На правах рукописи

Копытов Никита Павлович

РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Пермь – 2015

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель:	Митюшов Евгений Александрович, доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Савелова Татьяна Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», профессор кафедры «Прикладная математика»
	Зайцев Алексей Вячеславович, кандидат физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», доцент кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук»

Защита состоится 7 апреля 2015 года в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 212.188.08 при Пермском национальном исследовательском политехническом университете по адресу: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29, ауд. 423.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте Пермского национального исследовательского политехнического университета (http://pstu.ru/title1/soviets/disertations/).

Автореферат разослан «____» февраля 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.188.08, кандидат физико-
математических наук, доцент А.И. Швейкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача равномерного распределения точек на поверхностях имеет значение для различных фундаментальных и прикладных исследований и является важной для большого числа научных направлений и групп методов, включая: статистическое математическое моделирование, методы стохастической многопараметрической оптимизации, количественный текстурный анализ, компьютерную графику, технологии армирования структурно-неоднородных сред и так далее.

Благодаря большим прикладным возможностям, в настоящее время проблема равномерного распределения точек на поверхностях вышла за рамки вспомогательной задачи, рассматриваемой только в составе различных комплексных научных исследований, и начала приобретать общее значение для развития методов математического моделирования. География работ, посвященных данной проблеме, представлена широко, а количество научных статей, книг и других публикаций постоянно увеличивается. Следует также отметить, что статьи, посвященные ее рассмотрению, начали появляться с середины XX века, и сегодня их количество постоянно увеличивается, охватывая все большее число различных областей знаний.

Из множества научных работ, посвященных проблеме равномерного распределения точек на поверхностях, могут быть выделены три основные группы: во-первых, это работы по равномерному распределению точек на поверхности сферы в трехмерном пространстве (Marsaglia G., Muller M., Cook J., Watson G., Tashiro Y., Moran P.); во-вторых, это работы по равномерному распределению точек на поверхностях, заданных уравнениями явного вида в трехмерном пространстве (Melfi G., Schoier G.); в-третьих, это работы по равномерному распределению точек на поверхностях гиперсферы и гиперэллипсоида в многомерных пространствах (Rubinstein R.Y., Kroese D.P. «Simulation and Monte Carlo Methods»).

Несмотря на большое количество работ по данной теме, в научной литературе на сегодняшний день не представлен метод для равномерного распределения точек, являющийся общим и универсальным для широкого класса поверхностей, например, для класса гладких регулярных поверхностей. Создание такого универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на поверхностях позволило бы существенно расширить область применения ряда общенаучных и междисциплинарных групп методов, в особенности, методов статистического численного моделирования.

Цели работы:

- разработка статистического метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях в евклидовых пространствах различной размерности;
- разработка статистических математических моделей структурно-неоднородных сред и материалов с микронеоднородной структурой строения на основе равномерных распределений точек на поверхностях.

Задачи работы:

- разработка статистического алгоритма и программы для моделирования равномерных распределений точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве;

- установление связи между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

- разработка математической модели для создания конфигураций множества коротких армирующих волокон в оболочках, обеспечивающей достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

- разработка численного статистического алгоритма и программы для решения частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

- решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Научная новизна. В исследовании достигнуты следующие результаты, обладающие научной новизной:

- получены функции плотностей совместного распределения параметров, соответствующие равномерному распределению точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном и многомерном евклидовых пространствах;

- получены функции плотностей распределения параметра, соответствующие равномерному распределению точек на гладких регулярных кривых в двухмерном, трехмерном и многомерном евклидовых пространствах;

- предложен статистический алгоритм для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных кривых и поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве;

- установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

- разработана математическая модель для создания конфигураций множества коротких армирующих волокон в оболочках, обеспечивающая достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

- получено новое численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

- методом компьютерного эксперимента найдена область возможных значений интегральных характеристик текстуры – текстурных параметров, определяющих свойства ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Выносимые на защиту положения:

- статистический метод для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных кривых и поверхностях в евклидовых пространствах различной размерности;
- установленная связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;
- математическая модель для создания конфигураций множества коротких армирующих волокон в оболочках, обеспечивающая достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;
- новый метод численного решения известной частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;
- результаты компьютерного эксперимента по моделированию области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Достоверность и обоснованность результатов. Полученные в общем аналитическом виде функции плотностей распределения параметров, соответствующие равномерному распределению точек на гладких регулярных поверхностях в пространствах различных размерностей, согласуются между собой. Равномерность смоделированных с помощью предложенного статистического метода распределений точек на различных поверхностях подтверждена количественными оценками, полученными с использованием критерия Пирсона проверки статистических гипотез. Результаты решения ряда прикладных задач, полученные с помощью разработанных на основе статистических численных алгоритмов программ, с высокой степенью точности соответствуют результатам, полученным с применением известных аналитических методов.

Практическая ценность работы. Представленные статистические методы и алгоритмы для равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях и кривых в трехмерном пространстве обладают высокой степенью универсальности, что позволяет применять их в различных областях научных исследований. Математические модели, разработанные для решения конкретных прикладных задач, организованы таким образом, что могут быть усовершенствованы для применения в решении смежных проблем, а заложенная в данной работе методология исследований и полученные результаты открывают новые возможности применения методов статистического математического моделирования.

Апробация работы. Основные результаты исследований докладывались на следующих конференциях: на Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2010 год, 2012 год), на XIX Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2010 год).

Полностью работа обсуждалась на научных семинарах кафедры теоретической механики Института фундаментального образования УрФУ (рук. д.ф.-м.н., доцент С.А. Берестова), кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., профессор П.В. Трусов), кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Соколкин), на научном семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеенко).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ. Среди них 4 статьи, 3 из которых опубликованы в научных периодических изданиях, включенных в перечень ведущих периодических изданий, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертационных исследований.

Структура и объем диссертации. Работа включает в себя следующие основные разделы: введение, три главы, заключение и список использованной литературы. Диссертация представлена на 121 странице, содержит 45 рисунков, 1 таблицу и 118 наименований списка литературы.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведено обоснование актуальности темы и связанных с ней задач, сформулированы цели и задачи работы, описаны используемые методы, научная новизна предлагаемых методов и результатов, представлено краткое изложение глав диссертации.

В первой главе представлена общая постановка задачи равномерного распределения точек на поверхностях. Приведен обзор научной литературы, посвященной рассматриваемой проблеме, а также смежным прикладным и фундаментальным исследованиям. Рассмотрены понятие равномерного распределения точек на поверхностях и его интерпретации с точки зрения различных математических моделей и подходов. Представлен краткий исторический очерк, описаны различные постановки задачи, отмечены наиболее значимые исследования и их авторы. Кратко описаны некоторые современные работы, в которых рассмотрены различные феноменологические и статистические подходы для моделирования равномерного распределения точек на поверхностях.

Рассмотрена проблема равномерного распределения точек на поверхности сферы. Представлены некоторые известные статистические методы для моделирования равномерного распределения точек на поверхности сферы. Помимо статистических, рассмотрены также феноменологические подходы для равномерного распределения точек на поверхности сферы, основанные на моделировании движения системы физических частиц, наделенных, например, силами отталкивания, к положению равновесия. Показана связь проблемы равномерного распределения точек на поверхности сферы с 7-ой проблемой из списка приоритетных математических задач XXI века, составленного Стивеном Смейлом.

Отмечены исследования по проблемам равномерного распределения точек на других поверхностях, таких как поверхность эллипсоида, поверхности, задаваемые уравнениями явного вида $z = (x, y)$. Рассмотрена возможность обобщения проблемы равномерного распределения точек на поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве для случаев многомерных евклидовых пространств. Отмечены работы, в которых приведены методы для равномерного распределения точек на поверхностях гиперсферы и гиперэллипсоида.

Во второй главе представлена строгая математическая формализация понятия равномерного распределения точек на гладких регулярных поверхностях в виде системы определений, на основе которых сформулированы математические постановки задач и выполнены их решения.

Определение 1. *Распределение точек на гладкой регулярной поверхности называется равномерным, если при случайном бросании точки на эту поверхность вероятность ее попадания в любую область этой поверхности пропорциональна площади этой области.*

Определение 2. *Геометрическая вероятность попадания точки в элемент гладкой регулярной поверхности при случайном бросании точки на эту поверхность определяется равенством*

$$P(X \subset dS) = \frac{dS}{S}.$$

Здесь X – точка поверхности, положение которой определяется случайным вектором, dS – площадь элемента поверхности, S – площадь всей поверхности.

Определение 3. *Плотность вероятности $f(u_1, u_2, ..., u_m)$ совместного распределения параметров, задающих положение точки, случайно брошенной на гладкую регулярную поверхность, определяется равенством:*

$$P(X \subset dS) = f(u_1, u_2, ..., u_m) du_1 du_2 ... du_m.$$

В рамках статистического представления предложен универсальный метод для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях. Метод состоит из следующих этапов:

1. Нахождение функции плотности совместного распределения параметров поверхности, соответствующей равномерному распределению точек на этой поверхности;

2. Генерирование значений параметров с использованием полученной функции плотности их совместного распределения и последующее вычисление координат точек.

В части реализации первого этапа предложенного универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях (нахождения функции плотности совместного распределения параметров поверхности) доказано утверждение:

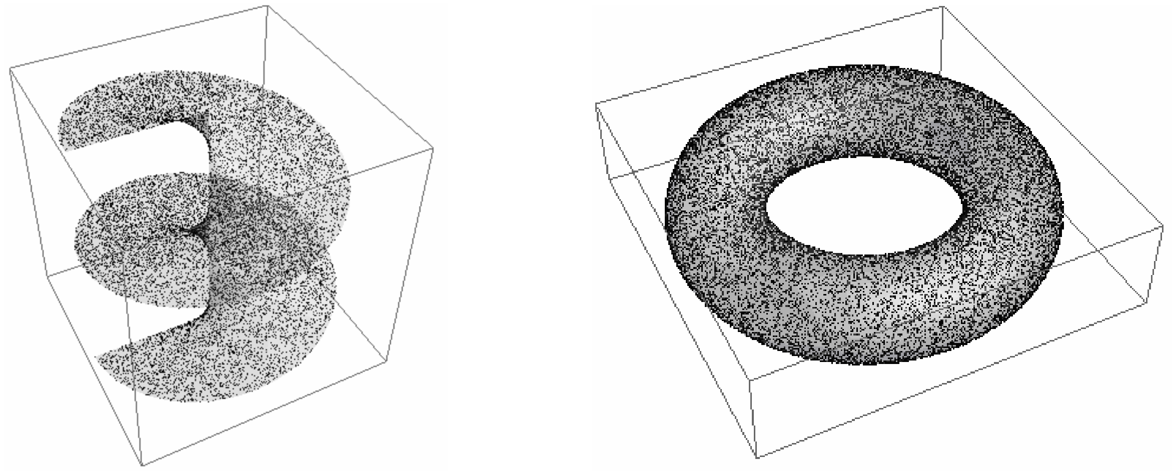
Плотность распределения параметров u, v, *соответствующая равномерному распределению точек на гладкой регулярной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, заданной параметрическими уравнениями* $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ *на области* $D = \{u_1 \le u \le u_2; v_1 \le v \le v_2\}$, *определяется функцией*

$$f(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv}, & (u,v) \in D; \\ 0, & (u,v) \notin D. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь функции E, G, F являются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности. Конструктивный подход при получении функции (1) основан на использовании определений 1-3 и теорем, определяющих метрические свойства поверхностей. Генерирование параметров u, v по функции (1) дает равномерное распределение точек на заданной поверхности.

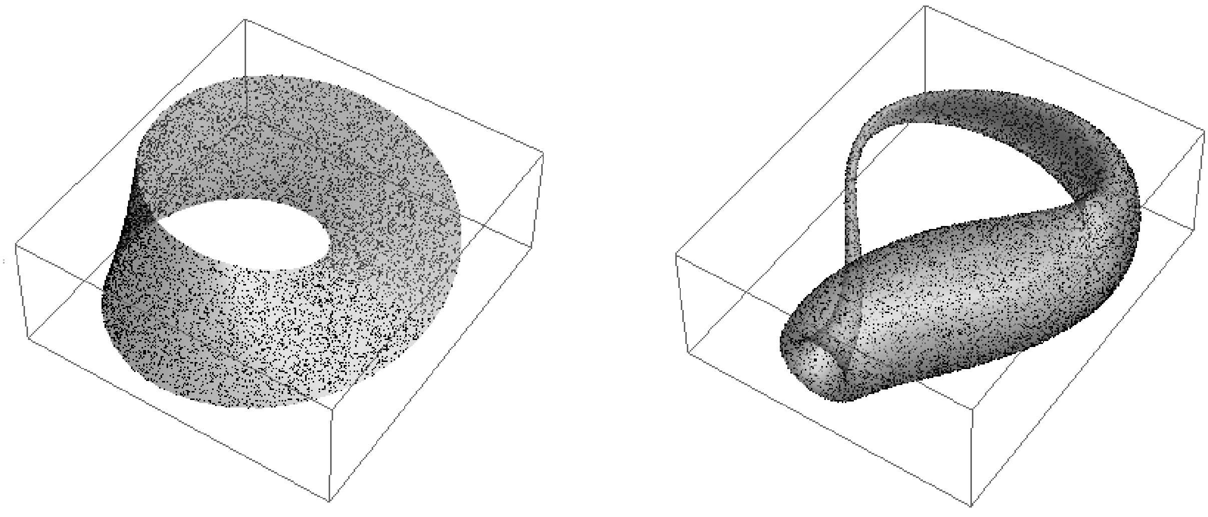
Реализацию второго этапа метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях (генерирование значений параметров с использованием полученной функции плотности их совместного распределения) предложено выполнить с помощью обобщенного метода Неймана. Приведено описание обобщенного метода Неймана для генерирования многомерных случайных величин по функции плотности их совместного распределения, рассмотрены преимущества данного метода.

На основе предложенного метода разработан алгоритм для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве. Реализация алгоритма осуществлена с помощью созданной программы в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. На рисунках 1 и 2 представлены примеры равномерных распределений точек на поверхностях, полученные с помощью созданной программы.



а б

Рис.1. Примеры равномерного распределения точек на поверхностях:
а – геликоид, б – тор



а б

Рис.2. Примеры равномерного распределения точек на поверхностях:
а – лента Мебиуса, б – бутылка Клейна

При исследовании проблемы равномерного распределения точек на поверхностях также рассмотрен вопрос проверки равномерности распределения точек на поверхностях. Предложена и описана процедура проверки равномерности распределений точек на гладких регулярных поверхностях, основанная на использовании критерия «Хи-квадрат» Пирсона. Приведены численные результаты применения предложенной процедуры проверки.

В рамках предложенного формализма и используемой методологии сформулировано решение задачи о равномерном распределении точек на поверхностях в многомерных евклидовых пространствах:

Если функции $x_1(u_1,u_2,...,u_m)$, $x_2(u_1,u_2,...,u_m)$, …, $x_n(u_1,u_2,...,u_m)$, *где* $(u_1,u_2,...,u_m)\in D$, *определяют гладкую регулярную* m*-мерную поверхность в* n*-мерном евклидовом пространстве, то плотность распределения* *параметров* $u_1, u_2, ..., u_m$, *соответствующая равномерному распределению точек на этой поверхности, определяется функцией*

$$f(u_1, u_2, ..., u_m) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{g}}{\iiint\limits_D ... \int \sqrt{g}\, du_1 du_2 ... du_m}, & (u_1, u_2, ..., u_m) \in D; \\ 0, & (u_1, u_2, ..., u_m) \notin D. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $g = \det(g_{ij})$ - определитель матрицы метрического тензора на поверхности. Матрица метрического тензора на поверхности имеет вид

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}, \text{ где } i, j = 1, 2, ..., m, \; g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}.$$

Генерирование параметров $u_1, u_2, ..., u_m$ по функции (2) с помощью обобщенного метода Неймана дает равномерное распределение точек на заданной гиперповерхности в многомерном евклидовом пространстве.

С помощью использования функции (2) и соотношений между параметрами Родрига-Гамильтона и углами Эйлера установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве, что является отражением факта двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$.

В дополнение к полученным результатам в части равномерных распределений точек на поверхностях рассмотрена проблема равномерного распределения точек на кривых. Предложены и реализованы алгоритмы, позволяющие равномерно распределять точки на кривых, заданных параметрическими уравнениями, в двухмерном, трехмерном и многомерном евклидовых пространствах.

В третьей главе представлены примеры применения разработанного универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях.

Представлена математическая модель для создания конфигураций множества коротких армирующих волокон в оболочках, обеспечивающая достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций. В основе предложенной модели лежит идея укладки коротких армирующих волокон в оболочках таким образом, чтобы центры волокон были равномерно распределены на поверхности оболочки, а их оси были случайным образом ориентированы в касательных к оболочке плоскостях. Разработанная модель нацелена на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечной конструкции. Пример распределения волокон на поверхности параболоида вращения представлен на рисунке 3.

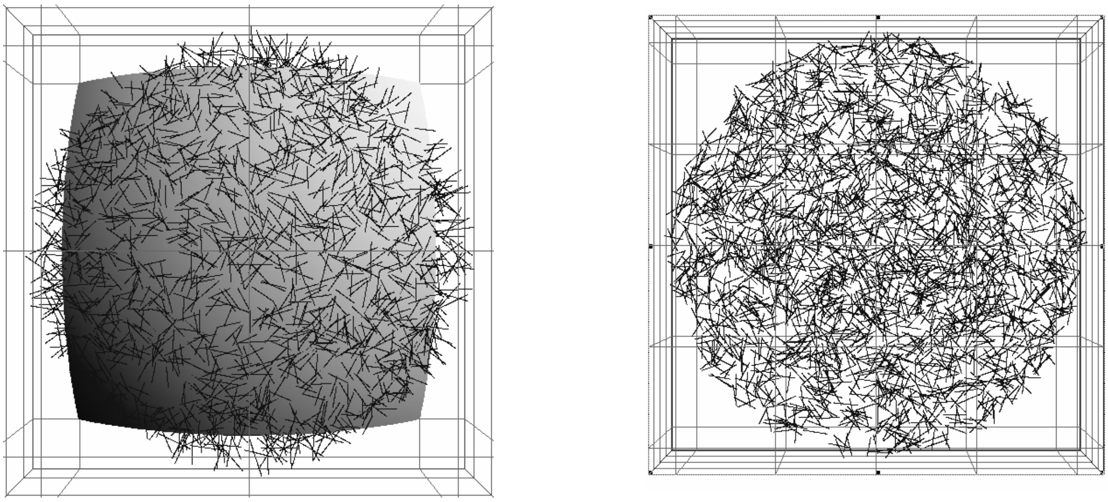


Рис.3. Распределение армирующих волокон на поверхности параболоида вращения

Представленная модель может быть обобщена для получения текстур, в задачах рационального армирования при целенаправленном создании требуемой для конкретных условий работы анизотропии служебных характеристик (см. рис. 4).

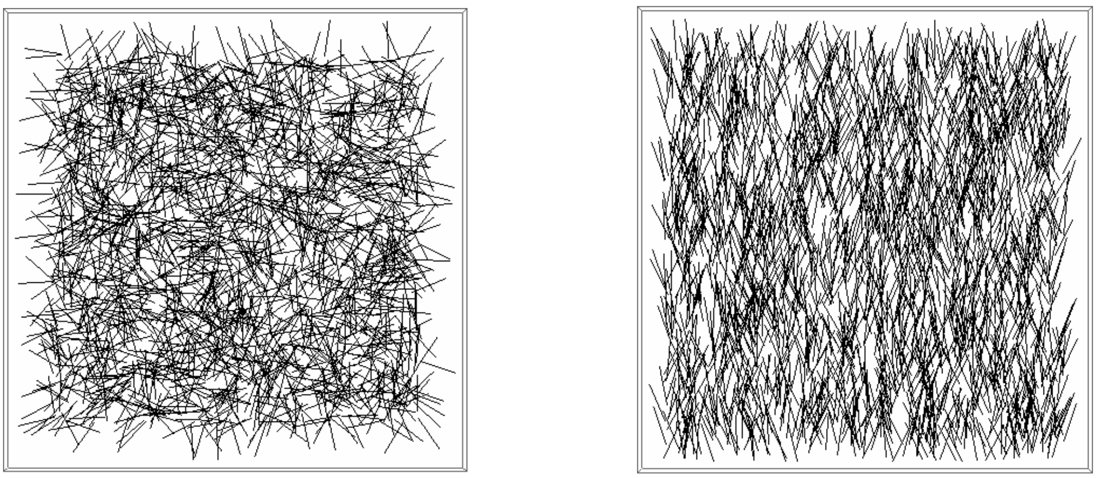


Рис.4. Распределение волокон на плоскости: слева – множество случайным образом ориентированных равномерно распределенных волокон, справа – множество равномерно распределенных волокон с преимущественными ориентировками

Представлено новое численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами. В строгой математической постановке задача относится к классу задач нахождения геометрических вероятностей. Задача заключается в нахождении площади ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами (см. рис. 5).

Предложенный метод нахождения непокрытой части поверхности основан на применении статистического численного моделирования и использовании алгоритма равномерного распределения точек на поверхности сферы. Равномерное распределение точек на поверхности сферы использовано, с одной стороны, для моделирования положения антител на поверхности вирусной частицы, с другой стороны, – для нахождения ожидаемой непокрытой площади поверхности шарообразной вирусной частицы.

Рис.5. Модель шарообразной вирусной частицы, атакованной одним антителом (слева) и тремя антителами (справа). Линиями показаны зоны «покрытия» поверхности шарообразной вирусной частицы, соответствующие каждому антителу

Выполнено сравнение результатов предложенного численного решения с результатами, полученными известным аналитическим методом (см. табл. 1).

Табл. 1. Результаты определения площади ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами

Число антител	Ожидаемая непокрытая площадь (аналитический способ)	Ожидаемая непокрытая площадь (статистический способ)	Модуль относительной погрешности, %
2	7,069	7,056	0,176
3	5,301	5,341	0,743
4	3,976	3,952	0,610
5	2,982	3,041	1,991

Сформулированы выводы о возможности применения предложенного метода для решения вариаций рассматриваемой проблемы, а также – о возможности обобщения представленного подхода для решения других задач, связанных с нахождениями геометрических вероятностей на различных поверхностях.

Представлено решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей. Текстурные параметры Δ_i – интегральные характеристики текстуры, которые определяются только плотностью распределения кристаллографических осей

$$\Delta_i = \left\langle Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2 \right\rangle, \qquad (3)$$

где $i = 1, 2, 3$ – нумерация главных осей анизотропии, $Q_{ij} = \cos\angle\left(Ox_i, Ox'_j\right)$; Ox_i – оси лабораторной системы координат, Ox'_j – кристаллографические оси. Угловыми скобками обозначена операция осреднения по ансамблю реализаций – множеству точек в пространстве углов Эйлера.

Приведены примеры расчета текстурных параметров по модельным ФРО, характеризующим нетекстурированный материал и материал с аксиальной текстурой. Проведено сравнение с установленными ранее соотношениями для текстурных параметров трансверсально-изотропных материалов. Отмечена высокая точность полученных результатов.

Представлены результаты моделирования области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой. Для визуализации области возможных состояний ортотропного материала в пространстве текстурных параметров применено статистическое моделирование. Отмечено, что построение области возможных значений текстурных параметров путем использования множества различных ФРО является нереализуемым подходом, в связи с невозможностью воспроизвести все возможные ФРО, соответствующие ортотропным материалам.

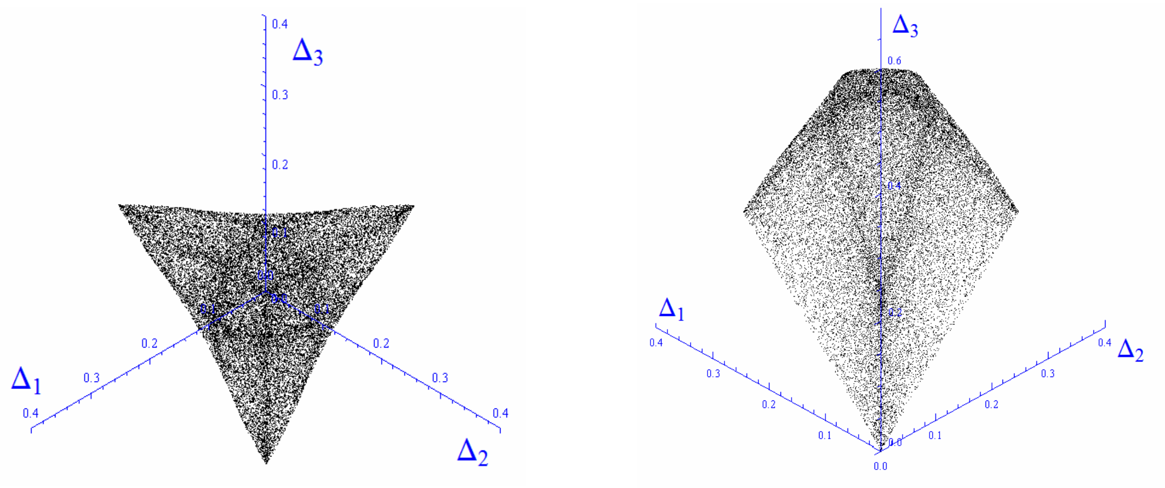
Показано, что задача может быть решена путем использования октетов – симметричных отображений случайным образом взятых ориентировок во все октанты пространства, задаваемого лабораторной системой координат $Ox_1x_2x_3$. Каждой случайной ориентировке соответствует матрица направляющих косинусов:

$$M(\psi,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \qquad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

С использованием соответствующих матриц аффинных преобразований находятся матрицы направляющих косинусов для 8 ориентировок, образующих октет, который обладает тремя плоскостями симметрии: x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_2Ox_3. Рассматривая данный октет как модель «случайного» ортотропного поликристаллического материала, представляется возможным выполнить процедуру расчета всех текстурных параметров Δ_1, Δ_2, Δ_3.

Генерирование множества подобных октетов ориентировок (с вычислением для каждого из них значений текстурных параметров) дает область множества состояний ортотропного поликристаллического материала в пространстве текстурных параметров, которая может быть визуализирована. Генерацию ориентировок каждого октета предложено осуществлять с использованием функции распределения углов Эйлера, соответствующей нетекстурированному состоянию поликристаллического материала. На рисунке 6 представлена полученная область текстурных состояний.



ViewPoint: {10,10,10} ViewPoint: {10,10,-10}

Рис.6. Область возможных текстурных состояний ортотропного материала с кубической структурой

В заключении приведены основные результаты диссертационного исследования и сформулированы основные выводы:

- получены в общем виде функции плотностей совместного распределения параметров, соответствующие равномерному распределению точек на кривых и поверхностях в евклидовых пространствах различной размерности;

- установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

- разработаны универсальные алгоритмы для моделирования равномерных распределений точек на кривых и поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве;

- разработана математическая модель для создания конфигураций множества коротких армирующих волокон в оболочках, обеспечивающая достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

- получено численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

- получено численное решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Полученные результаты решений прикладных задач свидетельствуют об эффективности предложенного статистического метода для моделирования равномерных распределений точек на поверхностях.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В журналах, рекомендованных ВАК:

1. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на поверхностях для создания структур композитных оболочек с трансверсально-изотропными свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (5) – С. 2263-2264.
2. Копытов Н.П. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т.16, № 3 (57) – С. 65-74.
3. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4, часть 3. – С. 618-622.

Другие публикации:

4. Kopytov N.P., Mityushov E.A. The method for uniform distribution of points on surfaces in multi-dimensional Euclidean space: preprint in www.intellectualarchive.com.
   URL: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1170
5. Kopytov N.P., Mityushov E.A. Universal Algorithm Of Uniform Distribution Of Points On Arbitrary Analitic Surfaces In Three-dimensional Space: preprint in www.intellectualarchive.com.
   URL: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=473
6. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях // Вестник ПГТУ. Механика. – 2010. – № 4. – С. 55-66.
7. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель укладки армирующих волокон в сферической оболочке // Сб. тез. докл. VI Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение». – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2010. – С. 19.

8. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Разработка математических моделей армирования оболочек из композиционных материалов // Сб. тез. докл. XIX Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках». – Пермь: ПГТУ, 2010. – С. 65-66.
9. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Решение задачи равномерного распределения точек на различных поверхностях статистическим методом // Сб. тез. докл. XVII Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь: ИМСС: УрО РАН, 2011. – С. 175.
10. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Разработка математических моделей армирования оболочек из композиционных материалов // Сб. тез. междунар. научно-практ. конф. «XXXIX НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбГПУ». – Санкт-Петербург: СПбГПУ, 2010. – С. 704-705.
11. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: Моделирование случайных равновероятных ориентировок твердого тела с помощью равномерного распределения точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном пространстве: preprint in www.intellectualarchive.com.
URL: http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1279
12. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях // Материалы II Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики». – Томск: ТГУ, 2011. – С. 311-316.
13. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами [Электронный ресурс] // VII Российская научно-техническая конференция «Механика микронеоднородных материалов и разрушение».
URL: http://www.imach.uran.ru/conf/mmmp/mmp2.htm
14. Берестова С.А., Копытов Н.П., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Структура оператора упругости поликристаллического материала [Электронный ресурс] // VIII Российская научно-техническая конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций».
URL: http://www.imach.uran.ru/conf/mp2014/mp4.htm

Формат 60 x 90/16. Набор компьютерный.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Центр оперативной полиграфии «Копирус»
620014, г. Екатеринбург, ул. Ленина, 24/8