Пермский государственный технический университет
Факультет прикладной математики и механики
Кафедра «Динамика и прочность машин»

Е.В. Кузнецова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебно-методическое пособие

Пермь **2011**

УДК 519.24.001.5

Рецензент: доктор технических наук, профессор кафедры «Динамика и прочность машин» *В.Н. Трофимов* (Пермский государственный технический университет).

Кузнецова Е.В.

Э413 Математическое планирование эксперимента: Учебно-методическое пособие для студентов очного и заочного обучения специальностей «Технология обработки металлов давлением», «Динамика и прочность машин», «Компьютерная механика», «Компьютерная биомеханика». – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2011. – 35 с.

Приведены общие сведения, понятия, определения, характеристики, используемые в методах математического планирования эксперимента. Даны методические указания примеры и варианты к лабораторным и контрольным работам.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курсы: «Математическое планирование эксперимента», «Экспериментальная механика», а также специалистов по проблемам прочности в области материалов и конструкций.

Вопросы для подготовки к зачету по предмету «Математическое планирование эксперимента»

1. Организация и планирование экспериментальных работ

1.1. Обоснование целесообразности постановки эксперимента

1.2. Выбор метода исследования

1.3. Материал и масштаб модели

1.4. Приборы и оборудование

1.5. Установление рациональной последовательности проведения опытов.

1.6. Обработка и анализ результатов, погрешности эксперимента

2. Математические методы планирования эксперимента

2.1.Планирование эксперимента

2.2. Полный факторный эксперимент

2.3. Дробный факторный эксперимент

2.4. Контрольная работа

2.5. Метод крутого восхождения по поверхности отклика

Литература

1. Адлер Ю.П. и др. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. – М: Наука, 1976, 279 с.
2. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений / справочное пособие / под ред. Б.С. Касаткина и др. – Киев: «Наукова думка», 1981. – 589 с.
3. Кузнецова Е.В. Экспериментальная механика / учебно-методическое пособие. – Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2009. 43 с.

Теоретические сведения

1. Организация и планирование экспериментальных работ

1.1. Обоснование постановки эксперимента.

Эксперимент считают перспективным, если:

- Объектом исследования служат новые исследования, явления, материалы, процессы и конструкции;
- Проверяются теории или гипотезы, а также устанавливаются границы их применимости;
- Получаются точные количественные или новые качественные данные об известных свойствах процессов, явлений, материалов и конструкций.

1.2. Выбор метода исследования

Цель эксперимента определяет выбор метода. Для того чтобы эксперимент был действительно перспективным необходимо выбрать соответствующий метод исследования. Неправильный выбор приводит к получению избыточной или недостаточной информации, удорожанию и усложнению эксперимента, а иногда и к ошибочным результатам. Например, задачи о распространении пластических деформаций, форме и размерах фактического очага деформаций, неравномерности их распространения и т.п. решаются с применением метода непосредственного определения деформации (поляризационно-оптическим, тензометрии). В таблице XII.1 показаны, подборы различных экспериментальных методов в зависимости от изучаемых механических характеристик и способов получения информации.

Экспериментальные методы позволяют получить информацию, как в дискретной форме, так и в виде непрерывных полей. Опытные данные в дискретной форме регистрируются с большой точностью, но не дают наглядного представления о распределении искомых величин. Поэтому необходимо проводить большое количество измерений, а значит, такие методы целесообразно применять подобные опыты в случае прецизионных единичных исследований.

При постановке массового эксперимента желательно иметь опытные данные в виде непрерывных полей, так как они позволяют провести предварительный качественный анализ процесса, не прибегая к обработке исходных данных. Это важно при изучении быстропротекающих процессов.

Таблица XII.1. *Классификация экспериментальных методов по способу получения информации*

Определяемые величины	Способ получения искомых величин	Экспериментальный метод
Перемещения	Экспериментальный	Тензометрия, делительные сетки, муар, интерферометрия
	Экспериментально-расчетный	Тензометрия, фотоупругость, оптически чувствительные покр тия
	Экспериментально-теоретический	Измерение твердости, линии скольжения, фотопластичность
Деформация	Экспериментальный	Тензометрия, фотоупругость, оптически чувствительные п крытия, хрупкие покрытия
	Экспериментально-расчетный	Делительные сетки, муар, интерферометрия
	Экспериментально-теоретический	Измерение твердости, линии скольжения, фотопластичность
Напряжения	Экспериментальный	Фотоупругость, фотопластичность, измерение твердости, линии скольжения
	Экспериментально-расчетный	Тензометрия, хрупкие покрытия
	Экспериментально-теоретический	Оптически чувствительные п крытия делительные сетки муар интерферометрия

Материал и масштаб модели

Проведение эксперимента в производственных экспериментальных условиях не всегда возможно, поэтому применяют модели, при этом необходимо максимально сохранить подобие физико-механических свойств, т.е. целесообразнее использовать модели из материала натуры. Если это невозможно используют для моделей материалы, у которых подобны кривые растяжения, упрочнения и.т.д. На практике для моделирования нашли применение такие материалы как: сплавы алюминия и свинца, различные полимеры. Однако при использовании, например, полимеров и других не металлических металлов необходимо иметь ввиду различия в реологическом поведении этих материалов и натуры, а также не возможность использования таких материалов, при высоких температурах и в агрессивных средах, что все это может приводить к ошибочным результатам.

Что касается масштаба, желательно, также чтобы размеры модели были приближены к натуре, однако для больших реальных объектов это не целесообразно. Чрезмерное уменьшение масштабности повышает требование к точности измерения и затрудняет реализацию геометрического подобия. Практикой моделирования установлено, что оптимальные значения геометрического масштаба 1/3–1/10. При уменьшении этих значений можно получить значительное расхождение результатов в натурных и модельных условиях, а сама модель может оказаться неадекватной.

1.4. **Измерительные приборы**

При выборе измерительных приборов необходимо учитывать следующие факторы:

- Точность измерений, диапазон значений, характер и форма получения опытных данных,
- При выполнении измерений могут возникать ошибки, вследствие дополнительных нагрузок, создаваемых измерительными приборами: электрических, тепловых и.т.д.,
- Следует отдавать предпочтение серийно выпускаемым приборам, периодически сравнивая измерения с эталонами, для выявления систематических ошибок, связанных с неисправностью приборов, отклонениями и т.д.
- Всегда перед измерениями внимательно уточнить класс точности приборов или другими словами погрешность измерения.
- Не рекомендуется применять приборы с различной точностью,
- Любое экспериментальное измерение нельзя выполнить абсолютно точно, а погрешность измерения нельзя сделать меньше погрешности (точности) измерительного прибора.

1.5. **Последовательность проведения эксперимента**

Перед проведением эксперимента необходимо провести информационный поиск обзорных материалов по искомой проблеме.

Далее необходимо определить объем экспериментальной работы. Исследователь всегда решает проблему получения максимально достоверных данных с минимальными экономическими и временными затратами, т.е. задачу оптимизации эксперимента. Необходимо, чтобы число опытных данных не было недостаточным или чрезмерно большим.

Ориентированное время эксперимента определяется по формуле:

$$t = n\sum_{i=1}^{m} t_i p_i, \qquad (1)$$

где n – количество серий испытаний; p_i – повторяемость каждого опыта; m – количество различных опытов (например, точек на диаграмме растяжения); t_i – время проведения одного опыта.

Тогда трудоемкость Q определяется произведением времени на один опыт, на количество работников z_i:

$$Q = n\sum_{i=1}^{m} t_i p_i z_i \qquad (2)$$

Полученные значения t и Q следует увеличить примерно вдвое, т.к. в них не учтены затраты на вспомогательные организационные работы.

1.6. **Обработка и анализ результатов, погрешности эксперимента**

После измерительной операции наступает следующая стадия экспериментальной работы – математическая обработка результатов измерений. Все числа, получаемые при измерениях, являются приближенными. Точность измерений нельзя повысить математическими действиями над полученными результатами измерений. Учет большого числа значащих цифр без оценки их достоверности затрудняет вычисления и оказывается бесполезным.

Как отмечалось выше, никакое измерение нельзя выполнить абсолютно точно. Ограниченные возможности измерительных оборудования приводят к приборным ошибкам, несовершенство органов чувств, неоднородность измерительных объектов, внешние и внутренние факторы, влияющие на объекты и т. п. – вот основные причины недостижимости абсолютного значения измеряемой величины.

В зависимости от причин, порождающих ошибки, различают приборные систематические, случайные ошибки. К ним не относят грубые ошибки, вызванные невниманием при снятии показаний приборов, неправильной записью измеряемых данных, ошибками при вычислениях и т. п. Такие ошибки не подчиняются какому-либо закону и устраняются при промежуточной оценке результатов измерений.

Приборные ошибки обусловливаются конструктивными особенностями измерительных приборов и не устранимы. Приборную ошибку иногда называют точностью измерительного прибора.

Систематические ошибки возникают при многократном повторении измерений и обусловливаются неисправностью измерительных приборов, неточностью методов измерений и использованием для расчетов неточных данных. Для устранения систематической ошибки, вызванной неисправностью прибора, необходимо ввести соответствующие поправки, полученные при сравнении показаний неисправного и исправного приборов. Систематическая ошибка всегда увеличивает или уменьшает результат измерений на одну и ту же величину. Следовательно, даже полное совпадение ряда измеренных величин не является признаком отсутствия систематической ошибки – ее нельзя выявить при повторных измерениях. Для устранения систематических ошибок требуются тщательная проверка всех измерительных приборов и кропотливый анализ методов измерений.

Случайные ошибки возникают в любом тщательно спланированном эксперименте от совокупного действия многих факторов и остаются при устранении грубых и систематических ошибок. Вследствие непредсказуемых обстоятельств случайные ошибки могут как увеличивать, так и уменьшать значения измеряемой величины. Случайные ошибки подчиняются законам теории вероятностей, установленным для случайных явлений. С помощью методов теории вероятностей можно уменьшить влияние случайных ошибок на результат эксперимента. Широко известен нормальный закон распределения случайных ошибок (закон Гаусса – нормальный закон распределения), из которого следуют важные выводы:

• малые по модулю ошибки встречаются чаще;

• равные по модулю случайные ошибки разных знаков встречаются одинаково часто;

• с увеличением точности (уменьшением интервала разброса измеренных значений) плотность случайных ошибок возрастет.

Теория случайных ошибок позволяет определить наиболее вероятные значения измеряемых величин и возможные отклонения от них. Однако следует отметить, что выводы теории вероятностей справедливы только для достаточно большого числа случайных событий. Поэтому, строго говоря, применение теории случайных ошибок целесообразно только к сравнительно большому числу измерений. Следует помнить, что увеличение числа измерений уменьшает влияние случайных ошибок. В каждом конкретном случае для получения заданной точности устанавливается необходимое число измерений.

С учетом выше приведенных погрешностей эксперимента рассчитываются абсолютные, относительные и среднеквадратичные погрешности. Результаты обычно представляют в виде эмпирических формул, таблиц или графиков.

Табличная форма представления позволяет в компактном виде записать большое количество данных. Эта форма менее наглядна по сравнению например с графической, однако большей точности. При составлении таблиц необходимо обратить внимание на значащие цифры, так как они не несут информации. О точности измеряемых величин. Поэтому необходимо ограничивать количество значащих цифр.

Графический материал обладает наглядностью. Однако полученные дискретные экспериментальные данные требуют дополнительной обработки. В этом случае применяют различные методы аппроксимации. Например, в случае когда погрешности экспериментальных измерений существенны применяют метод наименьших квадратов, где при аппроксимации не требуется совпадение функции в узлах аргумента. В случае же, когда значения функции в экспериментальных точках известны с большой точностью применяется интерполирование.

Математическое планирование эксперимента. Планирование эксперимента

Одна из основных задач планирования эксперимента – определение числа опытов, необходимых для установления зависимости между исследуемыми переменными величинами. Переменные параметры, изменяемые в процессе испытаний, называют **факторами,** а параметры которые изучаются или оптимизируются – **выходами** или **откликами** системы.

Простейший метод планирования эксперимента – это проведение испытаний при различных сочетаниях факторов (**способ перебора**), однако, уже при двукратном эксперименте для получения полной картины необходимо проведение большого числа испытаний.

Другой способ: изменяется только один фактор (остальные постоянны) находят частный экстремум по данному фактору, затем повторяют процедуру с другими факторами. Такая схема значительно сокращает количество опытов, но не всегда оптимальна.

Поэтому применяют методы математического планирования эксперимента, где предполагается, что существует некоторая аналитическая связь между факторами и откликом процесса, и требуется выбрать минимальное число условий проведения опытов, позволяющих найти область оптимальных значений параметров. Или другими словами, найти приближенную зависимость выходного параметра от факторов.

Математическая задача планирования эксперимента состоит в том, чтобы найти уравнение поверхности отклика:

$$\eta = \eta(x_1, x_2, \dots x_n),$$

где η – выход процесса, т.е. параметр оптимизации; x_i – факторы, которых варьируются при проведении эксперимента.

Таким образом, математическое планирование связано с изучением формы поверхности отклика; следовательно, оптимальному значению выхода соответствуют максимальные или минимальные точки этой поверхности.

Для большинства реальных процессов вид поверхности отклика заранее неизвестен, поэтому при экспериментальном поиске оптимальных условий функцию η представляют в виде степенного ряда

$$\eta = \beta_0 + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j \dots .$$

Точность подобной аппроксимации определяется порядком степенного ряда и диапазоном изменения переменных. Поверхность отклика изучается обычно в сравнительно узком интервале варьирования факторов, поэтому без большой погрешности можно отбросить члены высших порядков.

Задача оптимизации решается в два этапа:

1) сначала осуществляется поиск области оптимума – для чего применяется линейная модель поверхности отклика;

2) Затем для описания почти стационарной (оптимальной) области используется степенной ряд, содержащий члены второго порядка, а иногда и третьего порядка.

Коэффициенты степенного ряда β (коэффициенты регрессии) можно оценить с помощью выборочных коэффициентов регрессии, в которых определяется по результатам конечного числа опытов. Тогда уравнение регрессии, получаемое на основании результатов экспериментов имеет вид

$$y = b_0 + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j \dots ,$$

где y – выборочная оценка функции отклика, b_{ij}, b_i– коэффициенты регрессии.

Таким образом, после вычисления коэффициентов регрессии появляется возможность оценить влияние изучаемых факторов на функцию отклика и определить направление движения к области оптимума.

В качестве выхода процесса рекомендуется выбирать параметр, который имеет ясный физический смысл и количественное выражение.

После выбора параметра необходимо уточнить перечень факторов, которые могут повлиять на выход процесса. При этом все факторы необходимо ранжировать (отражать степень влияния с помощью экспертных оценок, литературы) или также поставленного специально эксперимента.

Для каждого фактора выбирают условный нулевой (исходный) уровень x_{i0}, диапазон и шаг Δx_i варьирования переменных. Диапазон изменения факторов равен разности между верхним и нижним пределами данного фактора. В процессе установления варьирования решается вопрос о масштабе фактора, для выбора которого необходимо обратиться к теоретическим источникам, либо иметь некоторые априорные представления.

2.2. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим двухфакторный эксперимент, для которого уравнение регрессии неполной квадратичной модели имеет вид

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 \qquad \text{(XII.6)}$$

Здесь x_1, x_2 – значения факторов; b_0 – свободный член, равный отклику системы на начальной стадии эксперимента при $x_1 = x_2 = 0$; b_1, b_2 – коэффициенты регрессии, показывающие степень влияния соответствующих факторов на выход процесса; b_{12} – коэффициент, указывающий на наличие эффекта взаимодействия двух факторов (парного взаимодействия). Для унификации программы проведения эксперимента введем специальную скользящую систему координат, начало которой совпадает с нулевым уровнем факторов. Выберем масштабы переменных таким образом, чтобы интервалы варьирования факторов были равны единице. Тогда исходному уровню фактора будет соответствовать 0, а верхний и нижний уровни фактора, полученные сложением и вычитанием нулевого уровня и шага, будут равны +1 и -1.

Условия проведения опытов в кодированном масштабе записываются в виде таблицы (матрицы) планирования эксперимента, зависящей только от числа факторов и уровней каждого фактора. Для двух факторов, на двух уровнях каждый, матрица планирования представлена в табл. XI1.4.

Таблица XII.4. *Матрица планирования эксперимента 2^2*

Номер варианта	Значение вспомогательной переменной	Планирование		Расчет	Выход
	X_0	X_1	X_2	$X_1 X_2$	y
1	+1	−1	−1	+1	y_1

$$4b_0 = (+1)\,y_1 + (+1)\,y_2 + (+1)\,y_3 + (+1)\,y_4,$$

$$4b_1 = (-1)\,y_1 + (+1)\,y_2 + (-1)\,y_3 + (+1)\,y_4,$$

$$4b_2 = (-1)\,y_1 + (-1)\,y_2 + (+1)\,y_3 + (+1)\,y_4,$$

$$4b_3 = (+1)\,y_1 + (-1)\,y_2 + (-1)\,y_3 + (+1)\,y_4.$$

Первая строка соответствует опыту 1, в котором оба фактора находятся на нижнем уровне; вторая - опыту 2, когда первый фактор находится на верхнем уровне, а второй - на нижнем, и т. д. В расчетном столбце приведены значения произведения X_1X_2, которые вводятся в матрицу планирования для последующего вычисления коэффициента регрессии b_{12}; в последнем столбце приведены средние значения результатов измерений; во втором - значения вспомогательной (фиктивной) переменной, вводимой формально для расчета коэффициента b_0. Матрица составлена с учетом в данном эксперименте всех возможных комбинаций значений факторов. Этот план называется полным факторным планом 2^2 и принадлежит к планам типа 2^k, где k - число факторов.

Матрица планирования для трех факторов, варьируемых на двух уровнях, получается из матрицы для двух факторов повторением последней при значении X_3 первый раз на нижнем уровне, второй - на верхнем. Аналогично составляются матрицы для четырех, пяти и более факторов; при этом кроме столбцов планирования обычно вводятся значения произведений $X_1 X_3$, $X_1 X_2 X_3$ и т.д. Матрица планирования, записанная в кодированных обозначениях, всегда имеет один и тот же вид для любой задачи с одинаковым числом факторов.

Следующий шаг - это выбор вида математической модели. Так как на первом этапе планирования ищется направление к оптимуму, то ограничимся построением линейной модели (XII.6). Коэффициенты регрессии рассчитываются по формулам

$$\left.\begin{aligned}
4b_0 &= (+1)\,y_1 + (+1)\,y_2 + (+1)\,y_3 + (+1)\,y_4,\\
4b_1 &= (-1)\,y_1 + (+1)\,y_2 + (-1)\,y_3 + (+1)\,y_4,\\
4b_2 &= (-1)\,y_1 + (-1)\,y_2 + (+1)\,y_3 + (+1)\,y_4,\\
4b_3 &= (+1)\,y_1 + (-1)\,y_2 + (-1)\,y_3 + (+1)\,y_4.
\end{aligned}\right\}$$

2.3. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В разделе 2.2. показан план проведения полного факторного эксперимента, когда основными являются два фактора. Рассмотрим примеры вычисления коэффициентов регрессии для большего числа факторов.

С ростом факторов (k) число опытов (N) полного факторного эксперимента резко возрастает по показательной функции N=2^k, В то же время число коэффициентов линейной модели растет как 1+k, а неполной квадратичной – как 1+(k+k^2)/2. Поэтому, начиная с k=2, наступает избыточность числа экспериментов, что создает объективные предпосылки для уменьшения количества опытов. С этой целью используют только часть матрицы факторного эксперимента, которая называется *дробной репликой* и обеспечивает минимальную разность между числом оцениваемых параметров и числом опытов.

После вычисления коэффициентов регрессии и составления уравнении (XII.6) возникает вопрос об оценке их статистической значимости; для этого необходимо найти их выборочную дисперсию $s^2(b_i)$ или ошибку $s(b_i) = \sqrt{s^2(b_i)}$. Если в эксперименте каждый вариант имел только одну повторность, то дисперсия среднего значения $s^2(y)$ принимается равной дисперсии метода измерений (найденной, например, из предварительного эксперимента) и тогда $s^2(b_i) = s^2(y)/N$. Таким образом, ошибка коэффициента регрессии $s(b_i)$ в $\sqrt{N}$ раз меньше погрешности метода, что является одним из преимуществ многофакторной схемы эксперимента. Коэффициент регрессии считается статистически значимым, если его абсолютная величина больше доверительного интервала:

$$|b_i| > s(b_i)\, t_N, \tag{XII.8}$$

где $s(b_i)$ – ошибка коэффициента регрессии b_i; а t_N - коэффициент Стьюдента (эмпирически найденные табличные данные) для заданной вероятности а и числа измерений N (см. табл. XI.12). Коэффициент регрессии может оказаться незначимым не только тогда, когда соответствующий фактор не влияет на процесс, но и когда условный нулевой уровень по данному фактору расположен в оптимальной области или когда выбран слишком маленький шаг варьирования по данному фактору. Последняя операция первого этапа планирования состоит в проверке гипотезы об адекватности линейной модели, т. е. гипотезы о том, что выход процесса – линейная функция от факторов. Эту проверку можно выполнить путем оценки значимости коэффициентов регрессии при членах высших порядков, для чего необходимо поставить дополнительный эксперимент с несколькими повторностями z на нулевом уровне и определить среднее значение $\bar{y}_0$. Если разность $\bar{y}_0 - b_0$ невелика, то выход процесса действительно может быть описан уравнением без квадратичных членов; если же разность велика, то линейной моделью пользоваться нельзя. Статистическую значимость в данном случае можно оценить по формуле, аналогичной (Xll.8).

Таблица XI.12. *Значения коэффициентов Стьюдента (t-критерий)*

Число наблюдений	Доверительная вероятность				
	0,50	0,90	0,95	0,98	0,99
2	1,00	6,31	12,71	81,82	63,66
3	0,82	2,92	4,30	6,96	9,92
4	0,77	2,35	3,18	4,54	5,84
5	0,74	2,13	2,78	3,75	4,60
6	0,73	2,01	2,57	3,65	4,03
7	0,72	1,94	2,45	3,14	3,71
8	0,71	1,90	2,36	2,97	3,50
9	0,71	1,86	2,31	2,90	3,36
10	0,70	1,84	2,26	2,76	3,25
15	0,69	1,76	2,14	2,60	2,98
20	0,69	1,73	2,09	2,53	2,86
30	0,68	1,70	2,04	2,46	2,76
60	0,68	1,67	2,00	2,39	2,66
120	0,68	1,66	1,98	2,36	2,62
∞	0,67	1,65	1,96	2,33	2,58

чаще всего проверяют с помощью критерия Фишера (эмпирически найденные табличные данные)

$$\frac{\Sigma \Delta y^2}{s^2(y)\, f_1} \leqslant F. \qquad \text{(XII.9)}$$

Здесь Δy – разность между экспериментальными и рассчитанными по уравнению регрессии значениями выхода ***y***; f_1 – число степеней свободы, равное разности между числом опытов в матрице планирования и числом коэффициентов уравнения; *F* – значение критерия Фишера (табл. XII.5), зависящее от уровня достоверности *а,* от значения f_1 и числа степеней свободы f_2, с которой определялась дисперсия (погрешность) опыта $s^2(y)$. Если неравенство (XII.9) выполняется, то выход можно достаточно точно описать линейной моделью, в противном случае линейное приближение неадекватно.

Поиск оптимальной области обычно осуществляется методом крутого восхождения по поверхности отклика в направлении градиента. В линейной модели коэффициенты регрессии b_i пропорциональны составляющим градиента функции отклика в окрестности нулевой точки, поэтому значения коэффициентов при линейных членах дают определенное представление о том, в каких пропорциях следует изменять значения факторов для достижения оптимума. Ставится серия опытов в точках, лежащих на линии регрессии, которые получаются умножением шага варьирования каждого фактора на его коэффициент регрессии. В результате такого продвижения определяется экстремальное значение отклика; затем процедура полного факторного эксперимента циклически повторяется. Крутое восхождение проводить нецелесообразно, если исследуемый процесс не может быть описан линейным :уравнением, что свидетельствует о близости оптимальной (стационарной) области. В этом случае необходимо либо построить модель более высокого порядка, либо провести в данной области несколько многофакторных экспериментов с выбором нулевого уровня при комбинации факторов, обеспечивающей наилучший результат.

Таблица XII.5. *Значения критерия Фишера для уровня достоверности $\alpha = 0{,}95$*

f_2	f_1								
	1	2	3	4	6	8	10	16	∞
1	161	200	216	225	234	239	242	246	254

2.4. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

В качестве контрольных заданий студентам предлагается:

1) Спланировать факторный эксперимент с *N=8* вариантами и *n*=3 откликами системы;

2) Найти значения коэффициентов регрессии вида

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3;$$

3) Определить погрешность найденных коэффициентов регрессии;

4) Рассчитать дисперсию среднего значения отклика $s^2(\overline{y})$;

5) С учетом числа степеней свободы, коэффициента Стьюдента t и достоверности α (доверительной вероятности) найти доверительный интервал по таблице (XI.12) в соответствии с формулой (XI.6);

6) По формуле (XII.8) проверить значимость коэффициентов регрессии;

7) Записать окончательный вид уравнения без учета незначимых коэффициентов.

Пример: Для определения восьми коэффициентов регрессии необходимо было поставить по крайней мере восемь вариантов опытов. Так как погрешность метода измерения была неизвестна, то целесообразно сделать троекратное повторение эксперимента, чтобы оценить, значимость коэффициентов регрессии. Матрица планирования трехфакторного эксперимента и результаты опытов представлены в табл. XII.6.

Таблица XII.6. *Матрица планирования и результаты опытов*

Номер варианта	Планирование				Расчет				Выход				
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	y^{I}	y^{II}	y^{III}	y^{IV}	$\overline{y}_N$
1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	23,4	33,8	36,4	—	31,2
2	+1	+1	−1	−1	−1	−1	+1	+1	72,8	78	83,2	—	78
3	+1	−1	+1	−1	−1	+1	−1	+1	63,7	67,6	79,3	—	70,2
4	+1	+1	+1	−1	+1	−1	−1	−1	127,4	128,7	133,9	—	130
5	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	65	39	42	—	52
6	+1	+1	−1	+1	−1	+1	−1	−1	110,5	104	113,1	—	109,2
7	+1	−1	+1	+1	−1	−1	+1	−1	78	84,5	110,5	—	91
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	156	166,4	161,2	—	161,2
9	+1	0	0	0	—	—	—	—	78	93,6	98,8	72,8	85,8

Коэффициенты регрессии рассчитываем по формулам, аналогичным (XII.7):

$$b_0 = \frac{+31,2 + 78 + 70,2 + 130 + 52 + 109,2 + 91 + 161,2}{8} = \frac{722,8}{8} = 90,35,$$

$$b_1 = \frac{-31,2 + 78 - 70,2 + 130 - 52 + 109,2 - 91 + 161,2}{8} = \frac{234}{8} = 29,25,$$

$$b_2 = \frac{-31,2 - 78 + 70,2 + 130 - 52 - 109,2 + 91 + 161,2}{8} = \frac{182}{8} = 22,75,$$

$$b_3 = \frac{-31,2 - 78 - 70,2 - 130 + 52 + 109,2 + 91 + 161,2}{8} = \frac{104}{8} = 13,$$

$$b_{12} = \frac{+31,2 - 78 - 70,2 + 130 + 52 - 109,2 - 91 + 161,2}{8} = \frac{26}{8} = 3,25,$$

$$b_{13} = \frac{+31,2 - 78 + 70,2 - 130 - 52 + 109,2 - 91 + 161,2}{8} = \frac{20,8}{8} = 2,6,$$

$$b_{23} : b_{12} = \frac{+31,2 - 78 - 70 + 130 + 52 - 109,2 - 91 + 161,2}{8} = \frac{26}{8} = 3,25,$$

$$b_{123} = \frac{-31,2 + 78 + 70,2 - 130 + 52 - 109,2 - 91 + 161,2}{8} = \frac{0}{8} = 0.$$

Для вычисления погрешности коэффициентов регрессии воспользуемся формулой для определения среднеквадратичного отклонения или среднеквадратичной ошибки

$$\sigma \approx S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{XI.5}$$

согласно которой дисперсия для каждой строки определяется так:

$$s^2(y_1) = \frac{(31{,}2-23{,}4)^2+(31{,}2-33{,}8)^2+(31{,}2-36{,}4)^2}{2} = 47{,}3,$$

$$s^2(y_2) = \frac{(78-72{,}8)^2+(78-78)^2+(78-83{,}2)^2}{2} = 27,$$

$$s^2(y_3) = \frac{(70{,}2-63{,}7)^2+(70{,}2-67{,}6)^2+(70{,}2-79{,}3)^2}{2} = 65{,}9,$$

$$s^2(y_4) = \frac{(130-127{,}4)^2+(130-128{,}7)^2+(130-133{,}9)^2}{2} = 11{,}8,$$

$$s^2(y_5) = \frac{(52-65)^2+(52-39)^2+(52-52)^2}{2} = 169,$$

$$s^2(y_6) = \frac{(109{,}2-110{,}5)^2+(109{,}2-104)^2+(109{,}2-113{,}1)^2}{2} = 21{,}9,$$

$$s^2(y_7) = \frac{(91-78)^2+(91-84{,}5)^2+(91-110{,}5)^2}{2} = 29{,}5,$$

$$s^2(y_8) = \frac{(161{,}2-156)^2+(161{,}2-166{,}4)^2+(161{,}2-161{,}2)^2}{2} = 27.$$

После этого определяются дисперсия среднего значения

$$s^2(\bar{y}) = \frac{47{,}3+27+65{,}9+11{,}8+169+21{,}9+27}{8\cdot 3} = 27$$

и дисперсия коэффициентов регрессии

$$s^2(b_i) = \frac{27}{8} = 3{,}4.$$

Следовательно, ошибка коэффициентов регрессии

$$s(b_i) = \sqrt{3{,}4} \approx 1{,}8.$$

коэффициенты регрессии, определяется как:

$$f_1 = N(n-1) = 8(3-1) = 16\,.$$

Так как коэффициент Стьюдента $t_N = t_{N=8}$ для числа наблюдений $f_1 = 16$ (см. табл. XI.12) и достоверности 0,95% равен примерно 2,1, тогда доверительный интервал определяется как:

$$t_N(f_1)s(b_i) = t_8(16)_{при\ \alpha=0,95}\, s(b_i) = 2,1\cdot 1,8 \approx 3,8 \qquad \text{(XI.6)}$$

Значимость коэффициентов регрессии проверяется по формуле (XII.8):

$$b_0 = 90,35 > 3,8, \quad b_{12} = 3,25 < 3,8,$$
$$b_1 = 29,25 > 3,8, \quad b_{13} = 2,6 < 3,8,$$
$$b_2 = 22,75 > 3,8, \quad b_{23} = 0 < 3,8,$$
$$b_3 = 13 > 3,8, \quad b_{123} = 0 < 3,8.$$

Поскольку коэффициенты b_{12}, b_{13}, b_{23} и b_{123} оказались незначимыми для доверительной вероятности 95%, то их можно не учитывать; уравнение регрессии будет иметь вид

$$y = 90,35 + 29,25X_1 + 22,75X_2 + 13X_3.$$

Для оценки возможности использования такой линейной модели был проведен дополнительный эксперимент, в котором четыре раза определялся выход процесса y_0 при значении факторов на нулевом (основном) уровне. Среднее значение выхода

$$\bar{y}_0 = \frac{78 + 93,6 + 98,8 + 72,8}{4} = 85,8.$$

Так как разность $|\bar{y}_0 - b_0| = 85,8 - 90,35 = 4,55$ сравнительно невелика (около 5% b_0), то гипотеза о возможности использования линейной модели справедлива. К аналогичному выводу приводит использование критерия Фишера (XII.9).

КРУТОЕ ВОСХОЖДЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ ОТКЛИКА

Крутое восхождение – это движение в направлении градиента функции отклика. Градиент задается частными производными, а частные производные функции отклика оцениваются коэффициентами регрессии. В крутом восхождении независимые переменные изменяют пропорционально величинам коэффициентов регрессии и с учетом их знаков. Составляющие градиента однозначно получаются умножением коэффициентов регрессии на интервалы варьирования по каждому фактору. Серия опытов в направлении градиента рассчитывается последовательным прибавлением к основному уровню факторов величин, пропорциональных составляющим градиента.

Реализацию мысленных опытов для адекватной модели начинают с опыта, условия которого выходят за область эксперимента хотя бы по одному из факторов. Для неадекватной модели один-два опыта выполняют в области эксперимента. Возможно проведение сразу всех мысленных опытов. Более экономная процедура состоит в проведении двух-трех опытов, оценке результатов и принятии решений о прекращении или дальнейшем проведении экспериментов (последовательный поиск). При движении по градиенту возникают различные ситуации, определяющие принятие дальнейших решений.

Движение по градиенту

На рис. 1. изображены кривые равного выхода поверхности отклика для двух независимых переменных. Они подобны линиям равной высоты на географических картах. Поверхность отклика имеет вид холма с вершиной в точке «0». Если попытаться попасть в окрестность этой точки из точки *A* с помощью одного из вариантов однофакторного эксперимента, то мы сначала должны стабилизировать первый фактор, например x_1, и изменять в направлении *AC* второй фактор до тех пор, пока увеличивается выход. За точкой *C* выход падает, и поэтому в ней стабилизируем x_2, и изменяем x_1, в направлении *CD* по такому же правилу и т. д.

Путь к вершине довольно трудоемкий, особенно при возрастании числа независимых переменных. Наиболее короткий путь *к* вершине – направление градиента функции отклика. На рис. 1 это направление *AB*, перпендикулярное линиям уровня. Градиент непрерывной однозначной функции φ есть вектор

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cdot i + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cdot j + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\cdot k,$$

где $\Delta\varphi$ – обозначение градиента, $\partial\varphi/\partial x_i$ – частная производная функции по *i*-му фактору, i, j, k – единичные векторы в направлении координатных осей.

Следовательно, составляющие градиента есть частные производные функции отклика, оценками которых являются, как уже отмечалось ранее, коэффициенты регрессии.

Изменяя независимые переменные пропорционально величинам коэффициентов регрессии, необходимо двигаться в направлении градиента функции отклика по самому крутому пути. Поэтому процедура движения к почти стационарной области называется ***крутым восхождением***.

Величины составляющих градиента определяются формой поверхности отклика и теми решениями, которые были приняты при выборе параметра оптимизации, нулевой точки и интервалов варьирования. Знак составляющих градиента зависит только от формы поверхности отклика и положения нулевой точки (рис. 2).

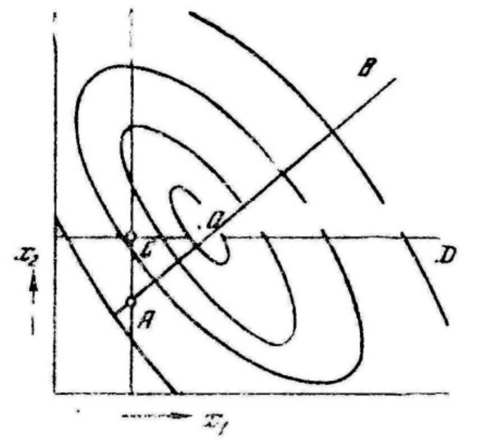

Рис. 1. Движение по поверхности отклика методами однофакторного эксперимента и градиента

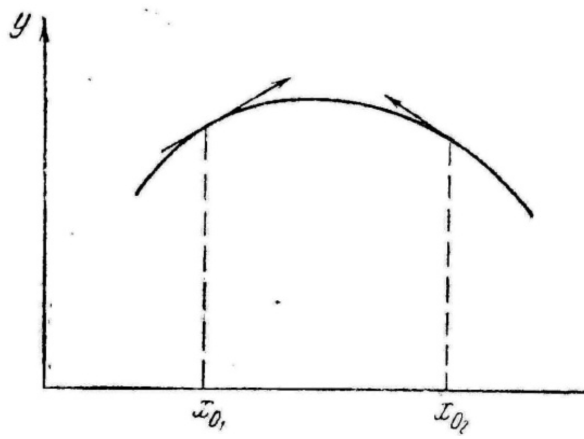

Рис. 2. Зависимость знака градиента от формы поверхности и положения нулевой точки

1 вар	выход			2 вар	выход			3 вар	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	23	35	36	1	21	32	33	1	24	33	39
2	72	76	82	2	71	75	83	2	73	74	85
3	63	65	79	3	65	65	75	3	64	63	82
4	127	106	132	4	125	126	130	4	128	104	135
5	65	38	43	5	66	36	42	5	66	36	46
6	110	102	115	6	108	105	111	6	111	100	118
7	78	83	109	7	77	83	109	7	79	81	112
8	156	165	160	8	156	166	159	8	157	163	163

7 вар	выход			8 вар	выход			9 вар	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	35	23	36	1	32	21	33	1	33	24	38
2	76	72	82	2	75	71	83	2	74	73	84
3	65	63	79	3	65	65	75	3	63	64	81
4	106	127	132	4	126	125	130	4	104	128	134
5	38	65	43	5	36	66	42	5	36	66	45
6	102	110	115	6	105	108	111	6	100	111	117
7	83	78	109	7	83	77	109	7	81	79	111
8	165	156	160	8	166	156	159	8	163	157	162

14 вар-т	выход			15 вар-т	выход			16 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	38	65	43	1	36	66	42	1	36	66	45
2	102	110	115	2	105	108	111	2	100	111	117
3	83	78	109	3	83	77	109	3	81	79	111
4	165	156	160	4	166	156	159	4	163	157	162
5	35	23	36	5	32	21	33	5	33	24	38
6	76	72	82	6	75	71	83	6	74	73	84
7	65	63	79	7	65	65	75	7	63	64	81
8	106	127	132	8	126	125	130	8	104	128	134

17 вар-т	выход			18 вар-т	выход			19 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	65	38	43	1	68	37	32	1	69	38	33
2	110	102	115	2	113	101	104	2	114	102	105
3	78	83	109	3	81	82	98	3	82	83	99
4	156	165	160	4	159	164	149	4	160	165	150
5	23	35	36	5	26	34	35	5	27	35	36
6	72	76	82	6	75	75	71	6	76	76	72
7	63	65	79	7	66	64	68	7	67	65	69
8	127	106	132	8	130	105	121	8	131	106	122

4 вар-т	выход			5 вар-т	выход			6 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	20	34	30	1	21	35	31	1	24	34	30
2	70	77	80	2	71	78	81	2	74	77	70
3	64	67	72	3	65	68	73	3	68	67	62
4	124	128	127	4	125	129	128	4	128	128	117
5	65	38	39	5	66	39	40	5	69	38	29
6	107	107	108	6	108	108	109	6	111	107	98
7	76	85	106	7	77	86	107	7	80	85	96
8	155	168	156	8	156	169	157	8	159	168	146

10 вар-т	выход			11 вар-т	выход			12 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	29	20	31	1	30	24	32	1	19	21	35
2	72	70	81	2	73	74	82	2	62	71	85
3	62	64	73	3	63	68	74	3	52	65	77
4	123	124	128	4	124	128	129	4	113	125	132
5	33	65	40	5	34	69	41	5	23	66	44
6	102	107	109	6	103	111	110	6	92	108	113
7	80	76	107	7	81	80	108	7	70	77	111
8	163	155	157	8	164	159	158	8	153	156	161

a	№ в-та	
0,9	1,5,10,15,	9,13
0,95	2,6,11,16	20
0,98	3,7,12,17	21,8
0,99	4,14,18,19,	22

13 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII
1	35	23	36
2	76	72	82
3	65	63	79
4	106	127	132
5	66	36	42
6	108	105	111
7	77	83	109
8	156	166	159

20 вар-т	выход			21 вар-т	выход			22 вар-т	выход		
N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII	N	yI	yII	yIII
1	67	39	29	1	70	36	36	1	71	37	37
2	112	103	101	2	115	100	108	2	116	101	109
3	80	84	95	3	83	81	102	3	84	82	103
4	158	166	146	4	161	163	153	4	162	164	154
5	25	36	32	5	28	33	39	5	66	36	42
6	74	77	68	6	77	74	75	6	108	105	111
7	65	66	65	7	68	63	72	7	77	83	109
8	129	107	118	8	132	104	125	8	156	166	159