

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России
Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Копытов Никита Павлович

**РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЯХ
СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Митюшов Е.А.

Екатеринбург – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
 ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ, СУЩЕСТВУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....	13
1.1. Общая постановка задачи	13
1.2. Равномерное распределение точек на поверхности сферы	15
1.3. Различные подходы для равномерного распределения точек на поверхностях	20
1.4. Равномерное распределение точек на поверхностях и методы Монте-Карло	23
1.5. Седьмая задача Стивена Смейла	24
1.6. Равномерное распределение точек на поверхностях в многомерных пространствах	26
1.7. Равномерное распределение точек на кривых	26
Выводы по первой главе	27
 ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОЧЕК НА ГЛАДКИХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ	29
2.1. Общее описание методологии решения задачи	29
2.2. Нахождение функции плотности совместного распределения координат при описании равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями явного вида	32
2.3. Нахождение функция плотности совместного распределения параметров при описании равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями параметрического вида	34
2.4. Генерирование случайных величин по известной функции плотности распределения методом Неймана	35
2.5. Описание алгоритма и программы для равномерного распределения точек на поверхностях и визуализация результатов	38
2.6. Процедура проверки равномерности распределений точек	42
2.7. Равномерное распределение точек на кривых	52
2.8. Равномерное распределение точек на поверхностях в многомерном евклидовом пространстве	60

2.9. Моделирование случайных равновероятных ориентировок твердого тела с помощью равномерного распределения точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном пространстве	63
Выводы по второй главе	66
 ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД.....	68
3.1. Основные положения.....	68
3.2. Задача об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами	70
3.3. Моделирование оптимальной укладки коротких армирующих волокон в оболочках при конструировании волокнистых оболочечных композитов	82
3.4. Применение статистического численного моделирования в задачах количественного текстурного анализ.....	94
Выводы по третьей главе.....	108
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	110
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	112

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Задача равномерного распределения точек на поверхностях имеет значение для различных фундаментальных и прикладных исследований. Она является важной для таких научных направлений и групп методов, как статистическое и имитационное математическое моделирование, стохастические методы многопараметрической оптимизации, количественный текстурный анализ, компьютерная графика, технологии армирования структурно-неоднородных сред и так далее.

Благодаря своей вариативности и большим прикладным возможностям, в настоящее время проблема вышла за рамки вспомогательной задачи и начала приобретать общетеоретическое значение. География работ, посвященных данной проблеме, представлена широко, а количество научных статей, книг и других публикаций постоянно увеличивается. Следует также отметить, что статьи, посвященные ее рассмотрению, начали появляться с середины XX века, а сегодня их количество постоянно увеличивается, охватывая все большее число различных областей научного процесса.

Из множества научных работ, посвященных проблеме равномерного распределения точек на поверхностях, могут быть выделены три основные группы: во-первых, это работы по равномерному распределению точек на поверхности сферы в трехмерном пространстве (Marsaglia G. [21], Muller M. [35], Cook J. [7], Watson G. [52, 53], Tashiro Y. [49], Moran P. [34]); во-вторых, это работы по равномерному распределению точек на поверхностях, заданных уравнениями явного вида в трехмерном пространстве (Melfi G., Schoier G. [22]); в-третьих, это работы по равномерному распределению точек на поверхностях гипersферы и гиперэллипсоида в многомерных пространствах (Rubinstein R.Y., Kroese D.P. «Simulation and Monte Carlo Methods» [42]).

Несмотря на большое количество работ по данной теме, в научной литературе не представлен метод, который являлся бы общим, универсальным для широкого класса поверхностей, например, для класса гладких регулярных поверхностей. Появление такого универсального метода для равномерного распределения точек на поверхностях позволит существенно расширить область применения ряда общенаучных и междисциплинарных групп методов, в особенности, методов статистического и имитационного математического моделирования.

Цели работы:

- разработка универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях;
- разработка статистических математических моделей структурно-неоднородных сред и материалов с микронеоднородной структурой строения на основе равномерных распределений точек на поверхностях.

Задачи работы:

- разработка универсального алгоритма и программы для равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве;
- установление связи между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;
- разработка математической модели укладки коротких армирующих волокон в оболочках, направленной на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;
- разработка численного статистического алгоритма и программы для решения частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части

поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

- решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Научная новизна. В исследовании достигнуты следующие результаты, обладающие научной новизной:

1. Получены функции плотностей совместного распределения параметров, соответствующие равномерному распределению точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном и многомерном пространствах;

2. Получены функции плотностей распределения параметра, соответствующие равномерному распределению точек на гладких регулярных кривых в двухмерном, трехмерном и многомерном пространствах;

3. Разработаны универсальные алгоритмы для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных кривых и поверхностях в трехмерном пространстве;

4. Установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

5. Разработана математическая модель укладки коротких армирующих волокон в оболочках, направленная на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

6. Получено новое численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

7. Методом компьютерного эксперимента найдена область возможных значений интегральных характеристик текстуры – текстурных параметров, определяющих свойства ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Выносимые на защиту положения:

1. Метод для равномерного распределения точек на гладких регулярных кривых и поверхностях;

2. Установленная связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

3. Математическая модель укладки коротких армирующих волокон в оболочках, направленная на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

4. Метод численного решения частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

5. Результаты компьютерного эксперимента по моделированию области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Достоверность и обоснованность результатов. Полученные результаты согласуются между собой. Равномерность смоделированных с помощью предложенного метода распределений точек на различных поверхностях подтверждена визуальным анализом, а также количественными оценками, полученными с использованием критерия Пирсона проверки

статистических гипотез. Результаты решения ряда задач, полученные с помощью разработанных на основе статистических численных алгоритмов программ, с высокой степенью точности соответствуют результатам известных аналитических методов.

Практическая ценность работы. Основная ценность работы заключается в полученных алгоритмах и математических моделях. Алгоритмы равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях и кривых в трехмерном пространстве обладают высокой степенью универсальности, что позволяет применять их в различных областях научных исследований. Математические модели, предложенные для решения конкретных прикладных задач, организованы таким образом, что могут быть усовершенствованы для применения в решении смежных проблем. Заложенная в данной работе методология исследований и полученные результаты открывают новые возможности применения методов статистического и имитационного математического моделирования для решения большого числа задач различной направленности.

Апробация работы. Основные результаты исследований докладывались на следующих конференциях: на VI Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2010 год), на XIX Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2010 год), на VII Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2012 год);

Полностью работа обсуждалась на научных семинарах кафедры теоретической механики Института фундаментального образования УрФУ (рук. д.ф.-м.н., доцент С.А. Берестова), кафедры «Математическое моделирование систем и процессов» ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., профессор

П.В. Трусов), кафедры «Механика композиционных материалов и конструкций» ПНИПУ (рук. д.ф.-м.н., профессор Ю.В. Соколкин), на научном семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН В.П. Матвеев).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ [14-15, 63, 82-92], отражающих основные результаты и этапы исследований. Среди них 4 статьи [82-85], 3 из которых [82-84], опубликованы в научных периодических изданиях, включенных в перечень ведущих периодических изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем диссертации. Работа включает в себя следующие основные разделы: введение, три главы с выводами по каждой из них, заключение с выводами по работе в целом и список использованной литературы. Диссертация представлена на 121 странице, содержит 45 рисунков, 1 таблицу и 118 наименований списка литературы.

В первой главе представлена общая постановка задачи равномерного распределения точек на поверхностях. Приведен обзор научной литературы, посвященной рассматриваемой проблеме, а также смежным прикладным и фундаментальным исследованиям. Рассмотрены понятие равномерного распределения точек на поверхностях и его интерпретации с точки зрения различных математических моделей и подходов. Представлен краткий исторический очерк, описаны различные постановки задачи, отмечены наиболее значимые исследования и их авторы, а также научные журналы, в которых опубликованы основные работы и результаты по рассматриваемой теме. Кратко описаны некоторые современные работы, в которых рассмотрены различные феноменологические и статистические подходы для равномерного распределения точек на поверхностях.

Рассмотрена проблема равномерного распределения точек на поверхности сферы. Представлены некоторые известные статистические

методы для равномерного распределения точек на поверхности сферы. Помимо статистических, рассмотрены также феноменологические подходы для равномерного распределения точек на поверхности сферы. Показана связь проблемы равномерного распределения точек на поверхности сферы с 7-ой проблемой из списка приоритетных математических задач XXI века, составленного Стивеном Смейлом.

Отмечены исследования по проблемам равномерного распределения точек на других поверхностях, таких как поверхность эллипсоида, поверхностях задаваемых уравнениями явного вида $z = (x, y)$. Рассмотрена возможность обобщения проблемы равномерного распределения точек на поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве для случаев многомерных евклидовых пространств. Отмечены работы, в которых приведены методы для равномерного распределения точек на поверхностях гиперсферы и гиперэллипсоида.

Во второй главе представлена строгая математическая формализация понятия равномерного распределения точек на гладких регулярных поверхностях в виде системы определений, на основе которых сформулированы математические постановки задач и выполнены их решения.

В рамках статистического представления предложен универсальный метод для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях.

На основе предложенного метода представлен алгоритм для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях. Описана реализация алгоритма в виде программы в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica.

При исследовании проблемы равномерного распределения точек на поверхностях также рассмотрен вопрос проверки равномерности распределения точек на поверхностях. Предложена и описана процедура проверки равномерности распределений точек на гладких регулярных

поверхностях, основанная на использовании критерия «Хи-квадрат» Пирсона. Приведены численные результаты применения предложенной процедуры проверки.

В рамках предложенного формализма и используемой методологии представлено решение задачи о равномерном распределении точек на поверхностях в многомерных евклидовых пространствах.

Установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной единичной гиперболы в четырехмерном евклидовом пространстве.

В дополнение к полученным результатам в части равномерных распределений точек на поверхностях рассмотрена проблема равномерного распределения точек на кривых. Предложены и реализованы алгоритмы, позволяющие равномерно распределять точки на кривых, заданных параметрическими уравнениями, в двухмерном, трехмерном и многомерном евклидовых пространствах.

В третьей главе представлены примеры применения разработанного универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях в различных прикладных исследованиях.

Представлено новое численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами. В строгой математической постановке задача относится к классу задач нахождения геометрических вероятностей. Задача заключается в нахождении площади ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами.

Представлена математическая модель укладки коротких армирующих волокон в оболочках, направленная на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций. В основе

предложенной модели лежит идея укладки коротких армирующих волокон в оболочках таким образом, чтобы центры волокон были равномерно распределенных на поверхности оболочки, а их оси были случайным образом ориентированы в касательных к оболочке плоскостях. Разработанная модель нацелена на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечной конструкции. Отмечено, что предложенная модель может быть обобщена для получения текстур, в задачах рационального армирования при целенаправленном создании требуемой для конкретных условий работы анизотропии служебных характеристик.

Представлено решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей. Приведены примеры расчета текстурных параметров по модельным ФРО, характеризующим нетекстурированный материал и материал с аксиальной текстурой. Проведено сравнение с установленными ранее соотношениями для текстурных параметров трансверсально-изотропных материалов. Отмечена высокая точность полученных результатов.

Представлены метод и результаты моделирования области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Автор выражает признательность и благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Евгению Александровичу Митюшову за всестороннюю поддержку работы, поиск научных идей, помощь в их реализации и определении направлений исследовательского процесса.

ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ, СУЩЕСТВУЮЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1. Общая постановка задачи

Несмотря на простоту постановки, задача о равномерном распределении точек на поверхностях является непростой в решении. Конкретные типы поверхностей в совокупности с различными подходами могут привести к появлению частного для каждого отдельно рассматриваемого случая решения. Например, хорошо известны методы для равномерного распределения точек на плоскости и поверхности сферы [7, 21, 34, 42, 48, 49, 52-54]. Менее известны методы для равномерного распределения точек на поверхности эллипсоида [42], а также поверхностях, задаваемых уравнениями явного вида [22, 44].

Равномерно распределить точки на плоскости несложно. Во-первых, можно помещать точки в узлах координатной сетки. Во-вторых, можно генерировать независимо друг от друга две координаты (работая в декартовой системе координат), используя генератор случайного числа (ГСЧ) с равномерным распределением на заданных интервалах. Оба способа являются самыми простыми в использовании и наиболее распространенными.

Так как равномерно распределять точки на плоскости представляется несложным, то, соответственно, можно получить равномерное распределение точек на разворачивающихся поверхностях (поверхностях нулевой гауссовой кривизны), путем применения соответствующих преобразований поверхностей.

Намного сложнее дело обстоит с задачей равномерного распределения точек на поверхности сферы и в целом на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны.

Методы, упомянутые выше, являются либо частными для конкретных поверхностей, либо обобщены для узкого класса поверхностей. Однако обобщенный метод, позволяющий равномерно распределять точки на большом классе различных поверхностей, отсутствует. Отсутствует даже метод, являющийся общим для отмеченных выше поверхностей.

Одной из целей данной работы является получение универсального алгоритма для равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве, задаваемых параметрическими уравнениями. Подобный алгоритм будет общим для широкого класса поверхностей, включая такие поверхности как: плоскость, сфера, эллипсоид, поверхности задаваемые уравнениями явной формы, поверхности, задаваемые параметрическими уравнениями, например, поверхность бутылки Клейна, ленты Мебиуса, геликоида и так далее.

Наиболее полно проблема равномерного распределения точек на поверхностях представляется при рассмотрении частного случая задачи – проблемы равномерного распределения точек на поверхности сферы.

Данная работа посвящена в первую очередь проблеме равномерного распределения точек на поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве. При этом важно отметить, что проблемы равномерных распределений точек на интервалах, плоскостях, в трехмерном и многомерных евклидовых пространствах достаточно хорошо изучены. Из множества публикаций, посвященных тематике равномерных распределений точек в пространстве, следует выделить работу И.С. Соболя под названием «Точки, равномерно заполняющие многомерный куб», опубликованную в 1985 году [112]. В ней в сжатой, аккуратной форме с точными и объемными формулировками изложены проблемы понятия «равномерного распределения» точек на интервале и в кубе, представлены различные критерии равномерности распределений точек. Показана тесная взаимосвязь между проблемами равномерных распределений точек в кубе (включая многомерный куб) и методами Монте-Карло, рассмотрены вопросы

применения равномерных распределений точек в кубе и методов Монте-Карло для решения задач многокритериальной оптимизации, а также поиска множества Парето.

Работа И.М. Соболя [112, 113] и работы на которые даны ссылки в ней свидетельствуют о глубокой, всесторонней проработке проблемы равномерных распределений точек в кубе и гиперкубе (многомерном кубе), ее важности для науки и техники, но практически не касаются проблемы равномерных распределений точек на поверхностях.

1.2. Равномерное распределение точек на поверхности сферы

Равномерное распределение точек на поверхности сферы имеет значение для большого числа научных направлений [2-4, 13-19, 34-38, 47, 48]: математическое моделирование, компьютерная графика, многопараметрическая оптимизация, количественный текстурный анализ и т.д.

Особый интерес к равномерному распределению точек именно на поверхности сферы может быть объяснен, с одной стороны, геометрическими свойствами поверхности – свойствами центральной симметрии, с другой стороны, тем, что при моделировании многих объектов в окружающем нас мире удобно использовать именно этот геометрический объект. Планеты, Солнце, вирусные частицы, небесный свод и так далее могут в определенном приближении рассматриваться как шар, либо сфера. К этому можно также добавить и чисто математический интерес. Задача обладает простотой постановки, и одновременно создает впечатление, что имеет тривиальное решение, однако при ближайшем ее рассмотрении, такое впечатление рассеивается.

В зависимости от числа точек, которые необходимо распределить на поверхности сферы, и от дополнительных ограничений и условий, могут быть рассмотрены различные подходы к решению данной частной задачи:

1. Во-первых, это создание генератора псевдослучайных точек, сферические координаты которых удовлетворяют заданным условиям и ограничениям. Этот подход может оказаться наиболее адекватным в случаях с достаточно большим количеством точек [54];

2. Во-вторых, это использование правильных многогранников (тел Платона, рис. 1.2.1) и дальнейшая аппроксимация сферы на их основе. Однако необходимо сказать, что тел Платона для трехмерного пространства только пять: тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр, икосаэдр;

3. В-третьих, это методы, основанные на физических интерпретациях поведения системы частиц, которые могут перемещаться только по поверхности сферы (например, нахождение минимума потенциальной энергии системы частиц). Этот подход требует больших вычислительных затрат, но занял прочное место в науке и его развивают различные группы ученых по всему миру [2-4, 9, 10, 36, 39].

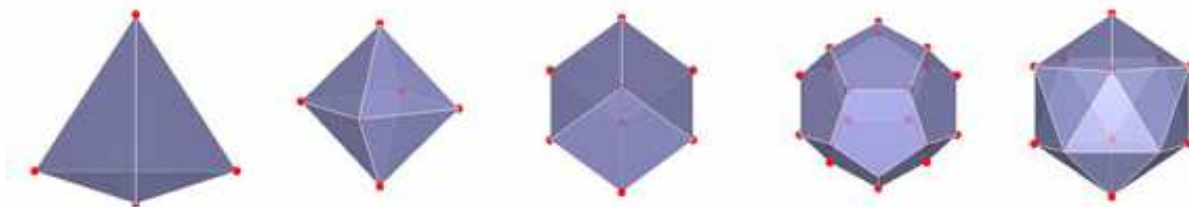


Рис. 1.2.1 – Тела Платона (тетраэдр, октаэдр, гексаэдр, додекаэдр, икосаэдр)

Интересными могут оказаться результаты, основанные на комбинировании различных подходов, например, использование тел Платона и моделирование их случайных положений, используя заданную совместную плотность распределения сферических углов, определяющих их ориентации в пространстве.

Проблема равномерного распределения точек на поверхности сферы имеет достаточно большую историю. Публикации, посвященные ей, появляются с начала второй половины XX века. Большое внимание проблеме уделяли такие ученые как J.M. Cook [7], G. Marsaglia [21], Y. Tashiro [49], P.

Moran [34], а их научные работы были опубликованы в ведущих мировых научных журналах «Annals of Mathematical Statistics», «Annals of the Institute of Statistical Mathematics», «Biometrika».

Важность данной задачи также подчеркивается тем фактом, что ее решения представлены в ставших уже хрестоматийными книгах, посвященных статистическому моделированию и геометрическим вероятностям [42, 81]. Стоит также отметить, что задаче о равномерном распределении точек на сфере посвящена отдельная страница в Интернет-энциклопедии MathWorld (автор энциклопедии - E.W. Weisstein, [54]).

Перед тем, как перейти к непосредственному описанию методов для равномерного распределения точек на сфере, стоит остановиться на встречающемся в литературе некорректном методе (см. обзор в [81]), который еще больше раскрывают суть задачи и способствуют ее более полному и всестороннему пониманию.

Использование узлов координатной сетки на сфере – то есть точек пересечения линий широт и долгот (см. рис. 1.2.2) не дает равномерного распределения точек на сфере. Визуальный анализ рисунка 1.2.2 показывает, что узлы пересечения широт и долгот сгущаются при приближении к полюсам.

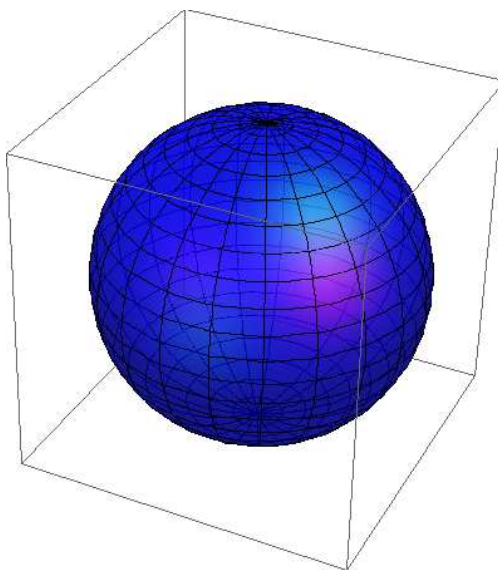


Рис. 1.2.2. Поверхность сферы с координатной сеткой

Некорректный метод заключается в генерировании сферических углов по формулам: $\theta = \pi \text{Random}$, $\varphi = 2\pi \text{Random}$. По своей сути это также использование системы широт и долгот (применение такой же, как в прошлом примере системы криволинейных координат на поверхности сферы), и так же как в предыдущем примере получается сгущение точек у полюсов (см. рис. 1.2.3). Ошибочность использования данного метода очевидна из визуального анализа рисунка 1.2.3, а также отмечена в [54, 81].

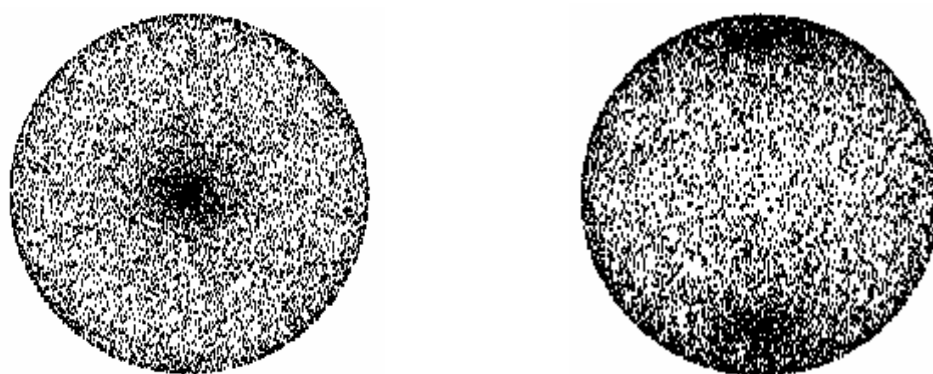


Рис. 1.2.3. Некорректное распределение точек со сгущением у полюсов

Описанный выше некорректный способ дает более полное и более глубокое понимание не только проблемы равномерного распределения точек на поверхности сферы, но также предостерегает от необдуманного использования подобных непроработанных подходов для решения проблемы равномерного распределения точек на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны («двойной» кривизны).

Ниже описаны наиболее широко распространенные корректные методы для равномерного распределения точек на поверхности сферы.

Метод 1. Генерирование точек на сфере по формулам $\theta = \arccos(2\text{Random} - 1)$, $\varphi = 2\pi \text{Random}$, где *Random* - случайное число с

равномерным распределением на интервале $(0,1)$. Распределение точек на сфере, полученное на основе данных формул, представлено на рисунке 1.2.4.

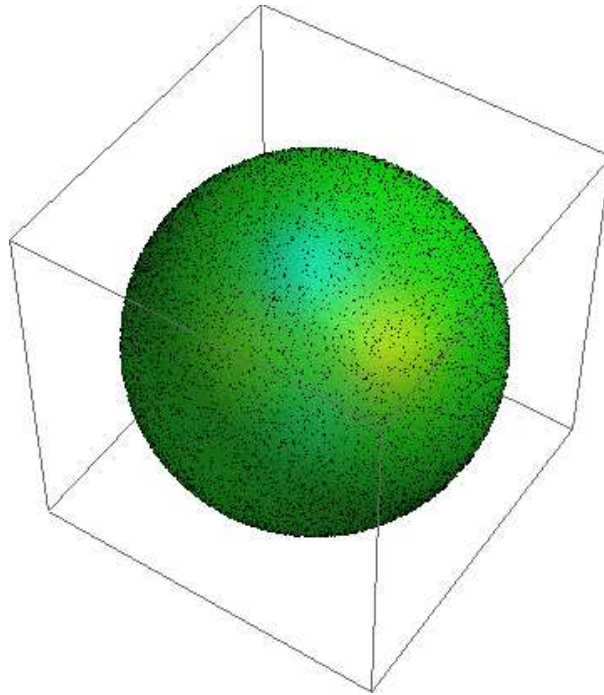


Рис. 1.2.4. Равномерное распределение точек на поверхности сферы

Данный метод приведен в [54] и является самым распространенным.

Метод 2. Данный метод состоит из следующих действий:

- 1) Сфера вписывается в куб;
- 2) Генерируется множество точек в данном кубе, с использованием генератора случайного числа (ГСЧ). Получается множество точек, равномерно распределенных в пространстве куба;
- 3) Отбрасываются точки, удаленные от центра сферы на расстояние большее, чем ее радиус. Получается множество точек, равномерно распределенное в пространстве, ограниченном сферой;
- 4) Оставшиеся точки проецируются на поверхность сферы.

Данный метод является простым и интуитивно понятным, он дает такие же результаты, как и метод 1. Данный метод описан в [54].

Методы 1 и 2 основаны на статистических подходах и являются достаточно универсальными, поэтому они нашли свое применение в большом количестве исследований. Также отметим, что есть и другие методы для равномерного распределения точек на поверхности сферы, познакомиться с которыми можно в [7, 34, 35, 49, 52, 54].

Помимо статистических подходов для решения проблемы равномерного распределения точек на поверхности сферы используются методы, в основе которых лежит моделирование движения частиц под действием физических сил [2-4, 9, 10, 16, 39, 43, 45]. Среди исследователей, использующих такие подходы, стоит выделить представителей США D.P. Hardin и E.B. Saff [10, 39, 43], а также группу ученых из Испании E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto [2-4, 9]. Данные авторы также используют свои методы для получения распределений точек на других поверхностях.

Кроме существующих методов для распределения точек на сфере стоит отметить известные алгоритмы для равномерного распределения точек на поверхности эллипсоида [42], а также отметить работы G. Melfi и G. Schoier и их коллег [22, 44], в которых предлагается алгоритм для равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями явного вида.

1.3. Различные подходы для равномерного распределения точек на поверхностях

Опираясь на вышеизложенный материал и другие работы, посвященные данной теме, следует обобщить различные подходы к решению рассматриваемой проблемы и отметить их преимущества и недостатки. Среди всех существующих подходов следует выделить 4 основные группы:

1. Методы, основанные на применении упорядоченных, регулярных алгоритмов распределения точек;

2. Методы, основанные на применении феноменологических моделей;
3. Методы, основанные на статистическом моделировании;
4. Комбинированные методы.

Регулярные схемы распределения точек. Регулярные схемы распределения точек являются наиболее понятными и наглядными. Например, плоскость разбитая координатной сеткой, в узлах которой помещаются точки, является простейшим примером применения регулярной схемы распределения точек. Сложнее дело обстоит с поверхностями, обладающими «двойной» кривизной. Рассмотрев, например, сферу с координатной сеткой на ней (см. рис. 1.2.2), можно заметить, что точки пересечения координатных линий сгущаются ближе к полюсам, что свидетельствует о неравномерности распределения.

Можно использовать тела Платона, обладающих таким свойством, как равенство длин всех ребер, то есть равноудаленность каждой из вершин от других ближайших. Так же можно применять метод аппроксимации сферы на основе тел Платона, то есть брать за основу какое-либо из тел Платона, описанное сферой, и затем проецировать центры граней на сферу. Однако, этот метод удобен только для сферы. Для других поверхностей, обладающих «двойной» кривизной, найти подобный метод проблематично. Но, несмотря на все недостатки, методология, основанная на применении регулярных схем распределения точек, является часто оптимальной, когда речь идет о небольшом количестве точек.

Данные подходы не являются оптимальными для большого числа точек, в общем случае. В случаях, когда требуется распределить большое число точек, необходимо прибегнуть к использованию статистических [22, 42], либо феноменологических методов [2-4, 9, 10, 16, 39, 43, 45].

Феноменологические методы распределения точек. В основе феноменологических методов равномерного распределения точек на различных поверхностях лежат физические законы механики и электростатики. Их основная идея заключается в моделировании движения

системы частиц под действием различных сил. Такие методы являются более сложными, чем другие, так как в их основе лежит итерационный процесс, но представляют особый интерес, и соответственно, находят свое применение в весьма сложных исследованиях. Самой яркой иллюстрацией этого являются различные попытки решения одной из сложнейших математических задач XXI века, представленной в списке приоритетных задач математики Стивена Смейла [5, 46].

Данные методы пригодны как для распределения малого, так и распределения большого числа точек на поверхностях. Они дают, в целом, неплохие результаты, но требуют огромное число итераций вычислительного процесса [2-4], что и является их главным недостатком. Тем не менее, подход значим и с фундаментальной точки зрения, о чем свидетельствует седьмая задача из списка Стивена Смейла.

Статистические методы равномерного распределения точек. Очень часто в основе статистических методов лежат алгоритмы генерирования многомерных случайных величин по функции плотности совместного распределения, данная функция находится аналитически. В связи с этим используются такие методы, как метод взятия обратной функции, метод Неймана и т.д. Подобные подходы в ряде случаев являются очень эффективными и находят свое применение как инструмент в различных научных областях [22, 52-54]. Статистические методы обладают высокой алгоритмической надежностью, позволяющей их достаточно эффективно встраивать в более сложные и комплексные алгоритмы. Важно отметить, что методы равномерного распределения точек на поверхностях сферы, эллипсоида, гиперсферы и гиперэллипсоида незаменимы в ряде методов Монте-Карло [42]. Учитывая статистическую природу таких методов, также необходимо обратить внимание на проблемы проверки равномерности распределений точек и качества генераторов случайных чисел, для решения которых может быть использован математический аппарат проверки статистических гипотез [12].

Методы статистического моделирования плохо подходят для распределения небольшого числа точек в силу своего вероятностного характера, но очень удобны для большого количества точек.

Комбинированные методы. Наконец, отметим комбинированные, смешанные методы равномерного распределения точек на различных поверхностях. Данные методы включают в себя описанные выше и также обладают высокой эффективностью, но вместе с тем сталкиваются с трудностями, присущими и тем и другим подходам. Например, в [3, 4] представлен такой подход: на первой стадии точки распределяются статистическим методом случайно по поверхности, далее используется оптимизация функции потенциальной энергии системы частиц [2-4, 9, 10, 39].

При использовании тех или иных методов, большое значение имеет рассмотрение свойств поверхности и их типа. Если для поверхности сферы, достаточно эффективными являются все вышеописанные подходы, то для других поверхностей, как правило, приоритет имеет конкретный метод.

1.4. Равномерное распределение точек на поверхностях и методы Монте-Карло

Учитывая стремительные темпы развития вычислительной техники, во многих исследованиях все чаще применяются методы статистического моделирования различных процессов. В связи с этим задача равномерного распределения точек на поверхностях часто упоминается как вспомогательная задача для построения алгоритмов статистического моделирования процессов и применения методов Монте-Карло [42, 81].

Методами Монте-Карло [42, 67, 68, 76, 78-80, 103, 104, 110, 113] называются методы, в основе которых лежит многократное повторение стохастического (случайного) процесса, как правило, генерируемое по известным функциям плотностей распределения параметров. После

получения множества реализаций, находятся искомые значения и соотношения. Эти методы на сегодняшний день широко используются для решения задач в различных областях физики, химии, математики, экономики, оптимизации, теории управления и других областях науки.

Интересным является тот факт, что активное развитие методов Монте-Карло началось в 40-х годах с работ Джона фон Неймана и Станислава Улама [23], а первые работы по равномерному распределению точек на сфере стали появляться в 50-х годах XX века [35, 53], то есть приблизительно в одно и то же время.

Это является закономерным. Например, когда задача имеет определенное нелинейное ограничение, представимое в виде поверхности, либо когда задача статистического моделирования связана с поиском геометрических вероятностей (пример решения одной из таких задач представлен в главе 3), алгоритмы равномерного распределения точек на поверхности используются в качестве составных частей более сложных программ. Поэтому неудивительно, что развитие методов равномерного распределения точек на поверхностях и методов Монте-Карло идет параллельно, а алгоритмы для распределения точек на поверхностях обсуждаются в научной литературе, посвященной статистическому моделированию [42]. Так, например, в [11, 35, 42, 55] представлены не только методы для равномерного распределения точек на поверхности сферы в трехмерном пространстве, но и алгоритмы для равномерного распределения точек на поверхности гиперболы и гиперэллипсоида.

1.5. Седьмая задача Стивена Смейла

Проблемами Смейла назван список из восемнадцати нерешённых математических проблем, предложенный Стивеном Смейлом в 1998 году («Mathematical Problems for the Next Century», [46]). По некоторым данным

идею этого списка Стивену Смейлу подсказал Владимир Арнольд на основе аналогии со списком математических проблем Гильберта.

Седьмая проблема из списка Стивена Смейла («Problem 7: Distribution of points on the 2-sphere») заключается в распределении точек на двумерной гиперсфере исходя из условия минимума логарифмической энергии системы точек.

Исследования [4, 5, 10] посвящены именно этой проблеме. Авторы рассматривают различные алгоритмы для распределений точек на сфере, исследуют различные виды логарифмической энергии системы точек. В основе исследования лежат феноменологические и комбинированные методы распределения точек на поверхности сферы. Рассматриваются различные стартовые конфигурации точек, полученные, в том числе, и статистическими методами. Процесс движения точек из начальных положений основан на феноменологическом подходе.

Авторы делают выводы об итерационном процессе перемещения точек и находят оптимальные управляющие константы для достижения гарантированной сходимости. Однако результатом исследования является только предположение о позитивном решении проблемы, а не ее окончательное решение.

Важным аспектом исследований, представленных в [2-4] является то, что предложенный метод подходит для равномерного распределения точек не только на сфере, но и на других сложных поверхностях. Данные исследования являются прекрасной демонстрацией применения феноменологических и комбинированных подходов к решению задачи распределения точек на поверхности сферы, а также других поверхностях.

Необходимо подчеркнуть, что в [3-4] особый акцент сделан на проблемах реализации алгоритма во времени (временных проблемах реализации алгоритма), что является одной из наиболее характерных черт многих современных математических задач. Для исследования данного вопроса авторы применяют наряду с простыми, обычными персональными

компьютерами, суперкомпьютер. Использование суперкомпьютера позволяет снять более полные характеристики сходимости итерационного процесса, получить более точные результаты.

1.6. Равномерное распределение точек на поверхностях в многомерных пространствах

Помимо отмеченных выше методов для равномерного распределения точек на поверхностях в трехмерном пространстве, много научных работ посвящено исследованиям методов для равномерного распределения точек на гиперсфере [11, 35, 42, 55]. Также известны методы для равномерного распределения точек на поверхности гиперэллипсоида [42].

Среди исследователей, работы которых наиболее часто цитируются при упоминании проблемы равномерного распределения точек на поверхности гиперсферы, стоит выделить таких, как G. Marsaglia [21], M.E. Muller [35]. Их работы были опубликованы в известных научных журналах «Annals of Mathematical Statistics», «Association for Computing Machinery». Данной проблеме также посвящена отдельная страница в Интернет-ресурсе MathWorld (E.W. Weisstein, «Hypersphere Point Picking», [55]).

1.7. Равномерное распределение точек на кривых

Задача равномерного распределения точек на кривых несколько более проста, чем аналогичная задача для поверхностей, но также представляет определенный интерес. Алгоритм для равномерного распределения точек на кривых также может быть полезным для различных теоретических и прикладных исследований.

Интерес к равномерным распределениям точек на кривых возникает также с учетом рассмотрения различных способов параметризации кривых и

тесной связью между геометрическими аспектами исследования кривых в пространстве и функциональным анализом.

Стоит отметить, что было бы нелогичным рассмотреть равномерное распределение точек на широком классе поверхностей, представить для них соответствующие статистические алгоритмы, и не перенести эти решения на задачи распределения точек на кривых, особенно учитывая, что теория дифференциальной геометрии поверхностей и теория дифференциальной геометрии кривых тесно связаны друг с другом. Поэтому, после рассмотрения проблемы равномерного распределения точек на поверхностях, в данной работе обсуждается проблема равномерного распределения точек на кривых: представлен метод для равномерного распределения точек на кривых в двухмерном, трехмерном пространстве с обобщением для равномерного распределения точек на кривых, задаваемых параметрическим способом в многомерном евклидовом пространстве.

Выводы по первой главе

Выполнен обзор и анализ существующей литературы, посвященной проблеме равномерных распределений точек на поверхностях. Результаты обзора говорят о том, что рассматриваемая проблема является весьма важной и имеет значение для науки, как с прикладной, так и с теоретической точки зрения.

Особенно стоит отметить, что решения задач о равномерном распределении точек на поверхностях различных видов и типов существенно расширяют область применения методов Монте-Карло. Но существующие алгоритмы подходят в большей части для конкретных поверхностей, это ограничивает область их применения.

Таким образом, формируются основные цели:

- разработка универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на гладких регулярных поверхностях;

- разработка статистических математических моделей структурно-неоднородных сред и материалов с микронеоднородной структурой строения на основе равномерных распределений точек на поверхностях.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОЧЕК НА ГЛАДКИХ РЕГУЛЯРНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

2.1. Общее описание методологии решения задачи

В главе 1 была представлена общая постановка задачи о равномерном распределении точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве. Была обоснована актуальность проблемы, и продемонстрированы некоторые возможности, которые открываются с решением данной задачи. Были рассмотрены различные подходы для решения данной задачи, отмечены преимущества и недостатки тех либо иных методов. Учитывая вычислительную сложность феноменологических подходов и индивидуальность регулярных схем равномерного распределения точек для различных поверхностей, а также, принимая во внимания тот факт, что проблема рассматривается в большей степени в контексте использования методов Монте-Карло, при разработке универсального алгоритма для равномерного распределения точек на поверхности выбор был сделан в пользу статистического подхода.

Целью данной главы является описание разработанного универсального алгоритма для равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях и иллюстрация равномерных распределений точек на различных поверхностях: сферы, тора, геликоида, «Падающая капля», бутылки Клейна и других. Также в данной главе предлагается процедура проверки на равномерность распределений точек на поверхностях.

Несмотря на то, что существует большое количество работ, посвященных равномерным распределениям точек на поверхностях, в большинстве их них отсутствует строгая формализация понятия равномерного распределения точек на поверхностях. В связи с этим, необходимо привести ряд определений, в рамках которых далее будут представлены математические выкладки.

Определение 2.1.1. *Распределение точек на гладкой регулярной поверхности называется равномерным, если при случайном бросании точки на эту поверхность вероятность ее попадания в любую область этой поверхности пропорциональна площади этой области.*

Определение 2.1.2. *Геометрическая вероятность попадания точки в элемент гладкой регулярной поверхности при случайном бросании точки на эту поверхность определяется равенством*

$$P(X \subset dS) = \frac{dS}{S}.$$

Здесь X – точка поверхности, положение которой определяется случайным вектором, dS – площадь элемента поверхности, S – площадь всей поверхности.

Определение 2.1.3. *Плотность вероятности $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ совместного распределения параметров, задающих положение точки, случайно брошенной на гладкую регулярную поверхность, определяется равенством:*

$$P(X \subset dS) = f(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 du_2 \dots du_m.$$

Следствием определения 2.1.1 является то, что при равномерном распределении бесконечно большого числа точек на гладкой регулярной поверхности на двух любых элементах этой поверхности с одинаковыми площадями будет содержаться одинаковое число точек.

В основе предлагаемого универсального алгоритма для равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях лежит нахождение функции плотности совместного распределения координат (либо параметров – в случае использования параметрической формы задания поверхностей), соответствующей равномерному распределению точек на поверхности.

После получения функции плотности совместного распределения производится генерирование координат точек (либо параметров, которые определяют координаты точек) по данной функции.

В данной главе рассматриваются равномерные распределения точек на поверхностях следующих типов:

- на поверхностях, задаваемых уравнением явного вида $z = z(x, y)$ в трехмерном евклидовом пространстве;
- на поверхностях, задаваемых уравнениями параметрического вида $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ в трехмерном евклидовом пространстве;
- на поверхностях, задаваемых уравнениями параметрического вида в многомерных евклидовых пространствах.

Примерами поверхностей, которые могут быть заданы уравнением явного вида в трехмерном евклидовом пространстве, является эллиптический параболоид и гиперболический параболоид (см. рис. 2.1.1).

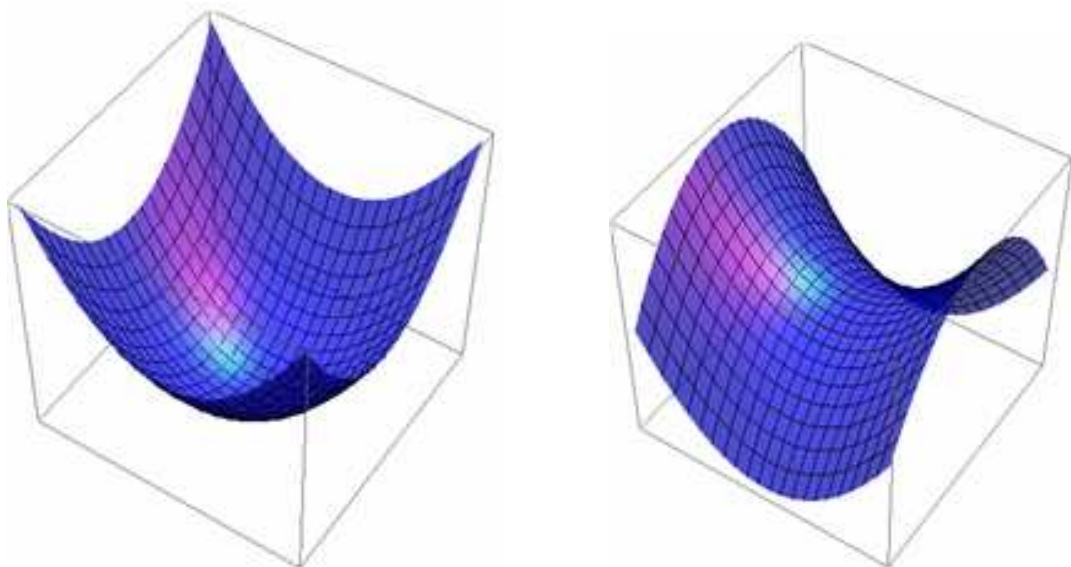


Рис. 2.1.1. Поверхности, задаваемые уравнениями явного вида

Примерами поверхностей, которые не могут быть заданы уравнениями явного вида, но могут быть заданы уравнениями параметрического вида, в трехмерном евклидовом пространстве являются, геликоид, лист Мёбиуса, бутылка Клейна (см. рис. 2.1.2).

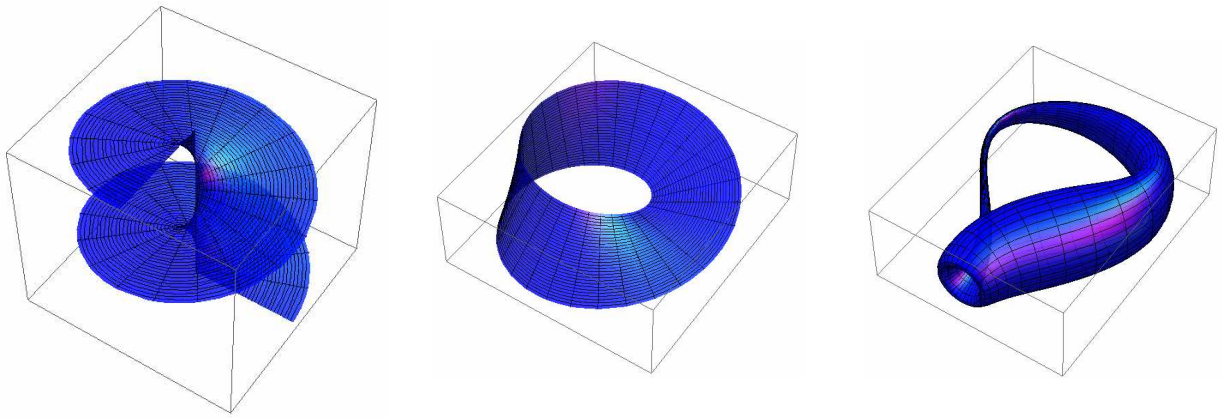


Рис. 2.1.2. Поверхности, задаваемые уравнениями параметрического вида

Очевидно, что второй тип рассматриваемых поверхностей включает в себя первый, а параметрическая форма задания поверхностей в трехмерном пространстве является наиболее общей и универсальной. Из этого следует, что алгоритм для равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями параметрической формы, подойдет и для поверхностей, задаваемых уравнениями явного вида.

В дополнение к проблеме равномерного распределения точек на поверхностях рассмотрена проблема равномерного распределения точек на кривых.

В данной главе использованы материалы статей и тезисов докладов для научных конференций, ранее подготовленных и опубликованных автором [14-15, 63, 82-92].

2.2. Нахождение функции плотности совместного распределения координат при описании равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями явного вида

Пусть гладкая регулярная поверхность задана уравнением явного вида $z = z(x, y)$ на области $D = \{x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$. Необходимо найти функцию $f(x, y)$ плотности совместного распределения значений координат

x, y , соответствующую равномерному распределению точек на рассматриваемой поверхности.

Из определения 2.1.2 геометрическая вероятность попадания произвольной точки X на элемент поверхности dS равна

$$P(X \subset dS) = \frac{dS}{S}.$$

Так как для гладких регулярных поверхностей¹ $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$,

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \text{ то } P(X \subset dS) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}{\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}.$$

Из определения 2.1.3 плотности вероятности получаем

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}.$$

Таким образом, плотность распределения значений координат x, y , задающая равномерное распределение точек на поверхности, заданной уравнением явного вида $z = z(x, y)$ на области $D = \{x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$, определяется функцией

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy}, & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

¹ – метрические свойства поверхности определяются известными теоремами математического анализа [58, 75, 93, 94, 108, 109, 118].

Генерируя значения координат x, y по функции $f(x, y)$, получим равномерное распределение точек на поверхности.

2.3. Нахождение функции плотности совместного распределения параметров при описании равномерного распределения точек на поверхностях, задаваемых уравнениями параметрического вида

Пусть гладкая регулярная поверхность задана параметрическими уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ на области $D = \{u_1 \leq u \leq u_2; v_1 \leq v \leq v_2\}$. Необходимо найти функцию $f(u, v)$ плотности совместного распределения значений параметров u, v , соответствующую равномерному распределению точек на рассматриваемой поверхности.

Из определения 2.1.2 геометрическая вероятность попадания произвольной точки X на элемент поверхности dS равна

$$P(X \subset dS) = \frac{dS}{S}.$$

Так как для гладких регулярных поверхностей

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

то

$$P(X \subset dS) = \frac{\sqrt{EG - F^2} du dv}{\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv}.$$

Из определения 2.1.3 плотности вероятности получаем

$$f(u, v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv}.$$

Таким образом, плотность распределения значений параметров u, v , задающая равномерное распределение точек на поверхности, определяется функцией

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv}, & (u, v) \in D; \\ 0, & (u, v) \notin D. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Здесь функции E , G , F являются коэффициентами первой квадратичной формы поверхности.

Генерируя значения параметров u, v по функции $f(u, v)$, получим равномерное распределение точек на поверхности.

2.4. Генерирование случайных величин по известной функции плотности распределения методом Неймана

Для моделирования одномерной случайной величины по функции плотности распределения применяются различные методы [42, 105]. Например, метод взятия обратной функции удобен в тех случаях, когда можно легко аналитически получить обратную функцию к функции распределения рассматриваемой случайной величины. Однако применение данного метода усложняется в случаях распределений зависимых случайных величин.

Универсальным методом генерирования случайных величин по известным плотностям их распределения является метод Неймана (метод усечения, acceptance-rejection method), суть которого рассмотрим сначала на примере одномерной случайной величины. В этом случае алгоритм реализуется следующим образом [42, 105]:

1) Функция плотности распределения вписывается в прямоугольник;

2) Генерируются два независимых числа эталонным генератором случайной величины с равномерным распределением на интервале (0,1) и масштабируются по сторонам прямоугольника;

3) Если полученная точка попадает в область под графиком функции плотности распределения, то точка принимается, иначе отбрасывается;

4) Повторяются действия 2-3 до тех пор, пока не будет сгенерировано необходимое число точек.

Иллюстрация метода Неймана для генерирования одномерной случайной величины по известной функции плотности ее распределения представлена на рисунке 2.4.1.

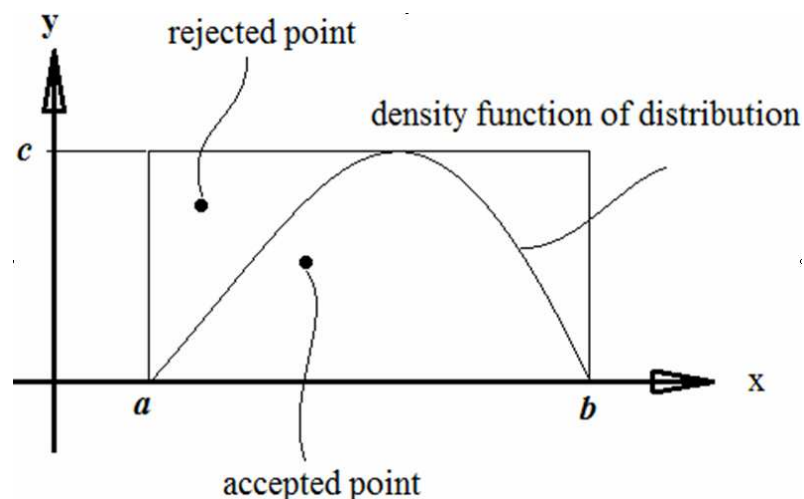


Рис. 2.4.1. Иллюстрация метода Неймана для одномерного случая

При переходе к многомерным случаям процедура генерации сохраняется с учетом изменения размерности пространства.

Для двумерных случайных величин сохраняется наглядность алгоритма, так как процедура усечения осуществляется в трехмерном («физическом») пространстве. В этом случае алгоритм реализуется следующим образом:

- 1) Определяется $\max_D f(u,v)$ - максимальное значение функции $f(u,v)$ на области $D = \{u_1 \leq u \leq u_2; v_1 \leq v \leq v_2\}$;

2) Генерируются числа $u_0 = (u_2 - u_1) \cdot R + u_1$, $v_0 = (v_2 - v_1) \cdot R + v_1$, где R - эталонный генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале $(0,1)$;

3) Выполняется проверка: если $\max_D f(u,v) \cdot R < f(u_0, v_0)$, где R - эталонный генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале $(0,1)$, то точка принимается, в противном случае отбрасывается;

4) Повторяются действия 2-3 до тех пор, пока не будет сгенерировано необходимое число точек.

Метод Неймана для генерирования двумерной случайной величины по известной функции плотности совместного распределения аналогичен методу Неймана для одномерного случая с теми изменениями, что функция плотности вписывается не в прямоугольник (как в случае с одномерной случайной величиной), а в соответствующий параллелепипед.

Важно отметить, что в пункте 2.2 функция совместного распределения координат, соответствующая равномерному распределению точек на

поверхности, имеет вид $f(x,y) = \frac{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}}{\iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dx dy}$, а в пункте 2.3

функция совместного распределения параметров имеет вид

$f(u,v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv}$. В обоих случаях необходимо вычислять значение

двойного определенного интеграла (площади поверхности). Это усложняет алгоритм. Метод Неймана позволяет этого не делать и использовать вместо

выше представленных функции $f^*(x,y) = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}$ и

$f^*(u,v) = \sqrt{EG - F^2}$, для случая явного задания поверхности и для параметрической формы задания поверхностей соответственно. Подобная

замена избавляет от вычисления двойного определенного интеграла, экономит время и уменьшает сложность программы.

Преимуществами метода Неймана является простота и надежность его использования как для случаев с одномерной случайной величиной, так и для случаев с многомерными случайными величинами. Эти аспекты играют важную роль при выборе метода генерирования двумерной случайной величины по известной функции плотности ее распределения, необходимого для создания универсального алгоритма для равномерного распределения точек на поверхностях. Следует отметить, что иногда метод Неймана для генерирования многомерных случайных величин называют «Обобщенным методом Неймана». Более подробные описания метода Неймана представлены в [42, 105].

2.5. Описание алгоритма и программы для равномерного распределения точек на поверхностях и визуализация результатов

Выше в данной главе был представлен метод для нахождения функции плотности совместного распределения координат, либо параметров (в зависимости от типа задания поверхностей), соответствующей равномерному распределению точек на заданной поверхности. Данный метод требует аналитических (символьных вычислений). Метод Неймана для генерирования двумерной случайной величины по известной функции плотности распределения является численным.

Дифференциация по типам используемых методов создает дополнительные трудности. Следовательно, для полноценной реализации алгоритма требуется использовать программную среду, позволяющую выполнять как символьные, так и численные вычисления. Для реализации алгоритма в виде программы была выбрана система компьютерной математики (СКМ) Wolfram Mathematica.

Исходными (входными) данными для алгоритма является задание поверхности соответствующими уравнениями, области определения и числа точек, которые необходимо равномерно распределить на ней. Выходными данными является список координат точек и построение трехмерной модели поверхности с распределенными на ней точками.

Алгоритм состоит из следующих блоков:

1. Ввод исходных данных – уравнений поверхности, области определения, числа точек, которые необходимо равномерно распределить по поверхности;
2. Нахождение в символьном виде функции плотности совместного распределения координат (или параметров), соответствующей равномерному распределению точек на заданной поверхности;
3. Численное генерирование методом Неймана координат (или параметров с дальнейшим расчетом координат) точек по функции плотности совместного распределения координат (или параметров);
4. Вывод списка координат точек и визуальных моделей.

Описанный алгоритм реализован в виде программы в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica. Программа написана на встроенном в систему языке функционального программирования *Mathematica*. При создании программы использовались встроенные в систему функции, циклы, операторы ветвления (условные операторы), среди которых можно отдельно отметить следующие: функции `NMaximize[]`, `Random[]`, `Append[]`, цикл `While[]`, условный оператор `if[]` и так далее. Широко использовались технологии работы со списками, а также построения и вывода полученных графических моделей и базовых прототипов: `Graphics3D[]`, `ParametricPlot3D[]`, `Show[]` и так далее.

Ниже представлены некоторые результаты работы программы.

На рисунке 2.5.1 представлена **поверхность сферы** и равномерное распределение 15000 точек на ней. Поверхность сферы задана уравнениями:

$$x = x(u, v) = \sin u \cos v, \quad y = y(u, v) = \sin u \sin v, \quad z = z(u, v) = \cos u,$$

где $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

На рисунке 2.5.2 представлена **поверхность тора** и равномерное распределение 20000 точек на ней. Поверхность тора задана уравнениями:

$$x = x(u, v) = (3 + \cos u) \cos v, \quad y = y(u, v) = (3 + \cos u) \sin v, \quad z = z(u, v) = \sin u,$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

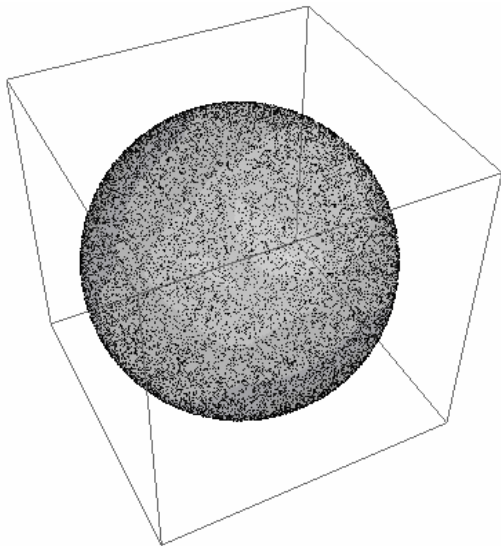


Рис. 2.5.1. Равномерное распределение 15000 точек на поверхности сферы, ViewPoint: {1,2,2}

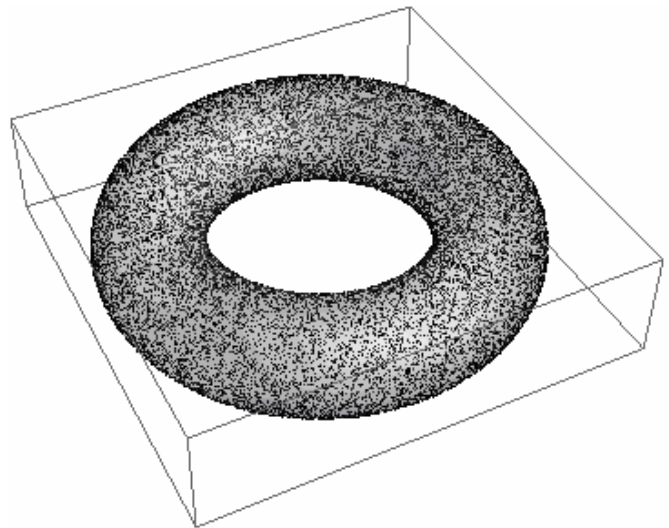


Рис. 2.5.2. Равномерное распределение 20000 точек на поверхности тора, ViewPoint: {1,2,2}

На рисунке 2.5.3 представлена **поверхность геликоида** и равномерное распределение 15000 точек на ней. Поверхность геликоида задана уравнениями:

$$x = x(u, v) = u \cos v, \quad y = y(u, v) = u \sin v, \quad z = z(u, v) = v,$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

На рисунке 2.5.4 представлена **поверхность «Падающая капля»** и равномерное распределение 20000 точек на ней. Поверхность «Падающая капля» задана уравнениями [94]:

$$x = x(u, v) = v^2 \sqrt{1-v} \cos u, \quad y = y(u, v) = v^2 \sqrt{1-v} \sin u, \quad z = z(u, v) = -v,$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$.

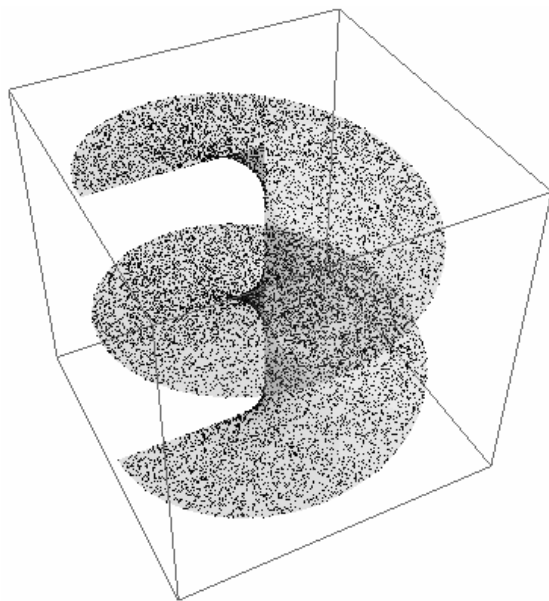


Рис. 2.5.3. Равномерное распределение 15000 точек на поверхности геликоида, ViewPoint: {1,2,2}

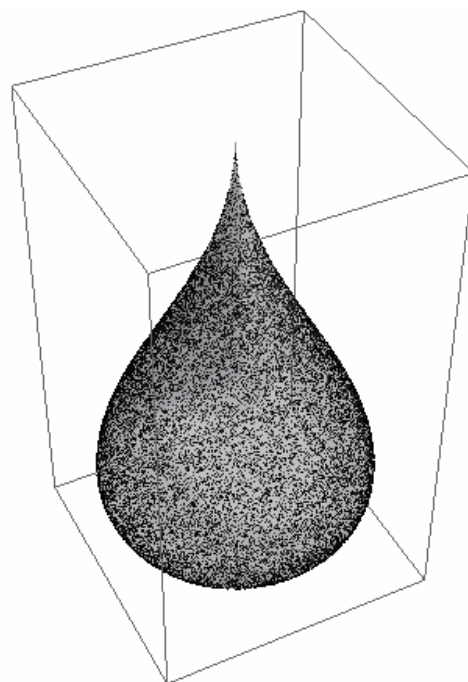


Рис. 2.5.4. Равномерное распределение 20000 точек на поверхности «Падающая капля», ViewPoint: {1,2,2}

На рисунке 2.5.5 представлен лист Мебиуса и равномерное распределение 10000 точек на нем. Лист Мебиуса задан уравнениями [94]:

$$x = x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u,$$

$$y = y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u,$$

$$z = z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2},$$

где $0 \leq u \leq 2\pi$, $-1 \leq v \leq 1$.

На рисунке 2.5.6 представлена поверхность бутылки Клейна и равномерное распределение 10000 точек на ней. Поверхность бутылки Клейна задана уравнениями [20]:

$$x = x(u, v) = -\frac{2}{15} \cos u (3 \cos v + 5 \sin u \cos v \cos u - 30 \sin u - 60 \sin u \cos^6 v + 90 \sin u \cos^4 v),$$

$$y = y(u, v) = -\frac{1}{15} \sin u (80 \cos v \cos^7 u \sin u + 48 \cos v \cos^6 u - 80 \cos v \cos^5 u \sin u - 48 \cos v \cos^4 u - 5 \cos v \cos^3 u \sin u - 3 \cos v \cos^2 u + 5 \sin u \cos v \cos u + 3 \cos v - 60 \sin u),$$

$$z = z(u, v) = \frac{2}{15} \sin v (3 + 5 \sin u \cos u),$$

где $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

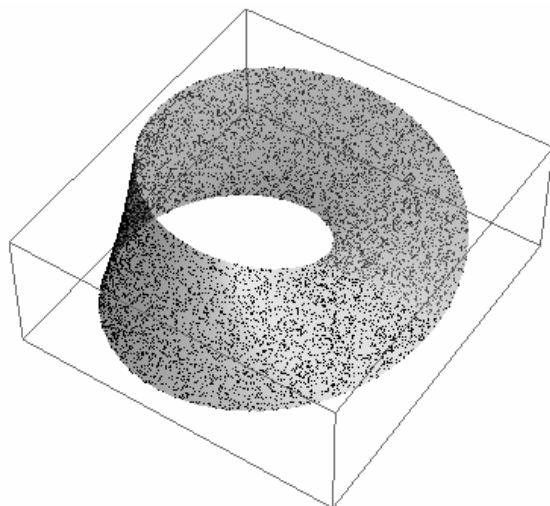


Рис. 2.5.5. Равномерное распределение 10000 точек на листе Мебиуса,
ViewPoint: {2,-3,4}

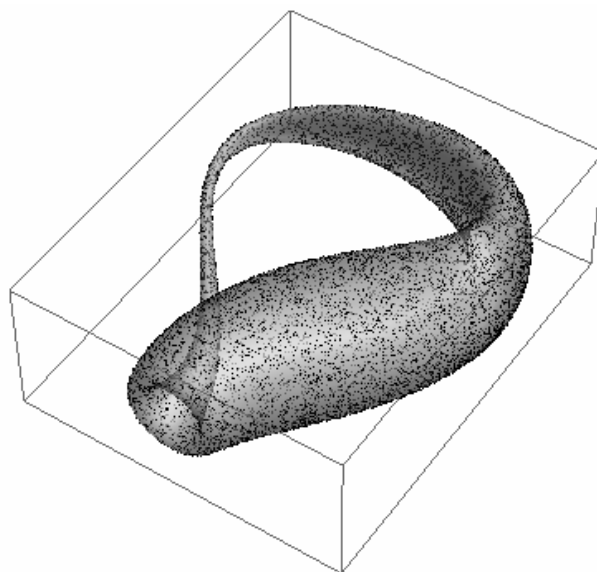


Рис. 2.5.6. Равномерное распределение 10000 точек на поверхности бутылки Клейна,
ViewPoint: {2,-3,4}

Визуальный анализ полученных результатов равномерного распределения точек на поверхностях различных типов подтверждает правильность работы алгоритма.

2.6. Процедура проверки равномерности распределений точек

В дополнение к хорошо изученным и достаточно широко известным способам равномерного распределения точек на поверхности сферы, были представлены методы для равномерного распределения точек на поверхностях, которые задаются уравнениями явного вида $z = f(x, y)$, и на аналитических поверхностях, которые задаются наиболее общим способом – уравнениями параметрического вида $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$.

Однако необходимо отметить, что предложенные алгоритмы применялись без проверки результатов их работы. В связи с этим, для дополнения ряда описанных выше результатов исследований, предлагается метод, позволяющий выполнять не только исключительно визуальный анализ результатов действия алгоритмов и программ для равномерного распределения точек на поверхностях, но также позволяющей выполнять численную оценку равномерности распределений точек на поверхностях.

Методология, предлагаемая в данном разделе, является развитием хорошо известных методов, используемых для проверки результатов работы генераторов случайных чисел [12]. Необходимость проверки равномерности полученных распределений точек на поверхностях является важной с той точки зрения, что усложнение форм поверхностей приводит к сложностям в использовании исключительно визуального анализа полученных распределений. Несмотря на то, что визуальный анализ (то есть, по сути, экспертная оценка, основанная на рассмотрении полученной визуальной модели без каких-либо численных характеристик) является достаточно мощным инструментом, он не до конца удовлетворяет потребности исследователя быть уверенным в том, что получено правильное, именно равномерное распределение. С одной стороны, это связано с тем, что исследователь не всегда уверен в правильности своих умозаключений, полученных лишь на основе зрительного анализа, с другой стороны, это обусловлено тем, что, в принципе, сложно визуально оценить равномерность распределения точек на таких поверхностях, как, например, бутылка Клейна.

Обобщая выше сказанное, следует отметить, что необходимость и актуальность проверки на равномерность обусловлена следующими факторами:

1. Возможностью возникновения ошибок при составлении алгоритмов для равномерного распределения точек на поверхностях и их реализации средствами специализированных компьютерных программных пакетов;

2. Возможностью тестирования на равномерность распределений точек на поверхностях независимо от того, каким образом они были получены (например, данные по распределениям микроорганизмов или растений на поверхностях в различных биологических системах, распределение частиц в космическом пространстве и так далее);

3. Недостаточностью визуальной проверки, которая имеет низкую эффективность при анализе распределений точек на поверхностях сложной конфигурации, таких, например, как бутылка Клейна, поверхность Мебиуса и т.д.;

4. Необходимостью оценки и сравнения различных методов равномерного распределения точек для выбора наиболее оптимального.

Метод, основанный на использовании критерия «хи-квадрат» Пирсона, является одним из самых распространенных и надежных способов проверки статистических гипотез. Предлагаемый алгоритм, как уже упоминалось выше, является развитием алгоритма, применяемого для проверки равномерности распределения точек на отрезке, полученного генератором случайного числа (ГСЧ). То есть используется как одна из проверок доброкачественности ГСЧ.

Достаточно хорошо исследованы методы проверки равномерности распределения точек на заданном интервале, которые используются для проверки качества работы ГСЧ. Наиболее широкое использование получил метод проверки равномерности распределения точек на заданном интервале, основанный на использовании критерия «хи-квадрат» Пирсона [12, 73, 93]. В данной работе предлагается обобщение данного метода для проверки равномерности распределения точек на поверхностях.

Несмотря на то, что предлагаемый алгоритм может применяться для проверки равномерности распределений точек на поверхностях, независимо от того, каким образом было получено распределение (статистическим методом, феноменологическим методом либо другим), в данной работе представляются данные по проверке распределений, полученных с

использованием методов статистического моделирования, которые на базовом алгоритмическом уровне используют встроенный в программную среду ГСЧ. Это обстоятельство требует дополнительных условий, которые отсутствуют в общем случае использования критерия Пирсона для проверки статистических гипотез, но специально разработаны для случаев тестирования ГСЧ. Наиболее подробно и полно применение критерия Пирсона, а также дополнительных условий, упомянутых выше, для случая тестирования ГСЧ изложены в книге «Искусство программирования» Д. Кнута [12].

Рассмотрим сначала алгоритм проверки равномерности распределения точек на интервале $(0,1)$, основанный на применении критерия Пирсона. Алгоритм состоит из следующих действий [12]:

- 1) Используя испытываемый генератор случайного числа (ГСЧ), генерируется N точек на интервале $(0,1)$;
- 2) Интервал $(0,1)$ разбивается на k отрезков, которые не должны быть обязательно равными;
- 3) Определяется число n_i точек принадлежащих каждому отрезку;
- 4) Определяется длина l_i каждого отрезка;
- 5) Рассчитывается значение экспериментального параметра χ^2 («хи-квадрат»):

$$\chi_{\text{экс}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \frac{l_i}{l} N)^2}{\frac{l_i}{l} N},$$

где $\frac{l_i}{l} N$ - это число точек, которое попало бы в i -й интервал в идеальном случае, n_i - число точек, которые фактически попали в i -й интервал в ходе эксперимента;

- 6) Определяется число m степеней свободы: $m = k - 1$;

7) По таблице χ^2 -распределения для m степеней свободы находятся значения, соответствующие вероятностям 10% и 90%, после чего выполняется проверка [12]: если $\chi^2_{p=10\%} \leq \chi^2_{эксн} \leq \chi^2_{p=90\%}$, то распределение точек считается равномерным, иначе считается, что распределение точек является неравномерным, либо точки распределены «слишком» равномерно (например, когда расстояния между соседними точками одинаковое).

Следует отметить, что в пункте 7 приведенного выше алгоритма используется двухстороннее неравенство, несмотря на то, что проверяемая гипотеза является правосторонней. Использование дополнительного критерия требуется для того, чтобы исключить случаи с равномерными распределениями, полученными нестохастическими методами. Например, если просто распределить точки так, что расстояние между соседними точками будет одинаковым, то значение $\chi^2_{эксн}$ будет близким к 0, либо равно нулю (в зависимости от разбиения интервала). Но в таком случае распределение не является случайным и это свидетельствует о том, что оно получено не статистическими методами. Подробное обоснование использования критерия Пирсона для проверки равномерности распределения точек на интервале представлено в [12].

Подход может быть развит для проверки равномерности распределения точек на поверхностях. Предлагаемый алгоритм состоит из следующих действий:

- 1) Генерируется N точек, распределенных на поверхности, заданной параметрическим способом: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ (либо берется распределение точек, полученное другим путем);
- 2) Область значений параметров u, v разбивается на k подобластей;

3) Определяется число n_i точек принадлежащих каждой подобласти, при этом $N = \sum_{i=1}^k n_i$;

4) Определяется площадь S_i поверхности, соответствующей каждой подобласти, при этом $S = \sum_{i=1}^k S_i$ - площадь всей рассматриваемой поверхности;

5) Рассчитывается значение экспериментального параметра χ^2 («хи-квадрат»):

$$\chi_{\text{эксн}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - \frac{S_i}{S} N)^2}{\frac{S_i}{S} N},$$

где $\frac{S_i}{S} N$ - это число точек, которое попало бы в i -ю подобласть в идеальном случае, n_i - число точек, которые фактически попали в i -ю подобласть в ходе эксперимента;

6) Определяется число m степеней свободы: $m = k - 1$;

7) По таблице χ^2 -распределения для m степеней свободы находятся значения, соответствующие вероятностям 10% и 90%, после чего выполняется проверка: если $\chi_{p=10\%}^2 \leq \chi_{\text{эксн}}^2 \leq \chi_{p=90\%}^2$, то распределение точек считается равномерным, иначе считается, что распределение точек является неравномерным.

Эксперимент желательно повторить несколько раз, меняя при этом, число точек и (или) способ разбиения на подобласти. Эффективность метода может быть увеличена при использовании технологий случайных разбиений поверхности на подобласти.

В данной работе в качестве тестовых примеров используются распределения, полученные на основе метода статистического

моделирования. Поэтому, целесообразным является использование двустороннего неравенства $\chi^2_{p=10\%} \leq \chi^2_{эксн} \leq \chi^2_{p=90\%}$.

Следует отметить, что предлагаемый метод может быть применен как для проверки равномерности распределений точек на поверхностях, которые были получены с использованием различных алгоритмов генерации, так и для проверки равномерности распределений точек, полученных в ходе различных научных экспериментов, в которых расположения точек на поверхностях не генерируют алгоритмами, а определяют в результате каких-либо наблюдений. В таких случаях возможно использование только правой части неравенства $\chi^2_{эксн} \leq \chi^2_{p=90\%}$.

Приведем частные примеры применения предложенного алгоритма проверки равномерности распределений точек, которые были получены описанным выше в данной главе алгоритмом равномерного распределения точек на поверхностях на примере бутылки Клейна. Проверка производится на распределениях 3000, 9000, 27000 и 81000 точек на поверхности бутылки Клейна.

Проводилось 4 теста. В каждом из 4 тестов область значения параметров u, v разбивалась на 16 подобластей:

подобласть 1 - $\{-\pi/2 \leq u \leq -\pi/2 + \pi/4; 0 \leq v \leq \pi/2\}$,

подобласть 2 - $\{-\pi/2 + \pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 2\pi/4; 0 \leq v \leq \pi/2\}$,

подобласть 3 - $\{-\pi/2 + 2\pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 3\pi/4; 0 \leq v \leq \pi/2\}$,

подобласть 4 - $\{-\pi/2 + 3\pi/4 \leq u \leq \pi/2; 0 \leq v \leq \pi/2\}$

подобласть 5 - $\{-\pi/2 \leq u \leq -\pi/2 + \pi/4; \pi/2 \leq v \leq 2\pi/2\}$,

подобласть 6 - $\{-\pi/2 + \pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 2\pi/4; \pi/2 \leq v \leq 2\pi/2\}$,

подобласть 7 - $\{-\pi/2 + 2\pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 3\pi/4; \pi/2 \leq v \leq 2\pi/2\}$,

подобласть 8 - $\{-\pi/2 + 3\pi/4 \leq u \leq \pi/2; \pi/2 \leq v \leq 2\pi/2\}$,

подобласть 9 - $\{-\pi/2 \leq u \leq -\pi/2 + \pi/4; 2\pi/2 \leq v \leq 3\pi/2\}$,

подобласть 10 - $\{-\pi/2 + \pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 2\pi/4; 2\pi/2 \leq v \leq 3\pi/2\}$,

подобласть 11 - $\{-\pi/2 + 2\pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 3\pi/4; 2\pi/2 \leq v \leq 3\pi/2\}$,

подобласть 12 - $\{-\pi/2 + 3\pi/4 \leq u \leq \pi/2; 2\pi/2 \leq v \leq 3\pi/2\}$,

подобласть 13 - $\{-\pi/2 \leq u \leq -\pi/2 + \pi/4; 3\pi/2 \leq v \leq 4\pi/2\}$,

подобласть 14 - $\{-\pi/2 + \pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 2\pi/4; 3\pi/2 \leq v \leq 4\pi/2\}$,

подобласть 15 - $\{-\pi/2 + 2\pi/4 \leq u \leq -\pi/2 + 3\pi/4; 3\pi/2 \leq v \leq 4\pi/2\}$,

подобласть 16 - $\{-\pi/2 + 3\pi/4 \leq u \leq \pi/2; 3\pi/2 \leq v \leq 4\pi/2\}$.

На рисунке 2.6.1 схематично показана (выделена) часть поверхности бутылки Клейна, соответствующая определенной подобласти значений параметров u, v .

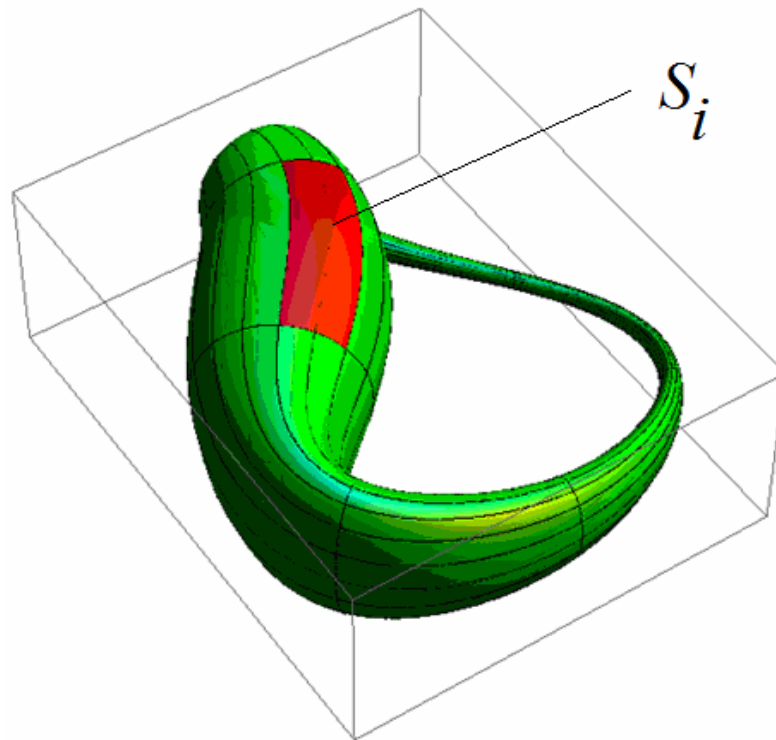


Рис.2.6.1. Выделение части поверхности

Число степеней свободы равно $m=15$, теоретические значения χ^2 -распределения равны $\chi^2_{p=10\%}=8,547$ и $\chi^2_{p=90\%}=22,307$.

Приведем результаты четырех проверок на равномерность распределения точек на поверхности бутылки Клейна.

Тест 1: число точек – 3000, $\chi^2_{эксн} = 16,318$, $8,547 \leq 16,318 \leq 22,307$
(выполняется), распределение равномерное.

Тест 2: число точек – 9000, $\chi^2_{эксн} = 15,167$, $8,547 \leq 15,167 \leq 22,307$
(выполняется), распределение равномерное.

Тест 3: число точек – 27000, $\chi^2_{эксн} = 10,990$, $8,547 \leq 10,990 \leq 22,307$
(выполняется), распределение равномерное.

Тест 4: число точек – 81000, $\chi^2_{эксн} = 11,960$, $8,547 \leq 11,960 \leq 22,307$
(выполняется), распределение равномерное.

Результаты всех четырех тестов подтверждают равномерность распределения точек на поверхности бутылки Клейна. Это подтверждает правильность работы предложенного алгоритма для равномерного распределения точек на поверхностях.

Также рассмотрим диаграммы значений средних поверхностных плотностей точек по подобластям, полученных в каждом из четырех тестов.

В каждом тесте для каждой подобласти вычислялись отношения $\frac{n_i}{S_i}$ – средние поверхностные плотности точек (см. рис. 2.6.2, 2.6.3).

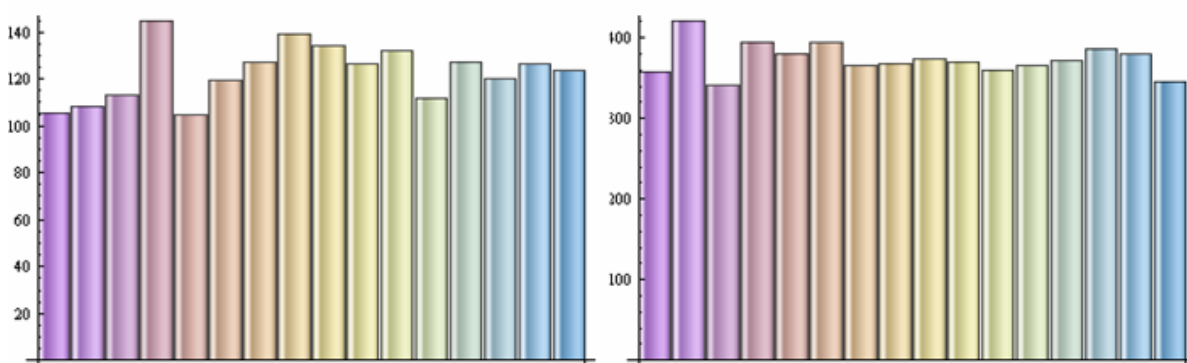


Рис. 2.6.2. Диаграммы средних поверхностных плотностей точек на каждой подобласти для теста 1 – 3000 точек (слева) и теста 2 – 9000 точек (справа)

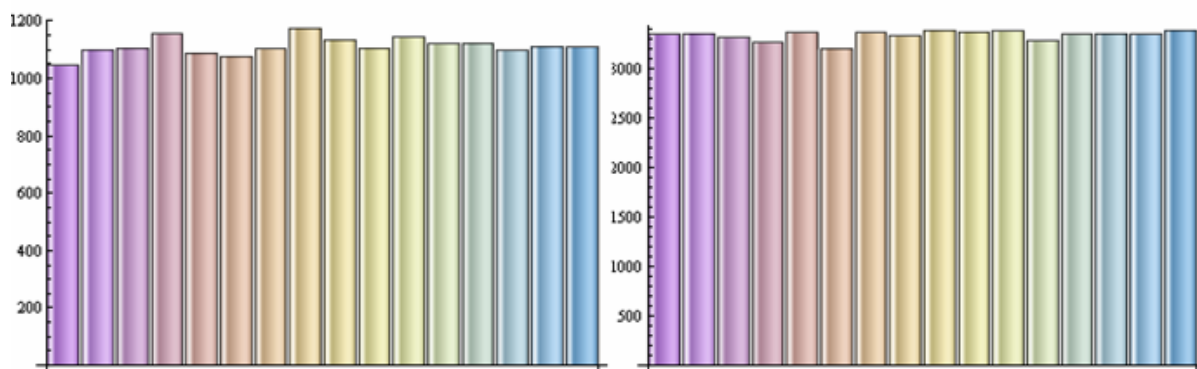


Рис. 2.6.3. Диаграммы средних поверхностных плотностей точек на каждой подобласти для теста 3 – 27000 точек (слева) и теста 4 – 81000 точек (справа)

Очевидно, что в идеальном случае, когда общее число точек будет стремиться к бесконечности, значение $\frac{n_i}{S_i}$ средней поверхностной плотности точек на каждой подобласти будет стремиться к значению $\frac{N}{S}$ средней поверхностной плотности точек на всей рассматриваемой поверхности, на которой выполняется распределение точек. Это подтверждает визуальный анализ рисунков 2.6.2, 2.6.3, который показывает то, что с увеличением, числа точек, увеличивается уровень равномерности распределения.

Визуальный анализ рисунков 2.6.2, 2.6.3, с одной стороны, подтверждает правильность работы алгоритма для равномерного распределения точек на поверхностях, с другой, свидетельствует о корректной работе алгоритма для проверки равномерности распределения точек на поверхностях, предложенного и описанного в данном разделе.

Предлагаемый алгоритм для проверки равномерности распределения точек на поверхностях может быть обобщен и для случаев, в которых необходимо проверить соответствие распределения точек какому либо закону распределения.

2.7. Равномерное распределение точек на кривых

По аналогии с проблемой равномерного распределения точек на поверхностях может быть формализована и задача равномерного распределения точек на кривых.

Определение 2.7.1. *Распределение точек на гладкой регулярной кривой называется равномерным, если при случайном бросании точки на эту кривую вероятность ее попадания на любой элемент этой кривой пропорциональна длине этого элемента.*

Определение 2.7.2. *Геометрическая вероятность попадания точки на элемент гладкой регулярной кривой при случайном бросании точки на эту кривую определяется равенством*

$$P(X \subset dl) = \frac{dl}{L}.$$

Здесь X – точка кривой, положение которой определяется случайным вектором, dl – длина элемента кривой, L – длина всей кривой.

Определение 2.7.3. *Плотность вероятности $g(t)$ распределения параметра, задающего положение точки, случайно брошенной на гладкую регулярную кривую, определяется равенством:*

$$P(X \subset dl) = g(t)dt.$$

Используя данные определения, перейдем к нахождению функции плотности распределения параметра при описании равномерного распределения точек на кривой, задаваемой параметрическими уравнениями.

Пусть гладкая регулярная кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ на области $D = \{t_1 \leq t \leq t_2\}$. Необходимо найти функцию $g(t)$ плотности распределения значений параметра t , соответствующую равномерному распределению точек на рассматриваемой кривой.

Из определения 2.7.2 геометрическая вероятность попадания произвольной точки X на элемент кривой dl равна

$$P(X \subset dl) = \frac{dl}{L}.$$

Так как для гладких регулярных кривых

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt, \quad L = \int_D \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

то

$$P(X \subset dl) = \frac{\int_D \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}{\int_D \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}.$$

Из определения 2.7.3 плотности вероятности

$$g(t) = \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}{\int_D \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}.$$

Таким образом, плотность распределения параметра t , задающая равномерное распределение точек на гладкой регулярной кривой, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ на области $D = \{t_1 \leq t \leq t_2\}$, определяется функцией

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}{\int_D \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt}, & t \in D; \\ 0, & t \notin D. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Генерируя значения параметра t по функции $g(t)$, получим равномерное распределение точек на поверхности.

В случае, когда кривая является плоской и задана уравнением явного вида $y = f(x)$, где $x \in [a, b]$, выражение для функции плотности распределения примет вид:

$$g(x) = \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}.$$

Важно отметить, если для генерирования точек применять метод Неймана, то вместо функций $g(t)$ и $g(x)$ можно использовать функции $g^*(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ и $g^*(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ соответственно.

Данный подход целесообразно применять, если параметризация кривой не является естественной, то есть параметр t не является длиной дуги кривой (не является натуральным). Следует отметить, что предложенный метод в таком случае работать будет, но нет смысла его применять, так как выражение $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ примет значение равное 1, а функция плотности распределения значения параметра будет константой.

В случае, когда параметризация является естественной, достаточно генерировать значения натурального параметра с помощью генератора случайного числа с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$, масштабируя его значения при этом по отрезку $[a,b]$. То есть при естественной параметризации можно использовать формулу:

$$t = a + (b - a)Random,$$

где *Random* - генератор случайного числа с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$.

Таким образом, еще одним способом для равномерного распределения точек на кривой может являться переход от произвольной к естественной параметризации кривой и генерирование точек заданием случайных значений натурального параметра, как описано выше. Недостатком данного метода является возможный большой объем аналитических вычислений и преобразований, что не всегда может оказаться удобным.

В рамках данной работы равномерное распределение точек производилось путем генерирования значений параметра по функции плотности его распределения, соответствующей равномерному распределению, методом Неймана.

Для иллюстрации работы предложенного метода рассмотрим рисунки 2.7.1-2.7.4. На данных рисунках представлены распределения точек на

плоской кривой, которая может быть задана следующим уравнением явного вида:

$$y = -10e^{-100(x-4,25)^2} + \sin 6x - 2\sin x + 2,$$

где $x \in [1,10]$.

При параметрическом задании кривой – как кривой в трехмерном пространстве – могут быть использованы, соответственно, следующие уравнения:

$$x(t) = t, \quad y(t) = -10e^{-100(t-4,25)^2} + \sin 6t - 2\sin t + 2, \quad z(t) = 0,$$

где $t \in [1,10]$.

При рассмотрении этой кривой как функции $y(x)$, ее можно охарактеризовать следующим образом: многоэкстремальная функция с глобальным минимумом в точке $x = 4,25$.

На рисунках 2.7.1, 2.7.2 представлены распределения 500 точек, а на рисунках 2.7.3, 2.7.4 представлены распределения 1000 точек. При этом видно, что на рисунках 2.7.1, 2.7.3 в провале глобального минимума находится значительно меньше точек, чем в «чашах» локальных минимумов. На рисунках 2.7.2, 2.7.4 ситуация другая, в провале глобального минимума находится больше точек, чем в «чашах» локальных минимумов.

Дело в том, что распределения точек, представленные на рисунках 2.7.1 и 2.7.3, получены путем генерирования значения координаты x каждой точки по формуле $x = a + (b - a)Random$, то есть значения координаты x точек являются равномерно распределенными на отрезке $[a, b]$ оси ox , но сами точки не удовлетворяют равномерному распределению по кривой.

Распределения точек, представленные на рисунках 2.7.2, 2.7.4, получены путем генерирования координат x точек методом, описанным выше, и распределения точек действительно удовлетворяют равномерному распределению по самой кривой.

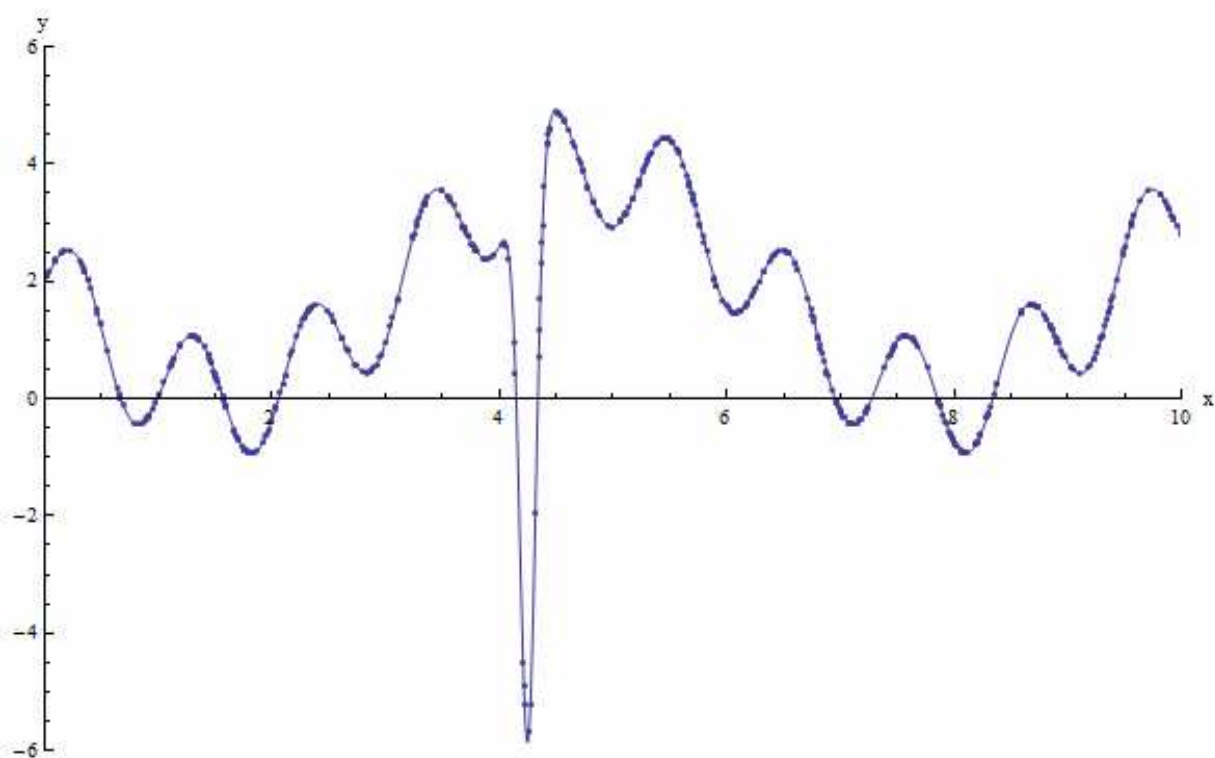


Рис. 2.7.1. Распределение 500 точек на кривой, сгенерированное по закону равномерного распределения значений координаты x точек на отрезке $[1,10]$

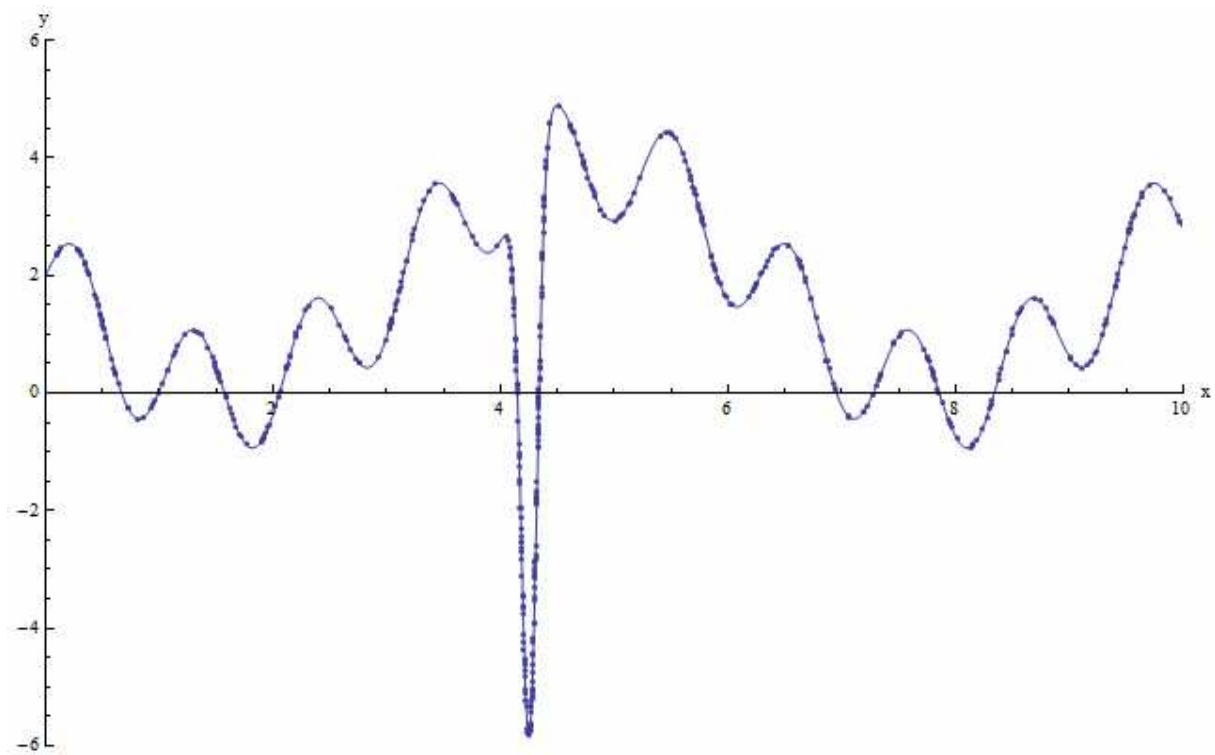


Рис. 2.7.2. Распределение 500 точек на кривой, сгенерированное методом для равномерного распределения точек по кривой

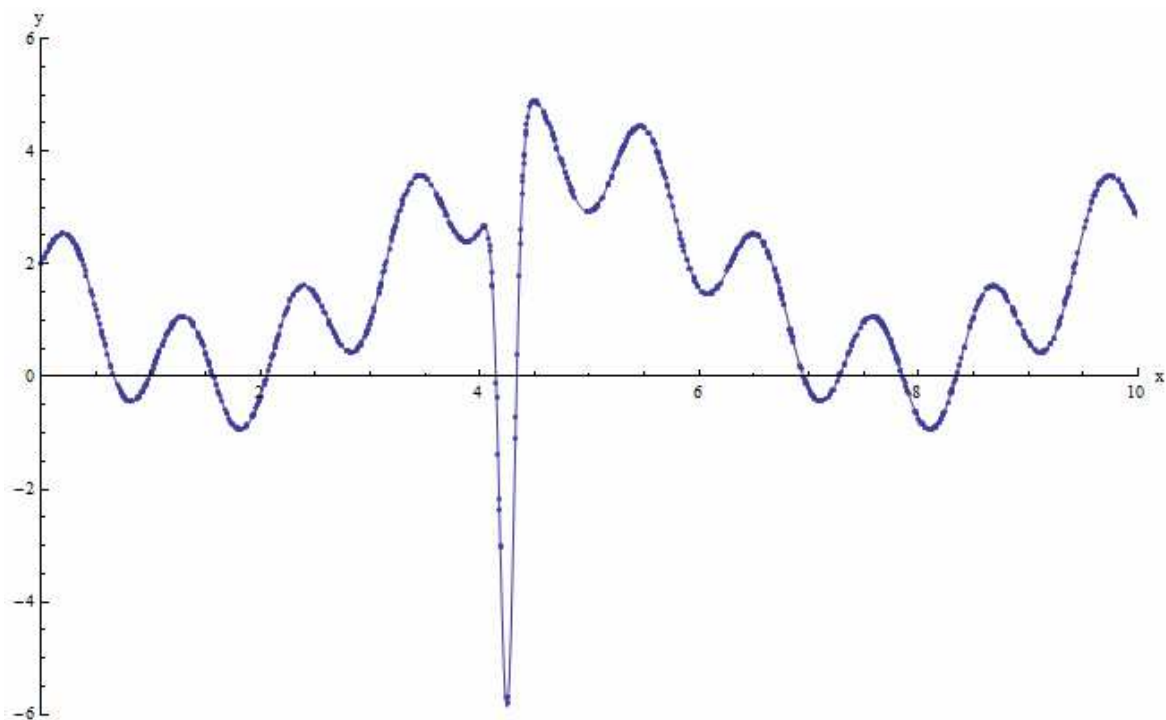


Рис. 2.7.3. Распределение 1000 точек на кривой, сгенерированное по закону равномерного распределения значений координаты x точек на отрезке $[1,10]$

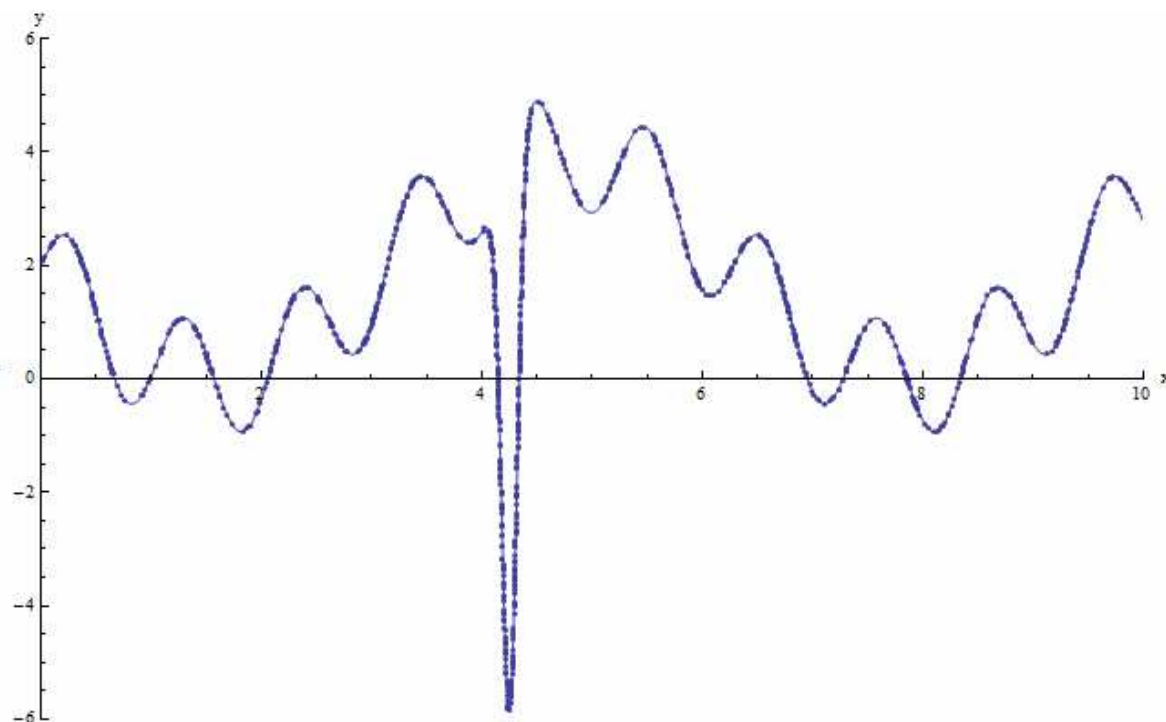


Рис. 2.7.4. Распределение 1000 точек на кривой, сгенерированное методом для равномерного распределения точек по кривой

Процедура проверки равномерности распределения точек на кривой получается из аналогий, представленных в пункте 2.6. для случаев распределений точек на поверхностях.

В качестве дополнительной демонстрации работы предложенного метода для равномерного распределения точек на кривых предлагаются следующие примеры.

На рисунке 2.7.5 представлена кривая Вивиани и равномерное распределение 500 точек на ней. Кривая Вивиани задана следующими параметрическими уравнениями:

$$x(t) = R(1 + \cos t), y(t) = R \sin t, z(t) = 2R \sin \frac{t}{2}, \text{ где } R=1, t \in [0, 4\pi].$$

Кривая Вивиани – это кривая, образованная пересечением кругового цилиндра со сферой вдвое большего радиуса, центр которой лежит на боковой поверхности цилиндра.

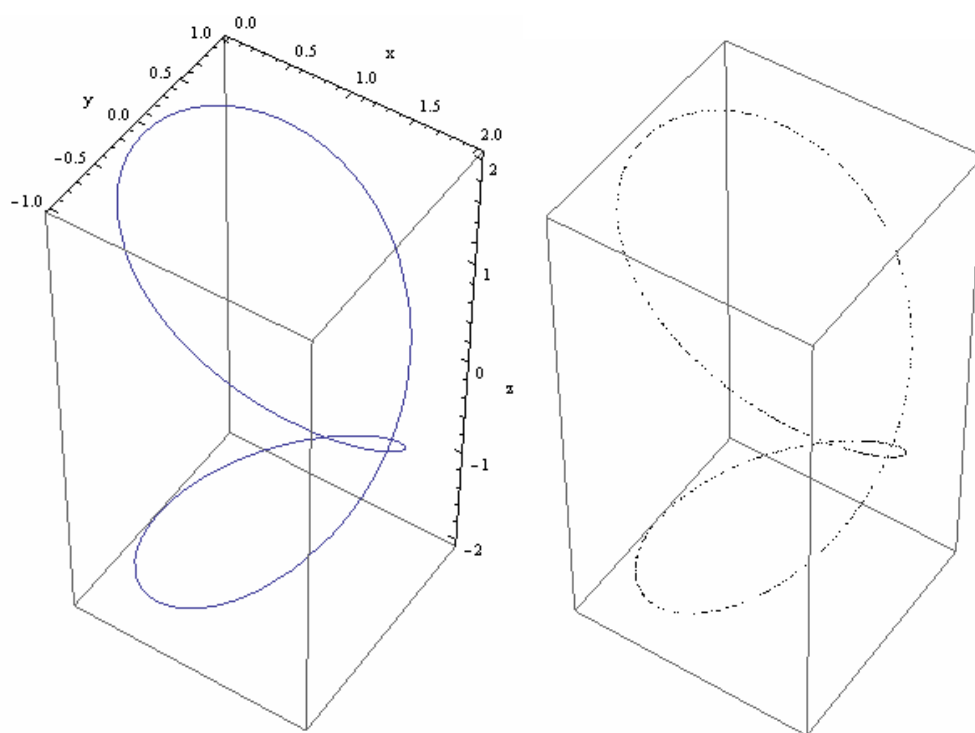


Рис. 2.7.5. Кривая Вивиани (слева) и распределение 500 точек на ней (справа)

На рисунке 2.7.6 представлена коническая винтовая линия и распределение 500 точек на ней. Коническая винтовая линия задана следующими параметрическими уравнениями:

$$x(t) = t \sin t, \quad y(t) = t \cos t, \quad z(t) = 2t, \quad \text{где } t \in [0, 8\pi].$$

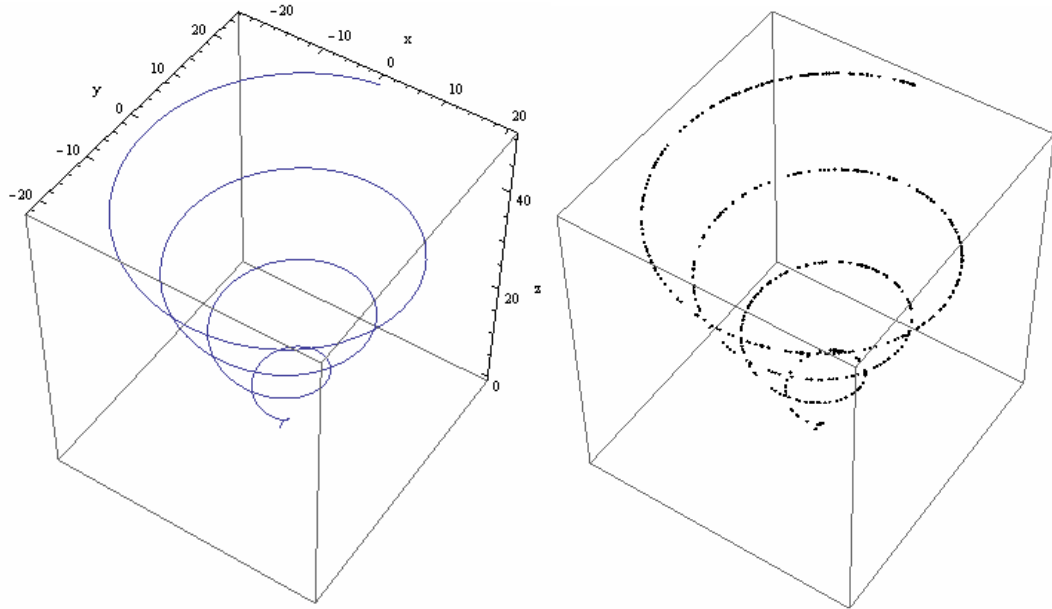


Рис. 2.7.6. Коническая винтовая линия (слева) и распределение 500 точек на ней (справа)

Рассмотрим вопрос равномерного распределения точек на кривой в n -мерном евклидовом пространстве.

Пусть функции $x_1 = f_1(t), x_2 = f_2(t), \dots, x_n = f_n(t)$, где $D = \{t_1 \leq t \leq t_2\}$, определяют гладкую регулярную кривую в n -мерном евклидовом пространстве. Тогда плотность распределения параметра t , задающая равномерное распределение точек на этой кривой, определяется функцией

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2}}{\int_D \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2} dt}, & t \in D; \\ 0, & t \notin D. \end{cases} \quad (2.7.2)$$

Конструктивный подход при получении функции плотности (2.7.2) основан на использовании определений 2.7.1 – 2.7.3 и аналогичен получению функции (2.7.1) с учетом того, что для гладких регулярных кривых в

многомерном евклидовом пространстве $dl = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2} dt$,

$$L = \int_D \sqrt{\sum_{i=1}^n (f'_i(t))^2} dt.$$

Генерируя значения параметра t по функции плотности распределения $g(t)$, будет получено равномерное распределение точек на кривой в n -мерном евклидовом пространстве.

2.8. Равномерное распределение точек на поверхностях в многомерном евклидовом пространстве

Использование предлагаемой методологии позволяет решить также задачу о равномерном распределении точек на поверхностях в многомерном евклидовом пространстве.

Пусть функции $x_1(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $x_2(u_1, u_2, \dots, u_m)$, ..., $x_n(u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $(u_1, u_2, \dots, u_m) \in D$, определяют гладкую регулярную m -мерную поверхность в n -мерном евклидовом пространстве. Тогда плотность распределения значений параметров $u_1, u_2, \dots, u_m$, задающая равномерное распределение точек на этой поверхности, определяется функцией

$$f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \begin{cases} \frac{\sqrt{g}}{\iiint_D \sqrt{g} du_1 du_2 \dots du_m}, & (u_1, u_2, \dots, u_m) \in D; \\ 0, & (u_1, u_2, \dots, u_m) \notin D. \end{cases} \quad (2.8.1)$$

Здесь $g = \det(g_{ij})$ - определитель матрицы метрического тензора на поверхности. Матрица метрического тензора на поверхности имеет вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix},$$

где $i, j = 1, 2, \dots, m$, $g_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}$.

Конструктивный подход для получения функции (2.8.1) аналогичен подходу при получении предшествующих функций плотностей с учетом того, что согласно [61], для гладких регулярных поверхностей в многомерном евклидовом пространстве $dS = \sqrt{g} du_1 du_2 \dots du_m$, $S = \iiint_D \dots \int \sqrt{g} du_1 du_2 \dots du_m$, где $g = \det(g_{ij})$ - определитель матрицы метрического тензора на поверхности.

Генерируя значения параметров $u_1, u_2, \dots, u_m$ по функции $f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ с помощью обобщенного метода Неймана, получим равномерное распределение точек на поверхности.

Соотношение (2.8.1) является универсальным.

Когда $m = 1$ получаем кривую в R^n , а матрица метрического тензора принимает вид

$$(g_{ij}) = (g_{11}), \text{ где}$$

$$g_{11} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k(u_1)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_k(u_1)}{\partial u_1} \right) = \left(\frac{\partial x_1(u_1)}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(u_1)}{\partial u_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n(u_1)}{\partial u_1} \right)^2,$$

в более привычной форме, принимая $u_1 = t$, выражение может быть переписано как

$$g_{11} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_k(t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_k(t)}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial x_1(t)}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(t)}{\partial t} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n(t)}{\partial t} \right)^2.$$

Получаем функцию плотности распределения значений параметра t , аналогичную представленной ранее для кривых (2.7.2):

$$f(t) = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x_1(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(t)}{\partial t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n(t)}{\partial t}\right)^2}}{\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(t)}{\partial t}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x_n(t)}{\partial t}\right)^2} dt}.$$

Когда $m = 2$, $n = 3$ получаем поверхность в R^3 , матрица метрического тензора принимает вид

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Функция $f(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{\sqrt{g}}{\iiint_D \sqrt{g} du_1 du_2 \dots du_m}$ может быть записана как

$$f(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}{\iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du_1 du_2}.$$

Принимая во внимание, что $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, получаем функцию плотности, аналогичную представленной ранее для параметрических поверхностей (2.3.1):

$$f(u, v) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv}.$$

Согласованность полученных и представленных теоретических результатов является свидетельством правильности математических выкладок и представлений.

2.9. Моделирование случайных равновероятных ориентировок твердого тела с помощью равномерного распределения точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном пространстве

Одним из возможных приложений предложенного в пункте 2.8 метода для равномерного распределения точек на гиперповерхностях является его использование в задачах, связанных с вращением трехмерного евклидова пространства. Такие вращения описываются группой ортогональных матриц $SO(3)$, которая отображается на трехмерную гиперсферу в четырехмерном евклидовом пространстве [72]. Принимая во внимание, что в [75] рассмотрена общая связь групп преобразований и поверхностей в многомерных евклидовых пространствах, предлагаемый подход может оказаться полезным и в более широком спектре задач.

В данном разделе обосновывается возможность использования равномерного распределения точек на трехмерной гиперсфере в четырехмерном евклидовом пространстве для задания равновероятных вращений твердого тела.

Наиболее распространенным способом описания вращений твердого тела является использование системы углов Эйлера ψ, ϑ, φ . Хорошо известна функция плотности совместного распределения углов Эйлера, используемая для описания и моделирования множества равновероятных вращений твердого тела [24, 71]:

$$f(\psi, \vartheta, \varphi) = \frac{\sin \vartheta}{8\pi^2}. \quad (2.9.1)$$

Как известно [64, 74], еще один из способов описания вращения твердого тела связан с использованием параметров Родрига-Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые являются также компонентами кватерниона вращения $\lambda = \lambda_0 + \mathbf{i}\lambda_1 + \mathbf{j}\lambda_2 + \mathbf{k}\lambda_3$. Параметры Родрига-Гамильтона удовлетворяют условию нормировки

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad (2.9.2)$$

и связаны с углами Эйлера соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \\ \lambda_1 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \\ \lambda_3 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}, \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

где $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Используя геометрическую интерпретацию кватерниона как вектора четырехмерного комплексного пространства, можно каждому значению кватерниона поставить в соответствие точку с координатами $x_1 = \lambda_0$, $x_2 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$, $x_4 = \lambda_3$ в четырехмерном евклидовом пространстве с системой координат $Ox_1x_2x_3x_4$. Учитывая соотношение (2.9.2), для координат каждой такой точки будет выполняться условие:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1. \quad (2.9.4)$$

Соотношение (2.9.4) тождественно уравнению трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, множество возможных значений параметров Родрига-Гамильтона может рассматриваться как множество координат точек трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве. При этом уравнения (2.9.3) связи между параметрами Родрига-Гамильтона и углами Эйлера могут использоваться в качестве параметрических уравнений для задания данной единичной гиперсферы:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \\
x_2 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}, \\
x_3 &= \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \\
x_4 &= \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2},
\end{aligned}
\tag{2.9.5}$$

где $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Теперь, для гиперсферы, заданной уравнениями (2.9.5), найдем, используя формулу (2.8.1), функцию плотности совместного распределения параметров (в данном случае углов Эйлера), соответствующую равномерному распределению точек на ее поверхности. Результаты вычислений дают функцию (2.9.1). Из этого факта следует вывод: множество равномерно распределенных точек на поверхности трехмерной единичной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве дает множество значений параметров Родрига-Гамильтона, соответствующих множеству равновероятных вращений твердого тела. Это является отражением факта двулистного накрытия трехмерной гиперсферой группы $SO(3)$ [65]. Однолистное накрытие группы $SO(3)$ может быть осуществлено половиной гиперсферы, лежащей по одну сторону любой гиперплоскости, проходящей через начало координат.

Следует отметить, что в научной литературе рассматривалась идея о представлении случайных вращений точками на трехмерной единичной гиперсфере в четырехмерном пространстве, например, в работе Roberts P.H. и Winch D.E. [41], а также упоминалась в работе Боровкова М.В. и Савеловой Т.И. [66]. При этом в [41] использовалась параметризация трехмерной гиперсферы, отличная от параметризации рассмотренной в данной работе, а вопрос о равномерном распределении точек на гиперсфере не рассматривался.

Выводы по второй главе

Получены функции плотностей совместного распределения координат, либо параметров, описывающие равномерное распределение точек на гладких регулярных поверхностях в трехмерном и многомерном евклидовом пространстве. Аналогичные результаты получены для гладких регулярных кривых в двухмерном, трехмерном и многомерном евклидовом пространстве.

Описаны алгоритмы, позволяющие моделировать равномерные распределения на кривых и поверхностях.

Представлены визуальные модели равномерных распределений точек на различных поверхностях. Анализ моделей подтвердил правильность работы предлагаемых алгоритмов.

Предложена и описана процедура проверки равномерности распределений точек на поверхностях. Процедура протестирована на распределениях, которые были получены предложенным алгоритмом для равномерного распределения точек на поверхностях. Положительные результаты тестирования свидетельствуют, как о корректности процедуры проверки равномерности распределений точек на поверхностях, так и о корректности работы алгоритма для равномерного распределения точек на поверхностях.

Предложенные методы могут быть усовершенствованы для моделирования неравномерных распределений точек на поверхностях.

Установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве.

В данной главе приведены основные идеи и результаты теоретической части диссертационного исследования. Результаты исследования, в особенности предложенные методы, подходы и взгляды, могут рассматриваться как в качестве готового математического аппарата для решения прикладных задач, так и в качестве основы для дальнейших

теоретических исследований, например, исследований равномерных распределений на кривых и поверхностях в различных многомерных пространствах, не ограничиваясь при этом лишь евклидовыми пространствами.

ГЛАВА 3. ПРИМЕНЕНИЕ РАВНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ В ИССЛЕДОВАНИЯХ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

3.1. Основные положения

В предыдущих главах были предложены методы для равномерного распределения точек на поверхностях в трехмерном пространстве, представлены краткие сведения о развитии проблемы, кратко описана область возможных применений данных методов.

В данной главе приводятся подробные решения ряда прикладных задач, которые реализованы с использованием алгоритмов для равномерного распределения точек на поверхностях.

В середине двадцатого века во время активного развития теории вероятности, математической статистики, методов Монте-Карло, когда появлялись фундаментальные научные труды выдающихся ученых Андрея Николаевича Колмогорова, Джона фон Неймана, Герберта Роббинса, был заложен мощный фундамент применения новых статистических методов в механике, физике, биологии и многих других науках. Происходило становление методов Монте-Карло. Многие задачи, связанные, так или иначе, с понятиями геометрических вероятностей, часто сначала решались приближенно методами численного статистического моделирования, и только затем для них находили точные аналитические решения. Так, например, было с задачей нахождения наименьшего угла, на который необходимо повернуть куб, после того, как ему было задано случайное вращение, чтобы его грани стали вновь параллельны граням в начальном положении. Эта задача сначала была исследована методами Монте-Карло, и только затем для нее было получено точное аналитическое решение [81].

В наше время методы теории вероятности [59, 116, 117], математической статистики, численного моделирования заняли прочное место в науке и применение их очень широкое.

В данной главе рассмотрены три проблемы, для исследования каждой из которых предлагается использовать равномерные распределения точек на поверхностях:

1. Задача об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

2. Задача об оптимальной укладке коротких армирующих волокон в оболочках, направленной на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

3. Задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Решения, получаемые методами статистического численного моделирования, в общем случае уступают по точности аналитическим методам, но в ряде случаев аналитические методы не применимы, а статистическое численное моделирование остается доступным. Возможно, представленные в данной работе исследования станут еще одним доказательством эффективности методов Монте-Карло.

Предлагаемые решения рассмотренных в данной главе задач являются оригинальными и были частично представлены в работах [82, 83, 85-87, 89, 90, 92].

3.2. Задача об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами

Общая постановка задачи

Данное исследование посвящено решению задачи из области вирусологии в строгой математической постановке, которая представлена в [81]. Предлагаемая в данной работе методология решения этой задачи основана на применении метода Монте-Карло.

Рассмотрим вирусную частицу, которую можно считать шаром. Данная частица подвергается атаке со стороны антител, которые можно считать цилиндрами конечной длины. Толщиной антител можно пренебречь.

Предположим, что N антител жестко прилипают к вирусной частице так, что точки их прилипания распределены равномерно по ее поверхности и независимы. Одно антитело, закрепленное на вирусе, исключает прилипание вируса к плоской поверхности клетки точками, которые оно затеняет, частично нейтрализуя, таким образом, проникающую способность вирусной частицы. Такие точки составляют круговую шапку, радиус которой зависит от длины антитела и радиуса вирусной частицы.

Сферические шапки, отвечающие отдельным антителам, распределены равномерно и независимо по сфере. При заданном значении числа N антител требуется найти ожидаемую непокрытую часть поверхности вирусной частицы.

На рисунке 3.2.1 схематично изображена шарообразная вирусная частица, с одним антителом на ней, показана часть поверхности вирусной частицы, нейтрализованная антителом – «покрытая область», и часть поверхности вирусной частицы, не нейтрализованная антителом – «непокрытая область».

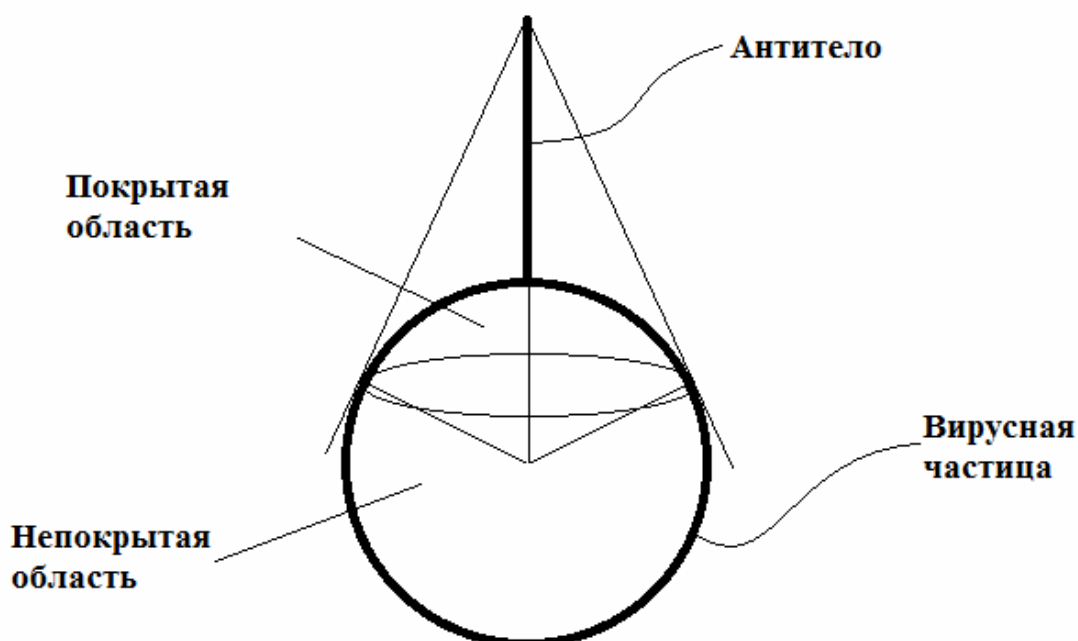


Рис. 3.2.1. Схематическое изображение шарообразной вирусной частицы, атакованной антителом

На рисунках 3.2.2 и 3.2.3 также показана с различных сторон вирусная частица, атакованная одним и тремя антителами, соответственно. При этом нейтрализованная каждым антителом часть поверхности вирусной частицы очерчена отдельной окружностью. На рисунке 3.2.3 четко видно, что в случае с несколькими антителами, покрытые области, соответствующие каждому отдельному антителу могут пересекаться, причем в силу случайности расположения антител, такие пересечения также случайны. В общем случае, когда число антител равно N , одна и та же часть поверхности может попадать в покрываемые части и одного, и двух, и даже N антител. На рисунке 3.2.3 видно, что у всех трех сферических шапок, образованных тремя отдельными антителами, есть общая зона перекрытия.

Возникновение подобных зон перекрытия весьма усложняет расчет покрытой части площади поверхности аналитическими методами, а в совокупности со случайностью распределения антител на поверхности шарообразной вирусной частицы составляет главную сложность в решении задачи.

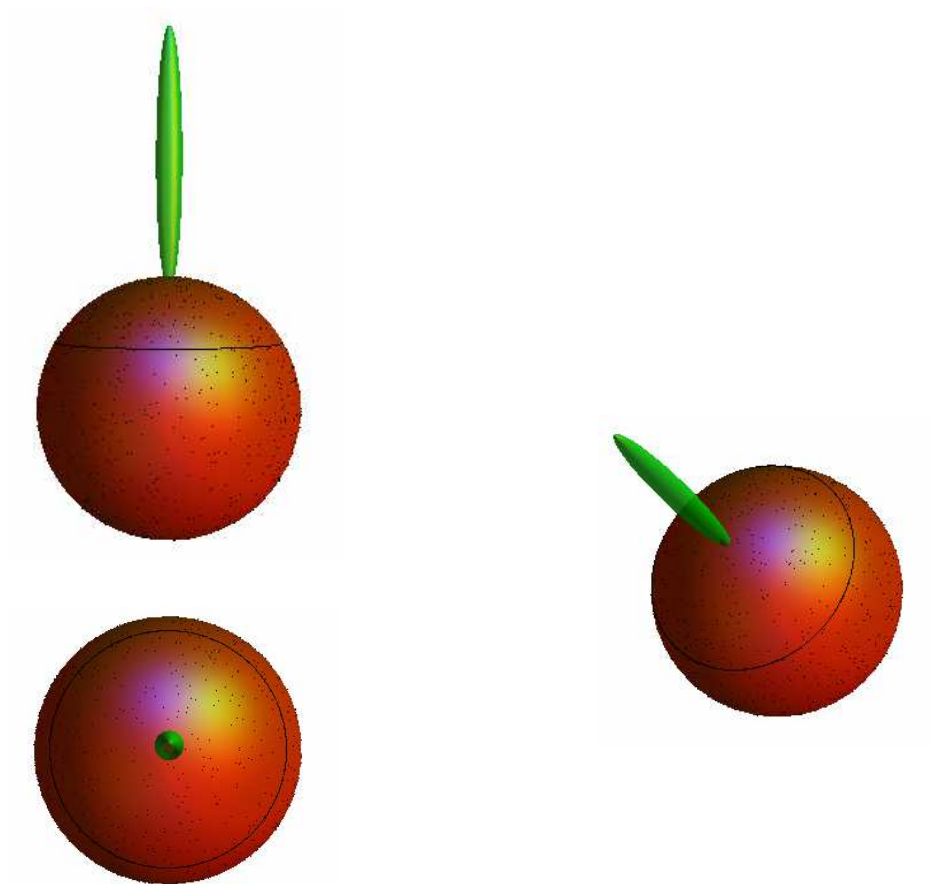


Рис. 3.2.2. Шарообразная вирусная частица, атакованная одним антителом

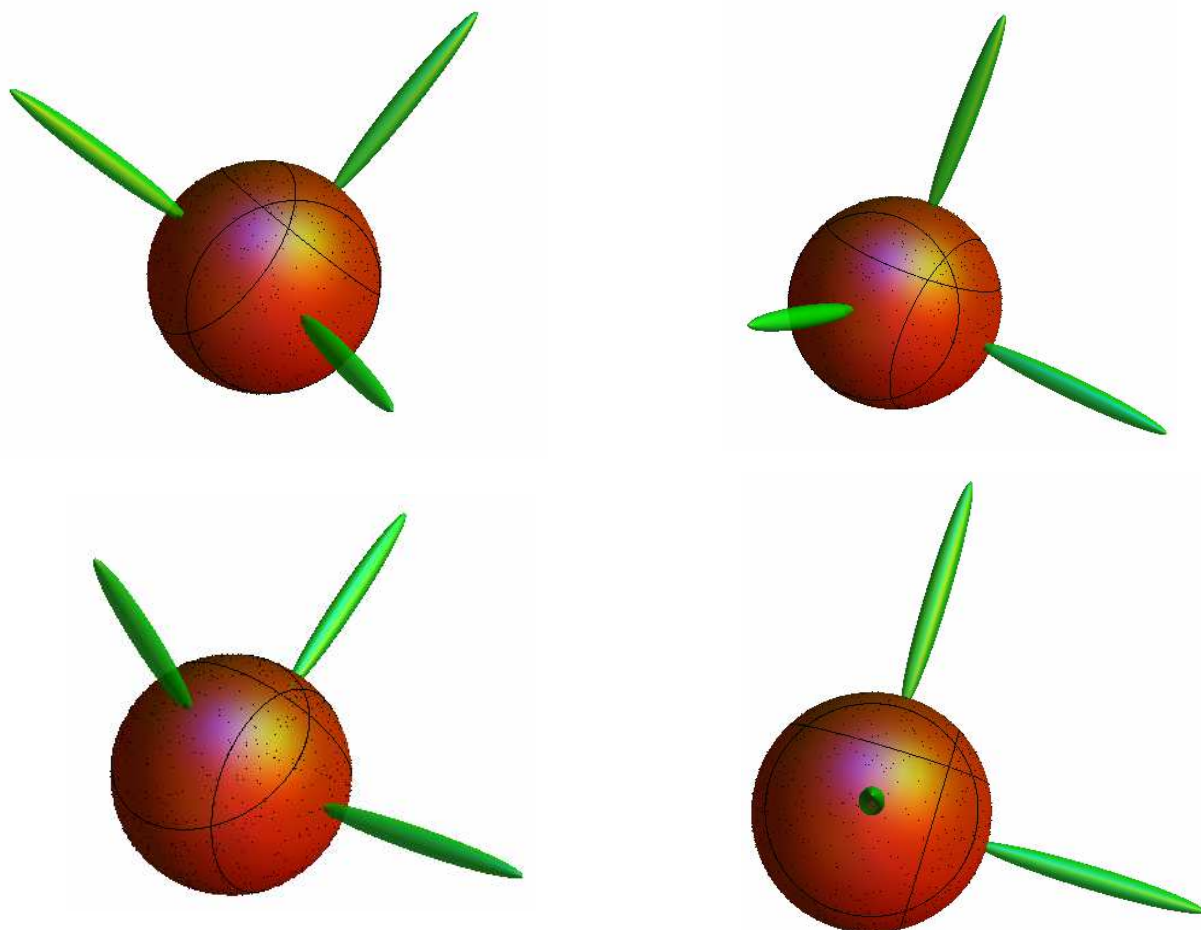


Рис. 3.2.3. Шарообразная вирусная частица, атакованная тремя антителами

Предлагаемый метод решения задачи

Предлагаемый в данной работе метод нахождения непокрытой части поверхности основан на применении статистического численного моделирования и использовании алгоритма равномерного распределения точек на поверхности сферы.

Равномерное распределение точек на поверхности шарообразной вирусной частицы используется:

- во-первых, для моделирования случайного распределения антител на вирусной частице;
- во-вторых, для определения площади покрытой части поверхности вирусной частицы (см. рис. 3.2.4), путем подсчета количества точек

попавших в покрытую область и его дальнейшего сравнения с общим числом точек, участвующих в распределении на всей поверхности.

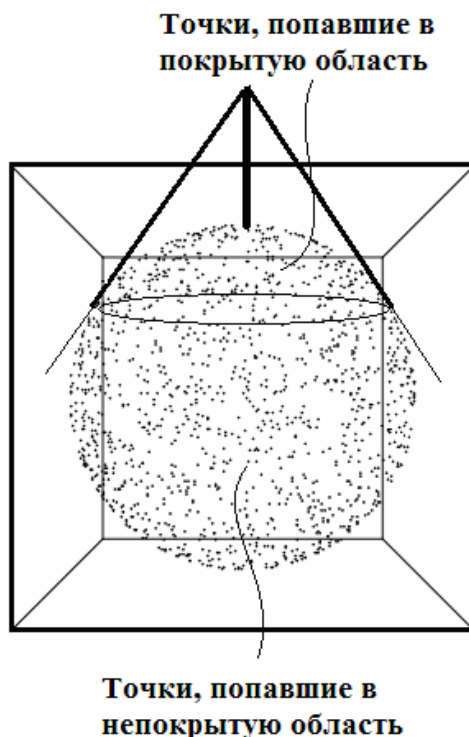


Рис. 3.2.4. Определения площади покрытой области поверхности вирусной частицы

Моделируя многократно случайное распределение антител, и находя для каждого случая площадь покрытой области с последующим ее осреднением, получаем значение ожидаемой площади покрытой части поверхности для каждого числа антител, после чего несложно вычислить ожидаемое значение непокрытой части поверхности частицы.

Для равномерного распределения точек используется метод представленный в главе 1. Сферические углы генерируются по формулам $\theta = \arccos(2\text{Random} - 1)$, $\varphi = 2\pi\text{Random}$, после чего вычисляются координаты каждой точки по формулам $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$.

Важно отметить, что данная задача имеет строгое аналитическое решение, которое, как отмечено в [81], получается на основе применения

теоремы Роббинса. В [81] показано, что ожидаемая непокрытая площадь шарообразной вирусной частицы, атакованной антителами, может быть найдена по аналитическому выражению:

$$S = 4\pi R^2 \left(1 - \frac{A}{4\pi R^2}\right)^N, \quad (3.2.1)$$

где A - площадь сферической шапки, образованной одним антителом, N - число антител.

Предлагаемый ниже алгоритм позволяет найти ожидаемую непокрытую площадь без использования аналитического выражения (3.2.1).

Задача может быть разбита на две подзадачи:

1. Определение непокрытой площади шарообразной вирусной частицы при определенном расположении нескольких антител;
2. Определение ожидаемой непокрытой площади шарообразной вирусной частицы, атакованной N антителами, которые случайным образом могут прилипнуть к вирусной частице.

Определение непокрытой площади шарообразной вирусной частицы при определенном расположении нескольких антител

Определить непокрытую площадь шарообразной вирусной частицы, атакованной одним антителом, не представляется трудным. Эта площадь может быть определены как разность площади поверхности шара и площади кривой поверхности шарового сегмента:

$$S = 4\pi R^2 - 2\pi R h, \quad (3.2.2)$$

где R - радиус шара, h - высота шарового сегмента.

Однако в случаях с несколькими антителами возникают трудности. Эти трудности связаны в первую очередь с тем, что сферические шапки, образованные различными антителами, могут различным образом накладываться друг на друга.

Рассмотрим следующий случай. Пусть R - радиус шара, который является моделью вирусной частицы. Причем центр данного шара помещен в начало координат. Предположим, что на вирусной частице, то есть на шаре, расположено N антител, длина каждого из которых равна l . При этом точно известны их расположения. Так как толщиной антител можно пренебречь, то будем считать их отрезками длиной l . Один из концов каждого антитела расположен на поверхности шара. Сами антитела ориентированы по нормали к поверхности шара. Обозначим координаты концов антител, не лежащих на поверхности шара, как (x_n, y_n, z_n) , где $n=1, 2, 3, \dots, N$.

В данной работе предлагается следующий статистический алгоритм для определения непокрытой площади шарообразной вирусной частицы при определенном расположении нескольких антител.

Алгоритм 3.2.1. Определение непокрытой площади шарообразной вирусной частицы при определенном расположении нескольких антител:

Шаг 1. Генерируется K точек равномерно распределенных на поверхности сферы.

Шаг 2. Для каждой из K точек с координатами (x_k, y_k, z_k) и для каждого отрезка (антитела) выполняется проверка: если $\sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2 + (z_k - z_n)^2} > \sqrt{(R+l)^2 - R^2}$, то точка не попадает ни в одну из покрытых областей поверхности шара и соответственно лежит в непокрытой части (см. рис. 3.2.5). Проверая каждую точку, находим $K_{\text{непокр.поверхности}}$ - число точек попавших в непокрытую часть поверхности.

Шаг 3. Находится площадь непокрытой поверхности:

$$S_{\text{непокрытая}} = 4\pi R^2 \frac{K_{\text{непокр.поверхности}}}{K}.$$

Иллюстрация к алгоритму 3.2.1 представлена на рисунке 3.2.5.

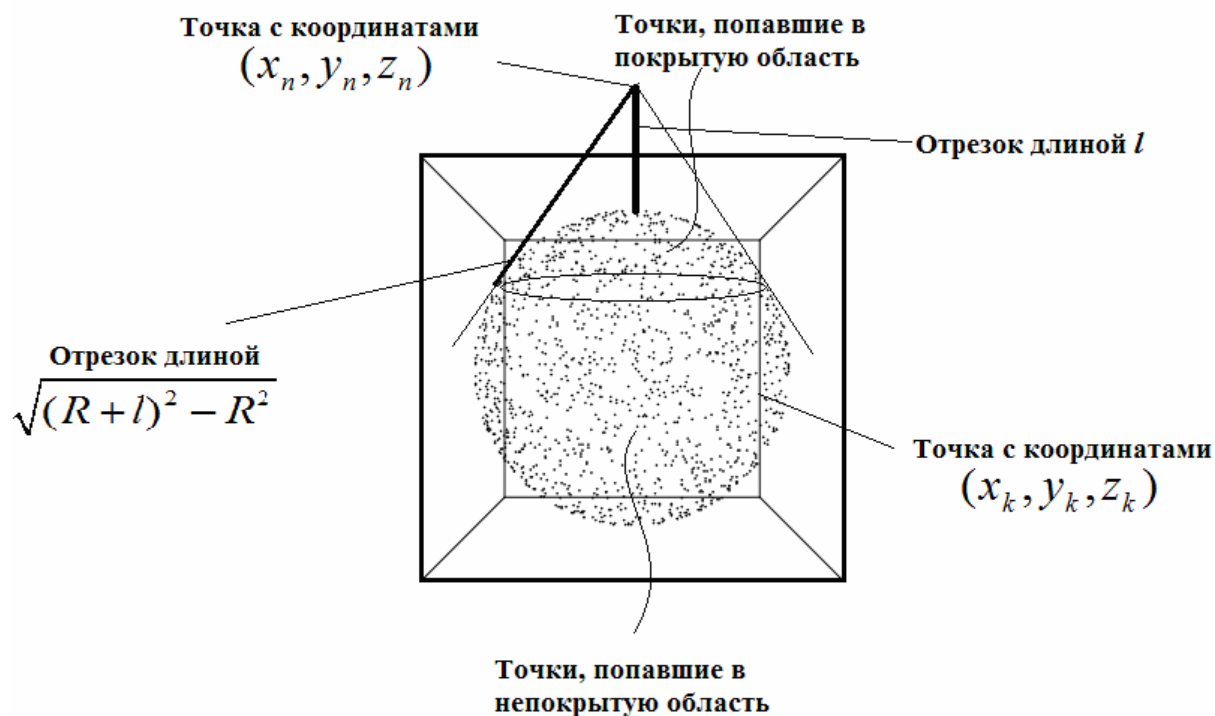


Рис. 3.2.5. Иллюстрация к алгоритму 3.2.1 для определения непокрытой площади шарообразной вирусной частицы при определенном расположении нескольких антител

Стоит отметить, что данный метод является, по сути, развитием метода Монте-Карло, используемого для нахождения площадей фигур на плоскости.

Точность данного метода для определения непокрытой площади зависит, в первую очередь, от числа точек K . Чем больше число точек, тем выше точность, но в тоже время, с увеличением числа точек увеличивается вычислительное время. Ряд экспериментов по вычислению непокрытой площади, проведенных с одним антителом (для данного случая непокрытая площадь может быть легко найдена аналитическим способом), показали следующую зависимость относительной погрешности статистического метода от числа точек K (см. рис. 3.2.6). Для пояснения стоит добавить, что рисунок 3.2.6 был получен в результате осреднения результатов 10 аналогичных экспериментов.

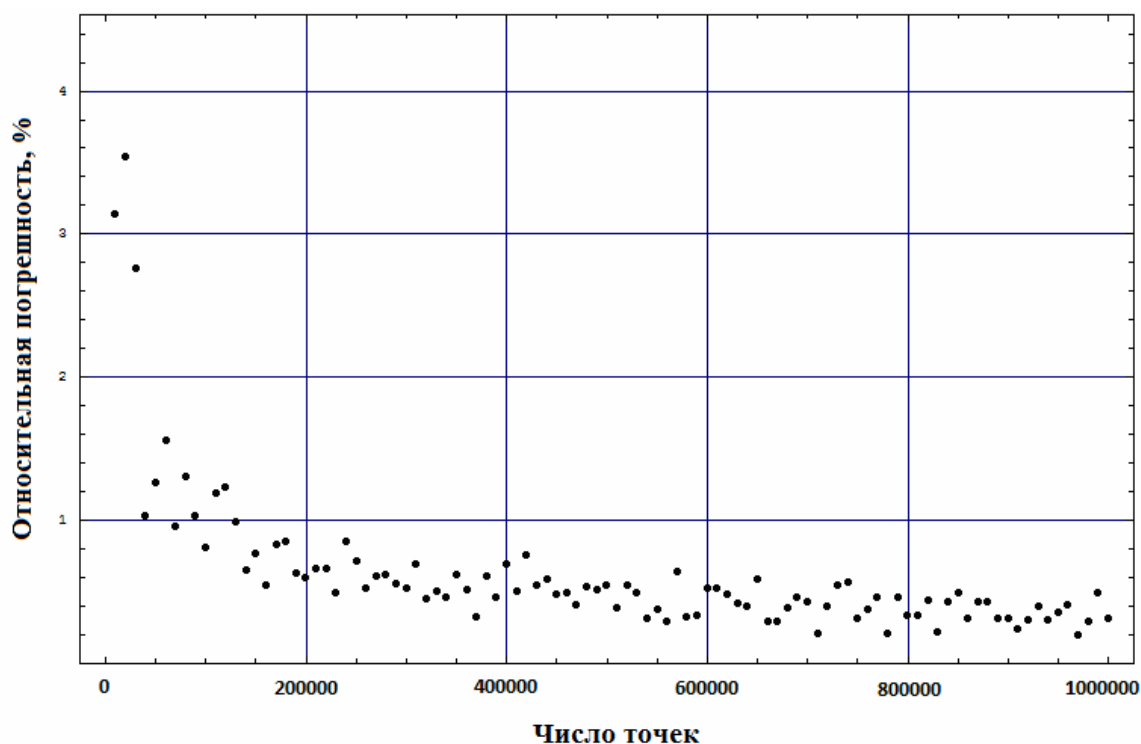


Рис. 3.2.6. Зависимость относительной погрешности статистического метода при вычислении площади непокрытой области поверхности шара от числа точек

Учитывая то, что задача носит больше оценочный характер, а также ограниченные возможности персонального компьютера, для расчетов, представленных далее, было выбрано $K = 100000$, что приблизительно соответствует однопроцентной погрешности в вычислении площади.

Определение ожидаемой непокрытой площади шарообразной вирусной частицы, атакованной N антителами случайным образом распределенными на вирусной частице

Для определения ожидаемой непокрытой площади шарообразной вирусной частицы, атакованной N антителами, предлагается следующая процедура.

Алгоритм 3.2.2. Определение ожидаемой непокрытой площади шарообразной вирусной частицы, атакованной N антителами:

Шаг 1. Используя формулы для равномерного распределения точек на поверхности сферы, генерируется случайное положение N антител.

Шаг 2. Для полученного в шаге 1 положения антител определяется непокрытая площадь с использованием **алгоритма 3.2.1.**

Шаг 3. Шаг 1 и шаг 2 повторяются большое число раз.

Шаг 4. Находится среднее значение непокрытой площади.

Одна из проблем предлагаемой процедуры заключается в определении числа генераций различных положений N антител для получения достаточной точности. Однако очевидно, что чем больше таких положений будет сгенерировано, тем выше будет точность.

В таблице 1 представлены результаты, полученные с помощью предложенного алгоритма, а также результаты, полученные с использованием аналитического выражения (3.2.1). Число случайных положений антител во всех случаях (для каждого числа N антител) было равным 1000. Число точек для определения непокрытой площади в каждой итерации было равным 100000. Радиус шара и длина антитела были приняты равными 1. В таблице также представлено время, потребовавшееся для расчета. Характеристики персонального компьютера, на котором были выполнены расчеты следующие: Intel Pentium P6200, 4GB DDR3 Memory.

Табл. 3.2.1. Результаты определения площади ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами

Число антител	Ожидаемая непокрытая площадь (аналитический способ)	Ожидаемая непокрытая площадь (статистический способ)	Модуль относительной погрешности, %	Время расчета, с
2	7,069	7,056	0,176	3192,26
3	5,301	5,341	0,743	3780,07
4	3,976	3,952	0,610	4226,19
5	2,982	3,041	1,991	4584,47

Анализ таблицы 1 показывает, что результаты являются достаточно точными.

Основным преимуществами предлагаемого метода являются:

1. Отсутствие необходимости аналитическим способом вычислять непокрытую площадь, что является затруднительным в случае, когда покрываемые несколькими антителами части поверхности пересекаются различным образом;

2. Возможность использования метода для случаев, в которых антитела имеют различную длину.

Результаты, полученные в оценивании непокрытой поверхности вирусной частицы, атакованной антителами случайным образом, являются хорошей демонстрацией применимости алгоритмов статистического моделирования для решения различного рода задач. Предлагаемый подход показал высокую точность и может быть обобщен для применения в случаях с вирусными частицами более сложной формы, а также для случаев с антителами различной длины, для которых точное аналитическое решение отсутствует.

Данная задача относится к классу вероятностных задач о покрытиях. Она может быть рассмотрена не как задача о вирусной частице и антителах, а как, например, задача об освещенности поверхности шара несколькими случайно расположенными источниками света, при этом источники света могут располагаться на различных расстояниях от шара. Также задачу можно рассмотреть как задачу о планете и искусственных спутниках, которые также могут располагаться на различных орбитах. Могут быть введены вероятностные характеристики движения, расположения, интенсивности излучения света или сигнала, то есть, рассмотрены различные вариации задачи, для которых нет точного аналитического решения, но просматривается хорошая возможность применения предложенного метода. Также, в случае, если известна, например, орбита движения спутника или источника света, для моделирования множества его случайных положений может быть использован предложенный во 2-ой главе метод для

равномерного распределения точек на кривой (кривой в таком случае будет рассматриваться орбита).

Подобные рассуждения наталкивают на мысль сформулировать задачу об оптимальном выборе орбит двух спутников (или источников света) исходя из условия максимизации зоны покрытия поверхности планеты (или сферического тела).

Важно отметить, что данная задача является только одной из множества существующих вероятностных задач о покрытиях, и представляется совершенно очевидным, что метод Монте-Карло может быть применен и для других. Например, он может быть легко применен для решения задачи о нахождении пересечения малых интервалов, случайным образом разбросанных на большом интервале [81].

Исходя из вышеизложенных тезисов, можно сделать вывод, что методы статистического моделирования представляют очень мощный инструмент для решения задач о покрытиях, особенно когда положения фигур задаются вероятностными характеристиками. При этом для многих таких задач отсутствуют аналитические решения, а возможность применения методов статистического моделирования ограничивается только вычислительной мощностью компьютеров.

3.3. Моделирование оптимальной укладки коротких армирующих волокон в оболочках при конструировании волокнистых оболочечных композитов

Общая постановка задачи армирования оболочек и краткий обзор существующих методов армирования оболочек

В данном разделе рассматривается проблема оптимального армирования оболочек при создании волокнистых композиционных материалов оболочечной формы. Предлагаемый метод заключается в армировании оболочек произвольной формы равномерно распределенными случайным образом ориентированными короткими волокнами. Критерием оптимальности армирования является достижение трансверсальной изотропии свойств оболочки. Предлагаемый метод является универсальным для оболочек произвольной формы. Он может быть применен с одинаковой эффективностью как для создания оболочек простых геометрических форм (например, цилиндрических и конических), так и для оболочек более сложных геометрических форм (например, параболических, гиперболических, сферических и т.д.).

Оболочечные конструкции из волокнистых композиционных материалов занимают важное место в различных современных технологиях [6, 50, 51, 60, 62, 69, 70, 77, 107, 114, 115]. Область их применения является обширной, несмотря на их высокую стоимость. Они применяются в строительстве, архитектуре, биосистемах, авиастроении, космической отрасли, кораблестроении и т.д. Широкая область их применения обусловлена комплексом их свойств, среди которых основными являются прочность, термостойкость, размеростабильность, легкость.

Волокнистый композиционный материал имеет две основные составляющие – это матрица и волокна. В зависимости от типов применяемых матриц и волокон материал получает те или иные свойства и соответствующее название. В качестве волокнистой основы композита могут

быть использованы стальные, стекло- и углеволокна. В качестве матрицы – бетон, титан, смолы, полимерные материалы и т.д. Наиболее известными композитами являются углепластики, стеклопластики.

Технология изготовления углепластиковых и стеклопластиковых оболочек основана на укладке волокон, пропитке связующим веществом с дальнейшим его отвердеванием. При этом материал состоит, как правило, из множества слоев, которые накладываются друг на друга. Каждый последующий слой накладывается после готовности предыдущего. Очевидно, что свойства подобных волокнистых композиционных материалов зависят во многом от применяемых при их изготовлении схем армирования.

Наиболее распространенным методом получения высокопрочных армированных конструкций из композиционных материалов является непрерывная намотка или просто укладка отдельных волокон, или лент и пакетов волокон на заготовку требуемой для конечного изделия формы [62]. Технология производства таких материалов является, как правило, автоматизированной с применением специальных устройств с числовым управлением, позволяющих реализовать ту либо иную программу намотки, ту либо иную программу укладки волокон.

Метод намотки является приоритетным и эффективным способом укладки волокон для оболочек вращения. Однако, схемы армирования, основанные на намотке требуют индивидуального подхода к различным формам оболочки, что отражается в дополнительных затратах при разработке моделей, и не в полной степени удовлетворяют требованиям получения свойств материала.

Методы, использующие упорядоченные схемы армирования (например, продольная и поперечная укладка волокон) являются наиболее эффективными для разворачивающихся поверхностей, таких как конус, цилиндр, но менее эффективны для поверхностей второго порядка.

Существующие способы армирования в большей своей массе относятся к регулярным методам. При этом расстояния и углы между укладываемыми

волокнами изменяются дискретно. Самым простым примером регулярной схемы армирования является укладка параллельных и перпендикулярных волокон на плоскости (см. рис. 3.3.1).

Выше перечисленные способы являются в ряде случаев очень надежными, и позволяют в определенном приближении получать свойства, близкие к трансверсально изотропным, но в целом противоречат понятию изотропии и его физической сущности.

Важно отметить, что в случае использования регулярных подходов к укладке волокон, в итоге материал обладает в большой степени периодической структурой, что влечет за собой соответствующие проблемы.

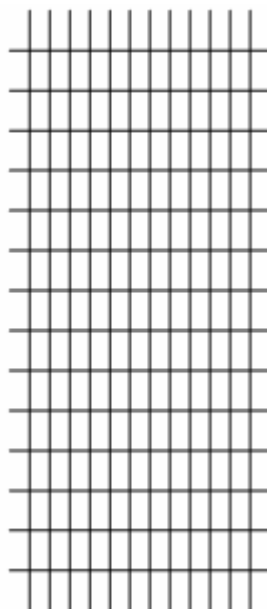


Рис. 3.3.1. Пример элементарной регулярной схемы укладки волокон на плоской поверхности

Увеличение разнообразия форм изделий, повышение требований к их свойствам обуславливают необходимость разработки новых методов армирования.

Предлагаемый метод армирования оболочек

В данной работе предлагается метод армирования, основанный на укладке коротких волокон, произвольным образом ориентированных в

касательных к оболочке плоскостях, с полюсами армирования, равномерно распределенными на поверхности. Для равномерного распределения полюсов армирования на поверхности оболочки предлагается использование методов для равномерного распределения точек на поверхностях, представленных и подробно описанных в главе 2.

Предлагаемый метод не имеет ограничений, свойственных вышеупомянутым методам армирования, и является универсальным по отношению к формам изготавливаемых изделий. Он позволяет конфигурировать микроструктуру оболочечных изделий из волокнистого композиционного материала различных форм.

Предлагаемый метод заключается в укладке коротких армирующих волокон в оболочке. Критерием оптимальности армирования рассматривается достижение трансверсальной изотропии свойств оболочки. Данный критерий будет выполнен, если будут выполнены следующие требования:

1. Число волокон на двух любых элементах поверхности оболочки с равными площадями одинаковое;
2. Волокна ориентированы таким образом, что направления их осей в касательных к оболочке плоскостях равновероятны.

Таким образом, возникают две задачи:

1. Задача равномерного распределения точек на поверхностях. Решение данной задачи показывает механизм распределения полюсов армирования. Равномерно распределенные точки – это и есть полюса армирования. Полюсом армирования будем называть точку, в которую помещается центр короткого волокна.

2. Задача равновероятной ориентации осей волокон в касательных к поверхности плоскостях, проведенных через полюса армирования.

Решение двух описанных задач формирует математическую модель оптимального армирования оболочек короткими волокнами.

Отметим, что решение задачи о равномерном распределении точек (то есть полюсов армирования) на поверхности оболочки в полном объеме представлено в главе 2. Предложенный в главе 2 универсальный алгоритм для равномерного распределения точек является составной частью предлагаемой модели армирования.

После получения равномерного распределения точек на поверхности, то есть полюсов армирования, распределение волокон в касательных к оболочке плоскостях осуществляется последовательностью следующих операций:

- 1) Перемещение волокна из начальной точки к полюсу армирования таким образом, чтобы центр его лежал в полюсе армирования, а само волокно лежало в касательной к оболочке плоскости, проведенной в точке нахождения соответствующего полюса армирования;

- 2) Задание поворота оси волокна относительно вектора нормали к поверхности оболочки. Угол поворота задается генератором случайной величины, которая имеет равномерное распределение на интервале от 0 до π .

Необходимо отметить, что предлагаемый метод также не является идеальным, как и другие. Его эффективность возрастает с увеличением числа и уменьшением длин волокон. Вопрос оптимальной длины волокна не рассматривается в данной работе, но остается открытым.

Предлагаемый метод относится к множеству методов стохастического моделирования, что отчасти может вызвать недоверие. Поэтому отдельно оговаривается условие, что число волокон должно быть достаточно большим, хотя в технологиях изготовления подобных материалов оно таким и является. Учитывая величину числа волокон, применение статистического моделирования является оправданным. Метод является универсальным для армирования оболочек различной конфигурации в трехмерном пространстве.

Принимая во внимание, что предлагаемый метод базируется на статистическом подходе, важно отметить, что по сути своей он намного ближе подходит для получения изотропных свойств материала.

Армирование плоской поверхности

Рассмотрим предлагаемый метод на примере укладки армирующих волокон на плоской поверхности.

Генерирование волоконной структуры производится следующим образом:

1. Генерируется множество равномерно распределенных точек на поверхности – полюсов армирования (рис. 3.3.2, слева);
2. Генерируется множество углов, определяющих ориентации волокон на поверхности (см. рис 3.3.2, справа);
3. Строится распределение волокон на плоскости (см. рис. 3.3.3)

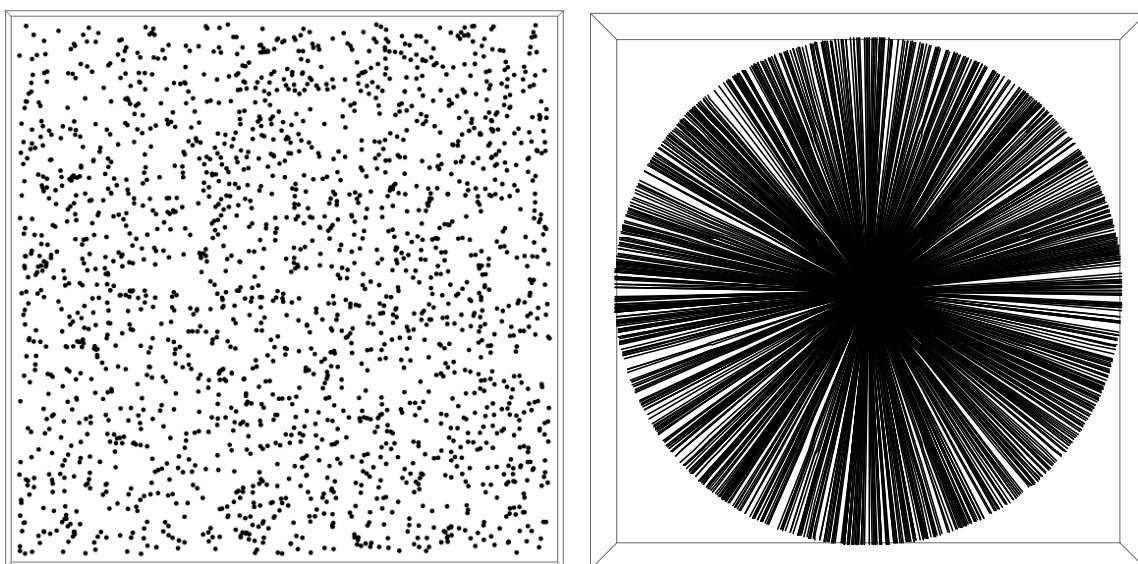


Рис. 3.3.2. Равномерное распределение полюсов армирования (слева) и равновероятное распределение ориентаций волокон (справа)

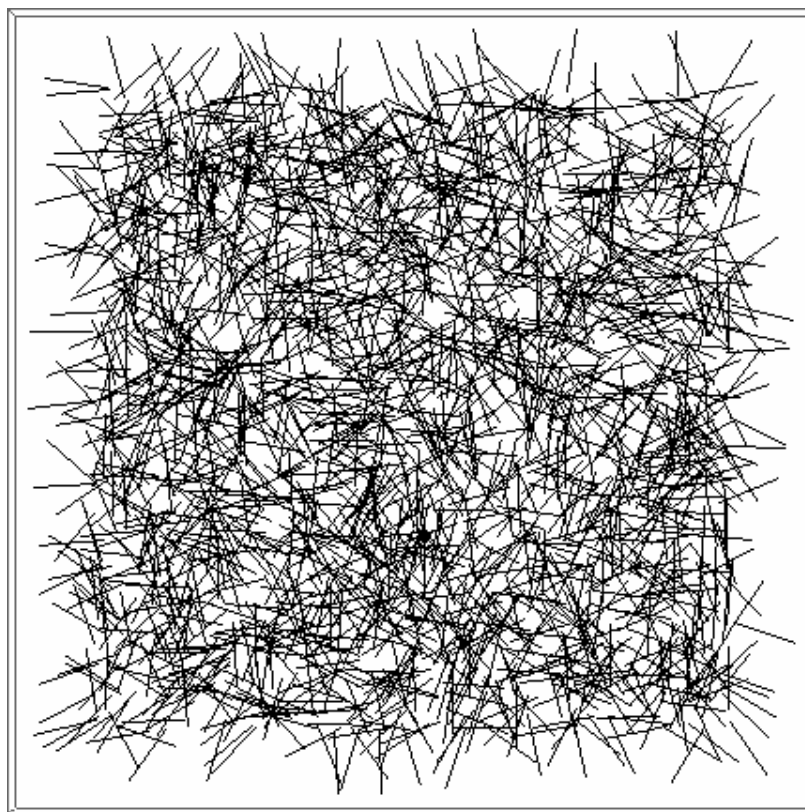


Рис. 3.3.3. Распределение волокон на плоской поверхности

Генерирование углов ψ , определяющих ориентации волокон на плоскости, производится с помощью формулы $\psi = \pi \text{Random}$, где *Random* - генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале (0,1). Важно отметить, при совмещении центров всех волокон в одной точке, их концы будут располагаться на окружности радиуса $l/2$ и будут равномерно распределены на ней (см. рис. 3.3.2, справа). То есть для генерирования ориентаций волокон можно было задать кривую в виде окружности, равномерно распределить точки по ней, например, представленным в главе 2, способом, и таким образом получить множество ориентаций волокон. В данном простейшем случае, такой подход, конечно, не обоснован, но в случае генерирования текстур волокон при конструировании композитных оболочек с анизотропными свойствами, для задания ориентаций могут быть использованы кривые, отличные от окружности, применяя равномерные распределения точек на таких кривых, могут быть получены неравномерные распределения углов ψ .

Армирование оболочки параболической формы

Рассмотрим оболочку в виде параболоида, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 2pz$. Уравнение оси короткого волокна длины l случайным образом ориентированного в касательной плоскости к параболоиду в точке $\{x, y, z\}$ с нормалью $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \{\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta\}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \left[\frac{l}{2}(1-t) - \frac{l}{2}t \right] \sin \varphi \\ y + \left[-\frac{l}{2}(1-t) + \frac{l}{2}t \right] \cos \varphi \\ z \end{pmatrix} + \left[(1 - \cos \psi) N^2 + \sin \psi N \right] \begin{pmatrix} \left[\frac{l}{2}(1-t) - \frac{l}{2}t \right] \sin \varphi \\ \left[-\frac{l}{2}(1-t) + \frac{l}{2}t \right] \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3.1)$$

$$\text{где } N = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Значение угла ψ поворота оси волокна относительно вектора нормали задается генератором случайной величины, которая равномерно распределена на интервале от 0 до π . Полученные результаты распределения волокон на параболической оболочке представлены на рисунке 3.3.4.

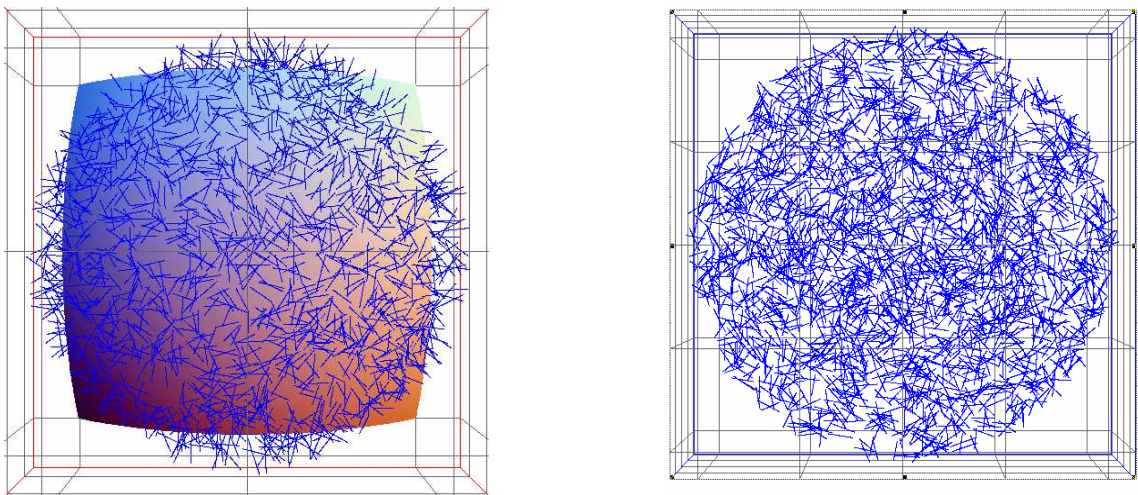


Рис. 3.3.4. Распределение армирующих волокон на основании параболической оболочки

Модернизация предлагаемого метода армирования для создания структур волокон, определяющих анизотропные свойства оболочек

Предлагаемый способ армирования нацелен на достижение локальной трансверсальной изотропии механических свойств оболочки. Равномерно распределенные и случайным образом ориентированные волокна на поверхности (см. рис. 3.3.3) образуют структуру волокнистого композита. При этом отсутствие преимущественных направлений в распределении волокон гарантирует трансверсальную изотропию свойств материала.

Использование неравномерных распределений полюсов и (или) ориентаций волокон позволит получить волокнистые структуры с преимущественными плотностями и (или) ориентациями, что приведет к анизотропным свойствам композита.

Рассмотрим пример с неравномерным распределением ориентаций волокон, укладываемых на плоскости. Выше была описана процедура, в которой углы, задающие ориентации на плоскости, задавались формулой $\psi = \pi \text{Random}$, где Random - генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале (0,1). Модифицируя эту формулу, можно задать преимущественную ориентацию волокон вдоль оси ou путем генерирования углов по формуле

$$\psi = \pi/2 - \alpha/2 + \alpha \text{Random}, \quad (3.3.2)$$

где Random - генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале (0,1). При использовании формулы (3.3.2) все сгенерированные углы, определяющие ориентации волокон, будут равномерно распределены на интервале $(\pi/2 - \alpha/2, \pi/2 + \alpha/2)$. На рисунках 3.3.5 и 3.3.6 представлено распределение волокон, сгенерированное по формуле (3.3.2) при $\alpha = \pi/6$ и $\alpha = \pi/3$.

Преимуществом использования формулы (3.3.2) является простота реализации алгоритма. Недостатком – полное отсутствие волокон с

ориентациями, которым соответствуют углы ψ , выходящие за пределы интервала $(\pi/2 - \alpha/2, \pi/2 + \alpha/2)$.

Более естественным подходом было бы использование распределений ориентаций не такое, в котором полностью отсутствует целый спектр ориентаций, а такое при котором присутствует весь спектр ориентаций, но с какими либо преимущественными направлениями. Для достижения подобных распределений волокон можно использовать специальные функции распределений, например, нормальное распределение [111]. В данной работе предлагается способ генерирования ориентаций, на основе равномерных распределений точек на кривых.

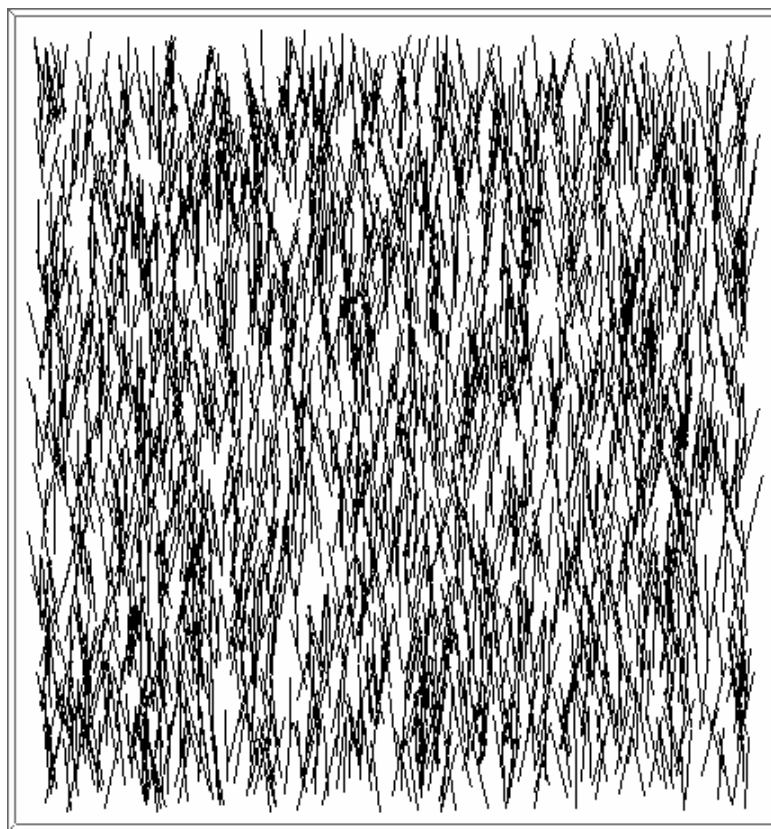


Рис. 3.3.5. Распределение волокон при $\alpha = \pi/6$

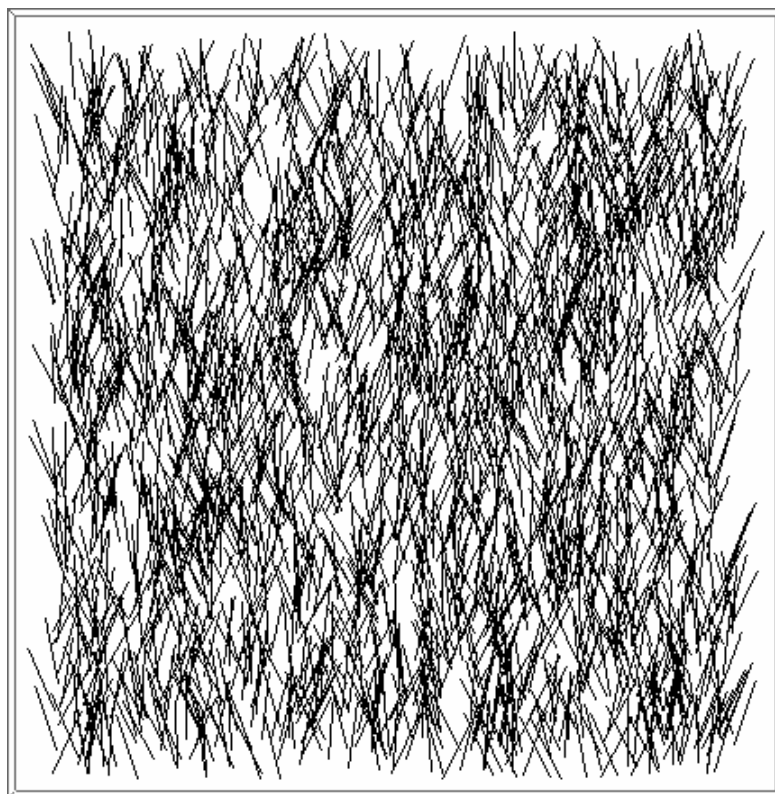


Рис. 3.3.6. Распределение волокон при $\alpha = \pi/3$

Выше было показано, что при генерировании распределений волокон с равновероятными ориентациями (см. рис. 3.3.2, 3.3.3), концы волокон после совмещения их центров равномерно распределены по окружности.

Используя замкнутую кривую (отличную от окружности) с равномерным распределением точек на ней, каждой из которой в соответствие ставится ориентировка волокна, можно получить текстуру, соответствующую каким либо анизотропным свойствам. Например, если использовать эллипс, ориентированный вдоль оси ou , равномерно распределить по нему точки и каждой из них поставить в соответствие ориентировку волокна, то получим распределение волокон с преимущественным направлением вдоль оси ou , и при этом удастся избежать полного отсутствия волокон в других спектрах направлений.

На рисунку 3.3.7 представлено распределение волокон на плоскости, полученное на основе равномерного распределения точек на эллипсе, заданным параметрическими уравнениями $x(t) = \sin t$, $y(t) = 10 \cos t$, где $t \in [0, 2\pi]$.

На рисунке 3.3.8 представлено распределение волокон при совмещении их центров.

Анализ рисунка 3.3.7 показывает, что структура волокон имеет преимущественное направление вдоль оси ou , и при этом в ней не отсутствуют ориентировки близкие к другим осям, однако их количество меньше.

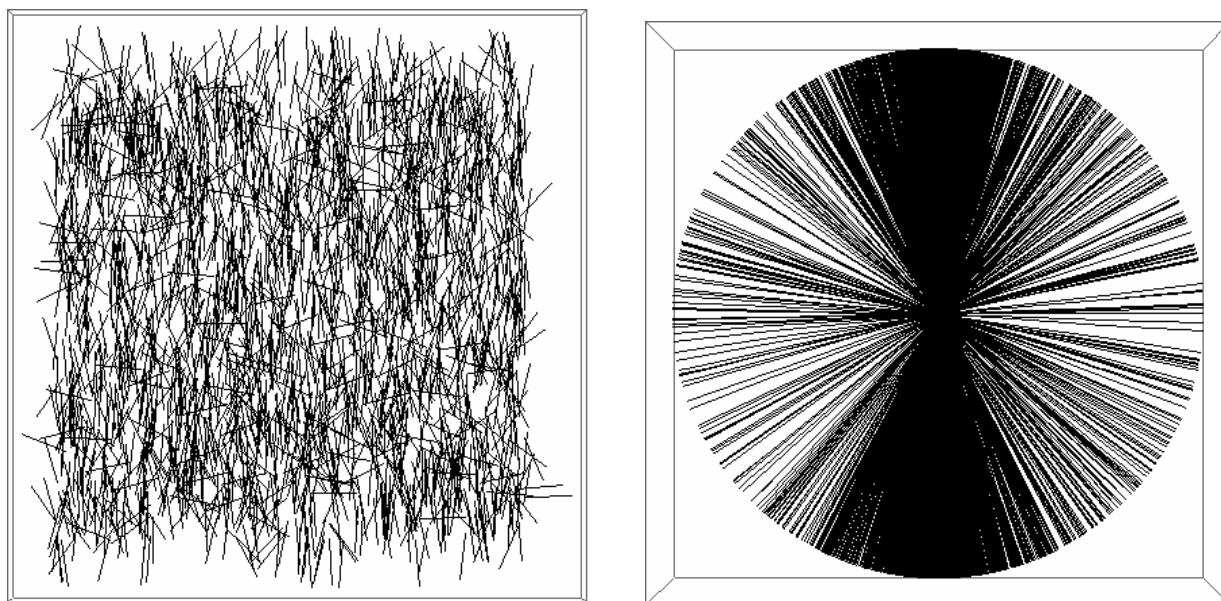


Рис. 3.3.7. Распределение волокон на плоскости (слева) и их ориентировок (справа), полученные на основе равномерного распределения точек на эллипсе

Главным преимуществом предлагаемого метода является то, что он позволяет получить оптимальную модель армирования для оболочек произвольной формы, удовлетворяя требованию трансверсальной изотропии свойств конструкции. Также необходимо отметить, данный подход может быть применен для конфигурирования структуры волокнистого материала с анизотропными свойствами.

3.4. Применение статистического численного моделирования в задачах количественного текстурного анализа

Вычисление текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по функциям распределения ориентаций кристаллографических осей методом Монте-Карло

Одним из распространенных методов математического описания текстуры поликристаллических материалов является использование функции распределения ориентаций (ФРО). Функция распределения ориентаций $F(g)$ – это плотность распределения кристаллографических осей в пространстве поворотов Q . Элемент g пространства поворотов ($g \in Q$) задает положение кристаллографических осей относительно лабораторной системы координат [66, 111].

При этом

$$\int_Q F(g) dg = 1. \quad (3.4.1)$$

Если кристаллографические оси зерен поликристаллического материала распределены равномерно, то $F(g) = 1$.

Для задания ориентации кристаллографических осей может быть использована различная параметризация. Наиболее часто в теоретических и прикладных исследованиях используют углы Эйлера (ψ - угол прецессии, ϑ - угол нутации, φ - угол собственного вращения). При решении задач текстурного анализа также используются обозначения – $\varphi_1, \varphi_2, \Phi$. Элементарная область dg пространства поворотов в этом случае определяется равенством $dg = \frac{1}{8\pi^2} \sin \vartheta d\psi d\vartheta d\varphi$, а ФРО $F(\psi, \vartheta, \varphi)$ в эйлеровом пространстве удовлетворяет равенству

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(\psi, \vartheta, \varphi) \frac{\sin \vartheta}{8\pi^2} d\psi d\vartheta d\varphi = 1. \quad (3.4.2)$$

Таким образом, функция $F(\psi, \vartheta, \varphi)$ не является плотностью совместного распределения углов Эйлера. Она лишь характеризует, во сколько раз плотность распределения кристаллографических осей в фиксированной точке эйлерова пространства для текстурированного материала превышает плотность их распределения в соответствующем нетекстурированном материале. Вводя обозначение для плотности распределения кристаллографических осей нетекстурированного материала – $f_H(\psi, \vartheta, \varphi)$, находим

$$f_H(\psi, \vartheta, \varphi) = \frac{\sin \vartheta}{8\pi^2}. \quad (3.4.3)$$

Плотность распределения кристаллографических осей текстурированного материала $f(\psi, \vartheta, \varphi)$ записывается равенством

$$f(\psi, \vartheta, \varphi) = F(\psi, \vartheta, \varphi) f_H(\psi, \vartheta, \varphi). \quad (3.4.4)$$

Трехмерная функция распределения в экспериментальных исследованиях восстанавливается по двумерным распределениям различных кристаллографических плоскостей в текстурированном материале. Решение задачи восстановления реализуется процедурой интегрирования записанной в ряд по симметрическим сферическим функциям ФРО с дальнейшим получением двумерных распределений и их сравнением с экспериментально найденными распределениями. Сведения о преимущественных ориентациях получают по анализу карт ФРО [66, 111], которые являются сечениями трехмерной ФРО в эйлеровом пространстве.

Наряду с представлением ФРО в виде разложений в ряды с использованием симметрических сферических функций используются различные модельные представления, в частности суперпозиции гауссовых на группе $SO(3)$ распределений [66, 111]. Модельные представления снимают

проблему некорректности восстановления ФРО и могут быть использованы для решения смежных теоретических проблем.

Как известно, при термомеханической обработке поликристаллических материалов – прокатка, волочение, прессование – в них возникает кристаллографическая текстура, и материал становится анизотропным. Симметрия процесса деформации определяет симметрию свойств изделия, которая чаще всего приводит к его трансверсальной изотропии или ортотропии. В частности, для таких материалов установлены точные количественные соотношения между упругими свойствами составляющих поликристаллический агрегат кристаллитов, параметрами текстуры и эффективными упругими свойствами [1, 25-33, 56, 57, 64, 96-102]. Девять независимых упругих констант ортотропного текстурированного поликристалла определяются равенствами [64, 96-98]:

$$\begin{aligned}
c_{11}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} + \frac{1}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} + \frac{1}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{22}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} + \frac{p_2^2}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} + \frac{p_3^2}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{33}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} + \frac{(1 + p_2)^2}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} + \frac{(1 + p_3)^2}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{23}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} - \frac{p_2(1 + p_2)}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} - \frac{p_3(1 + p_3)}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{31}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} - \frac{1 + p_2}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} - \frac{1 + p_3}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{12}^{(0)} &= \frac{1}{3} \lambda_1^{(0)} + \frac{p_2}{2 + 2p_2 + 2p_2^2} \lambda_2^{(0)} + \frac{p_3}{2 + 2p_3 + 2p_3^2} \lambda_3^{(0)}, \\
c_{44}^{(0)} &= \frac{1}{2} \lambda_4^{(0)}, \quad c_{55}^{(0)} = \frac{1}{2} \lambda_5^{(0)}, \quad c_{66}^{(0)} = \frac{1}{2} \lambda_6^{(0)},
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(0)} &= \lambda_1, \\
\lambda_{2,3}^{(0)} &= \lambda_2^{(1-3\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3+2p_{2,3}(\Delta_2-\Delta_3))} \lambda_4^{(3\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3-2p_{2,3}(\Delta_2-\Delta_3))}, \\
\lambda_4^{(0)} &= \lambda_2^{(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_2+2\Delta_3-2\Delta_1))}, \\
\lambda_5^{(0)} &= \lambda_2^{(2\Delta_3+2\Delta_1-2\Delta_2)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_3+2\Delta_1-2\Delta_2))}, \\
\lambda_6^{(0)} &= \lambda_2^{(2\Delta_1+2\Delta_2-2\Delta_3)} \lambda_4^{(1-(2\Delta_1+2\Delta_2-2\Delta_3))},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= c_{11} + 2c_{12} = 3K, \\
\lambda_2 &= \lambda_3 = c_{11} - c_{12}, \\
\lambda_4 &= \lambda_5 = \lambda_6 = 2c_{44}
\end{aligned}$$

(c_{ij} - коэффициенты податливости зерен поликристалла, K - объемный модуль),

$$\begin{aligned}
p_{2,3} &= k \pm \left(k^2 + k + 1 \right)^{1/2}, \\
k &= (\Delta_1 - \Delta_2) / (\Delta_2 - \Delta_3).
\end{aligned}$$

Текстурные параметры Δ_i – интегральные характеристики текстуры, которые определяются только плотностью распределения кристаллографических осей

$$\Delta_i = \left\langle Q_{i1}^2 Q_{i2}^2 + Q_{i2}^2 Q_{i3}^2 + Q_{i3}^2 Q_{i1}^2 \right\rangle, \quad (3.4.6)$$

где $i=1, 2, 3$ – нумерация главных осей анизотропии, $Q_{ij} = \cos \angle(Ox_i, Ox'_j)$; Ox_i – оси лабораторной системы координат, Ox'_j – кристаллографические

оси. Угловыми скобками обозначена операция осреднения по ансамблю реализаций – множеству точек в эйлеровом пространстве.

Для нетекстурированного материала, согласно [56, 96, 98], установлены соотношения:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/5. \quad (3.4.7)$$

Для трансверсально-изотропного материала, для которого ось Ox_3 – является осью материальной симметрии, также установлено [56, 96, 98]:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = (1+3\Delta_3)/8. \quad (3.4.8)$$

Несмотря на то, что соотношения (3.4.7) и (3.4.8) однозначно установлены аналитическим путем, их исследования и установление методами статистического численного моделирования (методами Монте-Карло) представляют особый интерес. Во-первых, результаты статистического численного моделирования могут послужить в качестве проверки аналитического подхода, во-вторых, метод может быть использован для получения новых результатов, которые еще не достигнуты аналитическими методами. Например, статистическое моделирование может быть использовано, для решения задачи о нахождении глобальной области всех возможных значений текстурных параметров $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ для ортотропных поликристаллических материалов с кубической структурой.

Для проведения численных экспериментов по нахождению текстурных параметров в данной работе используются следующие функции плотности распределения ориентаций:

- функция плотности $f(\psi, \vartheta, \varphi) = \frac{\sin \vartheta}{8\pi^2}$, которая соответствует

нетекстурированному материалу [71];

- модельная функция плотности
$$f(\psi, \vartheta, \varphi) = \frac{\sin \vartheta}{4\pi^2(1 - \cos \vartheta)},$$

имитирующая материал с аксиальной симметрией относительно оси Ox_3 лабораторной системы координат.

В основе численных экспериментов лежит метод статистического моделирования множества значений углов ψ, ϑ, φ , определяющих положения кристаллов материала, по функции плотности их распределения.

Для генерирования значений соответствующих углов предлагается использовать обобщенный метод Неймана. Алгоритм, основанный на этом методе, состоит из следующих действий:

- 1) Определяется $\max_D f(\psi, \vartheta, \varphi)$ - максимальное значение функции $f(\psi, \vartheta, \varphi)$ на области $D = \{0 \leq \psi \leq 2\pi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$;
- 2) Генерируются числа $\psi_0 = 2\pi R$, $\vartheta_0 = \pi R$, $\varphi_0 = 2\pi R$, где R - эталонный генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале $(0,1)$;
- 3) Выполняется проверка: если $\max_D f(\psi, \vartheta, \varphi) \cdot R < f(\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, где R - эталонный генератор случайного числа с равномерным распределением на интервале $(0,1)$, то значения углов $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$ принимаются, в противном случае отбрасываются;
- 4) Повторяются действия 2-3 до тех пор, пока не будет сгенерировано необходимое множество значений углов ψ, ϑ, φ .

После получения необходимого массива значений углов ψ, ϑ, φ , определяющих положения кристаллов материала, производится расчет текстурных параметров материала $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ путем осреднения множества значений комбинаций направляющих косинусов:

$$\Delta_1 = \langle Q_{11}^2 Q_{12}^2 + Q_{12}^2 Q_{13}^2 + Q_{13}^2 Q_{11}^2 \rangle,$$

$$\Delta_2 = \langle Q_{21}^2 Q_{22}^2 + Q_{22}^2 Q_{23}^2 + Q_{23}^2 Q_{21}^2 \rangle,$$

$$\Delta_3 = \langle Q_{31}^2 Q_{32}^2 + Q_{32}^2 Q_{33}^2 + Q_{33}^2 Q_{31}^2 \rangle.$$

Здесь $Q_{ij} = \cos \angle(Ox_i, Ox'_j)$, Ox_i – оси лабораторной системы координат, Ox'_j – кристаллографические оси. При переходе к углам Эйлера получаем следующие выражения для нахождения значений направляющих косинусов:

$$Q_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$Q_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$Q_{13} = \sin \psi \sin \vartheta,$$

$$Q_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi,$$

$$Q_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi,$$

$$Q_{23} = -\cos \psi \sin \vartheta,$$

$$Q_{31} = \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$Q_{32} = \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$Q_{33} = \cos \vartheta.$$

Ниже, на рисунках 3.4.1-3.4.9 представлены результаты расчетов, произведенных с помощью предложенного алгоритма.

На рисунках 3.4.1-3.4.3 представлены значения текстурных параметров, полученные на основе статистического численного моделирования при использовании функции $f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (8\pi^2)$, соответствующей нетекстурированному материалу.

На рисунках 3.4.4-3.4.6 представлены значения текстурных параметров, полученные на основе статистического численного моделирования при использовании функции $f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi^2(1 - \cos \nu)}$, где $\nu = \frac{\pi}{3}$.

На рисунках 3.4.7-3.4.9 представлены значения текстурных параметров, полученные на основе статистического численного моделирования при использовании функции $f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi^2(1 - \cos \nu)}$, где $\nu = \frac{\pi}{6}$.

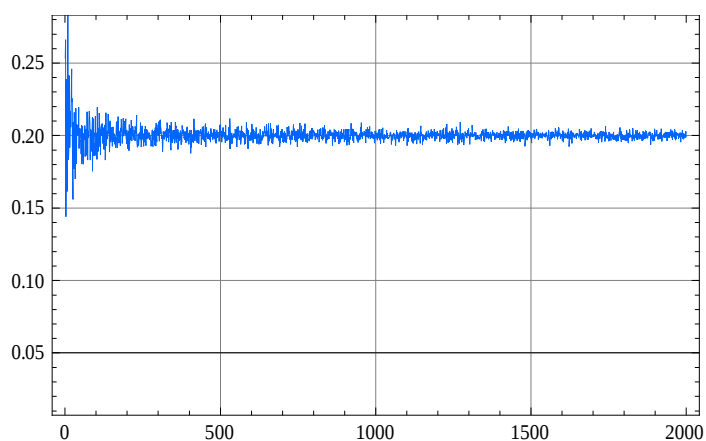


Рис. 3.4.1. Полученные значения текстурного параметра Δ_1 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (8\pi^2), 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

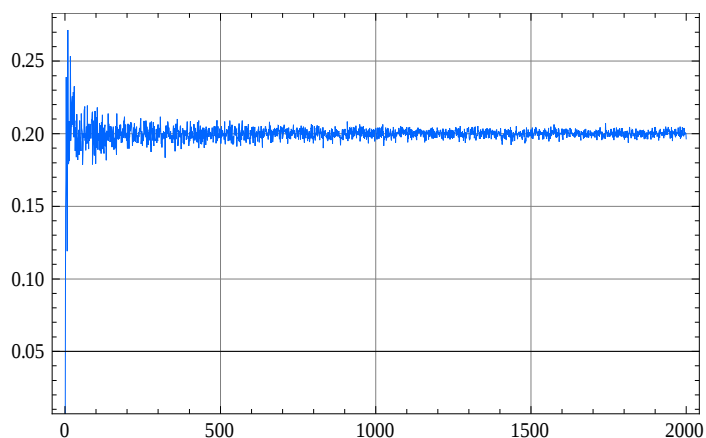


Рис. 3.4.2. Полученные значения текстурного параметра Δ_2 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (8\pi^2), 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

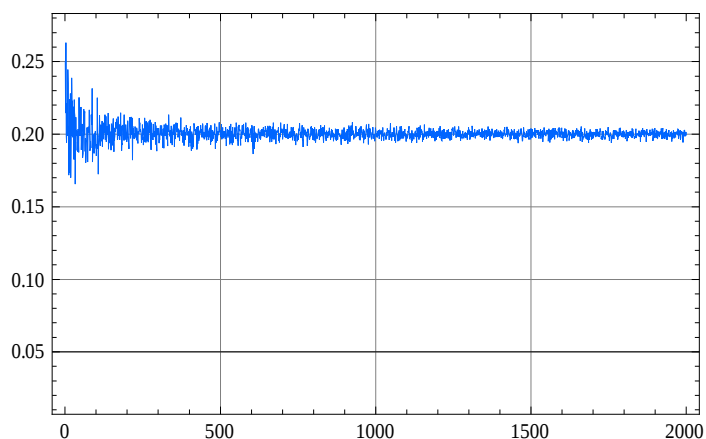


Рис. 3.4.3. Полученные значения текстурного параметра Δ_3 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (8\pi^2), 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

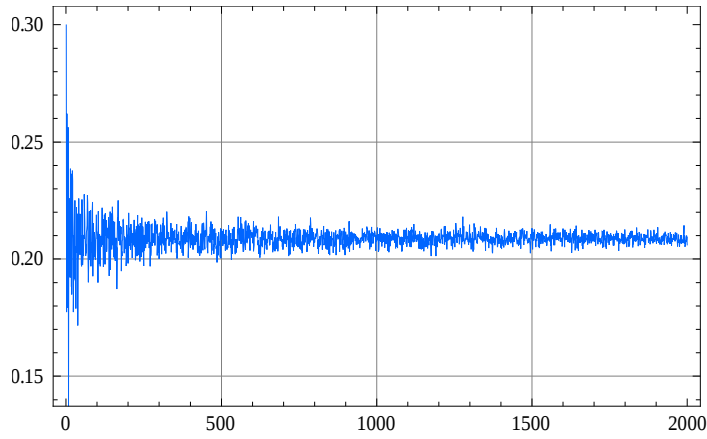


Рис. 3.4.4. Полученные значения текстурного параметра Δ_1 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/3, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

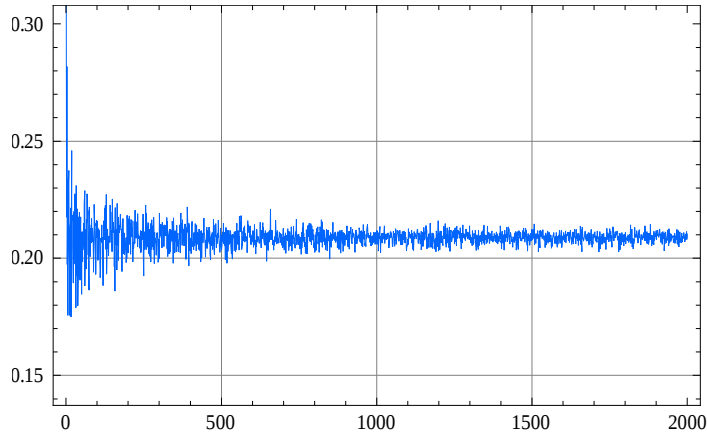


Рис. 3.4.5. Полученные значения текстурного параметра Δ_2 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/3, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

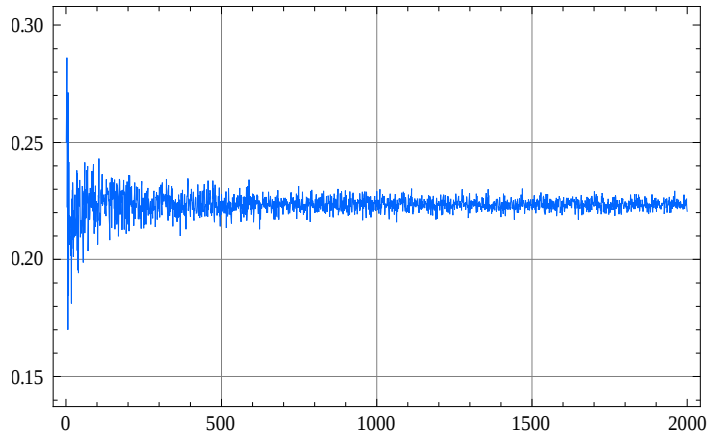


Рис. 3.4.6. Полученные значения текстурного параметра Δ_3 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/3, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

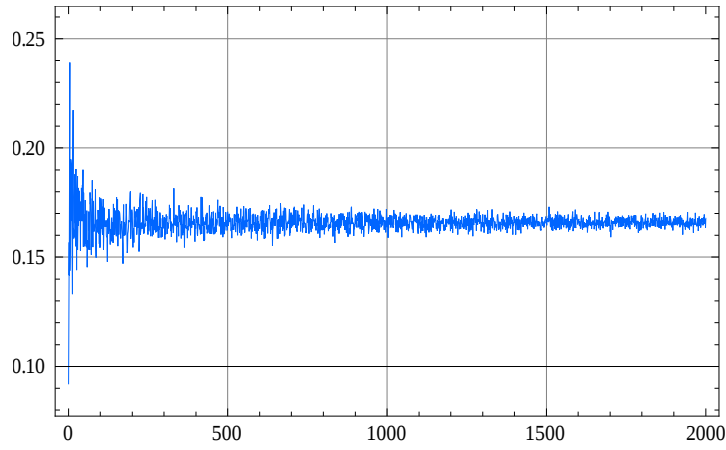


Рис. 3.4.7. Полученные значения текстурного параметра Δ_1 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/6, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

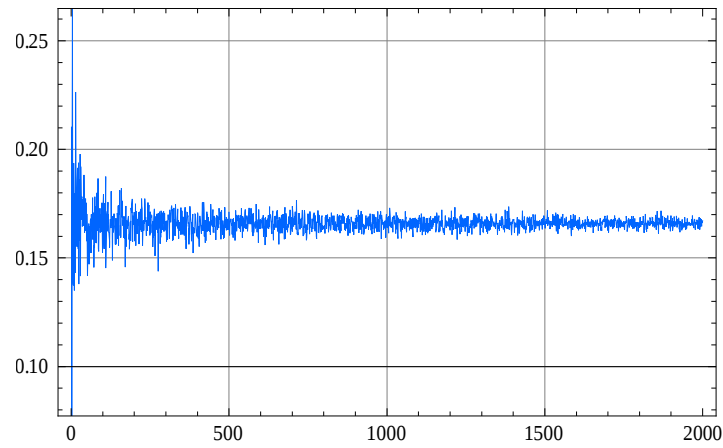


Рис. 3.4.8. Полученные значения текстурного параметра Δ_2 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/6, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

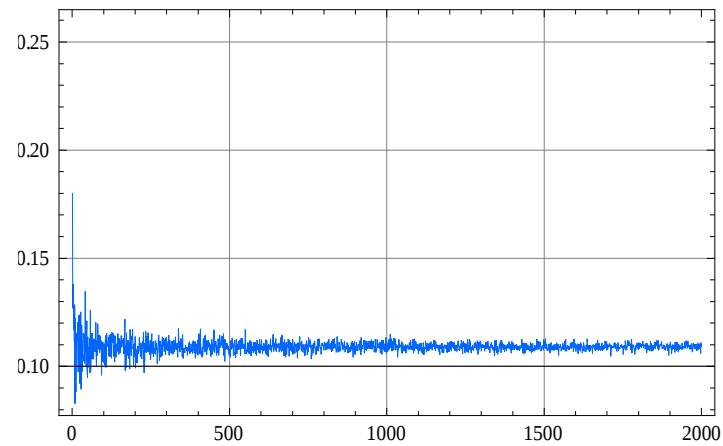


Рис. 3.4.8. Полученные значения текстурного параметра Δ_3 для числа сгенерированных ориентаций n от 1 до 2000
 $(f(\psi, \theta, \varphi) = \sin \theta / (4\pi^2(1 - \cos \nu)), \nu = \pi/6, 0 \leq \psi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \nu, 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

Полученные статистическим моделированием значения текстурных параметров подтверждают аналитические соотношения (3.4.7) и (3.4.8).

Ниже приведены значения текстурных параметров, полученные для тех же трех случаев, но при числе сгенерированных ориентаций $n=10000$.

$$\text{Для } f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{8\pi^2}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad n=10000$$

получено:

$$\Delta_1 = 0,202, \Delta_2 = 0,201, \Delta_3 = 0,201 (\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx \Delta_3).$$

$$\text{Для } f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi^2(1 - \cos \nu)}, \quad \nu = \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$n=10000$ получено:

$$\Delta_1 = 0,209, \Delta_2 = 0,210, \Delta_3 = 0,223 (\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx (1 + 3\Delta_3)/8).$$

$$\text{Для } f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi^2(1 - \cos \nu)}, \quad \nu = \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$n=10000$ получено:

$$\Delta_1 = 0,165, \Delta_2 = 0,166, \Delta_3 = 0,109 (\Delta_1 \approx \Delta_2 \approx (1 + 3\Delta_3)/8).$$

Очевидным является тот факт, что с увеличением выборки повышается точность вычислений значений текстурных параметров. Данный факт также подтверждается анализом рисунков 3.4.1-3.4.9 и результатами расчетов структурных параметров при генерировании 10000 ориентировок.

В данной работе использованы модельная ФРО $f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{8\pi^2}$ для нетекстурированного материала и модельная ФРО $f(\psi, \theta, \varphi) = \frac{\sin \theta}{4\pi^2(1 - \cos \nu)}$, задающая аксиальную симметрию материала.

Построение глобальной области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала

Статистическое моделирование может быть применено для визуализации области всех возможных состояний ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой в пространстве текстурных параметров.

Ортотропным является материал, имеющий три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии физических свойств. Например, если материал, заданный в лабораторной системе координат $Ox_1x_2x_3$, с ортонормированным базисом, обладает симметрией свойств относительно плоскостей x_1Ox_2 , x_1Ox_3 , x_2Ox_3 , то такой материал является ортотропным.

Каждой текстуре ортотропного материала соответствуют определенные значения параметров Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , которые могут быть рассмотрены как точка в пространстве текстурных параметров.

Из соотношения (3.4.6) следует, что область всех возможных состояний в пространстве текстурных параметров лежит в первом октанте и является ограниченной.

Использование различных ФРО для того, чтобы хотя бы приближенно построить область значений текстурных параметров, является нереализуемым подходом, в связи с невозможностью воспроизвести все возможные ФРО, соответствующие ортотропным материалам.

Тем не менее, задача может быть решена путем использования октетов – симметричных отображений случайным образом взятых ориентировок во все октанты пространства, задаваемого лабораторной системой координат $Ox_1x_2x_3$.

Каждой случайной ориентировке соответствует матрица направляющих косинусов:

$$M(\psi, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \psi \sin \vartheta \\ \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Выполняя симметричные отражения данной матрицы относительно плоскостей в последовательности

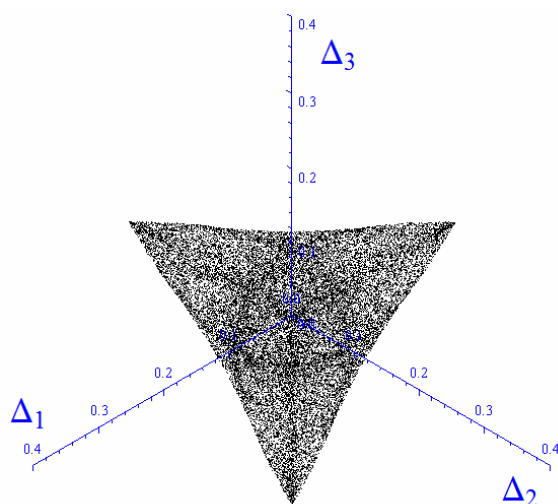
$$x_1 O x_3 \rightarrow x_2 O x_3 \rightarrow x_1 O x_3 \rightarrow x_1 O x_2 \rightarrow x_2 O x_3 \rightarrow x_1 O x_3 \rightarrow x_2 O x_3,$$

используя, соответственно, матрицы преобразований

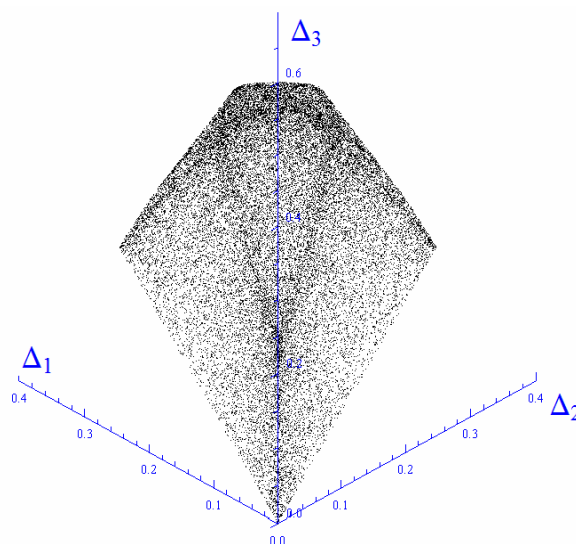
$$L_{x_1 O x_3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{x_2 O x_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L_{x_1 O x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{будут}$$

получены матрицы направляющих косинусов для 8 ориентировок, образующих октет, при этом октет будет обладать 3-мя плоскостями симметрии относительно плоскостей $x_1 O x_2$, $x_1 O x_3$, $x_2 O x_3$. Рассматривая данный октет как модель «случайного» ортотропного материала, представляется возможным выполнить процедуру расчета текстурных параметров $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

Генерируя множество подобных октетов ориентировок, и вычисляя для каждого из октетов значения текстурных параметров, будет получена область состояний ортотропного материала в пространстве текстурных параметров, которая может быть легко визуализирована. Генерация ориентировок каждого октета осуществляется с использованием функции распределения углов Эйлера (3.4.3), соответствующей нетекстурированному состоянию поликристаллическому материалу. На рисунке 3.4.9 представлена полученная область текстурных состояний.



ViewPoint: {3,3,3}



ViewPoint: {10,10,-10}

Рис.3.4.9. Область возможных текстурных состояний ортотропного материала с кубической структурой

Четкое представление об области возможных значений текстурных параметров имеет важное значение для изучения материалов, задач, связанных с поиском требуемых свойств, глобальной проблемы управления свойствами ортотропных материалов.

Полученная область в пространстве текстурных параметров обладает триметрией и диметрией. Изучение полученной области представляет отдельный интерес. Важным является тот факт, что геометрический центр полученного облака текстурных состояний совпадает с точкой $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1/5$, соответствующей нетекстурированному состоянию ортотропного материала. Этот факт требует дополнительных исследований и проверок.

Выводы по третьей главе

В данной главе представлены следующие результаты:

1. Решение задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом

антителами, методом Монте-Карло. Полученные результаты согласуются с известными результатами, полученными аналитическим путем. При этом предложенный метод может быть развит для решения различных вариаций рассмотренной задачи;

2. Решение задачи об оптимальной укладке коротких армирующих волокон в оболочках, направленной на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций. Предлагаемый подход является универсальным по отношению к разнообразию форм оболочек;

3. Решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой. Полученная область имеет значимость для исследований свойств ортотропных материалов, может быть полезна в решении глобальных проблем управления свойствами ортотропных материалов и требует дополнительных серьезных исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Получены в общем виде функции плотностей совместного распределения параметров, соответствующие равномерному распределению точек на кривых и поверхностях в евклидовых пространствах различной размерности;

2. Установлена связь между случайными равновероятными ориентировками твердого тела и равномерным распределением точек на поверхности трехмерной гиперсферы в четырехмерном евклидовом пространстве;

3. Разработаны универсальные алгоритмы для моделирования равномерных распределений точек на кривых и поверхностях в трехмерном евклидовом пространстве;

4. Разработана математическая модель укладки коротких армирующих волокон в оболочках, направленная на достижение локально трансверсально-изотропных механических свойств оболочечных конструкций;

5. Выполнено численное решение частной задачи об оценке ожидаемой непокрытой части поверхности шарообразной вирусной частицы, атакованной случайным образом антителами;

6. Выполнено решение задачи о нахождении текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой по известной функции распределения ориентаций (ФРО) кристаллографических осей и построение области возможных значений текстурных параметров ортотропного поликристаллического материала с кубической структурой.

Полученные результаты решений прикладных задач свидетельствуют об эффективности предложенного универсального метода для моделирования равномерных распределений точек на поверхностях.

Разработанный математический аппарат и полученные результаты его применения для прикладных исследований позволяют выделить следующие возможные пути продолжения исследований:

1. Теоретические исследования (например, распределения точек на поверхностях в многомерных неевклидовых метрических пространствах);
2. Исследования в области проблем геометрических вероятностей на поверхностях;
3. Исследования в области математического моделирования процессов армирования структурно-неоднородных сред;
4. Исследования в области количественного текстурного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adamesku R.A., Mityushov E.A., Mityushova L.L., Iushkov V.I. Invarianten der Anisotropie elastischer Eigenschaften von texturierten Kubischen Metallen // Z. Metallkunde. – 1985 – Bd.76. – H.11. – P. 747–749.
2. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Estimation of Fekete Points // J.Comput. Phys. – 2007. – V.225. – P. 2354-2376.
3. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Computational cost of the Fekete problem I: The Forces Method on the 2-sphere // J. Comput. Physics. – 2009. – V. 228. – P. 3288-3306.
4. Bendito E., Carmona A., Encinas A.M., Gesto J.M. Computational cost of the Fekete problem II: on Smale's 7th problem, preprint. URL: <http://www-ma3.upc.es/users/bencar/articulos/YJCPH2424.pdf> (request data: 22.09.2013)
5. Beltran C. The state of the art in Smale's 7th problem // London mathematical society lecture note series. – № 403. – P. 1-15.
6. Cauberg N., Tysmans T., Adriaenssens S., Wastiels J., Mollaert M., Belkassam B. Shell Elements of Textile Reinforced Concrete Using Fabric Formwork: A Case Study // Advances in Structural Engineering. – 2012. – V. 15, № 4. – P. 677-689.
7. Cook J.M. Technical Notes and Short Papers: Rational Formulae for the Production of a Spherically Symmetric Probability Distribution // Math. Tables Aids Comput. – 1957. – V. 11. – P. 81-82.
8. Cook R.L. Stochastic sampling in computer graphics // ACM Trans. Graphics. – 1986. – V. 5 (1). – P. 51–72.
9. Gesto J.M. Estimation of Fekete points // Ph.D. Departament de Matematica Aplicada III, Universitat Politecnica de Catalunya, 2008. URL: <http://www-ma3.upc.edu/users/bencar/papers.html> (request data: 22.09.2013)
10. Hardin D.P., Saff E.B. Discretizing manifolds via minimum energy points // Notices Amer. Math. Soc. – 2004. – V. 51. – P. 1186-1194.
11. Hicks J.S., Wheeling R.F. An Efficient Method for Generating Uniformly Distributed Points on the Surface of an n-Dimensional Sphere // Comm. Assoc. Comput. Mach. – 1959. – V. 2. – P. 13-15.
12. Knuth D.E. The art of computer programming. Second edition. – Addison-Wesley publishing company, 1981. – 688 p.
13. Kobbelt L., Botsch M. A survey of point based techniques in computer graphics // Computers and Graphics. – 2004. – V. 28 (6). – P. 801–814.

14. Kopytov N.P., Mityushov E.A. The method for uniform distribution of points on surfaces in multi-dimensional Euclidean space, preprint in www.intellectualarchive.com. URL: <http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=1170> (request data: 22.12.2013)
15. Kopytov N.P., Mityushov E.A. Universal algorithm of uniform distribution of points on arbitrary analytic surfaces in three-dimensional space, preprint in www.intellectualarchive.com. URL: <http://www.intellectualarchive.com/?link=item&id=473> (request data: 22.09.2013)
16. Leopardi P. Distributing points on the sphere: Partitions, separation, quadrature and energy // Thesis submitted in fulfilment of requirements for Doctor of Philosophy in Mathematics at the University of New South Wales, 2007. URL: <http://www.primefan.ru/stuff/math/thomson/leopardi.pdf> (request data: 22.09.2013)
17. Leopardi P. A partition of the unit sphere into regions of equal area and small diameter // Electronic Transactions on Numerical Analysis. – 2006. – V. 25. – P. 309-327.
18. Leong P., Carlile S. Methods for spherical data analysis and visualization // Journal of Neuroscience Methods. – 1998. – V. 80. – P. 191–200.
19. Li X., Wang W., Martin, R.R., Bowyer A. Using low-discrepancy sequences and the crofton formula to compute surface areas of geometric models // Computer-Aided Design. – 2003. – V. 35(9). – P. 771–782.
20. Maclean A. Parametric Equations for Surfaces. URL: <https://wiki.sch.bme.hu/pub/Infoalap/SzgGraf/ParametricSurfaces.pdf> (request data: 20.08.2011).
21. Marsaglia, G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // Ann. Math. Stat. – 1972. – V. 43. – P. 645-646.
22. Melfi. G. Schoier G. Simulation of random distributions on surfaces // Societa Italiana di Statistica (SIS). Atti della XLII Riunione Scientifica. – Bari, 2004. – P. 173-176.
23. Metropolis N., Ulam S. The Monte Carlo Method // J. Amer. Statistical Assoc. – 1949. – V. 44, № 247. – P.335—341.
24. Miles R.E. On random rotations in R^3 // Biometrika. – 1965. – V. 52 (3-4). – P. 636-639.
25. Mityushov E.A., Berestova S.A., Odintsova N.Yu. Elastic Constants of Ferritic

Steels with Allowans or Texture Inhomogeneities // The Physics of Metals and Metallography. – 2003. – V. 96 – P. 116-121

26. Mityushov E.A., Berestova S.A. Calculation of Microstresses in the Textured Polycrystals with Cubic Crystal Symmetry // Тезисы докладов. Международная конференция «Nutron Texture and Stress Analysis». – Dubna, 1997. – P. 36.
27. Mityushov E.A., Berestova S.A. Effective elastic constants of textured polycrystals // Тезисы докладов. Международная конференция «Mathematical Methods of Textured Analysis». – Dubna, 1995. – P. 20.
28. Mityushov E.A., Berestova S.A. Elastic Properties of Cubic Symmetry Polycrystal for Special Case of Two-Component Texture // Тезисы докладов. Международная конференция «Texture and properties of Materials». – Екатеринбург, 1997. – С. 111.
29. Mityushov E.A., Berestova S.A. Exact Solutions for the Determining the Effective Elastic Properties of the Textured Polycrystals // Тезисы докладов. Международная конференция «Texture and Anisotropy of Polycrystals». – Clausthal, Germany, 1997. – P.79.
30. Mityushov E.A., Berestova S.A. The Average of Material Forth Rang Tensors for the Textured Polycrystals // Тезисы докладов. Международная конференция «Texture and Anisotropy of Polycrystals». – Clausthal, Germany, 1997. – P. 77.
31. Mityushov E.A., Berestova S.A. The geometric mean of elastic constants for textured polycrystals // Сборник трудов Международной конференции ICOTOM-11. – China, 1996. – P. 830-835.
32. Mityushov E.A., Berestova S.A., Odintsova N.Yu. Effective Elastic Properties of Textured Cubic Polycrystals // Texture and Microstructure. – 2002. – V. 35 (2). – P. 99-111.
33. Mityushov E.A., Berestova S.A. Calculation of Microstresses in Textured Polycrystals with Cubic Crystal Symmetry // Texture and Microstructure. – 1999. – V. 32. – P. 309-319.
34. Moran P. The closest pair of n random points on the surface of a sphere // Biometrika – 1979. – V. 66. – P. 158–162.
35. Muller M.E. A Note on a Method for Generating Points Uniformly on N-Dimensional Spheres // Comm. Assoc. Comput. Mach. – 1959. – V. 2. – P. 19-20.

36. Nurmela K.J. Constructing spherical codes by global optimization methods // Helsinki University of Technology, Series A: Research Reports. – 1995. – V. 32.
37. Quinn J.A., Langbein F.C., Martin R.R., Elber G. Density-Controlled Sampling of Parametric Surfaces Using Adaptive Space-Filling Curves // Lecture Notes in Computer Science. – 2006. – V. 4077. – P. 465-484.
38. Quinn J.A., Langbein F.C., Martin R.R. Low-Discrepancy Point Sampling of Meshes for Rendering // Proc. Symp. Point-Based Graphics, 2007.
39. Rakhmanov E.A., Saff E.B., Zhou Y. Minimal discrete energy on the sphere // Math. Res. Lett. – 1994. – V. 1. – P. 647-662.
40. Roberts P. H., Ursell H.J. Random walk on a sphere and on a Riemannian manifold // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1960. – V. 252A. – P. 317-356.
41. Roberts P.H., Winch D.E. On random rotations // Adv. Appl. Prob. – 1984. – V. 16. – P. 638-655.
42. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo methods. Second Edition. – Wiley-Intersciens, 2007. – 345 p.
43. Saff E.B., Kuijlaars A.B. Distributing many points on a sphere // Math. Intelligencer. – 1997. – V. 19. – P. 5-11.
44. Sandro P. Simulation de points aleatoires independants et non-independants sur surfaces non planes // Universit ée de Neuchatel – Diplome postgrade en statistique. Travail de diplome. URL: <http://gibonet.ch/pub/travail.pdf> (request data: 22.09.2013)
45. Sloan I.H., Womersley R.S. Extremal systems of points and numerical integration on the sphere // Advances in Computational Mathematics. – 2004. – V. 21. – P. 107-125.
46. Smale S. Mathematical problems for the next century // Math. Intelligencer. – 1998. – V. 20. – P. 7-15.
47. Steigleder M., McCool M. Generalized stratified sampling using the hilbert curve. // Journal of Graphics Tools. – 2003. – V. 8 (3). – P. 41-47.
48. Stephens M.A. The Testing of Unit Vectors for Randomness // J. Amer. Stat. Assoc. – 1964. – V. 59. – P. 160-167.
49. Tashiro Y. On methods for generating uniform random points on the surface of a sphere // Ann. Inst. Stat. Math. – 1977. – V. 29. – P. 295-300.
50. Tysmansa T., Adriaenssens S., Wastiels J. Form finding methodology for

force-modelled anticlastic shells in glass fibre textile reinforced cement composites // Engineering Structures. – 2011. – V. 33. – P. 2603–2611.

51. Tysmansa T., Adriaenssens S., Wastiels J., Cuypers H. Structural analysis of small span textile reinforced concrete shells with double curvature // Composites Science and Technology. – 2009. – V. 69. – P. 1790–1796.
52. Watson G.S. Statistics on sphere. – Wiley-Intersciens, 1983. – 238 p.
53. Watson G.S., Williams E.J. On the Construction of Significance Tests on the Circle and Sphere // Biometrika. – 1956. – V. 43. – P. 344–352.
54. Weisstein E.W. Sphere Point Picking // From MathWorld--A Wolfram Web Resource. URL: <http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html> (request data: 22.09.2013)
55. Weisstein E.W. Hypersphere Point Picking // From MathWorld--A Wolfram Web Resource. URL: <http://mathworld.wolfram.com/HyperspherePointPicking.html> (request data: 22.09.2013)
56. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. Анизотропия физических свойств металлов. – М.: Металлургия, 1985. – 136 с.
57. Адамеску Р.А., Митюшов Е.А., Митюшова Л.Л., Юшков В.И. Ориентационные факторы анизотропии упругих свойств металлов с кубической решеткой // Физика металлов и металловедение. – 1985. – Т. 60, № 5. – С. 993–999.
58. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 624 с.
59. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. Пер. 2-го англ. изд. – М.: БИНОМ, 2012. – 320 с.
60. Анциферов В.Н., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Волокнистые композиционные материалы на основе титана. – М.: Наука, 1990. – 136 с.
61. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
62. Аюшеев Т.В. Геометрические вопросы адаптивной технологии изготовления конструкций намоткой из волокнистых композиционных материалов. – Улан-Уде: Издательство БНЦ СО РАН, 2005. – 212 с.
63. Берестова С.А., Копытов Н.П., Мисюра Н.Е., Митюшов Е.А. Структура оператора упругости поликристаллического материала // Сборник тезисов докладов VIII Российской научно-технической конференции

«Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций». – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2014.

64. Берестова С.А., Митюшов Е.А. Об одном точном решении проблемы определения эффективных модулей упругости микронеоднородных сред // ПММ. – 1999. – Т. 63, Вып. 3. – С. 524- 527.
65. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с.
66. Боровков М.В., Савелова Т.И. Нормальные распределения на $SO(3)$. – М.: МИФИ, 2002. – 96 с.
67. Бусленко Н.П., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на цифровых вычислительных машинах. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 226 с.
68. Бусленко Н.П., Голенко Д.И., Соболев И.М., Срагович В.Г., Шрейдер Ю.А. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). – Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 332 с.
69. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
70. Васильев В.В., Добряков А.А., Дудченко А.А. и др. Основы проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов – М.: МАИ, 1985. – 218 с.
71. Волков С.Д., Клиньских Н.А. О распределении постоянных упругости в квазиизотропных поликристаллах // Доклады академии наук СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 565-568.
72. Гельфанд И.М., Шапиро З.Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, Вып. 1(47). – С. 3–117.
73. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб.пособие. 11-е изд., перераб. – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с.
74. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 39. – 23 с.
75. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. Т.1.: Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Изд. 6-е. – М.: УРСС: Книжный дом

«ЛИБРОКОМ», 2013. – 336 с.

76. Елепов Б.С., Кронберг А.А., Михайлов Г.А., Сабельфельд К.К. Решение краевых задач методом Монте-Карло. – Новосибирск: Наука, 1980. – 174 с.
77. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. – М.: Машиностроение, 1972. – 168 с.
78. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1971. – 328 с.
79. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. 2-е изд., дополн. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1982. – 296 с.
80. Ермаков С.М., Некруткин В.В., Сипин А.С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1984. – 208 с.
81. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. – М.: Наука, 1972. – 192 с.
82. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на поверхностях для создания структур композитных оболочек с трансверсально-изотропными свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (5). – С. 2263-2264.
83. Копытов Н.П. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т. 16, № 3 (57). – С. 65-74.
84. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях в трехмерном пространстве // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 4, часть 3. – С. 618-622.
85. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях // Вестник ПГТУ. Механика. – 2010. – № 4. – С. 55-66.
86. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Математическая модель укладки армирующих волокон в сферической оболочке // Сборник тезисов докладов VI Российской научно-технической конференции «Механика

микронеоднородных материалов и разрушение». – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2010.

87. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Разработка математических моделей армирования оболочек из композиционных материалов // Сборник тезисов докладов XIX Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках». – Пермь: ПГТУ, 2010.
88. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Решение задачи равномерного распределения точек на различных поверхностях статистическим методом // Сборник тезисов докладов XVII Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2011.
89. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Разработка математических моделей армирования оболочек из композиционных материалов // Сборник тезисов международной научно-практической конференции «XXXIX НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбГПУ». – Санкт-Петербург: СПбГПУ, 2010.
90. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Равномерное распределение точек на поверхностях для создания структур композитных оболочек с трансферсально-изотропными свойствами // Сборник тезисов докладов X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Нижний Новгород: НГУ, 2011.
91. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Универсальный алгоритм равномерного распределения точек на произвольных аналитических поверхностях // Сборник тезисов докладов II Всероссийской конференции «Современные проблемы математики и механики». – Томск: ТГУ, 2011.
92. Копытов Н.П., Митюшов Е.А. Метод Монте-Карло для оценивания ожидаемой нейтрализованной площади поверхности шарообразной вирусной частицы, случайным образом атакованной антителами // Сборник тезисов докладов VII Российской научно-технической конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение». – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2012.
93. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. 2-го амер. изд. – М.: Наука, 1978. – 832 с.
94. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н. Энциклопедия аналитических поверхностей. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 560 с.
95. Митюшов Е.А. Теория армирования // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т. 6, № 2. – С. 151-161.
96. Митюшов Е.А., Адамеску Р.А., Юшков В.И. Расчет упругих свойств

монокристаллов по результатам исследований текстурированных поликристаллов // Заводская лаборатория. – 1984. – № 4. – С. 53-54.

97. Митюшов Е.А., Адамеску Р.А., Юшков В.И. Упругие свойства металлов с кубической симметрией, имеющих аксиальную текстуру // ФММ. – 1983. – Т. 55, Вып. 6. – С. 1079-1082.
98. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Метод определения постоянных упругости холоднотянутой проволоки // Заводская лаборатория. – 1997. – Т. 63, № 8. – С. 52-53.
99. Митюшов Е.А., Берестова С.А. О влиянии внутренних связей на физические уравнения линейно-упругих структурно неоднородных тел // Физическая мезомеханика. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 5-7.
100. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Расчет микронапряжений в текстурированных поликристаллах с кубической симметрией решетки // Деп. в ВИНТИ РАН № 3478-B97 от 28.11.97 15 с.
101. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Соотношения между упругими постоянными некоторых текстурированных материалов // Деп. в ВИНТИ РАН. № 3477-B97 от 28.11.97 11 с.
102. Митюшов Е.А., Берестова С.А. Трансформация указательных поверхностей упругих свойств текстурированных материалов // Математическое моделирование систем и процессов. – 2006. – № 14. – С. 142-146.
103. Михайлов Г.А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло. – Издательство «Наука», Сибирское отделение, 1974. – 142 с.
104. Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — М.: Наука, 1987. – 240 с.
105. Монаков А.А. Основы математического моделирования радиотехнических систем. – СПб.: ГУАП., 2005. – 100 с.
106. Най Дж. Физические свойства кристаллов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
107. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.
108. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. – М.: ЛКИ, 2013. – 432 с.
109. Розендорн Э.Н. Задачи по дифференциальной геометрии. 3-е изд., испр.

и доп. – М.: ФИЗМТЛИТ, 2008. – 144 с.

110. Савелова Т.И. Метод Монте-Карло. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011. – 152 с.
111. Савелова Т.И., Бухарова Т.И. Представления группы $SU(2)$ и их применение: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 1996. – 114 с.
112. Соболев И.М. Точки, равномерно заполняющие многомерный куб. – М.: Знание, 1985. – 32 с.
113. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 313 с.
114. Соколкин Ю.В., Вотинов А.М., Ташкинов А.А., Постных А.М., Чекалкин А.А. Технология и проектирование углеродных композитов и конструкций. – М.: Наука, 1996. – 240 с.
115. Столяров О.Н. Горшков А.С. Применение высокопрочных текстильных материалов в строительстве // Инженерно строительный журнал. – 2009. – № 4. – С. 21-25.
116. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
117. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. – М.: Мир, 1984. – 752 с.
118. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. Изд. 8-е. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 728 с.