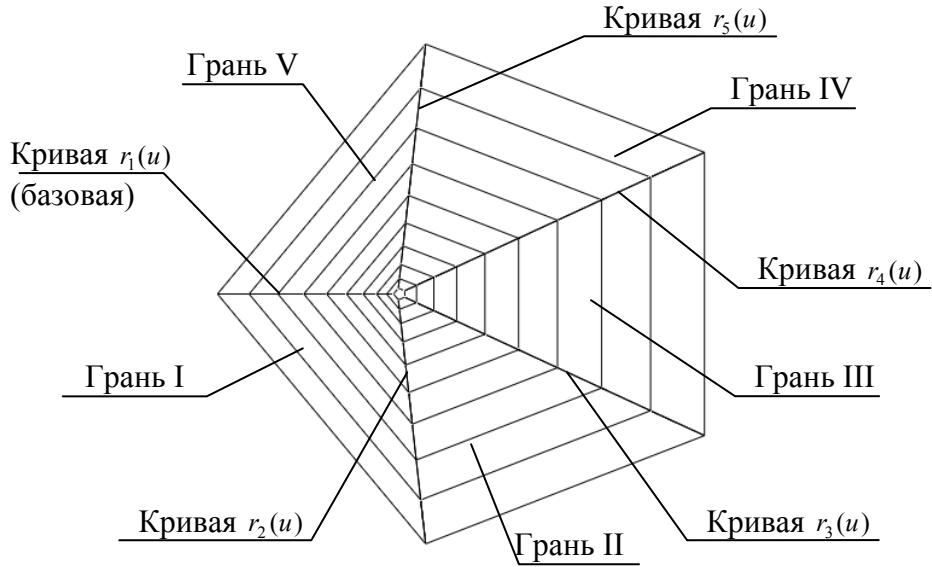


Рис. 4.13. Схема расположения граней шатра и их образующих кривых (вид сверху)

Уравнение искомой линии в матричной форме, которая эквивалентна соответствующей векторной записи (2.17), имеет вид

$$\hat{r}_2(u) = \begin{pmatrix} x_2(u) \\ y_2(u) \\ z_2(u) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1(u) \\ y_1(u) \\ z_1(u) \end{pmatrix},$$

где  $A_1$  – соответствующая матрица параллельного проецирования

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_{1x}l_{1x}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & -\frac{n_{1y}l_{1x}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & -\frac{n_{1z}l_{1x}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} \\ -\frac{n_{1x}l_{1y}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & 1 - \frac{n_{1y}l_{1y}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & -\frac{n_{1z}l_{1y}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} \\ -\frac{n_{1x}l_{1z}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & -\frac{n_{1y}l_{1z}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} & 1 - \frac{n_{1z}l_{1z}}{\vec{n}_1 \cdot \vec{l}_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда математическая модель первого формообразующего элемента (грани 1) задается уравнением

$$\vec{r}_1 = v\vec{r}_1(u) + (1-v)\vec{r}_2(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Аналогично можно получить уравнение третьей кривой  $r_3(u)$  – параллельным проецированием второй кривой на плоскость с нормалью  $\vec{n}_2$ , при этом направление проецирования задать вектором  $\vec{l}_2$ .

$$\hat{r}_3(u) = \begin{pmatrix} x_3(u) \\ y_3(u) \\ z_3(u) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x_2(u) \\ y_2(u) \\ z_2(u) \end{pmatrix},$$

где матрица преобразования  $A_2$  формируется аналогично матрице  $A_1$ , а

$$\hat{n}_2 = \begin{pmatrix} -7,37 \\ 3,4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_2 = \begin{pmatrix} -2,6 \\ 6,7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение второго формообразующего элемента (грани 2) имеет вид

$$\vec{r}_{II} = v\vec{r}_2(u) + (1-v)\vec{r}_3(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

Уравнение оставшихся кривых  $\vec{r}_4(u)$  и  $\vec{r}_5(u)$  можно получить аффинными преобразованиями отражения относительно плоскости  $Oyz$  уравнений третьей и второй кривых соответственно. Аналогично предыдущим записываются и уравнения математических моделей оставшихся формообразующих элементов (граней)

$$\vec{r}_{III} = v\vec{r}_3(u) + (1-v)\vec{r}_4(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2;$$

$$\vec{r}_{IV} = v\vec{r}_4(u) + (1-v)\vec{r}_5(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2;$$

$$\vec{r}_V = v\vec{r}_1(u) + (1-v)\vec{r}_5(u), \quad 0 \leq v \leq 1, \quad u_1 \leq u \leq u_2.$$

После получения математической модели шатра выкройки его формообразующих элементов находятся с помощью формул (4.1), задающих

уравнения линий края. Для реализации метода получения линий края необходимо переписать уравнения кривых  $\vec{r}_1(u)$  и  $\vec{r}_2(u)$  в новой системе координат  $Ox'y'z'$ , в которой одна их координатных осей, например  $Oy'$ , параллельна образующей цилиндрической поверхности. Процедура перехода к новым осям осуществляется путем последовательных аффинных преобразований поворота вокруг осей  $Oz$  и  $Ox$  старой системы координат на углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , где  $\alpha_1$  – угол между осью  $Oy$  и проекцией образующей цилиндрической поверхности на плоскость  $Oxy$ , а  $\alpha_2$  – угол между образующей цилиндрической поверхности и плоскостью  $Oxy$ . Результат построения развертки первого формообразующего элемента представлен на рис. 4.14.

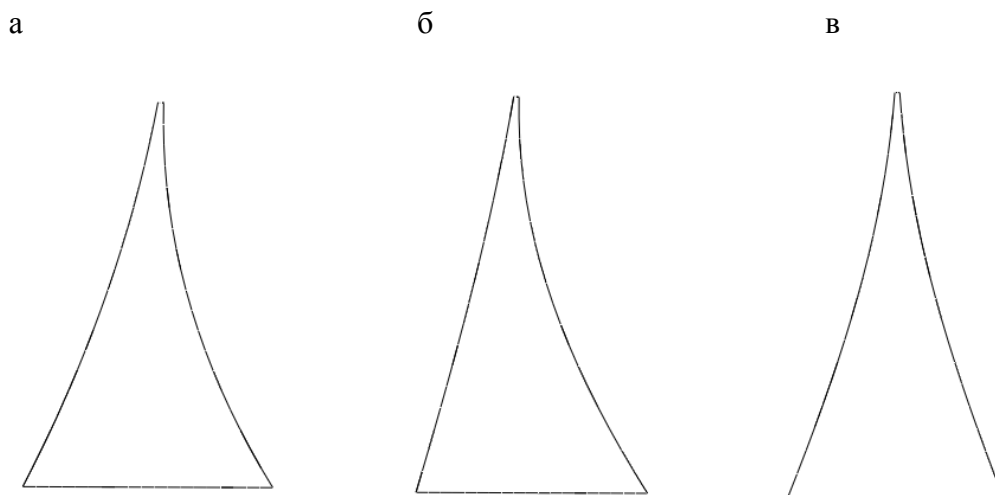


Рис. 4.14. Развертки граней тентового шатра: а – грани 1; б – грани 2; в – грани 3

Для построения развертки второй грани так же необходимо записать уравнения направляющих кривых  $\vec{r}_2(u)$  и  $\vec{r}_3(u)$  в новых системах координат, затем применить предложенный выше общий алгоритм. Для построения развертки элемента третьей грани можно сразу применить алгоритм развертывания цилиндрических поверхностей, задаваемый формулой (4.1), так как ее образующая с учетом симметрии шатра параллельна координатной оси  $Ox$ . Развертки граней 2 и 3 представлены соответственно на рис. 4.14. В силу

симметрии рассматриваемой пространственной конструкции выкройки первого и второго формообразующих элементов совпадают с выкройками ее пятого и четвертого элементов.

Рассмотренные аналитические алгоритмы раскроя могут быть применены для различных развертываемых поверхностей, в частности при получении выкроек формообразующих элементов восьмигранного церковного купола (рис. 2.15) и фигурного козырька (рис. 2.16), рассмотренных в разделе 2.2. Соответствующие выкройки представлены на рис. 4.15 и 4.16.

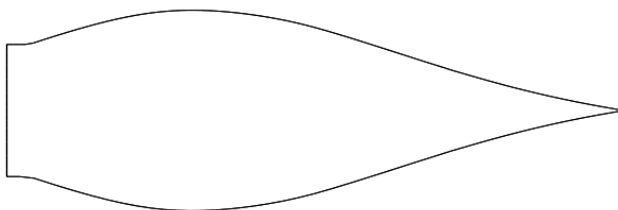


Рис. 4.15. Выкройка элемента купола

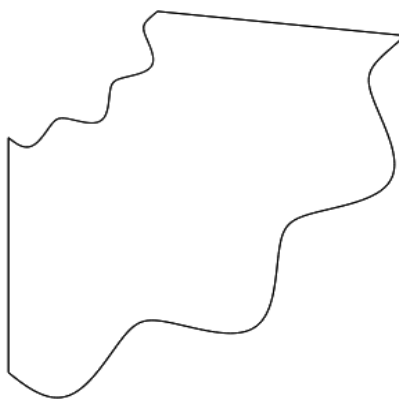


Рис. 4.16. Выкройка фигурного козырька

Технология изготовления пространственных тентовых конструкций с успехом может быть реализована в среде AutoCAD, позволяющей согласно предложенным алгоритмам визуализировать трехмерные модели пространственных конструкций, выполнять расчет линий края с применением одного из встроенных языков программирования и получать выкройки с

назначенными припусками на швы в требуемом масштабе. Эскизное проектирование пространственных конструкций и их выкоек целесообразно проводить с использованием универсальных математических систем, приспособленным для символьного и численного решения математических задач – Mathematica, Maple, Matlab, Mathcad.

Непосредственный крой может быть выполнен и без предварительного изготовления выкоек элементов конструкции, а осуществляться на станках с числовым программным управлением для резки листовых материалов, в которых информация о линиях кроя закладывается программными средствами на основе рассмотренных алгоритмов.

#### **Выводы по главе 4**

1. Предложены аналитические алгоритмы построения кривых (линий кроя) на плоскости развертки для раскроя конструкций из листовых материалов, в частности элементов виниловых тентовых конструкций.

2. На примерах тентовых шатров и куполов проиллюстрировано применение предложенных алгоритмов построения разверток как для поверхностей, задаваемых непрерывными аналитическими функциями, так и для поверхностей, задаваемых кусочно-гладкими функциями, задаваемыми на каждом участке произвольными аналитическими кривыми или сплайнами.

3. Предложенная технология апробирована при проектировании и изготовлении легких тентовых павильонов из виниловых тканей с использованием прикладных пакетов, поддерживающих реальный масштаб.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований, в соответствии с поставленной целью и решаемыми задачами, были достигнуты следующие результаты.

1. Получены математические модели для формообразования сводов, куполов и оболочек на круглом и прямоугольном плане, позволяющие работать с частью поверхности, необходимой для решения практической задачи, и непосредственно использовать конструктивные параметры конструкции при ее моделировании.

2. Построен новый класс поверхностей, называемых регулярными коноидами и регулярными цилиндроидами, для которых точки пересечения образующей во всех ее положениях с направляющей распределены равномерно, благодаря чему возможно равномерно располагать армирующие элементы или элементы опалубки при проектировании или изготовлении конструкций.

3. Проведенное исследование показало, что кинематический метод моделирования однополостных гиперболоидов и гиперболических параболоидов с использованием операции переноса их прямолинейных образующих позволяет упростить расчеты и технические операции при изготовлении и возведении строительных конструкций на основе этих поверхностей.

4. Разработаны алгоритмы трансформации поверхностей с применением линейных преобразований при построении математических моделей пространственных конструкций.

5. С использованием аналитических методов разработан алгоритм и на его основе реализован программный комплекс по построению разверток элементов конических и цилиндрических поверхностей, ограниченных произвольными линиями.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**ООО "РЕКЛАМНО-ПРОИЗВОДСТВЕННАЯ ГРУППА "БЕРЕГ"**

Фактический адрес: г. Екатеринбург, ул. 8 Марта 207А

Юридич. адрес: 620085, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Военная 15, кв.22

ИНН: 6674241684 КПП: 667401001 БИК: 046577756

Расчётный счёт: 40702810711900000110 Кор. счёт: 30101810800000000756

Банк: "СКБ-банк" ОАО г. Екатеринбург

т./ф.: (343) 220-30-73, 268-33-48, 213-78-00 моб.: +79122804614 <http://reklama-tent.ru>**изготовление наружной рекламы ■ аренда шатров**

## АКТ О ВНЕДРЕНИИ

результатов работы Беляевой З.В.

«Геометрическое моделирование пространственных конструкций»

Работа Беляевой З.В. посвящена решению задач формообразования пространственных конструкций с учетом их конструктивных параметров, привязки элементов этих конструкций к плану, раскроя элементов листовых и тентовых конструкций. Предложенные алгоритмы решения задач отличаются наглядностью и удобством применения. Разработанный программный комплекс построения разверток элементов конических и цилиндрических поверхностей пригоден для использования при проектировании и изготовлении тентовых и листовых конструкций.

Для нашей организации работа представляет интерес. Метод изготовления тентовых конструкций путем раскроя пространственных элементов конструкций из рулонированных материалов был апробирован на нашем предприятии при изготовлении мобильных быстровозводимых тентокаркасных сооружений.

Директор ООО  
«Рекламно-производственная  
группа «Берег»



Мамонтов Д.А.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для модели сферического купола должно выполняться соотношение  $r \geq H$ . Определим, при каком соотношении конструктивных параметров будет выполняться заданное неравенство. Подставим в уравнение (1.4) координаты двух точек, лежащих на образующей:  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$ :

$$\begin{cases} R_2^2 + (r - H)^2 = r^2, \\ R_1^2 + (H_1 + r - H)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 + r^2 - 2rH + H^2 = r^2, \\ R_1^2 + r^2 + 2r(H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 - 2rH + H^2 = 0, \\ R_1^2 + 2r(H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = 0; \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

Из первого уравнения системы (П2.1) находим

$$r = \frac{R_2^2 + H^2}{2H},$$

и подставляя найденное для  $r$  выражение во второе уравнение системы (П2.1) получим

$$R_1^2 + 2 \frac{R_2^2 + H^2}{2H} (H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = 0,$$

$$R_1^2 + \frac{R_2^2 + H^2}{H} H_1 - R_2^2 - H^2 + H_1^2 - 2H_1H + H^2 = 0,$$

$$R_1^2 + \frac{R_2^2}{H} H_1 + HH_1 - R_2^2 + H_1^2 - 2H_1H = 0,$$

$$(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)H + R_2^2H_1 - H_1H^2 = 0,$$

ИЛИ

$$H_1 H^2 - (R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)H - R_2^2 H_1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 \pm \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1}.$$

С учетом, что  $H > 0$ , получим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1}.$$

Найдем  $r$ , для этого вычтем из первого уравнения системы (П2.1) второе

$$R_2^2 - 2rH + H^2 - R_1^2 - 2r(H_1 - H) - (H_1 - H)^2 = 0,$$

$$R_2^2 - R_1^2 - 2rH_1 - H_1^2 + 2H_1 H = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} r &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 + 2H_1 H}{2H_1} = \\ &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 + R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1} = \\ &= \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1}. \end{aligned}$$

Окончательно находим выражения для параметров математической модели:

$$r = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1},$$

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2}}{2H_1}.$$

Для модели сферического купола с отверстием конструктивные параметры следует принимать такими, чтобы, как и для купола без отверстия, выполнялось неравенство  $r \geq H$ . Определим, при каком соотношении конструктивных параметров будет выполняться заданное неравенство. Подставим в уравнение (1.4) координаты двух точек, лежащих на образующей:  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$ :

$$\begin{cases} R_2^2 + (r - H)^2 = r^2, \\ R_1^2 + (H_1 + r - H)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 + r^2 - 2rH + H^2 = r^2, \\ R_1^2 + r^2 + 2r(H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 - 2rH + H^2 = 0, \\ R_1^2 + 2r(H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = 0; \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

Из первого уравнения системы (П2.2) находим

$$r = \frac{R_2^2 + H^2}{2H},$$

и подставляя найденное для  $r$  выражение во второе уравнение системы (П2.2) получим

$$R_1^2 + 2 \frac{R_2^2 + H^2}{2H} (H_1 - H) + (H_1 - H)^2 = 0,$$

$$R_1^2 + \frac{R_2^2 + H^2}{H} H_1 - R_2^2 - H^2 + H_1^2 - 2H_1H + H^2 = 0,$$

$$R_1^2 + \frac{R_2^2}{H} H_1 + HH_1 - R_2^2 + H_1^2 - 2H_1H = 0,$$

$$(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)H + R_2^2H_1 - H_1H^2 = 0,$$

или

$$H_1H^2 - (R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)H - R_2^2H_1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 \pm \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1}.$$

С учетом, что  $H > 0$ , получим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1}.$$

Найдем  $r$ , для этого вычтем из первого уравнения системы (П2.2) второе

$$R_2^2 - 2rH + H^2 - R_1^2 - 2r(H_1 - H) - (H_1 - H)^2 = 0,$$

$$R_2^2 - R_1^2 - 2rH_1 - H_1^2 + 2H_1H = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 + 2H_1H}{2H_1} = \\
 &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 + R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1} = \\
 &= \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1}.
 \end{aligned}$$

Окончательно находим выражения для параметров математической модели:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1}, \\
 H &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2)^2 + 4H_1^2R_2^2}}{2H_1}.
 \end{aligned}$$

Величины  $a$  и  $H$  для параболического купола с отверстием находятся с использованием уравнения (1.7). Для этого надо подставить в него координаты двух точек, лежащих на образующей  $z = 0, \rho = R_2$  и  $z = H_1, \rho = R_1$ , затем решить систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} 0 = H - aR_2^2, \\ H_1 = H - aR_1^2; \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения системы второе, получим

$$H_1 = aR_2^2 - aR_1^2,$$

тогда

$$a = \frac{H_1}{R_2^2 - R_1^2}, \quad H = \frac{H_1R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Полуоси эллипса, входящие в математическую модель эллиптического купола, выразим через его конструктивные параметры, используя уравнение (1.8), подставляя в него координаты точки, лежащей на образующей,  $z = 0$ ,  $\rho = R$  и обозначая  $k = a/b$ :

$$\frac{R^2}{k^2 b^2} + \frac{(b-H)^2}{b^2} = 1,$$

$$R^2 - 2k^2 b H + k^2 H^2 = 0,$$

тогда

$$b = \frac{R^2 + (Hk)^2}{2Hk^2}, \quad a = \frac{R^2 + (Hk)^2}{2Hk}.$$

Для эллиптического купола с отверстием полуоси  $a$  и  $b$  эллипса, а также размер  $H$  определяются решением системы уравнений, полученных подстановкой в выражение (1.8) координат двух точек на образующей купола  $z = 0$ ,  $\rho = R_2$  и  $z = H_1$ ,  $\rho = R_1$  соответственно, с учетом обозначения  $k = \frac{a}{b}$ .

$$\begin{cases} \frac{R_2^2}{k^2 b^2} + \frac{(b-H)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{R_1^2}{k^2 b^2} + \frac{(H_1 + b - H)^2}{b^2} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 - 2Hbk^2 + H^2 k^2 = 0, \\ R_1^2 + 2(H_1 - H)bk^2 + (H_1 - H)^2 k^2 = 0. \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

Выразим из первого уравнения системы (П2.3) величину  $b$

$$b = \frac{R_2^2 + k^2 H^2}{2k^2 H}$$

и подставим найденное выражение во второе уравнение системы (П2.3)



$$R_1^2 + 2(H_1 - H) \frac{R_2^2 + k^2 H^2}{2H} + k^2 (H_1 - H)^2 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим квадратное уравнение относительно  $H$ :

$$H_1 H^2 k^2 - (R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2) H - H_1 R_2^2 = 0,$$

решая которое с учетом  $H > 0$ , находим

$$H = \frac{R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2}.$$

Полуось эллипса  $b$  найдем, вычитая из первого уравнения системы (П2.3) второе:

$$R_2^2 - 2Hbk^2 + H^2 k^2 - R_1^2 - 2(H_1 - H)bk^2 - (H_1 - H)^2 k^2 = 0$$

отсюда

$$\begin{aligned} b &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 k^2 + 2H_1 H k^2}{2H_1 k^2} = \\ &= \frac{R_2^2 - R_1^2 - H_1^2 k^2 + R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 k^2 R_2^2}}{2H_1 k^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$a = kb = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 + H_1^2 k^2)^2 + 4H_1^2 k^2 R_2^2}}{2H_1 k}.$$

Параметры гиперболы, входящие в математическую модель гиперболического купола, выразим через его конструктивные параметры,

используя уравнение (1.10), подставляя в него координаты точки, лежащей на образующей купола  $z = 0$ ,  $\rho = R$  и обозначая  $k = a/b$ :

$$\frac{R^2}{k^2 b^2} - \frac{(-b-H)^2}{b^2} = -1,$$

$$R^2 - 2k^2 b H - k^2 H^2 = 0,$$

тогда

$$b = \frac{R^2 - (Hk)^2}{2Hk^2}, \quad a = \frac{R^2 - (Hk)^2}{2Hk}.$$

Для гиперболического купола с отверстием параметры  $a$  и  $b$  гиперболы, а также размер  $H$  определяются решением системы уравнений, полученных подстановкой в выражение (1.10) координат двух точек на образующей купола  $z = 0$ ,  $\rho = R_2$  и  $z = H_1$ ,  $\rho = R_1$  соответственно, с учетом обозначения  $k = a/b$ :

$$\begin{cases} \frac{R_2^2}{k^2 b^2} - \frac{(-b-H)^2}{b^2} = -1, \\ \frac{R_1^2}{k^2 b^2} - \frac{(H_1 - b - H)^2}{b^2} = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2^2 - 2Hbk^2 - H^2 k^2 = 0, \\ R_1^2 + 2(H_1 - H)bk^2 - k^2(H_1 - H)^2 = 0; \end{cases} \quad (\text{П2.4})$$

Выразим из первого уравнения системы (П2.4) параметр  $b$

$$b = \frac{R_2^2 - k^2 H^2}{2k^2 H}$$

и подставим найденное выражение во второе уравнение системы (П2.4)

$$R_1^2 + 2(H_1 - H) \frac{R_2^2 - k^2 H^2}{2H} - k^2 (H_1 - H)^2 = 0,$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим квадратное уравнение относительно  $H$ :

$$H_1 H^2 k^2 + (R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2) H + H_1 R_2^2 = 0,$$

решая которое, находим

$$H = \frac{-R_1^2 + R_2^2 + H_1^2 k^2 - \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2}.$$

Параметр  $b$  найдем, вычитая в системе уравнений (П2.4) из первого уравнения второе

$$R_2^2 - 2Hbk^2 - H^2 k^2 - R_1^2 - 2(H_1 - H)bk^2 + k^2 (H_1 - H)^2 = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} b &= \frac{R_2^2 - R_1^2 + H_1^2 k^2 - 2H_1 H k^2}{2H_1 k^2} = \\ &= \frac{R_2^2 - R_1^2 + H_1^2 k^2 + R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2 + \sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2} = \\ &= \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$a = kb = \frac{\sqrt{(R_1^2 - R_2^2 - H_1^2 k^2)^2 - 4H_1^2 R_2^2 k^2}}{2H_1 k}.$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Предложенный в разделе 3.1 чередующийся сплайн обладает гладкостью первого порядка. Для доказательства этого введем обозначения:

$f_1$  – кубическая функция, задающая сплайн на первом участке,  $0 \leq t \leq t_2$ ,

$f_3$  – кубическая функция, задающая сплайн на третьем участке,  $t_3 \leq t \leq t_4$ ,

$f_2 = f_1\left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + f_3\left(1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right)$  – функция четвертой степени, задающая сплайн

на втором участке,  $t_2 \leq t \leq t_3$ ,

и найдем производные от функции, задающей сплайн на втором участке:

$$\begin{aligned} f_2' &= f_1'\left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) - f_1' \frac{1}{t_3 - t_2} + f_3'\left(1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + f_3' \frac{1}{t_3 - t_2} = \\ &= f_1'\left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + f_3'\left(1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + (f_3' - f_1') \frac{1}{t_3 - t_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2'' &= f_1''\left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) - f_1'' \frac{1}{t_3 - t_2} + f_3''\left(1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + f_3'' \frac{1}{t_3 - t_2} + (f_3'' - f_1'') \frac{1}{t_3 - t_2} = \\ &= f_1''\left(\frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + f_3''\left(1 - \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\right) + (f_3'' - f_1'') \frac{2}{t_3 - t_2}. \end{aligned}$$

При  $t = t_2$  из условий формирования чередующихся сплайнов следует  $f_3(t_2) = f_1(t_2)$ , тогда

$$f_2'(t_2) = f_1'(t_2)\left(\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_2}\right) + f_3'(t_2)\left(1 - \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_2}\right) + (f_3(t_2) - f_1(t_2)) \frac{1}{t_3 - t_2} = f_1'(t_2),$$

$$\begin{aligned} f_2''(t_2) &= f_1''(t_2)\left(\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_2}\right) + f_3''(t_2)\left(1 - \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_2}\right) + (f_3'(t_2) - f_1'(t_2)) \frac{2}{t_3 - t_2} = \\ &= f_1''(t_2) + (f_3'(t_2) - f_1'(t_2)) \frac{2}{t_3 - t_2} \neq f_1''(t_2), \end{aligned}$$

а при  $t = t_3$  также  $f_3(t_3) = f_1(t_3)$  и

$$f_2'(t_3) = f_1'(t_3) \left( \frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_2} \right) + f_3'(t_3) \left( 1 - \frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_2} \right) + (f_3(t_3) - f_1(t_3)) \frac{1}{t_3 - t_2} = f_3'(t_3),$$

$$\begin{aligned} f_2''(t_3) &= f_1''(t_3) \left( \frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_2} \right) + f_3''(t_3) \left( 1 - \frac{t_3 - t_3}{t_3 - t_2} \right) + (f_3'(t_3) - f_1'(t_3)) \frac{2}{t_3 - t_2} = \\ &= f_3''(t_3) + (f_3'(t_3) - f_1'(t_3)) \frac{2}{t_3 - t_2} \neq f_3''(t_3), \end{aligned}$$

следовательно, чередующийся сплайн имеет гладкость первого порядка.

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Адамович А.Б., Вестяк В.А. Трехмерные геометрические модели в среде AutoCAD // Электронная геометрия. – Вып. 9, №19 (2007). – С.75-86.
2. Александрович В.П. Инженерный способ конструирования циклических поверхностей и его приложения // дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М., 1978. – 168 с.
3. Алимов Р. Алгоритмизация конструирования и развертывания торсовых поверхностей в приложении к автоматизации построения разверток фасонных частей трубопроводов // дис. ...канд. техн. наук. – Самарканд, 1983. – 141 с.
4. Аминов Ю.А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
5. Андреев В.А. Машинное проектирование непрерывных каркасов аэродинамических каналовых поверхностей // Изв. Вузов. Сер. Авиационная техника, 1975, №4. – С.21-23.
6. Андрианов И.В., Дисковский А.А., Прусаков А.П. К расчету гофрированных оболочек // Прочность и надежность элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1982. – С. 3-12.
7. Ариарский О.Е., Шагалова И. В., Кравченко Т. В., Кулакова Е.А. Формообразование зонтичных оболочек и их применение в архитектуре и дизайне // Сборник «Праці ТДАТУ». – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Т.49. – С. 178-190.
8. Ачкасов Ю.А. Проектирование разверток многовершинных поверхностей с помощью модулей // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1979. вып. 28. – С. 80-82.
9. Беляева З.В., Ефремов Н.С. Определение матриц эффективных жесткостей композиционных пространственных конструкций // Механика микронеоднородных материалов и разрушение: тезисы докладов 5-й Всерос. конференции. – Екатеринбург, 2008. – С. 111.

10. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Геометрическое моделирование пространственных конструкций // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета: научно-технический журнал. – Томск: ТГАСУ, 2010. – № 1 (26). – С. 53-63.
11. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Использование аналитических методов при формообразовании и раскрое линейчатых элементов тентовых конструкций // Промышленное и гражданское строительство. – М.: Изд-во ПГС, 2012. – №2. – С. 29-31.
12. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Кинематический метод построения каналовых поверхностей // Прикладная геометрия: электронный журнал. – М.: МАИ. – Вып. 12, N 25 (2010). – С. 1-8. – [http://www.mai.ru/~apg/Volume12/v12\\_n25.htm](http://www.mai.ru/~apg/Volume12/v12_n25.htm)
13. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование гипаров // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. – №10. – 234 с.
14. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование сводов и куполов // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008. – №11. – 235 с.
15. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование элементов строительных конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 16-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2007. – 118 с.
16. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование элементов строительных конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: сб. трудов 16-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2007.
17. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Математическое моделирование элементов поверхностей // Математическое моделирование в естественных науках:

- тезисы докладов 17-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2008. – 91 с.
18. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Определение внутренних усилий в натяжных тентовых конструкциях // Научные труды XVII международной конференции молодых ученых по приоритетным направлениям развития науки и техники: сборник статей. В 3 ч. – Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2009. – Ч. 3. – С. 257-261
  19. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Применение метода параллельного и центрального проецирования при формообразовании и раскрое линейчатых элементов пространственных конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 19-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2010.
  20. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Проектирование и раскрой тентовых конструкций // Математическое моделирование в естественных науках: тезисы докладов 18-й Всерос. конференции молодых ученых. – Пермь: ПГТУ, 2009. – 123 с
  21. Беляева З.В., Митюшов Е.А., Митюшова Л. Л. Гладкие отображения поверхностей // Математическое моделирование и компьютерный инженерный анализ: тезисы докладов 5-й Рос. науч.-техн. конференции. – Екатеринбург, 2008. – 95 с.
  22. Беляева З.В., Митюшов Е.А., Митюшова Л. Л. Проектирование натяжных конструкций // Строительство и образование: сб. науч. тр. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. – №12. – 280 с.
  23. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Использование аналитических методов при формообразовании и раскрое линейчатых элементов пространственных строительных конструкций // XXXIX Неделя науки СПбГПУ: материалы международной научно- практической конференции. Ч. I. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – С. 361-362.



24. Беляева З.В., Митюшов Е.А. Формообразование и раскрой линейчатых элементов пространственных конструкций // Монтажные и специальные работы в строительстве: научно-технический и производственный журнал. – М., 2011. – № 2 (826). – С. 7-10.
25. Битюков Ю.И. Моделирование кривых и поверхностей с помощью кубических В-сплайнов // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]. – М.: МАИ, 2005. – №14; вып. 7. – С. 1-11.
26. Битюков Ю.И. Моделирование кривых и поверхностей с помощью кубических В-сплайнов. Случай равномерной сетки // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]. – М.: МАИ, 2005. – №14; вып. 7. – С. 13-27.
27. Блинов Ю.И. Тентовые конструкции. – М.: Знание, 1985.
28. Блюк А.В. Графоаналитическое конструирование поверхностей каналового типа по наперед заданным площадям поперечных сечений // Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – Киев: КПИ, 1970. – 22 с.
29. Боженко И.А. Современные концепции проектирования в архитектуре // Стройкомплекс среднего Урала. – 2009, № 5 (128). – С. 24-27.
30. Бурцева С. В. Численный пример расчета волнистой конической оболочки // Исследования по расчету пластин и оболочек. – Ростов н/Д.: РИСИ, 1982. – С. 120-123.
31. Вакарчук С.Б. О приближении кривых, заданных в параметрическом виде, при помощи сплайн-кривых // Украинский математический журнал. – 1983. – №3 (35). – С. 352-355.
32. Варганян О.М. Некоторые теоретические вопросы формирования трансформируемых складчатых структур в архитектуре // Автореф. дисс. на соиск. . канд. техн. наук. – Москва, 1976.

33. Василевский О.В. Проектирование разветвляющихся каналов. // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев: Будівельник, 1980. – Вып. 29. С. 45-49.
34. Вексляр В.Я. Кинематический метод геометрического моделирования судовой поверхности на стадиях проектирования и подготовки производства // Дисс. на соиск. ст. канд. техн. наук. – С.-Пб., 2002. – 239 с.
35. Вексляр В.Я. Методология проектирования корабельных обводов и выступающих частей // Тр. 2-й междунар. конф. по судостроению-ISC'98. –1998. – Секция А, Том 2. С. 68-79.
36. Волкомор А.А. Вопросы классификации кривых поверхностей, применяемых в покрытиях // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев, 1965. – Вып. 1. – С.104-109.
37. Волошинов Д.В. Использование методов геометрического моделирования для автоматизированного проектирования и исследования сложных технических поверхностей // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2006, № 44.
38. Высоцкая Н.Н., Иерусалимский А.М., Невельсон Р.А., Федоренко В.А. Технические развертки изделий из листового материала. – Л.: Машиностроение, 1968. – 272 с.
39. Голов Г.М. Архитектурное формирование объемно-пространственной структуры кристаллических купольных оболочек // Автореф. дисс. на соиск. ст. канд. техн. наук. – Москва, 1976.
40. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.
41. Готман А.Ш. Проектирование обводов судов с развертывающейся обшивкой. – Л.: Судостроение, 1979.
42. Готман А.Ш. Проектирование хорошо обтекаемых судовых обводов из развертывающихся поверхностей. – Л.: Судостроение, 1974.

43. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. – М.: Радио и связь, 1987. – 72 с.
44. Докула С.М. Место зонтичных куполов в современной архитектуре [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.rusnauka.com/DNI\\_2006/Stroitelstvo/3\\_dokula%20s.m..doc.htm](http://www.rusnauka.com/DNI_2006/Stroitelstvo/3_dokula%20s.m..doc.htm) (дата обращения: 19.01.2012)
45. Дубанов А.А. Численно-аналитическое построение линий пересечения поверхностей методом Драгилева // Электронный журнал «Прикладная геометрия». – Вып 9, № 19 (2007). – С. 1-12.
46. Дыховичный Ю.А., Жуковский Э.З. Пространственные составные конструкции: учеб. пос. для студ. по спец. «Пром. и гражд. строит.» – М.: Высшая школа, 1989.
47. Дыховичный Ю.А., Жуковский Э.З., Ермолов В.В. и др. Современные пространственные конструкции (железобетон, металл, дерево, пластмассы): Справочник; под ред. Ю.А. Дыховичного, Э.З. Жуковского. – М.: Высшая школа, 1991. – 543 с.
48. Ермолов В.В., Бэрд У.У., Бубнер Э. и др. Мягкие оболочки: справочник современные пространственные конструкции. – М., 1988.
49. Ермолов В.В., Бэрд У.У., Бубнер Э. и др. Пневматические строительные конструкции / под ред. В. В. Ермолова. – М.: Стройиздат, 1983. – 439 с.
50. Жуковский Э.З. Составные оболочки, конструкции и исследования // Большепролетные пространственные конструкции. – М.: МНИИТЭП, 1981. – 216 с.
51. Замятин А.В. Формообразование поверхностей на основе аппарата кинематики поверхностей 2-го порядка // дис. ...д-ра. техн. Наук. – Н. Новгород, 2007. – 137 с.
52. Зелев В.П. Исследование машинных методов проектирования и расчета каналовых поверхностей сложных технических форм // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М., 1977. – 168 с.

53. Иванов В.Н. Оболочки со срединными нормальными циклическими поверхностями // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2006, № 5. – С. 10-12.
54. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Конструирование зонтичных оболочек из отсеков циклических оболочек переноса // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2011, № 1. – С. 3-7.
55. Иванов В.Н., Шамбина С.Л. Зонтичные оболочки из отсеков циклических поверхностей переноса на различных типах базовых поверхностей вращения // Сборник «Праці ТДАТУ». – 2011, Вип.4, Т.51. – С. 9-15.
56. Ильин В.А. Аналитическая геометрия: учебник для университетов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. М.: Наука, 1988. 224 с.
57. Камилов С.С. универсальные законы В.Г. Шухова в области разработки эффективных конструктивных форм строительных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. – 2003, №6. – С. 8-9.
58. Карабчевский В.В., Пашинская А.В. Моделирование процесса развертывания цилиндрических и конических поверхностей с использованием языка MAXScript // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». – Донецк, 2008. – Випуск 9 (132). – С. 163-167.
59. Качурин В.К. Гибкие нити с малыми стрелками. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 224 с.
60. Козлова О. Завтра начинается сегодня // Вокруг света. – М.: Изд-во «ВОКРУГ СВЕТА», 2005. – №12 (2783).
61. Коротич М.А., Коротич В.А. Композиционные особенности структурного формообразования оболочек высотных зданий // Академический вестник УралНИИПроект РААСН. – 2009, № 2. – С. 66-69.
62. Коуэн Г.Дж. Мастера строительного искусства: история проектирования сооружений и среды обитания со времен Древнего Египта до 19 века. – М.: Стройиздат, 1982. – 359 с.

63. Коуэн Г.Дж. Строительная наука 19-20 вв.: проектирование сооружений и систем инженерного оборудования. – М. : Стройиздат, 1982. – 359 с.
64. Краткий исторический очерк // <http://building.pbo.ru/prerequisite.html>.
65. Кривошапко С.Н. Геометрические исследования поверхностей зонтичного типа // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2005, № 1. – С. 11-17.
66. Кривошапко С.Н. Геометрия и прочность торсовых оболочек. – М.: Изд-во АСВ, 1995. – 280 с.
67. Кривошапко С.Н. К проектированию торсовых оболочек по двум заданным краевым элементам // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987, №3. – С. 19-22.
68. Кривошапко С.Н. Коноидальные оболочки// Монтажные и специальные работы в строительстве. – 1998, № 6. – С. 22-24.
69. Кривошапко С.Н. Модельные поверхности соединительных участков двух трубопроводов // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2005, № 10. – С. 25-29.
70. Кривошапко С.Н. Новые примеры поверхностей зонтичного типа и их коэффициенты основных квадратичных форм // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2005, № 2. – С. 6-14.
71. Кривошапко С.Н. Параболические оболочки вращения // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 1999, № 12. – С. 5-12.
72. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности для перекрытия заданного прямоугольного плана // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2002, № 1. – С. 47-51.
73. Кривошапко С.Н. Торсовые поверхности и оболочки: справочник. – М.: УДН, 1991. – 287 с.
74. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А. Формообразование оболочек в архитектуре. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 48 с.

75. Кривошапко С.Н., Барамзин А.Д. О применении торсовых оболочек // Военно-строительный бюллетень. – 1979, №2. – С.15-16.
76. Кривошапко С.Н., Басов Ю.К., Якушина А.А. Исследования по расчету и применению коноидальных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М.: Изд-во АСВ, 2001. – Вып.10. – С. 7-14.
77. Кривошапко С.Н., Емельянова Ю.В. К вопросу о поверхности вращения с геометрически оптимальной стрелой подъема // Монтажные и специальные работы в строительстве. – 2006, № 2. – С. 11-14.
78. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М. : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2010. – 556 с.
79. Кривошапко С.Н., Мамиева И.А. Зонтичные поверхности и поверхности зонтичного типа в архитектуре // Промышленное и гражданское строительство. – 2011, № 7.
80. Кривошапко С.Н., Олодо Эссе Эммануэль. О построении торсовой поверхности с направляющими параболами произвольного порядка // Исследования по строительной механике пространственных систем: сб. науч. Трудов. – М.: УДН, 1990. – С. 32-37.
81. Крутов А.В. Геометрические модели на основе гармонической пропорции // Математические модели и операторные уравнения. Т.2. – Воронеж, 2003. – С. 90-93.
82. Крутов А.В. Исследование свойств ортогональных траекторий образующих торсовой поверхности // Вестн. фак. прикладной математики и механики. – Воронеж, 2002. – Вып. 3. – С. 131-138.
83. Крутов А.В. Кинематико-геометрическое моделирование в задачах механики и прикладной математики // дисс. на соиск. ст. д-ра физ.-мат. наук. – Воронеж, 2003. – 465 с.
84. Крутов А.В. Некоторые прикладные задачи: геометрико-кинематические модели: Монография. – М.: Издательство РУДН, 2001. – 252 с.

85. Ларионов В.В., Морозов Е.П. В.Г. Шухов – основоположник отечественной школы металлостроительства // Промышленное и гражданское строительство. – 2003, №6. – С. 3-6.
86. Лебедев В.А. Тонкостенные зонтичные оболочки. – Л. : Госстройиздат, 1958. – 172 с.
87. Лебедев Н.В. Фермы, арки, тонкостенные пространственные конструкции. – М.: Архитектура-С, 2006. – 120 с.
88. Лелюшенко С.И. Исследование и управление дифференциально-геометрическими свойствами некоторых каналовых поверхностей типа "фюзеляж-мотогондола" // Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. техн. наук. – М.: МАДИ, 1976. – 20 с.
89. Липницкий М.Е. Купола (расчет и проектирование). – Л.: Стройиздат, Ленинградское отд-ние, 1973. – 129 с.
90. Лисяк В.В., Лисяк М.В. Об одном классе задач геометрического моделирования трехмерных объектов САПР // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2009, №4. Т. 93.
91. Макутов В.И. Конструкторские и технологические аспекты проектирования поверхностей сложных технических форм с применением аппарата математического моделирования // Автореф. дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М., 1970. – 20 с.
92. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В. Прохоров; ред. кол. С.И. Адян, Н.С. Бахвалов, В.И. Битюцков, А.П. Ершов, Л.Д. Кудрявцев, А.Л. Онищик, А.П. Юшкевич. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.
93. Мельников Н.П., Савельев В.А., Мухин Б.Г. Формообразование сетчатых оболочек переменной кривизны // Научные исследования в области теоретических основ проектирования большепролетных покрытий: труды ЦНИИПСК. – 1979. – Вып. 22.. – С. 32-39.

94. Металлические конструкции академика В.Г. Шухова / под ред. В.П. Мишина. – М.: Наука, 1990.
95. Митюшов Е. А. Математические основы компьютерной геометрии: учеб. пособие / Е. А. Митюшов, Л. Л. Митюшова. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. 61 с.
96. Митюшов Е.А., Беляева З.В. Геометрическое моделирование пространственных конструкций. – LAP Lambert Academic Publishing, 2011. – 144 с.
97. Михайлов В.В., Хорошилов Е.А. Расчет тросового купола с тентовым покрытием // Промышленное и гражданское строительство. – М.: Изд-во ПГС, 2007. – №5. – С. 58.
98. Мишанин И.Н. Геометрическое моделирование многогранных конструкций с плоской разверткой поверхности из модульных элементов // дисс. на соиск. ст. д. техн. наук. – Пенза, 2006. – 336 с.
99. Морозов Е.П. Сетчатые башни: идеи и конструкции // Промышленное и гражданское строительство. – 2003, №6. – С. 14-15.
100. Мыскова О.В. Архитектура тентовых сооружений: проблемы формообразования (1990-2000 гг.) // Дис. на соиск. уч. ст. канд. архитектуры. – М., 2003. – 279 с.
101. Мыскова О.В. Тентовые сооружения в современной архитектуре // Промышленное и гражданское строительство. – 2003, № 7. – С. 44-46.
102. Найханов В.В., Павлова С.В. Построение разверток при проектировании одежды [Электронный ресурс] // Тр. междунар. конф. по компьютерной графике и ее приложениям «ГрафиКон-98» 7-11 сентября 1998. – М., 1998.
103. Некрасова О.И. Геометрическое моделирование и автоматизация проектирования групп каналовых поверхностей // дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М., 1984. – 171 с.
104. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.



105. Новиков А.А. Ні Tech Нормана Фостера над Британским Музеем [Электронный ресурс]. – URL: [http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t\\_007/main.shtml](http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t_007/main.shtml) (дата обращения: 12.06.2010).
106. Новиков А.А. Онтология сетчатых оболочек [Электронный ресурс]. URL: [http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t\\_001/main.shtml](http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t_001/main.shtml)
107. Новиков А.А. Павильон Японии на выставке ЭКСПО 2000 [Электронный ресурс]. URL: [http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t\\_004/main.shtml](http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t_004/main.shtml)
108. Обухова В.С., Василевский О.В. Применение метода сложения выпуклых кривых к конструированию каналовых поверхностей // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев: Будівельник, 1978. – Вып. 26. – С. 15-17.
109. Ордабаев А. Архитектор Френк Гэри. [http://www.stroy-k.kz/articles/index.php?id\\_article=2](http://www.stroy-k.kz/articles/index.php?id_article=2)
110. Ордабаев А. Норман Фостер и хай-тэк // . – [http://www.stroy-k.kz/articles/?id\\_article=11](http://www.stroy-k.kz/articles/?id_article=11)
111. Осипов В.А., Осипова Л.И. Теоретические основы каркасно-кинематического метода направляющей линии // Изв. вузов. Сер. Авиационная техника. – 1980, №4. – С. 48-53.
112. Отто Фрей, Фридрих-Карл Шлейер. Тентовые и вантовые конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 176 с.
113. Отто Фрей. Всячие покрытия. – М.: Госстройиздат, 1960. – 180 с.
114. Павлова С.В., Аюшев Т.В. Описание виртуальной модели изделия в индустрии моды с позиции геометрического моделирования формы // Вестник ВСГТУ. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2007, № 3. – С. 32-35.
115. Павлова С.В., Аюшев Т.В., Найханов В.В. К вопросу геометрического проектирования изделий индустрии моды // Вестник ВСГТУ. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2009, № 3 – С. 32-35.

116. Панасюк Л.С. Оптимальная аппроксимация и развертывание каналовых поверхностей технических форм // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – Киев, 1977. – 174 с.
117. Петров В.А. Зонтичная многосекторная оболочка // Патент России № 2198990. 2003.
118. Полозов В.С., Будеков О.А., Ротков С.Н. и др. Автоматизированное проектирование. Геометрические и графические задачи. – М., Машиностроение, 1983. – 280 с.
119. Попов А.Н., Казбек-Казиев З.А., Файбишенко В.К. Современные пространственные конструкции. Сборник. – М.: Знание, 1976. – 48 с.
120. Попов Е. В. FABRIC CAD система проектирования тентовых конструкций / Е.В. Попов, А.И. Тарасов // Тр. междунар. конф. «Графикон –2001». – Н. Новгород : НГАСУ, 2001. – 10-15 сентября. – С. 150-153.
121. Попов Е.В. Метод натянутых сеток в задачах геометрического моделирования // дисс. на соиск. уч. ст. д-ра. техн. наук. – Н. Новгород, 2001. – 248 с.
122. Попов Е.В. Построение карт раскроя полотнищ парусного оснащения // Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2000. – Вып. 6. – С.75-83.
123. Попов Е.В. Построение разверток поверхностей одинарной и двойкой кривизны // Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика: Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин. – Н.Новгород: ННГАСУ, 2000. – Вып. 5. – С. 272-276.
124. Попов Е.В., Тарасов А.И. FABRIC CAD система проектирования тентовых конструкций // Тр. междунар. конф. «Графикон –2001». – Н. Новгород: НГАСУ, 2001. – 10-15 сентября. – С. 150-153.
125. Попов Е.В., Шалимов В.Н., Шалимова К.В. Построение кратчайших линий на поверхности полотнищ тентовых тканевых конструкций //

- Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: Машиностроение, 2009, №12. – С. 17-20.
126. Попов, Е.В. FABRIC CAD система проектирования тентовых конструкций / Е.В. Попов, А.И. Тарасов // Тр. междунар. конф. «Графикон –2001». – Н. Новгород : НГАСУ, 2001. – 10-15 сентября. – С. 150-153.
127. Пространственные покрытия / под общей ред. Г. Рюле. Т.1. Железобетон, армоцемент. – М.: Стройиздат, 1973. – 305 с.
128. Пространственные покрытия / под общей ред. Г. Рюле. Т.2. Металл, пластмассы, керамика, дерево. – М.: Стройиздат, 1974. – 248 с.
129. Разновидности пневматических оболочек // <http://building.pbo.ru/info.html>.
130. Райт Д.Т. Большепролетные сетчатые оболочки. Том I. – М.: Стройиздат, 1969.
131. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
132. Рекач В.Г., Кривошакко С.Н. Расчет оболочек сложной геометрии: монография. – М.: УДН, 1988. – 176 с.
133. Рекомендации по проектированию структурных конструкций. – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1984.
134. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Машиностроение, 1980. – 240 с.
135. Роу Д. Гауди. Архитектор и художник. – М.: Белый Город, – 2009. – 208 с.
136. Рыбкин И.С. Компьютерное математическое моделирование гофрированных и иных элементов схожей геометрии // Промышленное и гражданское строительство. – М.: Изд-во ПГС, 2008. – №4. – С. 53-54.
137. Рыжев Н.Н., Ачкасов Ю.А. Многогранные многовершинные поверхности, развертывающиеся на плоскость без нарушения непрерывности и однозначности // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1975. – Вып. 20. – С. 20-22.

138. Санчес-Аркас М. Оболочки (Железобетонные оболочки и складки, их формы. Висячие системы покрытий). – М., 1964. – 172 с.
139. Сахновский К.В., Горенштейн Б.В., Линецкий В.Д. Сборные тонкостенные пространственные и большепролетные конструкции. – Л.: Стройиздат, 1969. – 428 с.
140. Сетчатые оболочки и Норман Фостер // <http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=339347>
141. Скидан И.А. Геометрическое моделирование кинематических поверхностей в специальных координатах // Автореф. дис. д-ра техн. наук. – М.: МАДИ, 1989. – 36 с.
142. Тонкостенные пространственные конструкции в зданиях различного назначения // Обзорная информация. Зарубежный и отечественный опыт в строительстве. – М.: Госстрой, 2004. – Вып. №2 от 23.06.2004.
143. Трофимов В.И., Бегун Г.Б. Структурные конструкции (исследование, расчет и проектирование). – М., 1972. – 272 с.
144. Трущев А.Г. Пространственные металлические конструкции. – М., 1983. – 215 с.
145. Туполев М.С. Геометрия сборных сферических куполов // Архитектура СССР. – 1969, №1, – С. 35-41.
146. Туполев М.С. Новые виды пространственных покрытий. – М.: Росвузиздат, 1963. – 128 с.
147. Тур В.И. Купольные конструкции: формообразование, расчет, конструирование, повешение эффективности: учеб. пособие. – М.: АСВ, 2004. – 96 с.
148. Хайдуков Г.К., Смирнова Е.М. Пространственные большепролетные конструкции покрытий. Зарубежный опыт. – М.: ВНИИИС, 1980. – 53 с.
149. Хасанов В.Х. Разработка и исследование метода геометрического моделирования и расчета многопараметрических линий и поверхностей // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. – М., 1982. – 158 с.

150. Хвыля И. К. Зонтичные оболочки для объектов городского дизайна // Вісник ХДАДМ. – 2006, № 2. – С. 95-99.
151. Хейфец А.Л. 3D-модели линейчатых поверхностей с тремя прямолинейными направляющими // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2008, №25. – С. 51-56
152. Хейфец А.Л., Ерохин С.В. 3D-моделирование частных случаев пересечения поверхностей второго порядка в пакете AutoCAD //Вестник ЮУрГУ. Сер. Строительство и архитектура. – 2003. – Вып. 2, № 7(23). – С. 93-95.
153. Хейфец А.Л., Короткий В.А. 3D-компьютерное моделирование пересечения эллиптических конусов при их двойном соприкосновении. AutoCAD //GraphicCon'2006: Труды 16-й Международной конференции по компьютерной графике и ее приложениям. – Новосибирск: Прайс-куррьер, 2006. – С. 128-133.
154. Хейфец А.Л., Логиновский А.Н. Новые возможности 3D-Моделирования линейчатых поверхностей в AutoCAD 2007 //Состояние проблемы и тенденции развития графической подготовки в высшей школе: сб. тр. Всероссийского совещания заведующих кафедрами графических дисциплин вузов РФ, 20-22 июня 2007 г., г. Челябинск. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. – Т. 2. – С. 125-133.
155. Цейтлин А.А., Белецкий Ю.И. Тонкостенные волнистые покрытия-оболочки промышленных зданий // Промышленное строительство. – 1962, № 8. С. 53-56.
156. Шикин Е. В., Плис Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. — М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. — 240 с
157. Щедров В.С. Основы механики гибкой нити. – М.: Машгиз, 1961. – 172 с.

158. Энгель Х. Несущие системы / Хайно Энгель. – М. : АСТ : Астрель, 2007. – 344 с.
159. Ядгаров Д.Я., Шоломов И.Х. Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс // Исслед. в области теории дифференциальных уравнений и теории приближений. – Ташкент, 1982. – С. 96-100.
160. Bird W.W. Teflon-coated fiberglass, an outstanding new material for fabric structures. Research report IASS Working Group of Pneumatic Structures. Yokohama National University, 1978. P. 2-18.
161. Faber, C., Candela..., N. Y., 1963
162. Hoschec J. Approximation of surfaces of revolution by developable surfaces // J. Hoschec // Computer-Aided Design № 10, V 30, 1998
163. Leopoldseder S. Approximation of developable surface with cone spline surfaces // S.Leopoldseder, H. Pottmann // Computer-Aided Design № 7, V 30, 1998
164. Leopoldseder S. Cone spline surfaces and spatial arc splines – a sphere geometric approach // S.Leopoldseder // Advanced in computational mathematics № 1-2, V 17, 2002
165. Lopez Diaz L.F. Asymmetrical hyperbolic paraboloid groin vaults. Journal of the international association of shell and spatial structures. IASS vol 39 (1998) n.128 h. 175-182
166. Mirza J. F. Stresses and deformations in umbrella shells // Proc. ASCE, 93, N CT2, Apr. 1967. P. 271-286.
167. Popov E.V. Cutting pattern generation for tent type structures. The Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, 1999. – Vol. 22, # 4/ – P.253-261.
168. Popov E.V. Geometrical Modeling of Tent Fabric Structures with the Stretched Grid Method // Proceedings of the 11th International Conference on Computer

- Graphics&Vision GRAPHICON'2001. – Nizhny Novgorod, 2001. – P. 138-143.
169. Tabarrok B., Qin Z..Form Finding and Cutting Pattern Gen-eration for Fabric Tension Structures, -Microcomputers inCivil Engineering J., N 8, 1993.
170. Wang C.L. On increasing the developability of a trimmed NURBS surfaces / Charlie C.L.Wang, Yu Wang, Matthew M.F. Yuen // Computer-Aided Design № 1, V 20, 2004
171. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%C1%E0%F8%ED%FF\\_%EF%EE%F0%F2%E0\\_%CA%EE%E1%E5](http://ru.wikipedia.org/wiki/%C1%E0%F8%ED%FF_%EF%EE%F0%F2%E0_%CA%EE%E1%E5)
172. [http://spalex.narod.ru/WhoIsWho/who\\_calatrava.html](http://spalex.narod.ru/WhoIsWho/who_calatrava.html)
173. <http://tent.k3info.ru/>
174. [http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t\\_007/main.shtml](http://www.forma.spb.ru/magazine/articles/t_007/main.shtml)
175. <http://www.sak.ru/reference/style/style1-1.html>
176. <http://www.stroymir.com.ua/index.php?page=news&id=169&start=450&analitics>
177. <http://www.vokrugsveta.ru/telegraph/theory/1112/> №5 май 2011