

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования



Пермский национальный исследовательский
политехнический университет

Механико-технологический факультет
Кафедра материалов, технологий и конструирования машин

Методические указания
для выполнения Контрольной работы по курсу
МЕХАНИКА
для студентов специальности ГНГ

Пермь 2015

Общие требования и указания к выполнению практической работы

Контрольная работа по курсу «Механика» представляет собой выполнение индивидуальных заданий. Расчетные схемы и числовые значения каждого задания выбираются **строго в соответствии с номером варианта** студента. Расчетная схема выбирается в соответствии с инициалами студента, числовые значения – по последней цифре номера зачетной книжки.

Расчетная часть задания выполняется на листах формата А4 (можно разлинованными или в клетку) чернилами четко и аккуратно. Графическая часть выполняется на листах миллиметровой бумаги карандашом строго в соответствии с выбранным масштабом с помощью чертежных инструментов. Эпюры внутренних усилий и деформаций должны располагаться строго под чертежом нагружаемого стержня или балки на одном листе, с указанием масштаба. Все этапы работы должны быть снабжены заголовками и необходимыми пояснениями.

Перед выполнением задания необходимо полностью выписать его условие с исходными данными и составить эскиз, на котором указать все необходимые для расчета численные значения.

Все задачи сначала решаются в алгебраической форме с использованием стандартных буквенных обозначений. После получения решения в общем виде подставляются числовые значения (с учетом размерности в системе СИ). Нет необходимости вести расчет с большим количеством значащих цифр, необходимая точность расчета обеспечивается двумя знаками после запятой.

Выполненная работа предьявляется преподавателю для проверки. Работа, выполненная или оформленная с нарушением настоящих указаний, на проверку не принимается. Незачтенная работа должна быть исправлена в соответствии с указаниями преподавателя и сдана повторно.

Тема № 1 Расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня при деформации растяжения и сжатия

Задание Определить оптимальные размеры поперечного сечения круглого ступенчатого стержня по условию прочности при деформации растяжения и сжатия. Определить продольные деформации стержня и проверить его жесткость.

Стержень изготовлен из стали: модуль продольной упругости материала стержня E и предел текучести σ_T определить из Приложения 1. Допускаемое смещение конца стержня $[\Delta l] = 2$ мм. Допускаемый коэффициент запаса статической прочности $[n]$ выбрать самостоятельно (в данной задаче принимаем $[n] = 1, 2 \dots 2, 5$). Весом стержня пренебречь.

Схема стержня приведена на рис. 1.3. Данные для расчета приведены в табл. 1.

Порядок выполнения

1. Вычертить схему стержня со всеми численными данными.
2. Определить внутренние продольные силы N_i на каждом участке. Начертить схему с эпюрой внутренних сил N_i .
3. Определить допускаемые напряжения для материала стержня $[\sigma_p]$.
4. Определить площади поперечных сечений A_i и диаметры участков стержня d_i , исходя из условий прочности. Округлить результат до целых значений в мм (в большую сторону!). Вычертить схему стержня в условном масштабе (длину стержня на схеме оставить без изменения) с указанием диаметров в мм.
5. Определить напряжения σ_i на каждом участке. Начертить схему с эпюрой напряжений σ_i .
6. Определить смещение каждого участка стержня Δl_i и полную деформацию стержня. Начертить схему с эпюрой деформаций Δl_i .
7. Дать заключение о жесткости стержня.

Указания к выполнению

Растяжением (сжатием) называют вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает один внутренний силовой фактор – продольная сила N_i . Определение продольной силы рекомендуется начинать со свободного конца стержня, так как значение реактивной силы в заделке неизвестно (либо предварительно определить значение реакции в заделке). Для определения продольной силы N_i на каждом участке используют метод сечений, руководствуясь правилом: продольная сила в любом сечении стержня равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по

одну сторону от сечения на ось стержня: $N_i = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} F_i$. Продольная сила считается положительной, если она соответствует деформации растяжения и отрицательной, если она соответствует деформации сжатия.

Условие прочности при деформации растяжения (сжатия) стержня имеет вид: $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma_p]$,

где σ_i – напряжение на i -м участке стержня;

N_i – внутренняя продольная сила в стержне;

A_i – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение растяжения (сжатия) для материала стержня.

Допускаемые напряжения для пластичных материалов находятся по формуле $[\sigma_p] = \sigma_T / [n]$,

где $[n]$ – допускаемый коэффициент запаса статической прочности;

σ_T – предел текучести материала стержня.

Соответственно, минимальная необходимая площадь поперечного сечения стержня из условия прочности определяется по формуле: $A_i \geq |N_i| / [\sigma_p]$,

где A_i – минимальная необходимая площадь поперечного сечения i -го участка стержня;

N_i – внутренняя продольная сила на рассматриваемом участке стержня;

$[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение для материала стержня.

Построение эпюры продольных перемещений следует начинать от заделки стержня, где продольные перемещения отсутствуют ($\Delta l_0 = 0$). Перемещение i -го участка стержня определяется как

$$\Delta l_i = \Delta l_{i-1} + \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E},$$

где Δl_{i-1} , Δl_i – перемещения начального и конечного сечения рассматриваемого i -го участка стержня;

N_i – продольная сила на рассматриваемом участке стержня;

A_i – площадь сечения i -го участка стержня;

l_i – длина i -го участка стержня;

E – модуль продольной упругости материала стержня (модуль Юнга).

По формуле условия жесткости ($\Delta l_{max} \leq [\Delta l]$) делают заключение о жесткости стержня.

Пример решения задачи 1

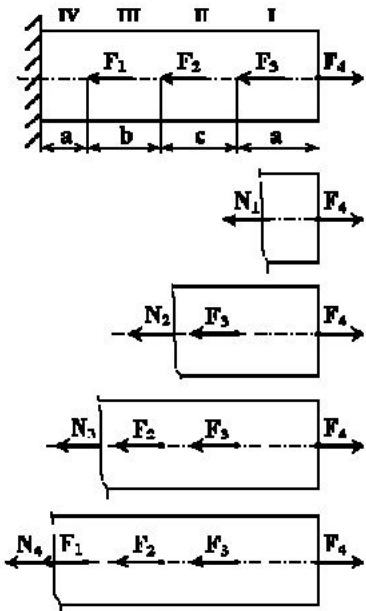


Рис. 1.1

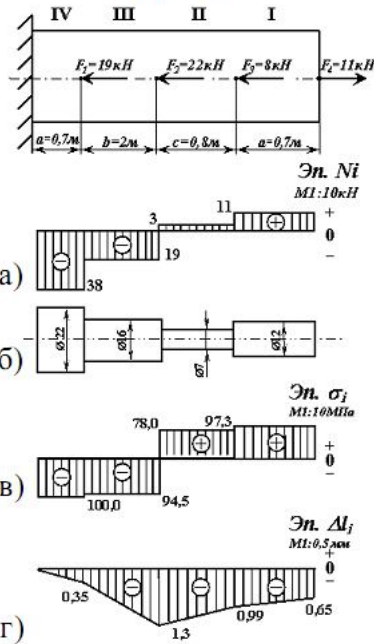


Рис. 1.2

Дано: круглый стержень, нагруженный продольными силами (рис. 1.1)
 $F_1 = 19 \text{ кН}$; $F_2 = 22 \text{ кН}$; $F_3 = 8 \text{ кН}$; $F_4 = 11 \text{ кН}$; $a = 70 \text{ см}$, $b = 200 \text{ см}$,
 $c = 80 \text{ см}$; материал стержня – сталь Ст3: $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Найти: а) поперечные размеры ступеней стержня, исходя из условия их равнопрочности;
 б) напряжения на участках стержня;
 в) продольные деформации стержня, дать заключение о жесткости.

Решение: 1. Разбиваем стержень на участки, начиная со свободного (не закрепленного) конца. Границы участков – точки приложения сосредоточенных сил. Определяем величину внутренней продольной силы N_i в пределах каждого участка с учетом правила знаков.

- I участок: $N_1 = F_4 = 11 \text{ кН}$;
II участок: $N_2 = F_4 - F_3 = 11 - 8 = 3 \text{ кН}$;
III участок: $N_3 = F_4 - F_3 - F_2 = 11 - 8 - 22 = -19 \text{ кН}$.
IV участок: $N_4 = F_4 - F_3 - F_2 - F_1 = 11 - 8 - 22 - 19 = -38 \text{ кН}$.

Строим эпюру продольных сил N_i (рис. 1.2, а).

2. Определяем площади поперечных сечений стержня на каждом участке из условия прочности: $A_i \geq |N_i| / [\sigma_p]$.

Принимаем $[n] = 2$ и определяем допускаемое напряжение для

- материала стержня: $[\sigma_p] = \sigma_T / [n] = 200 / 2 = 100 \text{ МПа}$.
 $A_1 = |N_1| / [\sigma_p] = 11 \cdot 10^3 / 100 \cdot 10^6 = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 110 \text{ мм}^2$;
 $A_2 = |N_2| / [\sigma_p] = 3 \cdot 10^3 / 100 \cdot 10^6 = 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 30 \text{ мм}^2$;
 $A_3 = |N_3| / [\sigma_p] = 19 \cdot 10^3 / 100 \cdot 10^6 = 0,19 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 190 \text{ мм}^2$;
 $A_4 = |N_4| / [\sigma_p] = 38 \cdot 10^3 / 100 \cdot 10^6 = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 380 \text{ мм}^2$.

Определяем диаметры стержня на каждом участке: $d_i = \sqrt{4A_i / \pi}$.

- $d_1 = \sqrt{4A_1 / \pi} = \sqrt{4 \cdot 110 / 3,14} = 11,8 \text{ мм} \approx 12 \text{ мм}$;
 $d_2 = \sqrt{4A_2 / \pi} = \sqrt{4 \cdot 30 / 3,14} = 6,2 \text{ мм} \approx 7 \text{ мм}$;
 $d_3 = \sqrt{4A_3 / \pi} = \sqrt{4 \cdot 190 / 3,14} = 15,6 \text{ мм} \approx 16 \text{ мм}$;
 $d_4 = \sqrt{4A_4 / \pi} = \sqrt{4 \cdot 380 / 3,14} = 22,0 \text{ мм} \approx 22 \text{ мм}$.

Чертим схему стержня (рис. 1.2, б).

3. Определяем величину напряжений σ_i в пределах каждого участка $\sigma_i = N_i / A_i = 4 \cdot N_i / (\pi d_i^2)$:

- I участок: $\sigma_1 = 4N_1 / (\pi d_1^2) = 4 \cdot 11 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot (12 \cdot 10^{-3})^2) = 97,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 97,3 \text{ МПа}$;
II участок: $\sigma_2 = 4N_2 / (\pi d_2^2) = 4 \cdot 3 \cdot 10^3 / (3,14 \cdot (7 \cdot 10^{-3})^2) = 78,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 78,0 \text{ МПа}$;
III участок: $\sigma_3 = 4N_3 / (\pi d_3^2) = 4 \cdot (-19 \cdot 10^3) / (3,14 \cdot (16 \cdot 10^{-3})^2) = -97,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = -94,5 \text{ МПа}$;
IV участок: $\sigma_4 = 4N_4 / (\pi d_4^2) = 4 \cdot (-38 \cdot 10^3) / (3,14 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^2) = -100,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = -100,0 \text{ МПа}$.

Строим эпюру нормальных напряжений σ_i (рис. 1.2, в).

4. Определяем деформации каждого участка стержня Δl_i , начиная от заделки, так как там продольные перемещения отсутствуют ($\Delta l_0 = 0$).

$$\Delta l_4 = \Delta l_0 + \frac{N_4 \cdot l_4}{A_4 \cdot E} = \Delta l_0 + \frac{4 \cdot N_4 \cdot a}{\pi \cdot d_4^2 \cdot E} = 0 + \frac{4 \cdot (-38 \cdot 10^3) \cdot 0,7}{3,14 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -0,35 \cdot 10^{-3} = -0,35 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \Delta l_4 + \frac{N_3 \cdot l_3}{A_3 \cdot E} = \Delta l_4 + \frac{4 \cdot N_3 \cdot b}{\pi \cdot d_3^2 \cdot E} = -0,35 \cdot 10^{-3} + \frac{4 \cdot (-19 \cdot 10^3) \cdot 2,0}{3,14 \cdot (16 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = (-0,35 - 0,95) \cdot 10^{-3} = -1,3 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = \Delta l_3 + \frac{4 \cdot N_2 \cdot c}{\pi \cdot d_2^2 \cdot E} = -1,3 \cdot 10^{-3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{3,14 \cdot (7 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = (-1,3 + 0,31) \cdot 10^{-3} = -0,99 \text{ мм};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E} = \Delta l_2 + \frac{4 \cdot N_1 \cdot a}{\pi \cdot d_1^2 \cdot E} = -0,99 \cdot 10^{-3} + \frac{4 \cdot 11 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{3,14 \cdot (12 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = (-0,99 + 0,34) \cdot 10^{-3} = -0,65 \text{ мм}$$

Строим эпюру деформаций Δl_i (рис. 1.2, г).

Проверяем выполнение условия жесткости ($|\Delta l_i| \leq [\Delta l]$): $|-0,65| < 2 \text{ мм}$.

Условие жесткости выполняется.

Таблица 1

№ варианта	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	F_4 , кН	a , см	b , см	c , см	Сталь
1	75	18	17	8	110	130	40	35
2	64	10	25	9	90	110	20	30
3	86	25	10	26	200	150	30	25
4	67	28	7	16	100	180	10	20
5	50	24	6	10	150	100	50	10
6	75	11	23	24	130	140	65	60
7	63	21	15	22	120	170	60	55
8	79	23	18	18	160	120	45	50
9	87	16	26	14	140	160	35	45
10	51	13	28	12	180	90	80	40

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Б, В, Г, Д, Е	Ж, З, И, К, Л	М, Н, О, П, Р	С, Т, У, Ф, Х, Ц	Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я
А, Б, В, Г					
Д, Е, Ж, З, И					
К, Л, М, Н					
О, П, Р, С					
Т, У, Ф, Х, Ц					
Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я					

Тема № 2 Расчет на прочность при деформации смятия и сдвига

Задание Стержень в задаче 1 закреплен в опоре при помощи подвижной круглой головки (см. рис. 2.3). Из условия прочности на смятие и срез материала стержня определить минимальный диаметр D и толщину b головки стержня.

Размеры стержня и величину нагрузок взять из решения задачи 1. Данные по материалу стержня ($[\tau_c]$, $[\sigma_{см}]$) см. Приложение 1.

Порядок выполнения

1. Из решения задачи 1 выписать значения продольной силы N_i и площади стержня A_i в опоре.
2. Из Приложения 1 выписать значения допускаемых напряжений на срез $[\tau_c]$ и смятие $[\sigma_{см}]$ материала стержня.
3. Из условия прочности на смятие определить величину площади смятия $A_{см}$.
4. Определить минимальный диаметр D головки стержня, округлить результат согласно ГОСТ 6636 – 69 (Приложение 2).
5. Из условия прочности на срез определить величину площади среза $A_{ср}$.
6. Определить минимальную толщину b головки стержня, округлить результат до целых чисел в мм.

Указания к выполнению

Смятие и сдвиг являются разными видами деформации, приводящими к различным видам разрушения конструкций (Рис. 2.1). Однако на практике эти два вида деформации обычно действуют одновременно, так как вызываются одинаковыми нагрузками и, соответственно, расчет на смятие и сдвиг осуществляется совместно.

Смятие – вид контактного разрушения поверхности изделия, вызываемый действием нормальных сжимающих сил в зоне контакта (например, смятие поверхности детали под гайкой и головкой болта при его затяжке). Условие прочности на смятие в общем виде:

$$\sigma_{см} = \frac{F_{см}}{A_{см}} \leq [\sigma]_{см}, \quad \text{где}$$

$\sigma_{см}$ – нормальные напряжения, возникающие в зоне смятия;

$F_{см}$ – сжимающая сила, нормальная к поверхности смятия;

$A_{см}$ – площадь, по которой происходит смятие;

$[\sigma]_{см}$ – допускаемые напряжения на смятие.

Для простоты расчетов предполагают, что напряжения смятия распределены по площади контакта равномерно. Если соприкасаются детали из материалов разной твердости, то расчет на смятие осуществляется для детали из наиболее мягкого материала.

Срез – вид разрушения, вызываемый деформацией сдвига.

Условие прочности на срез в общем виде: $\tau_{ср} = \frac{Q_{ср}}{A_{ср}} \leq [\tau]_{ср}$,

где $\tau_{ср}$ – касательные напряжения, действующие по площади среза;

$Q_{ср}$ – сдвигающая (перерезывающая) сила;

$A_{ср}$ – площадь, по которой происходит срез;

$[\tau]_{ср}$ – допускаемые напряжения на срез.

В тех случаях, когда смятие происходит по цилиндрической поверхности (например, смятие боковой поверхности заклепки), для упрощения расчетов площадь боковой поверхности цилиндра заменяют на «условную площадь смятия» – продольное сечение цилиндра (см. рис. 2.2).

В этом случае площадь смятия будет определяться: $A_{см} = d_l \cdot \delta$,

где d_l – диаметр цилиндра;

δ – толщина самой тонкой из соединяемых деталей

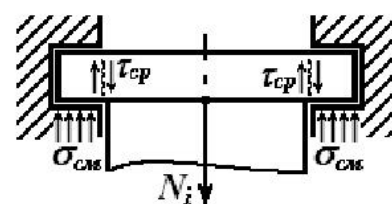


Рис. 2.1

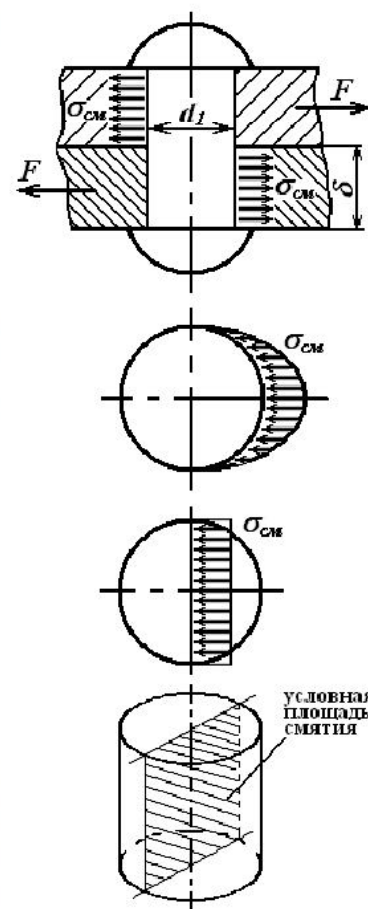


Рис. 2.2

Пример решения задачи 2

Дано: стержень закреплен в опоре при помощи подвижной круглой головки (рис. 2.3).

Согласно решению задачи 1, $N_4 = -38 \text{ кН}$; $d_4 = 22 \text{ мм}$.

Согласно физико-механических свойств материалов (см. Приложение 1) для стали Ст3:

$[\tau_c] = (0,3 \dots 0,4) \cdot \sigma_T = (0,3 \dots 0,4) \cdot 200 = 60 \dots 80 \text{ МПа}$; $[\sigma_{см}] = 0,5 \cdot \sigma_B = 0,5 \cdot 380 = 190 \text{ МПа}$.

Найти: необходимые размеры головки стержня (диаметр D , толщину b).

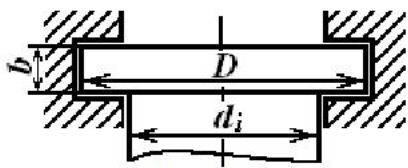


Рис. 2.3

Решение:

1. Определяем минимальный диаметр D головки стержня из условия прочности на смятие.

Минимальная площадь смятия, удовлетворяющая условию прочности,

$$\text{составит: } A_{см} \geq \frac{|F_{см}|}{[\sigma]_{см}} = \frac{|N_4|}{[\sigma]_{см}} = \frac{38 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

$$\text{Площадь стержня вблизи опоры: } A_4 = \frac{\pi \cdot d_4^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 0,38 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$$

Зона смятия представляет собой кольцо с внутренним диаметром d_4 и наружным диаметром D .

$$D \geq \sqrt{\frac{4 \cdot (A_4 + A_{см})}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot (0,38 + 0,2) \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 27,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 27,2 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636 – 69 – $D = 28 \text{ мм}$.

2. Определяем минимальную толщину b головки стержня из условия прочности на срез.

Минимальная площадь среза, удовлетворяющая условию прочности, составит:

$$A_{ср} \geq \frac{|Q_{ср}|}{[\tau]_{ср}} = \frac{|N_3|}{[\tau]_{ср}} = \frac{38 \cdot 10^3}{60 \cdot 10^6} = 0,63 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Зона среза представляет собой цилиндр с внутренним диаметром d_4 и высотой b , то есть

$$A_{ср} = \pi \cdot d_4 \cdot b.$$

$$\text{Таким образом, } b \geq \frac{A_{ср}}{\pi \cdot d_4} = \frac{0,63 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 22 \cdot 10^{-3}} = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,1 \text{ мм} \text{ (округляем до целых чисел в мм)}.$$

Ответ: $D = 28 \text{ мм}$; $b = 10 \text{ мм}$.

Тема № 3 Расчет вала на прочность и жесткость при деформации кручения

Задание К двухступенчатому сплошному валу, один конец которого жестко закреплен в опоре, приложены сосредоточенные вращающие моменты. Определить поперечные размеры вала из условия прочности его ступеней на кручение. Определить напряжения вала по длине. Проверить, удовлетворяет ли полученный вал условию жесткости. Определить углы закручивания вала по длине.

Вал изготовлен из стали: модуль сдвига $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па.

Схема вала приведена на рис. 3.3. Данные для расчета приведены в табл. 3.

Порядок выполнения

1. Вычертить схему с указанием числовых данных.
2. Составить уравнение внутренних крутящих моментов по участкам ($M_{крi}$). Построить эпюру внутренних крутящих моментов по длине вала.
3. Определить диаметры ступеней вала, исходя из условия прочности (d_i). Полученный результат округлить согласно ГОСТ 6636-69 до ближайшего *большого* значения из ряда *предпочтительных чисел R 40* (см. Приложение 2).
4. Определить максимальные касательные напряжения $\tau_{крi}$ вала на каждом участке. Построить эпюру максимальных касательных напряжений по длине вала.
5. Определить относительные углы закручивания вала $\Theta_{крi}$ на каждом участке. Проверить, удовлетворяет ли вал условию жесткости.
6. Скорректировать размеры вала при необходимости, исходя из условия жесткости. Полученный результат округлить согласно ГОСТ 6636-69 до ближайшего *большого* значения.
7. Определить углы закручивания $\Delta\varphi_i$ по длине вала. Построить эпюру углов закручивания вала.

Указания к выполнению

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях вала возникает один внутренний силовой фактор – крутящий момент $M_{кр}$.

Величина внутреннего крутящего момента $M_{кр}$ на участке вала определяется с помощью метода сечений через внешние (вращающие) моменты по правилу: внутренний крутящий момент в любом поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов относительно продольной оси вала, приложенных по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения:

$$M_{кр_i} = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} T_i.$$

Крутящий момент принято считать положительным, если при взгляде со стороны отсеченной части вала он будет направлен против часовой стрелки.

При наличии жесткой заделки одного из концов вала определение величины внутренних крутящих моментов рекомендуется начинать со свободного конца вала, так как в этом случае нет необходимости определять реактивный момент в заделке.

Касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях вала при кручении, достигают своей максимальной величины на его поверхности и находятся по формуле: $\tau_{кр_i} = \frac{M_{кр_i}}{W_{\rho_i}}$, где

$\tau_{кр_i}$ – касательные напряжения на внешней границе i -го сечения вала;

$M_{кр_i}$ – внутренний крутящий момент в i -м сечении вала;

W_{ρ_i} – полярный момент сопротивления сечения i -го участка вала.

Для вала круглого сечения:

$$W_{\rho} = \pi \cdot d^3 / 16 \approx 0,2 \cdot d^3 \quad (\text{см. Приложение 5}).$$

Условие прочности крутящегося вала, соответственно, имеет вид: $\tau_{кр_i}^{max} = \frac{M_{кр_i}^{max}}{W_{\rho_i}} \leq [\tau]_{кр}$, где

$[\tau]_{кр}$ – допускаемые напряжения кручения.

Таким образом, минимальный диаметр вала из условия прочности на каждом участке

определяется по формуле:

$$d_i^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{кр_i}|}{\pi \cdot [\tau]_{кр}}} \approx \sqrt[3]{0,2 \cdot \frac{|M_{кр}|}{[\tau]_{кр}}}.$$

Определение углов закручивания вала следует начинать от заделки, где угол закручивания $\Delta\varphi_0 = 0$.

При определении углов закручивания двухопорного вала одно из его крайних сечений условно считается неподвижным ($\Delta\varphi_0 = 0$), и углы закручивания остальных участков вала рассматриваются относительно этого сечения.

Для участков вала постоянного сечения при не изменяющемся крутящем моменте угол закручивания на i -м участке определяется по формуле:
$$\Delta\varphi_i = \frac{M_{кр_i} \cdot l_i}{G \cdot J_{\rho_i}},$$
 где

$\Delta\varphi_i$ – угол закручивания конечного сечения i -го участка вала относительно его начального сечения;
 l_i – длина участка вала, на котором определяется угол закручивания;

J_{ρ_i} – полярный момент инерции сечения i -го участка вала.

Для вала круглого сечения: $J_{\rho} = \pi \cdot d^4 / 32 \approx 0,1 \cdot d^4$ (см. Приложение 5).

Соответственно, суммарный угол закручивания вала относительно заделки будет равен:

$$\Delta\varphi_{0-i} = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_i.$$

Условие жесткости закручиваемого вала имеет вид: $\Theta_{кр_i} = \frac{M_{кр_i}}{J_{\rho_i} \cdot G} \leq [\Theta]_{кр},$ где

$\Theta_{кр_i}$ – относительный угол закручивания сечения на i -м участке вала;

$[\Theta]_{кр}$ – допускаемый относительный угол закручивания;

G – модуль сдвига материала вала;

Таким образом, минимальный диаметр вала из условия жесткости определяется по формуле:

$$d_i^{жк} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр_i}^{max}}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{кр_i}^{max}}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}}.$$

Для участков вала постоянного сечения при не изменяющемся по длине (сосредоточенном) крутящем моменте между абсолютным ($\Delta\varphi_i$) и относительным ($\Theta_{кр_i}$) углами закручивания существует зависимость: $\Delta\varphi_i = \Theta_{кр_i} \cdot l_i,$ где l_i – длина соответствующего участка вала.

Пример решения задачи 3

Дано: сплошной двухступенчатый вал закручивается под действием сосредоточенных вращающих моментов (рис. 3.1, а):

$$T_1 = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}; T_2 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}; T_3 = 210 \text{ Н}\cdot\text{м}; T_4 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Размеры ступеней вала: } a = 0,2 \text{ м}; b = 0,3 \text{ м}; c = 0,4 \text{ м}.$$

Физико-механические характеристики материала и требования к валу:

$$G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}; [\Theta]_{кр} = 1,0 \text{ град/м}; [\tau]_{кр} = 30 \text{ МПа}.$$

Найти: а) поперечные размеры вала из условия прочности;

б) напряжения на участках вала;

в) проверить выполнение условия жесткости на участках вала;

г) углы закручивания вала по длине.

Решение: 1. Разбиваем вал на участки, начиная со свободного (не закрепленного) конца, и определяем величину крутящего момента M_i в пределах каждого участка с учетом правила знаков (рис. 3.1, б).

$$\text{I участок: } M_1 = T_1 = 60 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{II участок: } M_2 = T_1 - T_2 = 60 - 100 = -40 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{III участок: } M_3 = T_1 - T_2 + T_3 = 60 - 100 + 210 = 170 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\text{IV участок: } M_4 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = 60 - 100 + 210 - 500 = -330 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

Строим эпюру внутренних крутящих моментов M_i (рис. 3.2, а).

2. Определяем диаметры ступеней вала, исходя из условия прочности.

$$d_{1,2}^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{1,2}^{max}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{60}{0,2 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 21,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 21,5 \text{ мм}.$$

$$\text{Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69: } d_{1,2} = 22 \text{ мм}.$$

$$d_{3,4}^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{3,4}^{max}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{330}{0,2 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 38,0 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 38,0 \text{ мм}.$$

$$\text{Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69: } d_{3,4} = 38 \text{ мм}.$$

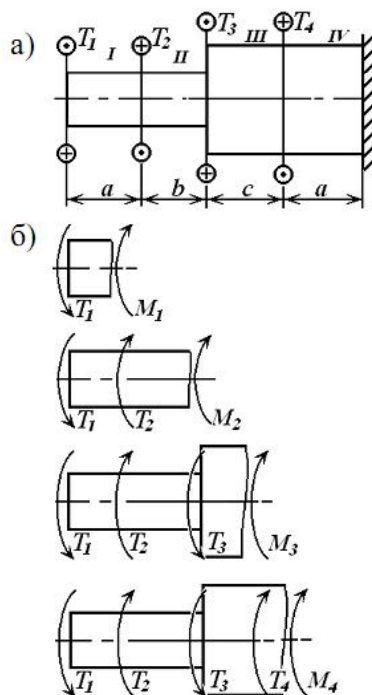


Рис. 3.1

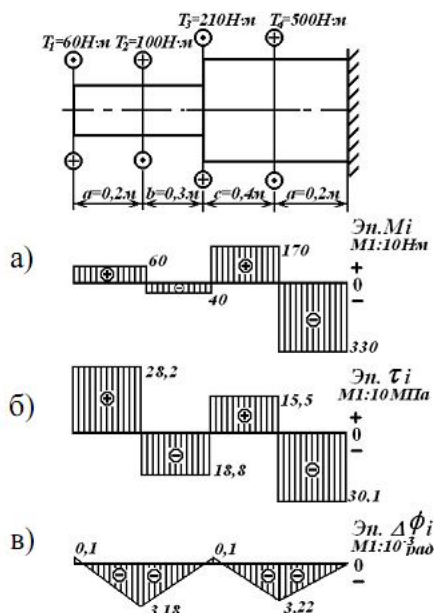


Рис. 3.2

3. Определяем величину максимальных напряжений τ_i по длине вала:

$$\tau_1 = \frac{M_1}{W_{\rho_1}} \approx \frac{M_1}{0,2 \cdot d_{1,2}^3} = \frac{60}{0,2 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^3} = 28,2 \cdot 10^6 = 28,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 \approx \frac{M_2}{0,2 \cdot d_{1,2}^3} = \frac{-40}{0,2 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^3} = -18,8 \cdot 10^6 = -18,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 \approx \frac{M_3}{0,2 \cdot d_{3,4}^3} = \frac{170}{0,2 \cdot (38 \cdot 10^{-3})^3} = 15,5 \cdot 10^6 = 15,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 \approx \frac{M_4}{0,2 \cdot d_{3,4}^3} = \frac{-330}{0,2 \cdot (38 \cdot 10^{-3})^3} = -30,1 \cdot 10^6 = -30,1 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру напряжений τ_i (рис. 3.2, б).

4. Проверяем выполнение условия жесткости на участках вала.

Определяем значение допускаемого относительного угла закручивания $[\Theta]$ в системе СИ:

$$[\Theta]_{кр} = 1,0 \cdot \pi \cdot 180^0 = 1,74 \cdot 10^2 \text{ рад/м}.$$

Определяем максимальные величины относительных углов закручивания Θ_i на участках вала:

$$\Theta_{1,2}^{max} = \frac{|M_{1,2}^{max}|}{G \cdot J_{\rho_1}} = \frac{|M_1|}{0,1 \cdot G \cdot d_{1,2}^4} = \frac{60}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (22 \cdot 10^{-3})^4} = 32,0 \cdot 10^{-3} > [\Theta]_{кр} = 17,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м};$$

$$\Theta_{3,4}^{max} = \frac{|M_{3,4}^{max}|}{G \cdot J_{\rho_4}} = \frac{|M_4|}{0,1 \cdot G \cdot d_{3,4}^4} = \frac{|-330|}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (38 \cdot 10^{-3})^4} = 19,8 \cdot 10^{-3} > [\Theta]_{кр} = 17,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Условие жесткости на участках I, IV не выполняется.

5. Размеры поперечного сечения вала необходимо пересчитать по условию жесткости:

$$d_{1,2}^{жс} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{1,2}^{max}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} = \sqrt[4]{\frac{60}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,74 \cdot 10^{-2}}} = 25,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 25,6 \text{ мм};$$

$$d_{3,4}^{жс} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{3,4}^{max}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} = \sqrt[4]{\frac{330}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,74 \cdot 10^{-2}}} = 39,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 39,2 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69: $d_{1,2} = 26 \text{ мм}$, $d_{3,4} = 40 \text{ мм}$.

6. Определяем углы закручивания $\Delta\varphi_i$ по длине вала, начиная от заделки, так как там деформации отсутствуют ($\Delta\varphi_0 = 0$).

$$\Delta\varphi_{0-4} = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_4 = \Delta\varphi_0 + \frac{M_4 \cdot l_4}{G \cdot J_{\rho_4}} \approx \Delta\varphi_0 + \frac{M_4 \cdot a}{G \cdot 0,1 \cdot d_{3,4}^4} = 0 + \frac{-330 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} = -3,22 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-3} = \Delta\varphi_{0-4} + \Delta\varphi_3 \approx \Delta\varphi_{0-4} + \frac{M_3 \cdot c}{G \cdot 0,1 \cdot d_{3,4}^4} = -3,22 \cdot 10^{-3} + \frac{170 \cdot 0,4}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= -3,22 \cdot 10^{-3} + 3,32 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-2} = \Delta\varphi_{0-3} + \Delta\varphi_2 \approx \Delta\varphi_{0-3} + \frac{M_2 \cdot b}{G \cdot 0,1 \cdot d_{1,2}^4} = 0,1 \cdot 10^{-3} + \frac{-40 \cdot 0,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (26 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= 0,1 \cdot 10^{-3} - 3,28 \cdot 10^{-3} = -3,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-1} = \Delta\varphi_{0-2} + \Delta\varphi_1 \approx \Delta\varphi_{0-2} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot 0,1 \cdot d_{1,2}^4} = -3,18 \cdot 10^{-3} + \frac{60 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (26 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= -3,18 \cdot 10^{-3} + 3,28 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания вала $\Delta\varphi_i$ (рис. 3.2, в).

Таблица 3

№ варианта	<i>a, м</i>	<i>b, м</i>	<i>c, м</i>	<i>T₁, Н*м</i>	<i>T₂, Н*м</i>	<i>T₃, Н*м</i>	<i>T₄, Н*м</i>	<i>[τ]_{кр}, МПа</i>	<i>[θ], град/м</i>
1	1,1	1,0	0,8	20	200	310	600	80	1,3
2	0,9	0,2	1,0	22	190	290	590	75	1,2
3	0,7	0,4	1,2	24	180	300	580	70	1,1
4	1,4	0,6	0,6	28	170	280	570	65	1,0
5	1,2	0,8	0,9	32	160	270	560	60	0,9
6	1,0	1,1	1,4	36	150	260	550	55	0,8
7	0,2	0,9	1,6	38	140	250	540	50	0,7
8	0,4	0,7	1,8	42	130	240	530	45	0,6
9	0,6	1,4	2,0	46	120	230	520	40	0,5
10	0,8	1,2	0,7	50	110	220	510	35	0,4

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Б, В, Г, Д, Е	Ж, З, И, К, Л	М, Н, О, П, Р	С, Т, У, Ф, Х, Ц	Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я
А, Б, В, Г					
Д, Е, Ж, З, И					
К, Л, М, Н					
О, П, Р, С					
Т, У, Ф, Х, Ц					
Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я					

Тема 4. Расчеты на прочность при плоском прямом изгибе

Задание Балка находится под действием системы сил и моментов. Подобрать размеры и тип профиля балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Балка изготовлена из стали: допускаемые напряжения изгиба $[\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}$.

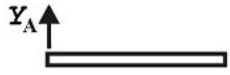

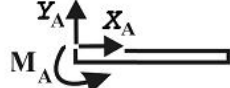
Схема балки приведена на рис. 4.3. Данные для расчета взять из табл. 4.

Порядок выполнения

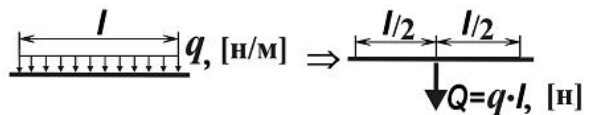
1. Вычертить схему балки с указанием числовых значений размеров и приложенных сил.
2. Определить величину и направление опорных реакций балки.
3. Определить значения внутренней поперечной силы Q по участкам балки. Построить эпюру распределения Q .
4. Определить значения внутреннего изгибающего момента $M_{из}$ по участкам балки. Построить эпюру распределения $M_{из}$.
5. Найти из условия прочности по нормальным напряжениям минимальную величину осевого момента сопротивления сечения балки.
6. Подобрать по величине момента сопротивления номер профиля балки и выписать его основные характеристики (номер, момент сопротивления W_x , момент инерции J_x , площадь A):
 - двутавра (ГОСТ 8239-89) (см. Приложение 3);
 - швеллера (ГОСТ 8240-97) (см. Приложение 4).

Указания к выполнению

Согласно положениям статики всякое несвободное твердое тело (перемещение которого ограничено связями с другими телами) можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие силами реакции этих связей:

Вид связи	Реакции	Название связи	Количество связей
		шарнирно-подвижная опора	1
		шарнирно-неподвижная опора	2
		заделка	3

Распределенную нагрузку q рекомендуется предварительно заменить эквивалентной сосредоточенной силой Q .



Для нахождения величины и направления реакций связей используют условия равновесия системы сил, согласно которым, система сил находится в состоянии равновесия, если алгебраическая сумма проекций всех сил на оси координат равна нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки также равна нулю:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

Уравнения равновесия целесообразно составлять таким образом, чтобы в них входили суммы моментов сил относительно точек, через которые проходят неизвестные реакции связей. В этом случае в каждое уравнение войдет только одна неизвестная величина.

Направление сил реакций связей выбирают произвольно. Если значения сил при решении получатся отрицательными, то истинное направление расчетных сил противоположно предварительно выбранному.

Изгибом называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты $M_{из}$ и поперечная сила Q . Если все внешние нагрузки, включая опорные реакции, лежат в одной из главных плоскостей балки и вызывают искривление оси стержня в этой плоскости, изгиб называется плоским.

Величины внутренней поперечной силы Q и изгибающего момента $M_{из}$ на i -ом участке балки определяются с помощью метода сечений через внешние силы и изгибающие моменты по правилам:

- поперечная сила в любом сечении балки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси балки

$$Q = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} F_i ;$$

- изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести данного сечения

$$M_{из_i} = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} M_i .$$

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов необходимо записать соответствующие аналитические выражения для каждого участка балки. При этом необходимо помнить о правилах знаков для Q и $M_{из}$:

- поперечная сила Q считается положительной, если вызывающая ее внешняя сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по ходу часовой стрелки;
- изгибающий момент $M_{из}$ считается положительным, если балка на рассматриваемом участке изгибается выпуклостью вниз.

При построении эпюр следует использовать дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом: $q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M_{из}}{dx^2}$.

Под действием изгибающего момента $M_{из}$ и поперечной силы Q в поперечных сечениях балки возникают как нормальные $\sigma_{из}$ так и касательные $\tau_{из}$ напряжения. Для длинных тонких стальных балок, ненагруженных вблизи опор, максимальная величина нормальных напряжений в сечениях обычно значительно превышает максимальную величину касательных, поэтому основным расчетом на прочность для таких балок является расчет по нормальным напряжениям. Расчет на прочность по касательным напряжениям является проверочным.

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки из пластичного материала

(сталь) имеет вид: $\sigma_{из_i}^{max} = \frac{|M_{из_i}^{max}|}{W_{xi}} \leq [\sigma]_{из}$, где

$\sigma_{из_i}^{max}$ – максимальные нормальные напряжения в сечении на i -м участке балки;

$[\sigma]_{из}$ – допускаемые напряжения изгиба материала балки;

$M_{из_i}^{max}$ – внутренний изгибающий момент на i -м участке балки;

W_{xi} – осевой момент сопротивления сечения i -го участка балки.

Соответственно, минимальный осевой момент сопротивления сечения балки из условия

прочности по нормальным напряжениям определяется по формуле: $W_x \geq \frac{|M_{из}^{max}|}{[\sigma]_{из}}$.

Пример решения задачи 4

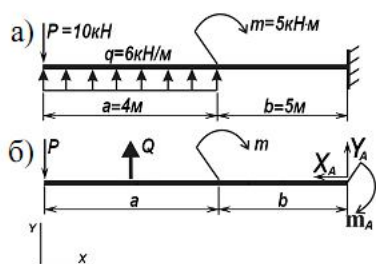


Рис. 4.1

Дано: на защемленную балку (рис. 4.1, а) действуют поперечные силы и изгибающие моменты: $m = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $P = 10 \text{ кН}$; $q = 6 \text{ кН/м}$; $a = 4 \text{ м}$; $b = 5 \text{ м}$. Балка изготовлена из стали: $[\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}$

Найти:

- величину внутренней поперечной силы Q по участкам балки;
- величину внутреннего изгибающего момента $M_{из}$ по участкам балки;
- подобрать размеры профиля балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

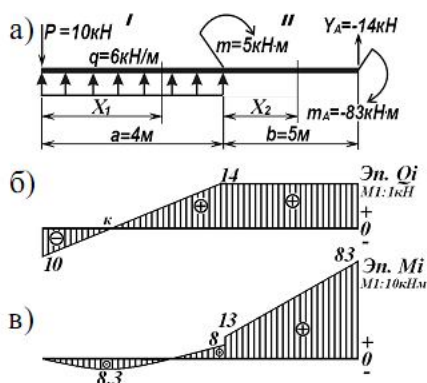


Рис. 4.2

Решение:

1. Определяем величину и направление опорных реакций.

Заменяем связи реакциями связей (рис. 4.1, б).

Приводим распределенную нагрузку к сосредоточенной силе: $Q = q \cdot a = 6 \cdot 4 = 24 \text{ кН}$.

Составляем уравнения равновесия и определяем неизвестные опорные реакции.

$$\begin{cases} \sum X_i = -X_A = 0 \\ \sum Y_i = Q - P + Y_A = 0 \\ \sum M_A = -m - Q \cdot (a/2 + b) + P \cdot (a + b) - m_A = 0 \end{cases}$$

$$X_A = 0 \text{ кН}; \quad Y_A = P - Q = 10 - 24 = -14,0 \text{ кН};$$

$$m_A = -m - Q \cdot (a/2 + b) + P \cdot (a + b) = -5 - 24 \cdot 7 + 10 \cdot 9 = -83,0 \text{ кН·м}$$

Проверка: составляем дополнительное уравнение равновесия моментов относительно точки приложения силы P : $\sum M_P = -m + Q \cdot a/2 + Y_A \cdot (a + b) - m_A = -5 + 24 \cdot 4 - 14 \cdot 9 + 83 = 0$.

$$Y_A = -14,0 \text{ кН}; \quad m_A = -83,0 \text{ кН·м}.$$

2. Определяем величину внутренней поперечной силы Q по участкам балки методом сечений.

Разбиваем балку на участки. Границы участков – точки приложения сосредоточенных сил, моментов, начало и конец распределенной нагрузки.

Рассматриваемая балка имеет 2 участка (рис. 4.2, а). Определяем значение Q на каждом участке.

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$. Составим уравнение проекций всех сил, расположенных слева от сечения на ось y с учетом правила знаков: $Q(x_1) = -P + q \cdot x_1$.

Величина Q линейно зависит от величины координаты x_1 . Очевидно, что эпюра $Q(x_1)$ будет представлять прямую, наклонную к оси x . Для построения эпюры поперечной силы на I-ом участке достаточно определить значения силы Q в начале и в конце участка:

$$\text{при } x_1 = 0 \quad Q(0) = -P + q \cdot 0 = -10,0 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_1 = a \quad Q(a) = -P + q \cdot a = -10 + 6 \cdot 4 = 14,0 \text{ кН}.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq b$. Составим уравнение проекций всех сил, расположенных слева от сечения на ось y : $Q(x_2) = -P + q \cdot a = 14,0 \text{ кН}$.

Величина Q на этом участке не зависит от величины координаты x_2 . Эпюра $Q(x_2)$ будет представлять прямую, параллельную оси x .

Строим эпюру поперечных сил $Q(x)$ (рис. 4.2, б).

На I-ом участке эпюра Q пересекает ось x в некоторой точке K . Определим значение координаты x в этой точке, так как оно понадобится в дальнейшем при нахождении значений изгибающих моментов на этом участке. Из уравнения $Q(x_K) = -P + q \cdot x_K = 0$: $x_K = P / q = 10 / 6 = 1,7 \text{ м}$.

3. Определяем величину внутреннего изгибающего момента $M_{из}$ по участкам балки.

I участок: $0 \leq x_1 \leq a$. Составим уравнение проекций моментов всех сил и пар сил, расположенных слева от сечения на ось z с учетом правила знаков: $M_{из}(x_1) = -P \cdot x_1 + q \cdot x_1 \cdot x_1/2$.

Эпюра $M_{из}(x_1)$ будет представлять собой параболу. Для построения параболы необходимо определить значения $M_{из}(x_1)$ в трех точках:

- в начале участка ($x_1 = 0$),

- в конце участка ($x_1 = a$),

- в середине участка ($x_1 = a/2$), если эпюра $Q(x_1)$ не пересекает ось x на данном участке, или в точке K ($x_1 = x_K$), если эпюра $Q(x_1)$ пересекает ось x на данном участке в точке K .

$$\text{при } x_1 = 0 \quad M_{из}(0) = -P \cdot 0 + q \cdot 0 = 0 \text{ кН·м};$$

$$\text{при } x_1 = a \quad M_{из}(a) = -P \cdot a + q \cdot a^2 / 2 = -10 \cdot 4 + 6 \cdot 4^2 / 2 = 8,0 \text{ кН·м};$$

$$\text{при } x_1 = x_K = 1,7 \quad M_{из}(x_K) = -P \cdot x_K + q \cdot x_K^2 / 2 = -10 \cdot 1,7 + 6 \cdot 1,7^2 / 2 = -8,3 \text{ кН·м}.$$

II участок: $0 \leq x_2 \leq b$. Составим уравнение проекций моментов всех сил и пар сил, расположенных слева от сечения на ось z : $M_{uz}(x_2) = -P \cdot (a + x_2) + q \cdot a \cdot (a/2 + x_2) + m$.

Величина M линейно зависит от величины координаты x_2 . Эпюра $M_{uz}(x_2)$ будет представлять прямую, наклонную к оси x . Для построения эпюры достаточно определить значения $M_{uz}(x_2)$ в начале и в конце участка:

при $x_2 = 0$ $M_{uz}(0) = -P \cdot (a + 0) + q \cdot a \cdot (a/2 + 0) + m = -10 \cdot 4 + 6 \cdot 4^2 / 2 + 5 = 13,0 \text{ кН}\cdot\text{м};$

при $x_2 = b$ $M_{uz}(b) = -P \cdot (a + b) + q \cdot a \cdot (a/2 + b) + m = -10 \cdot 9 + 6 \cdot 4 \cdot (2 + 5) + 5 = 83,0 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Строим эпюру изгибающих моментов $M_{uz}(x)$ (см. рис. 4.2, в).

4. Определяем размеры сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Находим осевой момент сопротивления балки в опасном сечении ($|M_{uz}^{max}| = 83,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$):

$$W_x^{min} = \frac{|M_{uz}^{max}|}{[\sigma]_{uz}} = \frac{83,0 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 691,7 \cdot 10^{-6} = 691,7 \text{ см}^3.$$

В соответствие с *ГОСТ 8239-89* и *ГОСТ 8240-97* подбираем номер профиля балки

Двутавр № 36: $W_x = 743,0 \text{ см}^3; A = 61,9 \text{ см}^2; J_x = 13380,0 \text{ см}^4.$

Швеллер № 40: $W_x = 761,0 \text{ см}^3; A = 61,5 \text{ см}^2; J_x = 15220,0 \text{ см}^4.$

Таблица 4

№ варианта	P , кН	m , кН·м	q , кН/м	a , м	b , м
01	14	9	12	0,5	1,2
02	16	11	14	0,4	0,8
03	18	13	16	0,3	0,9
04	20	15	18	0,9	0,6
05	22	17	20	0,8	0,7
06	11	12	11	0,7	1,1
07	13	14	13	0,6	1,0
08	15	16	15	1,0	0,5
09	17	18	17	1,1	0,4
10	19	20	19	1,2	0,3

1-я буква имени	1-я буква фамилии		
	А, Б, В, Г	Д, Е, Ж, З, И	К, Л, М, Н
А, Б, В, Г, Д, Е			
Ж, З, И, К, Л			
М, Н, О, П, Р			
С, Т, У, Ф, Х, Ц			
Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я			
	О, П, Р, С	Т, У, Ф, Х, Ц	Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я
А, Б, В, Г, Д, Е			
Ж, З, И, К, Л			
М, Н, О, П, Р			
С, Т, У, Ф, Х, Ц			
Ч, Ш, Щ, Э, Ю, Я			

Приложение 1 Физико-механические свойства некоторых материалов

Материал	Временное сопротивление σ_B , МПа	Предел текучести σ_T , МПа	Предел выносливости σ_{-1} , МПа	Допускаемые напряжения на срез $[\tau]_{ср.}$, МПа	Допускаемые напряжения на смятие $[\sigma]_{см.}$, МПа	Модуль упругости $E \cdot 10^{-5}$, МПа	Коэффициент Пуассона μ
Сталь: Ст2	330	195	120...160	(0,3...0,4) σ_T	0,5 $\cdot \sigma_B$	2,0	0,3
Ст3	380	200	120...160				
Ст4	410	235	120...160				
Ст5	490	255	120...160				
10	340	210	120...160				
20	420	240	120...160				
25	460	280	–				
30	500	300	170...210				
35	540	320	170...220				
40	580	340	180...240				
45	610	360	190...250				
50	640	380	200...260				
55	660	390	216				
60	690	410	220...280				
09Г2	440	305	235				
10Г2С1	490	355	230				
10ХНДП	470	345	284				
10ХСНД	530	390	284				
14Г2	460	335	295				
14ХГС	580	420	–				
15ХСНД	490	345	304				
17Г1С	530	320	–				
Чугун: Сч15	150 / 650	–	–	53	120	0,8...1,5	0,23...0,27
Сч35	340 / 1100	–	–	90	180	1,3...1,5	
Латунь Л68	320	90	120			1,1	0,32...0,34
Бронза: БрОЦС5-5-5	200	40...50	–			1,0	0,33
БрАЖ9-4	550	200	–			1,0...1,1	

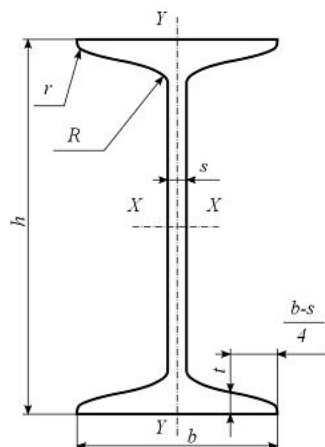
Примечание. После косой черты для хрупких материалов указан предел прочности при сжатии

Приложение 2 Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636 – 69 (фрагмент*)

Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40
1,0	1,00	4,0	4,00	16,0	16,0	63	63	250	250
	1,05		4,20		17,0		67		260
1,1	1,10	4,5	4,50	18,0	18,0	71	71	280	280
	1,15		4,80		19,0		75		300
1,2	1,20	5,0	5,00	20,0	20,0	80	80	320	320
	1,30		5,30		21,0		85		340
1,4	1,40	5,6	5,6	22,0	22,0	90	90	360	360
	1,50		6,0		24,0		95		380
1,6	1,60	6,3	6,3	25,0	25,0	100	100	400	400
	1,70		6,7		26,0		105		420
1,8	1,80	7,1	7,1	28,0	28,0	110	110	450	450
	1,90		7,5		30,0		120		580
2,0	2,00	8,0	8,0	32	32	125	125	500	500
	2,10		8,5		34		130		530
2,2	2,20	9,0	9,0	36	36	140	140	560	560
	2,40		9,5		38		150		600
2,5	2,50	10,0	10,0	40	40	160	160	630	630
	2,60		10,5		42		170		670
2,8	2,80	11,0	11,0	45	45	180	180	710	710
	3,00		11,5		48		190		750
3,2	3,20	12,0	12,0	50	50	200	200	800	800
	3,40		13,0		53		210		850
3,6	3,60	14,0	14,0	56	56	220	220	900	900
	3,80		15,0		60		240		950

Примечание. Из установленных стандартом рядов (Ra5, Ra10, Ra20, Ra40) приведены ряды Ra20, Ra40 с более мелкой градацией

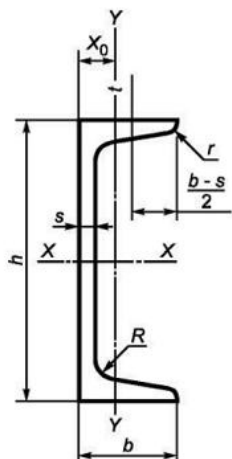
Приложение 3. Двутавры стальные горячекатаные. ГОСТ 8239-89 (фрагмент)



- h - высота двутавра;
- b - ширина полки;
- s - толщина стенки;
- t - средняя толщина полки;
- R - радиус внутреннего закругления;
- r - радиус закругления полки
- I - момент инерции;
- W - момент сопротивления;
- S - статический момент полусечения;
- i - радиус инерции.

Номер двутавра	Размеры, мм						Площадь поперечного сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	h	b	s	t	R	r			X - X				Y - Y		
					не более				I_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x , см ³	I_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Приложение 4 Швеллеры стальные горячекатаные. ГОСТ 8240-97 (фрагмент)

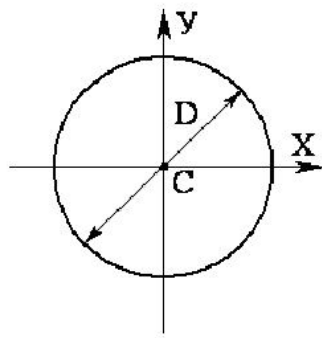


- h - высота (швеллера);
- b - ширина полки;
- s - толщина стенки;
- t - толщина полки;
- R - радиус внутреннего закругления;
- r - радиус закругления полки;
- X_0 - расстояние от оси $Y - Y$ до наружной грани стенки;
- F - площадь поперечного сечения;
- I - момент инерции;
- W - момент сопротивления;
- i - радиус инерции;
- S_x - статический момент полусечения.

Номер швеллера	h	b	s	t	R	r	Площадь поперечного сечения $F, \text{см}^2$	Масса l м, кг	Справочные значения для осей							$X_0, \text{см}$
									X-X				Y-Y			
									$I_x, \text{см}^4$	$W_{x3}, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_{y3}, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

Приложение 5 Геометрические характеристики некоторых плоских фигур

C – центр тяжести сечения;
 A – площадь;
 J_x, J_y – осевые моменты инерции;
 J_p – полярный момент инерции;
 W_x, W_y – осевые моменты сопротивления;
 W_p – полярный момент сопротивления;
 i_x, i_y – радиусы инерции



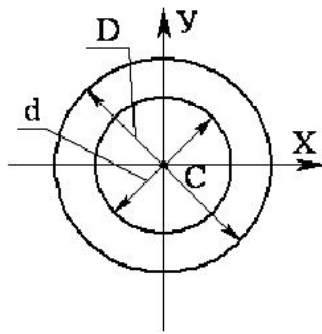
Круг

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \approx 0,8D^2;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4; \quad I_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4;$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3; \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3;$$

$$i_x = i_y = i = 0,25D$$



Кольцо

$$\alpha = d / D$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) \approx 0,8D^2(1 - \alpha^2);$$

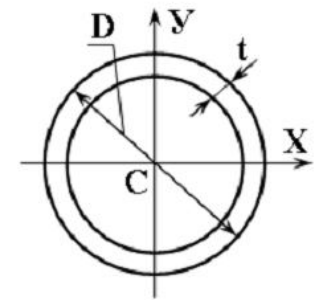
$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4);$$

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4(1 - \alpha^4);$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4);$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4)$$

$$i_x = i_y = i = 0,25\sqrt{D^2 - d^2}$$

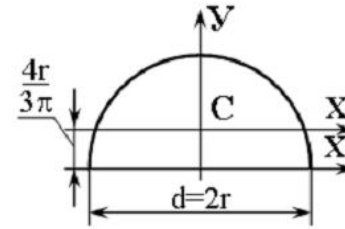


Тонкое кольцо (труба) $D \gg t$

$$D_0 = D - t \quad A = \pi D_0 t;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D_0^3 t}{8} \approx 0,39D_0^3 t; \quad I_p = \frac{\pi D_0^3 t}{4} \approx 0,79D_0^3 t$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D_0^2 t}{4} \approx 0,79D_0^2 t; \quad W_p = \frac{\pi D_0^2 t}{2} \approx 1,57D_0^2 t$$



Полукруг

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{8} \approx 0,4d^2;$$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{128} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \approx 0,11r^4;$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,39r^4$$

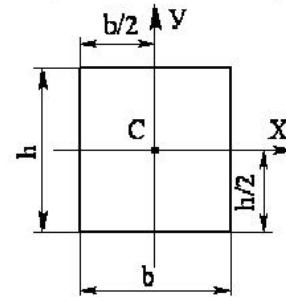
для нижних волокон

$$W_{x_H} \approx 0,259r^3;$$

для верхних волокон

$$W_{x_B} \approx 0,191r^3;$$

$$W_y = \frac{\pi D^3}{64} \approx 0,05d^3$$



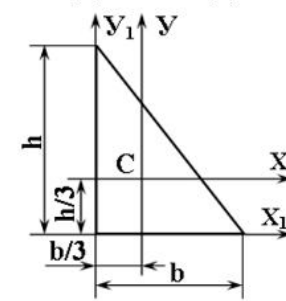
Прямоугольник

$$A = b \cdot h;$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3h}{12};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6};$$

$$i_x = 0,29h; \quad i_y = 0,29b$$



Прямоугольный треугольник

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad I_x = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{b^3h}{36};$$

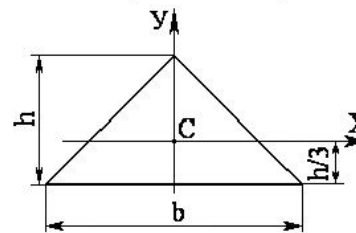
$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{y_1} = \frac{b^3h}{12};$$

для нижних волокон

$$W_{x_H} = \frac{bh^2}{12};$$

для верхних волокон

$$W_{x_B} = \frac{bh^2}{24}$$



Прямоугольный треугольник

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad I_x = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{48};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{24}; \quad i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} \approx 0,24h$$

ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕРИАЛОВ, ТЕХНОЛОГИЙ И КОНСТРУИРОВАНИЯ МАШИН

Контрольная работа по механике

Выполнил: студент гр. ГНГз-13-1

Иванов И. И.

Вариант: 05

Проверил: преподаватель

Петров П. П.

Пермь 2015