



Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет

Механико-технологический факультет  
Кафедра материалов, технологий и конструирования машин

**Методические указания  
для выполнения курсовой работы по курсу  
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Пермь 2016**

## **Общие требования и указания к выполнению практической работы**

Курсовая работа по курсу «Сопротивление материалов» представляет собой выполнение индивидуальных заданий. Расчетные схемы и числовые значения каждого задания выбираются в соответствии с номером зачетной книжки и инициалами студента.

### **Выбор номера задания:**

- расчетная схема выбираются в соответствии с инициалами (фамилия, имя) студента;
- числовые значения выбираются в соответствии с последней цифрой номера зачетной книжки.

Расчетная часть задания выполняется на листах писчей бумаги (можно на листах в клетку) формата А4 (297x210 мм) чернилами четко и аккуратно с соблюдением размера полей: левое – не менее 20 мм, правое – не менее 10 мм, верхнее и нижнее - не менее 15 мм. Графическая часть выполняется на листах миллиметровой бумаги карандашом строго в соответствии с выбранным масштабом с помощью чертежных инструментов. *Эпюры внутренних усилий должны располагаться под чертежом нагружаемого стержня или балки на одном листе, с указанием масштаба.* Все этапы работы должны быть снабжены заголовками и необходимыми пояснениями. *Выполнение каждого задания необходимо начинать с новой страницы.*

Перед выполнением задания необходимо выписать его условие с исходными данными и составить эскиз, на котором указать все необходимые для расчета численные значения.

Все задачи сначала решаются в алгебраической форме с использованием стандартных буквенных обозначений. После получения решения в общем виде подставляются числовые значения (с учетом размерности в системе СИ). Нет необходимости вести расчет с большим количеством значащих цифр, необходимая точность расчета обеспечивается двумя знаками после запятой.

***Работа должна быть снабжена титульным листом (см. Приложение 14) и сброшюрована!***

Выполненная работа предьявляется преподавателю в рукописном виде для проверки (***Работы, выполненные в печатном виде, на проверку не принимаются!***).

Работа, выполненная или оформленная с нарушением настоящих указаний, на проверку не принимается. Незачтенная работа должна быть исправлена в соответствии с указаниями преподавателя и сдана повторно. Исправления можно выполнить на отдельных стандартных листах, и вшить их в работу после задачи, к которой относятся выполненные исправления.

Работы, выполненные без замечаний или полностью исправленные, предьявляются преподавателю для защиты.

## Указания к изучению дисциплины

### Содержание теоретической части курса (вопросы к экзамену)

#### Тема 1 Основы статики

- 1.1 Система сил, действующих на тело. Активные силы и реакции связей. Сосредоточенные силы. Распределенные нагрузки. Момент силы. Момент пары сил.
- 1.2 Виды связей. Опоры и опорные реакции балок: шарнирно-подвижная опора, шарнирно-неподвижная опора, жесткая заделка, свободно опертая балка.
- 1.3 Главный момент системы сил? Главный вектор системы сил? Условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил. Условия равновесия пространственной системы сил. Использование условий равновесия системы сил для определения реакций связей?
- 1.4 Геометрические характеристики плоских сечений. Статические моменты площади поперечного сечения стержня. Применение. Определение координат центра тяжести сечения. Моменты инерции плоских сечений: осевые, центробежные, полярные. Применение. Моменты сопротивления плоской фигуры: осевые, полярные. Применение. Формулы моментов инерции и моментов сопротивления простых фигур (прямоугольник, квадрат, круг).

#### Тема 2 Общие принципы конструирования и расчета элементов конструкций

- 2.1 Модели прочностной надежности элементов конструкций: модели конструкционного материала; модели геометрической формы; модели нагружения; модель предельного состояния разрушения. Для чего используются? Дать определение характеристик материала: упругость, пластичность, ползучесть, хрупкость, твердость.
- 2.2 Критерии работоспособности деталей машин: прочность, жесткость, устойчивость, вибростойкость, износостойкость и др. По каким критериям ведется расчет? Запишите в общем виде условия прочности, жесткости, устойчивости, износостойкости.
- 2.3 Внутренние силы. Определение внутренних сил. Метод сечений (применение метода при различных видах деформаций). Характеристика внутренних сил при различных видах деформаций. Виды разрушения деталей при различных видах деформации.
- 2.4 Напряжение как основная характеристика внутренних сил. Напряжения в точке сечения. Средние напряжения по сечению. Гипотеза плоских сечений. Общие принципы расчета элементов конструкций по напряжениям: нормальные и касательные напряжения, расчетные напряжения, допускаемые напряжения.
- 2.5 Механические характеристики материалов. Описать диаграмму растяжения низкоуглеродистой стали при статическом нагружении. Что такое предел пропорциональности, предел текучести, предел прочности? Сравнить с диаграммой растяжения хрупких материалов. Рассмотреть механические свойства пластических и хрупких материалов при сжатии. Сформулировать условия прочности на растяжение и сжатие для пластических и хрупких материалов. Коэффициент запаса прочности, факторы, влияющие на выбор коэффициента запаса прочности.
- 2.6 Деформации. Продольная и поперечная деформации при растяжении (сжатии). Закон Гука. Модуль продольной упругости. Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Деформации при сдвиге и кручении. Закон Гука для сдвига. Модуль сдвига, его связь с модулем Юнга. Деформации при сдвиге. Условие жесткости при различных видах деформации.

#### Тема 3 Основы расчета типовых элементов конструкций

- 3.1 Расчеты на прочность при растяжении и сжатии. Внутренние силы и построение их эпюр. Определение напряжений в поперечных сечениях бруса. Определение опасного участка (сечения). Условие прочности при растяжении (сжатии) и задачи, решаемые с его помощью. Выбор оптимального сечения бруса из условия прочности.
- 3.2 Расчеты на жесткость при растяжении и сжатии. Определение осевых перемещений поперечных сечений бруса. Определение опасного участка (сечения). Условие жесткости при растяжении (сжатии) и задачи, решаемые с его помощью. Выбор оптимального сечения бруса из условия жесткости.

- 3.3 Расчеты на прочность при сдвиге. Внутренние силы и напряжения, возникающие в сечении детали при сдвиге. Условие прочности при сдвиге. Определение допускаемых напряжений при сдвиге. Закон Гука для сдвига. Какие детали считаются на сдвиг?
- 3.4 Расчеты на прочность при кручении. Внутренние силы и построение их эпюр. Определение напряжений в поперечных сечениях вала. Определение опасного участка (сечения). Условие прочности при кручении и задачи, решаемые с его помощью. Выбор оптимального сечения вала из условия прочности.
- 3.5 Расчеты на жесткость при кручении. Определение угловых перемещений и деформаций вала при кручении. Определение опасного участка (сечения) вала. Связь между напряжениями и деформациями. Условие жесткости при кручении и задачи, решаемые с его помощью. Выбор оптимального сечения вала из условия жесткости.
- 3.6 Изгиб. Классификация видов изгиба, чистый и поперечный изгиб. Внутренние силовые факторы при прямом изгибе – поперечная сила и изгибающий момент. Принципы построения их эпюр. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой, интенсивностью распределенной нагрузки.
- 3.7 Расчеты на прочность по нормальным напряжениям при плоском поперечном изгибе. В каких случаях применяется? Нахождение нормальных напряжений в произвольной точке сечения балки. Распределение нормальных напряжений по сечению балки при изгибе. Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе. Определение допускаемых нормальных напряжений. Выбор оптимального сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Рациональные формы сечений балок, изготовленных из материалов, одинаково и различно сопротивляющихся растяжению и сжатию.
- 3.8 Расчеты на прочность по касательным напряжениям. В каких случаях применяется? Распределение касательных напряжений по сечению балки при изгибе. Условие прочности по касательным напряжениям. Линейные и угловые перемещения при прямом изгибе. Понятие о расчете балок на жесткость при изгибе.
- 3.9 Сложное напряженное состояние. Внутренние силовые факторы и напряжения в поперечном сечении детали при сложном напряженном состоянии. Особенности расчета. Физический смысл эквивалентного напряжения. Гипотезы прочности. Формулы для нахождения эквивалентного напряжения при гипотезе наибольших касательных напряжений и энергетической гипотезе прочности.
- 3.10 Прочность при переменных нагрузках. Циклы переменных напряжений и усталость материала. Кривая усталости. Предел выносливости. Влияние конструктивных и технологических факторов на сопротивление усталости элементов конструкции. Условия прочности при переменных напряжениях, запас усталостной прочности.
- 3.11 Поверхностная прочность. Точечный и линейный контакт двух поверхностей. Распределение напряжений по поверхности контакта. Понятие контактных напряжений. Формула Герца. Вид разрушения в зоне контакта двух тел. Условие контактной прочности. Факторы, влияющие на интенсивность контактного разрушения.
- 3.12 Устойчивость сжатых стержней. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах упругого равновесия. Критическая сила. Условие устойчивости. Формула Эйлера. Критическое напряжение. Гибкость. Предел применения формулы Эйлера, предельная гибкость. Эмпирические формулы для критических напряжений. Расчеты сжатых стержней по формуле Эйлера и по эмпирическим формулам.

#### **Литература:**

1. Сопротивление материалов: конспект лекций: учеб. пособие / А.П. Жученков, М.Л. Зинштейн, А.М. Ханов. - Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2014.— 216 с.
2. Каримов И. Сопротивление материалов: электронный учебный курс для студентов очной и заочной формы обучения. - <http://www.soprotmat.ru/index.html>.

## **Задача № 1 Расчет на прочность и жесткость статически определимой стержневой системы при деформации растяжения и сжатия**

**Задание.** Определить из условия прочности по допускаемым напряжениям размеры и подобрать стандартный профиль для изготовления статически определимой сварной стержневой конструкции. Определить, удовлетворяет ли конструкция условию жесткости.

Предел текучести  $\sigma_T$  и модуль продольной упругости материала конструкции  $E$  принять в соответствие с таблицей физико-механических свойств материалов (см. Приложение 1). Допускаемый коэффициент запаса статической прочности  $[n]$  выбрать самостоятельно (в данной задаче принимаем  $[n] = 1, 2 \dots 2, 5$ ). Смещение узла  $B$  не должно превышать 2 мм. Весом стержней пренебречь.

Схема стержневой системы приведена на рис. 1.5. Данные для расчета приведены в табл. 1.1. Размеры стандартных профилей приведены в Приложении:

- труба стальная сварная прямошовная (ГОСТ 10704-91) см. Приложение 3;
- труба стальная квадратная (ГОСТ 8639-82) см. Приложение 4;
- уголок стальной равнополочный (ГОСТ 8509-93) см. Приложение 5.

### **Порядок выполнения**

1. Вычертить схему стержневой системы в масштабе с указанием числовых значений размеров и приложенных сил.
2. Выбрать узел, равновесие которого должно быть рассмотрено. Узел освободить от связей, заменив их реакциями в стержнях. Изобразить заданные силы и реакции на схеме.
3. Выбрать систему координат, составить уравнения равновесия и определить усилия в стержнях. По известным направлениям усилий в стержнях определить вид деформации каждого стержня (растяжение или сжатие).
4. Определив допускаемое напряжение для материала стержней  $[\sigma_p]$ , подобрать из условия прочности по площади поперечного сечения размеры стандартного профиля для каждого стержня. Выписать данные выбранных профилей.
5. Найти изменение длины каждого стержня.
6. В увеличенном масштабе построить план перемещений узловой точки  $B$  и определить величину перемещения узла  $B$ .
7. Сравнить величину смещения узла  $B$  с допускаемым. Сделать вывод.

### **Указания к выполнению**

Растяжением (сжатием) называют вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня возникает один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ . Вид деформации определяется по направлению продольной силы (реакции связи). Стержень растягивается, если продольная сила направлена в сторону связи (препятствует растяжению), и, соответственно сжимается, если продольная сила направлена от связи к свободному концу.

Для определения величины и направления реакций связей системы сил, сходящихся в одной точке достаточно двух условий равновесия: 
$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}.$$

Систему координат желательно выбирать так, чтобы возможно большее число неизвестных сил было перпендикулярно одной из координатных осей, тогда уравнения равновесия будут более простыми. Направление сил реакций связей выбирается произвольно. Если направление было выбрано неверно, при расчете величина соответствующей реакции получится отрицательной.

Условие прочности при деформации растяжения (сжатия) стержня имеет вид:  $\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma_p]$ ,

где  $\sigma_i$  – нормальные напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня;

$A_i$  – площадь поперечного сечения стержня;

$N_i$  – внутренняя продольная сила в стержне;

$[\sigma_p]$  – допускаемое напряжение растяжения (сжатия) для материала стержня.

Допускаемые напряжения для пластичных материалов находятся по формуле  $[\sigma_p] = \sigma_T / [n]$ ,

где  $[n]$  – допускаемый коэффициент запаса статической прочности;

$\sigma_T$  – предел текучести материала стержня (является справочной величиной).

Соответственно, минимальная необходимая площадь поперечного сечения стержня из условия прочности определяется по формуле:  $A_i \geq |N_i| / [\sigma_p]$ .

Исходя из величины необходимой площади, необходимо подобрать номер (размеры) стандартного профиля для каждого стержня, согласно ГОСТ.

Вид деформации стержня определяется по направлению продольной силы (реакции опоры). Стержень растягивается, если продольная сила направлена в сторону связи, и, соответственно сжимается, если продольная сила направлена от связи к свободному концу.

Перемещение сечения  $B$  относительно связи для  $i$ -го стержня, имеющего постоянное поперечное сечение, при условии, что продольная сила постоянна по длине стержня, определяется как  $\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E}$ , где

$l_i$  – начальная длина рассматриваемого стержня;

$N_i$  – продольная сила, действующая на стержень;

$A_i$  – площадь поперечного сечения соответствующего стержня, согласно ГОСТ;

$E$  – модуль продольной упругости материала стержня (модуль Юнга).

После определения величины деформации каждого стержня, строится план перемещения узловой точки  $B$  (в увеличенном масштабе). Для нахождения положения узла  $B$  после деформации (с учетом малости деформаций) на продолжении стержней откладывают отрезки, равные удлинению или укорочению соответствующих стержней. Из полученных точек проводят перпендикуляры. Пересечение перпендикуляров будет соответствовать новому положению точки  $B'$ .

Определив величину смещения узловой точки (длину отрезка  $BB'$ ), необходимо сделать вывод, соответствует ли это смещение допусжаемому:  $\Delta l_{BB'} \leq [\Delta l]$ .

Если определение величины смещения геометрическим методом вызывает затруднения, можно ограничиться графическим методом.

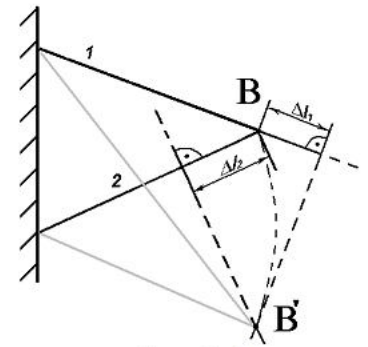
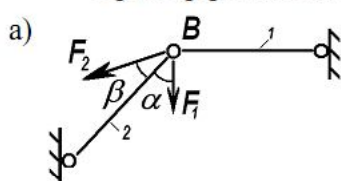


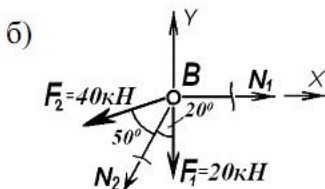
Рис. 1.1

### Пример решения задачи



**Дано:** стержневая система (рис. 1.2, а) сварена из уголка ГОСТ 8509-93; материал уголка – сталь Ст.3:  $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$  (Приложение 1).  $F_1 = 20 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 40 \text{ кН}$ ;  $l_1 = 1,2 \text{ м}$ ;  $l_2 = 1,8 \text{ м}$ ;  $\alpha = 20^\circ$ ;  $\beta = 50^\circ$ .

**Найти:** а) размеры сечений стержней из условия прочности;  
б) подобрать стандартный уголок для изготовления конструкции;  
в) определить перемещение узла  $B$  стержневой системы;  
б) проверить работоспособность конструкции по условию жесткости.



**Решение:** 1. Определяем внутренние усилия в стержнях.

Отбрасываем связи, заменяя их внутренними усилиями в стержнях  $N_1$  и  $N_2$ . (направление внутренних сил выбираем произвольно). Получаем плоскую сходящуюся систему сил (рис. 1.2, б). Выбираем систему координат с началом в узле  $B$ . Составляем уравнения равновесия

$$\text{полученной системы сил: } \begin{cases} \sum X = N_1 - F_2 \sin(\alpha + \beta) - N_2 \sin \alpha = 0 \\ \sum Y = -F_1 - F_2 \cos(\alpha + \beta) - N_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Решаем полученные уравнения равновесия:

$$N_2 = \frac{-F_1 - F_2 \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{-20 - 40 \cdot \cos 70^\circ}{\cos 20^\circ} = -35,8 \text{ кН};$$

$$N_1 = F_2 \sin(\alpha + \beta) + N_2 \sin \alpha = 40 \cdot \sin 70^\circ - 35,08 \cdot \sin 20^\circ = 25,59 \text{ кН}.$$

Стержень 1 растягивается, так как внутреннее усилие направлено в сторону опоры (препятствует растяжению). Стержень 2, соответственно, сжимается.

2. Определяем требуемые площади поперечных сечений стержней из условия прочности на растяжение (сжатие):  $A_i \geq |N_i| / [\sigma_p]$ .

Принимаем  $[n] = 1,5$ , тогда величина допусаемого напряжения  $[\sigma_p] = \sigma_T / [n] = 200 / 1,5 = 133,3 \text{ МПа}$ .

Соответственно,  $A_1 \geq |N_1| / [\sigma_p] = 25,59 \cdot 10^3 / 133,3 \cdot 10^6 = 1,92 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,92 \text{ см}^2$ ;

$$A_2 \geq |N_2| / [\sigma_p] = 35,8 \cdot 10^3 / 133,3 \cdot 10^6 = 2,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,69 \text{ см}^2.$$

В соответствие с ГОСТ 8509-93 выбираем уголок стальной равнополочный

для стержня 1: № 3,5  $A_1 = 2,04 \text{ см}^2$ ;

для стержня 2: № 5  $A_2 = 2,96 \text{ см}^2$ .

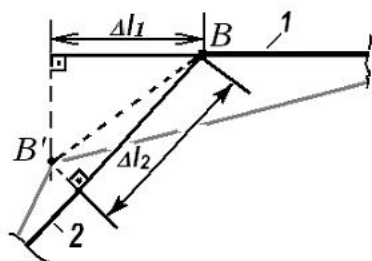


Рис. 1.3

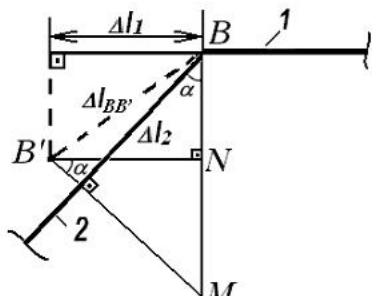


Рис. 1.4

3. Определяем перемещение узла  $B$  стержневой системы. Стержень 1 растягивается на величину

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E} = \frac{25,59 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2,04 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,64 \cdot 10^{-3} = 0,64 \text{ мм.}$$

Стержень 2 сжимается на величину

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = \frac{35,8 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{2,96 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 1,09 \cdot 10^{-3} = 1,09 \text{ мм.}$$

Строим план перемещения узловых точки  $B$  (рис. 1.3).

Определяем длину отрезка  $BB'$  (рис. 1.4).

Смещение узла  $B$  по горизонтали составит:  $\Delta l_{BB'}^X = \Delta l_1 = 0,64 \text{ мм.}$

Смещение узла  $B$  по вертикали составит:

$$\Delta l_{BB'}^Y = BN = BM - NM = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha} - \Delta l_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{1,09}{\cos 20^\circ} - 0,64 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 0,93 \text{ мм}$$

Полное смещение узла  $B$ :

$$\Delta l_{BB'} = \sqrt{\Delta l_{BB'}^X{}^2 + \Delta l_{BB'}^Y{}^2} = \sqrt{0,64^2 + 0,93^2} = 1,13 < 2 \text{ мм.}$$

Условие жесткости выполняется.

Таблица 1.1

№ варианта	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	Профиль	Сталь
1	40	180	1,2	1,7	30	70	труба круглая $D \times t$	Ст2
2	45	170	1,4	1,6	35	70		Ст4
3	50	160	1,6	1,5	20	80		09Г2
4	55	150	1,8	1,4	40	65	труба квадратная	10ХНДП
5	60	140	2,0	1,3	30	80		10ХСНД
6	65	130	1,3	1,2	25	85		15ХСНД
7	70	120	1,5	1,1	35	75	уголок	Ст5
8	75	110	1,7	1,0	20	85		10Г2С1
9	80	100	1,9	0,9	25	75		14Г2
10	85	90	2,1	0,8	40	60		10Г2С1

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Ш
А, Ж, Н, У, Ш					
Б, З, О, Ф, Э					
В, И, П, Х, Ю					
Г, К, Р, Ц, Я					
Д, Л, С, Ч					
Е, М, Т, Ш					



## Задача № 2 Расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня при деформации растяжения и сжатия

**Задание.** Оценить прочность хрупкого ступенчатого стержня при деформации растяжения (сжатия). Определить деформацию стержня.

Стержень изготовлен из чугуна СЧ15. Допускаемый коэффициент запаса статической прочности  $[n]$  выбрать самостоятельно (для хрупких материалов принимаем  $[n] = 2,0 \dots 5,0$ ). Весом стержня пренебречь.

Схема стержня приведена на рис. 2.3. Данные для расчета приведены в табл. 2.1.

### Порядок выполнения

1. Вычертить схему стержня с указанием числовых значений размеров и приложенных сил.
2. Определить внутренние продольные силы  $N_i$  на каждом участке. Начертить схему с эпюрой внутренних сил  $N_i$ .
3. Определить напряжения  $\sigma_i$  на каждом участке. Начертить схему с эпюрой напряжений  $\sigma_i$ .
4. Определить коэффициент запаса прочности стержня с учетом вида деформации на участках (растяжение или сжатие).
5. Оценить запас прочности стержня на опасных участках. Дать заключение о прочности.
6. Дать заключение о рациональности размеров стержня (недостаточная прочность или значительный недогруз).
7. Определить деформации каждого участка стержня  $\Delta l_i$  и его полную деформацию. Начертить схему с эпюрой деформаций  $\Delta l_i$ .

### Указания к выполнению

Определение продольной силы  $N_i$  рекомендуется начинать со свободного конца стержня, так как значение реактивной силы в заделке неизвестно (либо предварительно определить значение реакции в заделке). Для определения продольной силы  $N_i$  на каждом участке используют метод сечений, руководствуясь правилом: продольная сила в любом сечении стержня равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения на ось стержня:

$$N_i = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} F_i.$$
 Продольная сила считается положительной, если она соответствует деформации растяжения и отрицательной, если она соответствует деформации сжатия.

Напряжение на  $i$ -м участке стержня при деформации растяжения и сжатия определяется по формуле: 
$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i}$$
 где

$N_i$  – внутренняя продольная сила на рассматриваемом участке стержня;

$A_i$  – площадь соответствующего поперечного сечения стержня.

Коэффициенты запаса прочности участков стержня для хрупких материалов определяются с учетом вида деформации на участках (растяжение или сжатие) по формуле: 
$$n_i = \frac{\sigma_v}{|\sigma_i|},$$
 где

$\sigma_i$  – напряжение на  $i$ -м участке стержня;

$\sigma_v$  – предел прочности материала на сжатие или растяжение (соответственно  $\sigma_{всж}$  или  $\sigma_{вр}$ ).

Для оценки прочности стержня необходимо сравнить действительный коэффициент запаса прочности  $n_i$  с допускаемым коэффициентом запаса прочности  $[n]$ . Условие прочности, соответственно, имеет вид: 
$$n_i \leq [n].$$

Для определения рациональности размеров стержня необходимо определить величину отклонения действительной нагрузки на стержень от его нагрузочной способности:

$$\Delta\sigma_i = \frac{[\sigma] - |\sigma_i|}{[\sigma]} \cdot 100\%, \quad \text{где}$$

$\sigma_i$  – напряжение на  $i$ -м участке стержня;

$[\sigma]$  – допускаемые напряжения для материала стержня.

Соответственно, при деформации растяжения  $[\sigma] = [\sigma_p] = \sigma_{вр} / [n];$   
при деформации сжатия  $[\sigma] = [\sigma_{сж}] = \sigma_{всж} / [n].$

Допускается превышение нагрузки не более 5%, допускаемый недогруз – не более 15% от допускаемой нагрузки: 
$$-5\% \leq \Delta\sigma_i \leq 15\%.$$

Вывод о рациональности размеров стержня делается по наиболее опасному участку. При выборе опасного участка необходимо помнить, что растягивающие напряжения опаснее сжимающих, даже если их величина меньше по модулю, поэтому при больших сжимающих напряжениях, проверяются два участка: с наибольшими сжимающими и с наибольшими растягивающими напряжениями.

Построение эпюры продольных перемещений следует начинать от заделки стержня, где продольные перемещения отсутствуют ( $\Delta l_0 = 0$ ). Перемещение границы  $i$ -го участка стержня (при условии, что продольная сила  $N_i$  постоянна на этом участке) определяется как

$$\Delta l_i = \Delta l_{i-1} + \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E},$$

где  $\Delta l_{i-1}, \Delta l_i$  – перемещения начального и конечного сечения рассматриваемого участка ( $i$ ) стержня;  
 $N_i$  – продольная сила на рассматриваемом участке стержня;  
 $A_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка стержня;  
 $l_i$  – длина рассматриваемого участка стержня;  
 $E$  – модуль Юнга материала стержня.

### Пример решения задачи

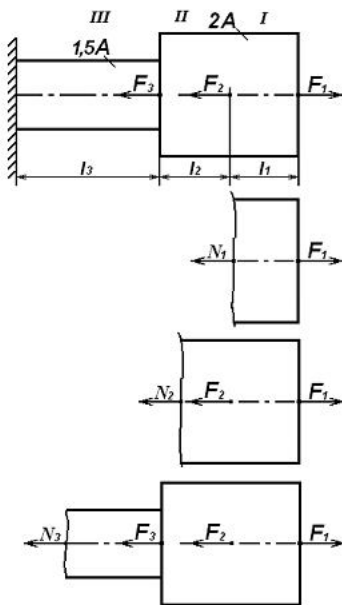


Рис. 2.1

**Дано:** ступенчатый стержень, нагруженный продольными силами (рис. 2.1)  $F_1 = 80 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 70 \text{ кН}$ ;  $F_3 = 40 \text{ кН}$ ;  $l_1 = 1,0 \text{ м}$ ;  $l_2 = l_3 = 0,5 \text{ м}$ ;  $A = 10 \text{ см}^2$ .  
 Материал стержня – чугун СЧ15. Согласно Приложению 1:  $E = 0,9 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  
 $\sigma_{вр} = 150 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_{вскж} = 650 \text{ МПа}$ .

**Найти:** а) оценить прочность и рациональность размеров стержня;  
 б) определить величину продольной деформации стержня.

**Решение:** 1. Разбиваем стержень на участки, начиная со свободного (не закрепленного) конца. Границы участков – точки приложения сосредоточенных сил и сечения, в которых происходит изменение поперечных размеров стержня. Определяем величину продольной силы  $N_i$  в пределах каждого участка с учетом правила знаков (рис. 2.1).

**I участок:**  $N_1 = F_1 = 80 \text{ кН}$ ;

**II участок:**  $N_2 = F_1 - F_2 = 80 - 70 = 10 \text{ кН}$ ;

**III участок:**  $N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 80 - 70 - 40 = -30 \text{ кН}$ .

Строим эпюру продольных сил  $N_i$  (рис. 2.2, а).

2. Определяем величину напряжений  $\sigma_i$  в пределах каждого участка

**I участок:**  $\sigma_1 = N_1 / A_1 = 80 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа}$ ;

**II участок:**  $\sigma_2 = N_2 / A_2 = 10 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5 \text{ МПа}$ ;

**III участок:**  $\sigma_3 = N_3 / A_3 = -30 \cdot 10^3 / (1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = -20 \cdot 10^6 \text{ Па} = -20 \text{ МПа}$

Строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma_i$  (рис. 2.2, б).

3. Определяем коэффициент запаса прочности и оцениваем прочность стержня в пределах каждого участка ( $[n] = 2,0 \dots 5,0$ ):

**I участок:** стержень растягивается

$n_1 = \sigma_{вр} / \sigma_1 = 150 / 40 = 3,75 \geq [n]$  – условие прочности выполняется;

**II участок:** стержень растягивается

$n_2 = \sigma_{вр} / \sigma_2 = 150 / 5 = 30 \geq [n]$  – условие прочности выполняется;

**III участок:** стержень сжимается

$n_3 = \sigma_{вскж} / \sigma_3 = 650 / 20 = 32,5 \geq [n]$  – условие прочности выполняется.

4. Оцениваем рациональность поперечных размеров стержня в опасном сечении. Примем  $[n] = 3$ .

Опасное сечение - I участок, так как там минимальный коэффициент запаса прочности  $n_1 = 3,75$ .

На I – м участке действуют *растягивающие* напряжения  $\sigma_1 = 40 \text{ МПа}$ .

Допускаемое напряжение при растяжении:  $[\sigma_p] = \sigma_{вр} / [n] = 150 / 3 = 50 \text{ МПа}$ .

Недогруз стержня составляет  $\Delta \sigma_i = \frac{[\sigma] - |\sigma_i|}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{50 - 40}{50} \cdot 100\% = 20\% > 15\%$ .

Поперечные размеры стержня превышают рациональные значения, их желательно уменьшить.

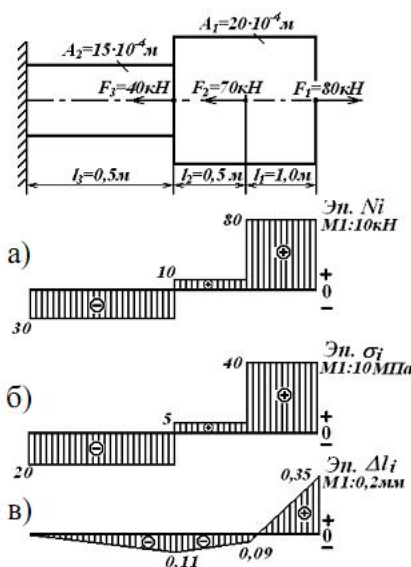


Рис. 2.2

5. Определяем деформации каждого участка стержня  $\Delta l_i$ , начиная от заделки, так как там продольные перемещения отсутствуют ( $\Delta l_0 = 0$ ).

$$\Delta l_3 = \Delta l_0 + \frac{N_3 \cdot l_3}{A_3 \cdot E} = 0 + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,11 \cdot 10^{-3} = -0,11 \text{ мм};$$

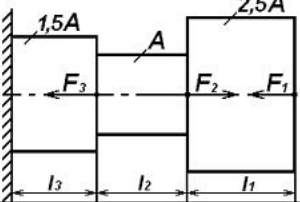
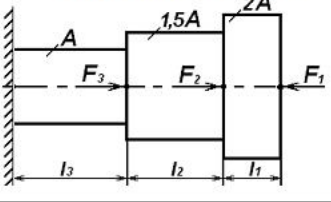
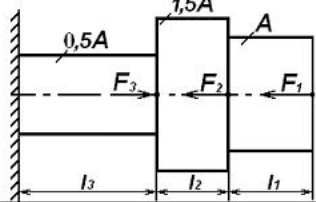
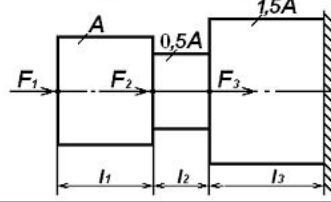
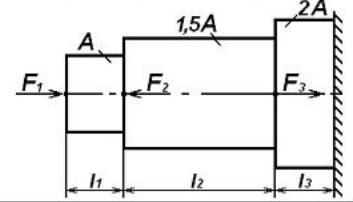
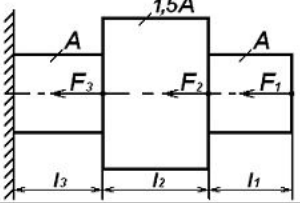
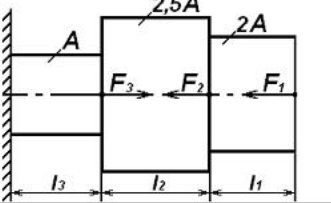
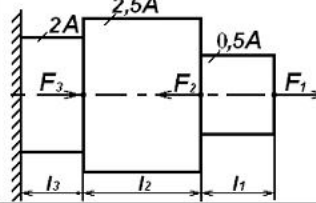
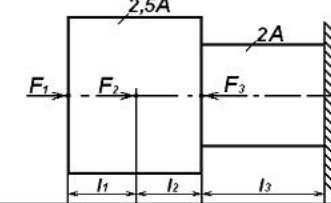
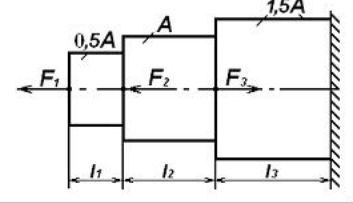
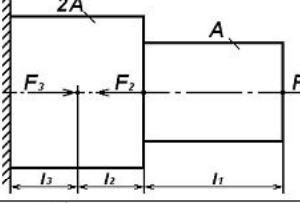
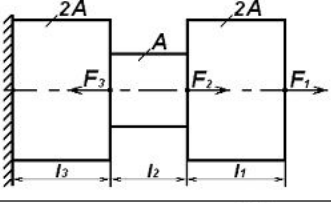
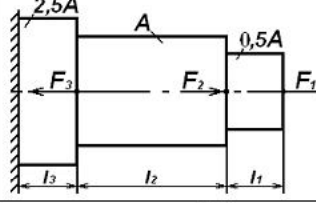
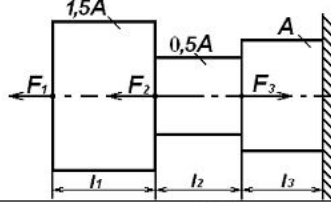
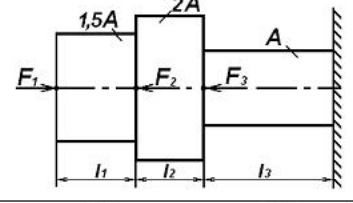
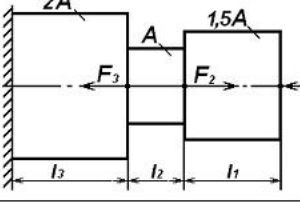
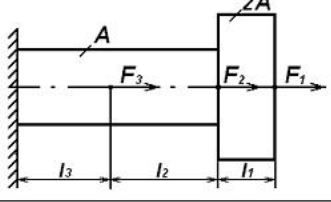
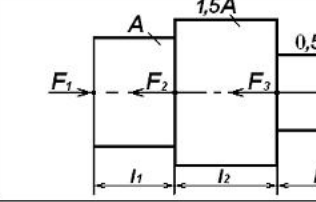
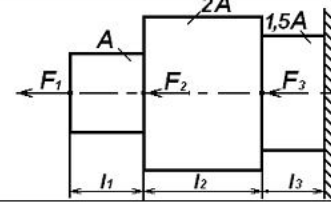
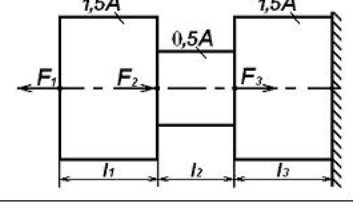
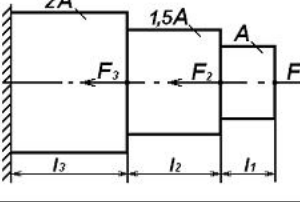
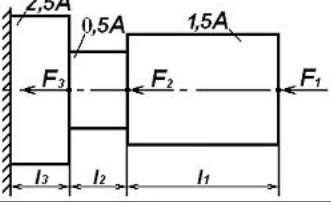
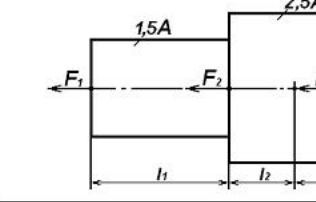
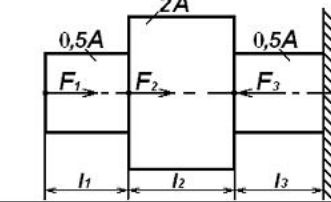
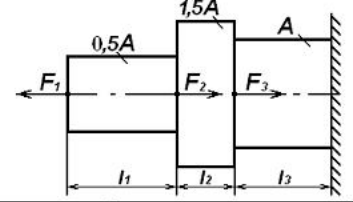
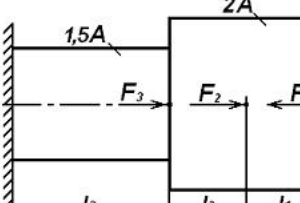
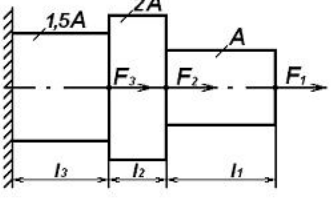
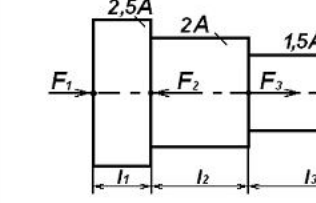
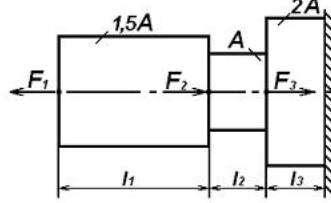
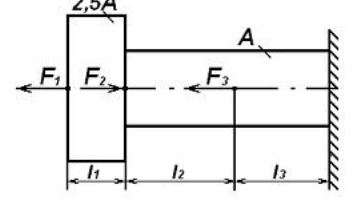
$$\Delta l_2 = \Delta l_3 + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = -0,11 \cdot 10^{-3} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,11 \cdot 10^{-3} + 0,02 \cdot 10^{-3} = -0,09 \cdot 10^{-3} = -0,09 \text{ мм};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E} = -0,09 \cdot 10^{-3} + \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,09 \cdot 10^{-3} + 0,44 \cdot 10^{-3} = 0,35 \cdot 10^{-3} = 0,035 \text{ мм}.$$

Строим эпюру деформаций  $\Delta l_i$  (рис. 2.2, в).

Таблица 2.1

№ варианта	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$A$ , см <sup>2</sup>	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$l_3$ , м
1	10	55	85	20	0,2	0,4	0,2
2	20	50	90	22	0,1	0,3	0,4
3	30	45	95	24	0,4	0,5	0,1
4	40	30	100	26	0,3	0,1	0,6
5	50	35	75	28	0,2	0,3	0,5
6	60	40	60	30	0,5	0,2	0,2
7	70	25	35	32	0,3	0,3	0,3
8	80	20	30	34	0,5	0,2	0,4
9	90	15	45	36	0,1	0,5	0,3
10	100	10	40	40	0,4	0,2	0,6

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Щ
А, Ж, Н, У, Щ					
Б, З, О, Ф, Э					
В, И, П, Х, Ю					
Г, К, Р, Ц, Я					
Д, Л, С, Ч					
Е, М, Т, Ш					

### Задача № 3 Определение геометрических характеристик плоских сечений

**Задание** Определить основные геометрические характеристики (координаты центра тяжести, положение главных центральных осей, величину главных моментов инерции, моментов сопротивления и главных радиусов инерции) симметричного составного сечения.

Форма сечения приведена на рис. 3.3. Данные для расчета приведены в табл. 3.1.

#### Порядок выполнения

1. Вычертить схему сечения в масштабе с указанием числовых значений.
2. Определить необходимые геометрические характеристики составных частей сложного сечения: (площади  $A_i$ , моменты инерции  $J_i$ ).
3. Нанести на чертеж центры тяжести каждого элемента сечения и их центральные оси ( $x_1y_1; x_2y_2; \dots$ ). Определить координаты центра тяжести каждого элемента относительно выбранной вспомогательной системы координат  $x_0y_0$ .
4. Определить координаты центра тяжести сечения  $x_{Cyc}$  в системе координат  $x_0y_0$ . Нанести на чертеж центральные оси сечения  $XU$ .
5. Определить моменты инерции составных частей сечения относительно центральных осей  $XU$ .
6. Определить величину главных моментов инерции сечения.
7. Определить величину главных радиусов инерции и главных моментов сопротивления сечения.

#### Указания к выполнению

При расчете на изгиб, кручение и различные виды сложного нагружения для оценки прочности и жесткости бруса недостаточно знать площадь его поперечного сечения, требуется определять другие геометрические характеристики сечения, учитывающие влияние его формы: статический момент площади, осевые, центробежный и полярный моменты инерции, моменты сопротивления, положение центральных и главных осей.

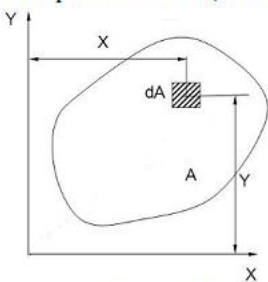


Рис. 3.1

Статическим моментом площади сечения относительно осей  $x$  и  $y$  (см. рис. 3.1) называют выражения вида:  $S_x = \int_A y \cdot dA$ ;  $S_y = \int_A x \cdot dA$ , где

$A$  – площадь сечения;

$dA$  – площадь произвольно выбранной элементарной площадки сечения;

$y, x$  – расстояния от ее центра тяжести до соответствующих координатных осей

Зная величины статических моментов площади сечения, можно

вычислить координаты его центра тяжести:  $y_c = \frac{S_x}{A}$ ,  $x_c = \frac{S_y}{A}$ .

Если сечение имеет сложную форму, его разбивают на части, для которых известны положения их центров тяжести и величины площадей. Координаты центра тяжести всего сечения

определяют по формулам:  $x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$ ;  $y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$ , где

$n$  – число частей, на которые разбивается сечение;

$A_i$  – площади отдельных частей сечения (при наличие в сечении отверстий, значения их площадей считаются отрицательными);

$x_i, y_i$  – координаты центров тяжести частей сечения в выбранной системе координат  $x_0y_0$ .

При выборе вспомогательной системы координат  $x_0y_0$  рекомендуется совместить ее с координатными осями одного из элементов составного сечения.

Центральными осями называют координатные оси, проходящие через центр тяжести сечения. При наличии у сечения оси симметрии одну из центральных осей обычно совмещают с ней.

В расчетах на прочность и жесткость при деформации изгиба используются геометрические характеристики – осевые моменты инерции  $J_x, J_y$  и осевые моменты сопротивления  $W_x, W_y$ .

Осевым моментом инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$  (см. рис. 3.1) называют выражения вида:  $J_x = \int_A y^2 \cdot dA$ ;  $J_y = \int_A x^2 \cdot dA$ , где

$A$  – площадь сечения;

$dA$  – площадь произвольно выбранной элементарной площадки сечения;

$y, x$  – расстояния от ее центра тяжести до соответствующих координатных осей.

Моменты инерции распространенных плоских фигур вычисляются по известным формулам (см. Приложение 10). Моменты инерции стандартных профилей приведены в соответствующих ГОСТах.

Осевые моменты инерции составного сечения вычисляются как сумма осевых моментов инерции отдельных его элементов относительно одних и тех же (центральных) осей:  $J_x = \sum_{i=1}^n J_{x_i}$ ;  $J_y = \sum_{i=1}^n J_{y_i}$ .

При наличии в сечении отверстий, значения их моментов инерции считаются отрицательными.

Необходимо помнить, что табличные значения моментов инерции сечений определены относительно их собственных центральных осей, которые не совпадают с центральными осями данного сложного сечения. Их значения необходимо скорректировать, используя формулы вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей:

$$J_{x_i} = J_{x_i} + b_i^2 \cdot A_i; \quad J_{y_i} = J_{y_i} + a_i^2 \cdot A_i, \quad \text{где}$$

$J_{x_i}, J_{y_i}$  – моменты инерции элементов сечения относительно собственных центральных осей;

$a_i, b_i$  – расстояния между центральными осями сложного сечения и параллельными им собственными центральными осями его элементов.

Очевидно, что центральные оси можно повернуть вокруг центра тяжести сечения под любым углом. Значения центральных моментов инерции при этом будут меняться (значение одного из них будет до определенного предела возрастать, значение другого уменьшаться). Особый интерес представляет такое положение центральных осей, когда значения осевых моментов инерции принимают свои экстремальные значения (один – максимальное, второй – минимальное). Такие оси называются *главными центральными осями*, а их положение характеризует направления максимальной и минимальной жесткости сечения при изгибе. Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось является одной из главных осей (другая ей перпендикулярна).

Главные радиусы инерции определяют по формулам:  $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$ ;  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$ , где

$A$  – суммарная площадь сечения.

Главные моменты сопротивления сечения относительно осей  $X$  и  $Y$  определяют по формулам:

$$W_x = \frac{J_x}{|y_{max}|}; \quad W_y = \frac{J_y}{|x_{max}|}, \quad \text{где}$$

$x_{max}, y_{max}$  – координаты точек сечения, наиболее удаленных от его главных центральных осей.

### Пример решения задачи

Дано: сложное сечение (рис. 3.2),  $d = 5$  см.

Найти: а) координаты центра тяжести сечения;  
б) величину главных моментов инерции сечения;  
в) величину главных радиусов инерции сечения;  
г) величину главных моментов сопротивления сечения.

Решение: 1. Чертим в масштабе сечение с указанием характерных размеров. Разбиваем сечение на простые фигуры: прямоугольник  $2d \times 3d$  (I), прямоугольные треугольники (II, III). На чертеж наносим центры тяжести этих фигур  $C_1, C_2, C_3$ , отмечаем их собственные центральные оси  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$  (рис. 3.2).

Вычисляем площади и моменты инерции простых фигур относительно их собственных центральных осей (см. Приложение 10).

Прямоугольник:  $A_1 = 2d \cdot 3d = 6d^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$  см<sup>2</sup>;

$$I_{x_1} = \frac{3d \cdot (2d)^3}{12} = \frac{24 \cdot 5^4}{12} = 1250,0$$
 см<sup>4</sup>;

$$I_{y_1} = \frac{(3d)^3 \cdot 2d}{12} = \frac{54 \cdot 5^4}{12} = 2812,5$$
 см<sup>4</sup>

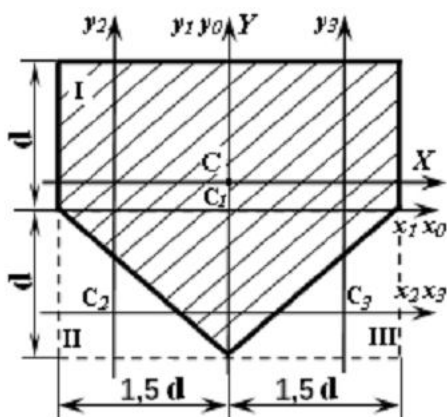


Рис. 3.2

Прямоугольный треугольник:  $A_2 = A_3 = \frac{1,5d \cdot d}{2} = \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 5}{2} = 18,75 \text{ см}^2;$

$$I_{x_2} = I_{x_3} = \frac{1,5 \cdot d \cdot d^3}{36} = \frac{1,5 \cdot 5^4}{36} = 26,04 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = I_{y_3} = \frac{(1,5 \cdot d)^3 \cdot d}{36} = \frac{1,5^3 \cdot 5^4}{36} = 58,59 \text{ см}^4.$$

2. Определяем положение центра тяжести сложного сечения.

В качестве вспомогательной системы координат  $x_0y_0$  выбираем систему координат, связанную с центром тяжести прямоугольника. Определяем координаты центров тяжести треугольников в этой системе координат:  $x_{C2} = -x_{C3} = 2/3 \cdot (1,5 \cdot d) = 2/3 \cdot 1,5 \cdot 5 = 5,0 \text{ см};$

$$y_{C3} = y_{C2} = -2/3 \cdot d = -2/3 \cdot 5 = -3,3 \text{ см}.$$

Определяем координаты центра тяжести сложного сечения в системе координат  $x_0y_0$ . Площади треугольников подставляем в формулу со знаком минус.

$$x_C = \frac{A_1 \cdot x_{C1} - A_2 \cdot x_{C2} - A_3 \cdot x_{C3}}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{150,0 \cdot 0 - 18,75 \cdot (-5,0) - 18,75 \cdot 5,0}{150,0 - 18,75 - 18,75} = 0 \text{ см}$$

(центр тяжести сечения лежит на его оси симметрии);

$$y_C = \frac{A_1 \cdot y_{C1} - A_2 \cdot y_{C2} - A_3 \cdot y_{C3}}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{150,0 \cdot 0 - 18,75 \cdot (-3,3) - 18,75 \cdot (-3,3)}{150,0 - 18,75 - 18,75} = 1,1 \text{ см}.$$

Наносим центр тяжести сечения  $C$  на чертеж (рис. 3.2). Отмечаем центральные оси  $X$  и  $Y$ .

Так как ось  $Y$  является осью симметрии сечения, то оси  $X$  и  $Y$  являются также его главными осями.

3. Вычисляем моменты инерции простых фигур, составляющих сечение, относительно главных центральных осей  $X, Y$ .

Прямоугольник:  $J_{X_1} = J_{x_1} + b_1^2 \cdot A_1 = 1250,0 + (-1,1)^2 \cdot 150 = 1431,5 \text{ см}^4,$  где

$$b_1 = -y_C = -1,1 \text{ см} - \text{расстояние между осями } X \text{ и } x_1.$$

$$J_{Y_1} = J_{y_1} = 2812,5 \text{ см}^4.$$

Треугольники:  $J_{X_2} = J_{X_3} = J_{x_2} + b_2^2 \cdot A_2 = 26,04 + (-4,4)^2 \cdot 18,75 = 389,04 \text{ см}^4,$  где

$$b_2 = b_3 = -( |y_{C2}| + y_C ) = -(3,3 + 1,1) = -4,4 \text{ см} - \text{расстояние между осями } X \text{ и } x_2, x_3.$$

$$J_{Y_2} = J_{Y_3} = J_{y_2} + a_2^2 \cdot A_2 = 58,59 + 5,0^2 \cdot 18,75 = 527,34 \text{ см}^4, \quad \text{где}$$

$$a_2 = -a_3 = |x_{C2}| = -|x_{C3}| = 5,0 \text{ см} - \text{расстояние между осями } Y \text{ и } y_2, y_3.$$

4. Вычисляем главные моменты инерции сечения.

$$J_X = \sum_{i=1}^3 J_{X_i} = J_{X_1} - J_{X_2} - J_{X_3} = 1431,5 - 389,04 - 389,04 = 653,4 \text{ см}^4;$$

$$J_Y = \sum_{i=1}^3 J_{Y_i} = J_{Y_1} - J_{Y_2} - J_{Y_3} = 2812,5 - 527,34 - 527,34 = 1757,8 \text{ см}^4.$$

Моменты инерции треугольников вычитаются, так как соответствуют отсутствующим частям сечения.

5. Определяем величину главных радиусов инерции сечения

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{A}} = \sqrt{\frac{653,4}{112,5}} = 2,4 \text{ см}; \quad i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{1757,8}{112,5}} = 3,9 \text{ см}.$$

6. Определяем величину главных моментов сопротивления сечения

$$W_X = \frac{J_X}{|y_{max}|} = \frac{653,4}{6,1} = 107,1 \text{ см}^3; \quad W_Y = \frac{J_Y}{|x_{max}|} = \frac{1757,8}{7,5} = 234,4 \text{ см}^3,$$

$$\text{где } y_{max} = d + |y_C| = 5 + 1,1 = 6,1 \text{ см}; \quad x_{max} = 1,5 \cdot d = 7,5 \text{ см}.$$

Таблица 3.1

Параметры	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a, \text{ см}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Щ
А, Ж, Н, У, Щ					
Б, З, О, Ф, Э					
В, И, П, Х, Ю					
Г, К, Р, Ц, Я					
Д, Л, С, Ч					
Е, М, Т, Ш					



## Задача № 4 Расчет вала на прочность и жесткость при деформации кручения

**Задание.** К двухступенчатому сплошному валу, один конец которого жестко закреплен в опоре, приложены сосредоточенные вращающие моменты. Определить поперечные размеры вала из условия прочности его ступеней на кручение. Определить максимальные напряжения вала по длине. Проверить, удовлетворяет ли полученный вал условию жесткости. Определить углы закручивания вала по длине.

Вал изготовлен из стали: модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ .

Схема вала приведена на рис. 4.4. Данные для расчета приведены в табл. 4.1.

### Порядок выполнения

1. Вычертить схему с указанием числовых данных.
2. Составить уравнение внутренних крутящих моментов по участкам ( $M_{кр_i}$ ). Построить эпюру внутренних крутящих моментов по длине вала.
3. Определить диаметры ступеней вала, исходя из условия прочности ( $d_i$ ). Полученный результат округлить согласно ГОСТ 6636-69 до ближайшего большего значения из ряда предпочтительных чисел R 40 (см. Приложение 2).
4. Определить максимальные касательные напряжения  $\tau_{кр_i}$  вала на каждом участке. Построить эпюру максимальных касательных напряжений по длине вала.
5. Определить относительные углы закручивания вала  $\theta_{кр_i}$  на каждом участке. Проверить, удовлетворяет ли вал условию жесткости.
6. Скорректировать размеры вала при необходимости, исходя из условия жесткости. Полученный результат округлить согласно ГОСТ 6636-69 до ближайшего большего значения.
7. Определить углы закручивания  $\Delta\varphi_i$  по длине вала. Построить эпюру углов закручивания вала.

### Указания к выполнению

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях вала возникает один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_{кр}$ .

Для обозначения внешних (вращающих) моментов на схеме могут использоваться различные варианты условных обозначений (см. рис. 4.1).

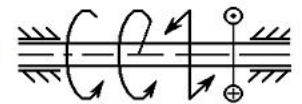


Рис.4.1

Величина внутреннего крутящего момента  $M_{кр}$  на участке вала определяется с помощью метода сечений через внешние (вращающие) моменты по правилу: внутренний крутящий момент в любом поперечном сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов относительно продольной оси вала, приложенных по одну сторону от

рассматриваемого поперечного сечения:  $M_{кр_i} = \sum_{\text{от сечения}}^{c \text{ одной стороны}} T_i$ .

Крутящий момент принято считать положительным, если при взгляде со стороны отсеченной части вала он будет направлен против часовой стрелки.

При наличии жесткой заделки одного из концов вала определение величины внутренних крутящих моментов рекомендуется начинать со свободного конца вала, так как в этом случае нет необходимости определять реактивный момент в заделке.

Касательные напряжения, возникающие в поперечных сечениях вала при кручении, достигают своей максимальной величины на его поверхности и находятся по формуле:  $\tau_{кр_i} = \frac{M_{кр_i}}{W_{\rho_i}}$ , где

$\tau_{кр_i}$  – касательные напряжения на внешней границе  $i$ -го сечения вала;

$M_{кр_i}$  – внутренний крутящий момент в  $i$ -м сечении вала;

$W_{\rho_i}$  – полярный момент сопротивления сечения  $i$ -го участка вала.

Для вала круглого сечения:  $W_{\rho} = \pi \cdot d^3 / 16 \approx 0,2 \cdot d^3$  (см. Приложение 10)

Условие прочности крутящегося вала, соответственно, имеет вид:  $|\tau_{кр_i}^{max}| = \frac{|M_{кр_i}^{max}|}{W_{\rho_i}} \leq [\tau]_{кр}$ , где

$[\tau]_{кр}$  – допускаемые напряжения кручения.

Таким образом, минимальный диаметр вала из условия прочности на каждом участке определяется по формуле:

$$d_i^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |M_{кр}^{max}|}{\pi \cdot [\tau]_{кр}}} \approx \sqrt[3]{\frac{|M_{кр}^{max}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}}$$

Определение углов закручивания вала следует начинать от заделки, где угол закручивания  $\Delta\varphi_0 = 0$ .

Для участков вала постоянного сечения при не изменяющемся крутящем моменте угол закручивания на  $i$ -м участке определяется по формуле:

$$\Delta\varphi_i = \frac{M_{кр_i} \cdot l_i}{G \cdot J_{\rho_i}}, \quad \text{где}$$

$\Delta\varphi_i$  – угол закручивания конечного сечения  $i$ -го участка вала относительно его начального сечения;

$l_i$  – длина участка вала, на котором определяется угол закручивания;

$J_{\rho_i}$  – полярный момент инерции сечения  $i$ -го участка вала.

Для вала круглого сечения:  $J_{\rho} = \pi \cdot d^4 / 32 \approx 0,1 \cdot d^4$  (см. Приложение 10).

Соответственно, суммарный угол закручивания участков вала относительно заделки будет равен:  $\Delta\varphi_{0-i} = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_i$ .

Условие жесткости закручиваемого вала имеет вид:  $|\Theta_{кр_i}| = \frac{|M_{кр_i}|}{J_{\rho_i} \cdot G} \leq [\Theta]_{кр}$ , где

$\Theta_{кр_i}$  – относительный угол закручивания сечения на  $i$ -м участке вала;

$[\Theta]_{кр}$  – допускаемый относительный угол закручивания;

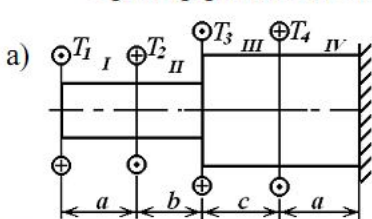
$G$  – модуль сдвига материала вала;

Таким образом, минимальный диаметр вала из условия жесткости определяется по формуле:

$$d_i^{жс} \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot |M_{кр_i}^{max}|}{\pi \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} \approx \sqrt[4]{\frac{|M_{кр_i}^{max}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}}$$

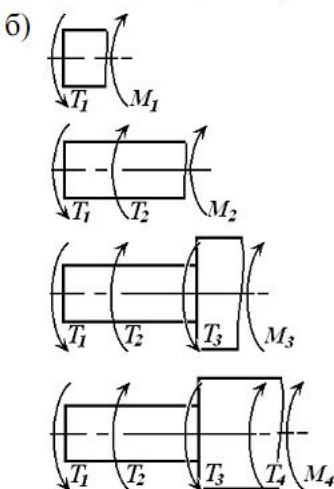
Для участков вала постоянного сечения при не изменяющемся по длине (сосредоточенном) крутящем моменте между абсолютным ( $\Delta\varphi_i$ ) и относительным ( $\Theta_{кр_i}$ ) углами закручивания существует зависимость:  $\Delta\varphi_i = \Theta_{кр_i} \cdot l_i$ , где  $l_i$  – длина соответствующего участка вала.

### Пример решения задачи



**Дано:** сплошной двухступенчатый вал закручивается под действием сосредоточенных вращающих моментов (рис. 4.2, а):  $T_1 = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $T_2 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $T_3 = 210 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $T_4 = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Размеры ступеней вала:  $a = 0,2 \text{ м}$ ;  $b = 0,3 \text{ м}$ ;  $c = 0,4 \text{ м}$ . Физико-механические характеристики материала и требования к валу:  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $[\Theta]_{кр} = 1,0 \text{ град/м}$ ;  $[\tau]_{кр} = 30 \text{ МПа}$ .



**Найти:** а) поперечные размеры вала из условия прочности;

б) напряжения на участках вала;

в) углы закручивания вала по длине;

г) проверить выполнение условия жесткости на участках вала.

**Решение:**

1. Разбиваем вал на участки, начиная со свободного (не закрепленного) конца, и определяем величину крутящего момента  $M_i$  в пределах каждого участка с учетом правила знаков (рис. 4.2, б).

I участок:  $M_1 = T_1 = 60 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;

II участок:  $M_2 = T_1 - T_2 = 60 - 100 = -40 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;

III участок:  $M_3 = T_1 - T_2 + T_3 = 60 - 100 + 210 = 170 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;

IV участок:  $M_4 = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = 60 - 100 + 210 - 500 = -330 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;

Строим эпюру внутренних крутящих моментов  $M_i$  (рис. 4.3, а).

Рис. 4.2

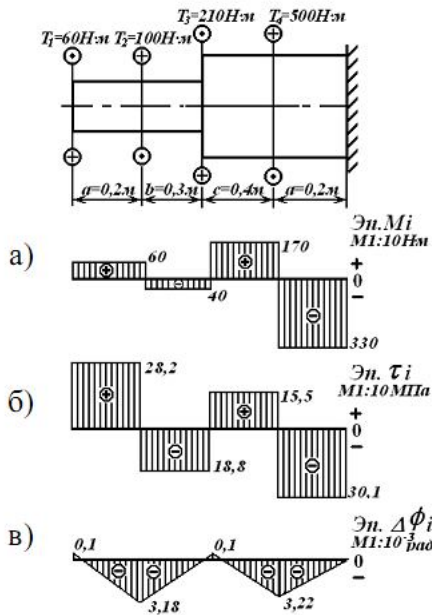


Рис. 4.3

2. Определяем минимальные диаметры ступеней вала, исходя из условия прочности.

$$d_{1,2}^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{1,2}^{max}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{60}{0,2 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 21,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 21,5 \text{ мм}$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $d_{1,2} = 22 \text{ мм}$ .

$$d_{3,4}^{np} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{3,4}^{max}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{330}{0,2 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 38,0 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 38,0 \text{ мм}$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $d_{3,4} = 38 \text{ мм}$ .

3. Определяем величину максимальных напряжений  $\tau_i$  по длине вала:

$$\tau_1 \approx \frac{M_1}{W_{\rho 1}} \approx \frac{M_1}{0,2 \cdot d_{1,2}^3} = \frac{60}{0,2 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^3} = 28,2 \cdot 10^6 = 28,2 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 \approx \frac{M_2}{0,2 \cdot d_{1,2}^3} = \frac{-40}{0,2 \cdot (22 \cdot 10^{-3})^3} = -18,8 \cdot 10^6 = -18,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 \approx \frac{M_3}{0,2 \cdot d_{3,4}^3} = \frac{170}{0,2 \cdot (38 \cdot 10^{-3})^3} = 15,5 \cdot 10^6 = 15,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 \approx \frac{M_4}{0,2 \cdot d_{3,4}^3} = \frac{-330}{0,2 \cdot (38 \cdot 10^{-3})^3} = -30,1 \cdot 10^6 = -30,1 \text{ МПа}.$$

Превышение допускаемого напряжения на 4-м участке составляет:

$$\Delta\tau = \frac{[\tau]_{кр} - |\tau_4|}{[\tau]_{кр}} \cdot 100\% = \frac{|30 - 30,1|}{30} \cdot 100\% = 0,3\% < 5\%. \text{ Прочность вала обеспечена.}$$

Строим эпюру напряжений  $\tau_i$  (рис. 4.3, б).

4. Проверяем выполнение условия жесткости на участках вала.

Определяем значение допускаемого относительного угла закручивания  $[\Theta]$  в системе СИ:

$$[\Theta]_{кр} = 1,0 \cdot \pi \cdot 180^0 = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ рад/м}.$$

Определяем максимальные величины относительных углов закручивания  $\Theta_i$  на участках вала:

$$\Theta_{1,2}^{max} = \frac{|M_{1,2}^{max}|}{G \cdot J_{\rho 1}} = \frac{|M_1|}{0,1 \cdot G \cdot d_{1,2}^4} = \frac{60}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (22 \cdot 10^{-3})^4} = 32,0 \cdot 10^{-3} > [\Theta]_{кр} = 17,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м};$$

$$\Theta_{3,4}^{max} = \frac{|M_{3,4}^{max}|}{G \cdot J_{\rho 4}} = \frac{|M_4|}{0,1 \cdot G \cdot d_{3,4}^4} = \frac{|-330|}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (38 \cdot 10^{-3})^4} = 19,8 \cdot 10^{-3} > [\Theta]_{кр} = 17,4 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м}.$$

Условие жесткости на участках I, IV не выполняется.

5. Размеры поперечного сечения вала необходимо пересчитать по условию жесткости:

$$d_{1,2}^{жс} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{1,2}^{max}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} = \sqrt[4]{\frac{60}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,74 \cdot 10^{-2}}} = 25,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 25,6 \text{ мм};$$

$$d_{3,4}^{жс} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{3,4}^{max}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} = \sqrt[4]{\frac{330}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,74 \cdot 10^{-2}}} = 39,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 39,2 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $d_{1,2} = 26 \text{ мм}$ ,  $d_{3,4} = 40 \text{ мм}$ .

6. Определяем углы закручивания  $\Delta\varphi_i$  по длине вала, начиная от заделки, так как там деформации отсутствуют ( $\Delta\varphi_0 = 0$ ).

$$\Delta\varphi_{0-4} = \Delta\varphi_0 + \Delta\varphi_4 = \Delta\varphi_0 + \frac{M_4 \cdot l_4}{G \cdot J_{\rho 4}} \approx \Delta\varphi_0 + \frac{M_4 \cdot a}{G \cdot 0,1 \cdot d_{3,4}^4} = 0 + \frac{-330 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} = -3,22 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-3} = \Delta\varphi_{0-4} + \Delta\varphi_3 \approx \Delta\varphi_{0-4} + \frac{M_3 \cdot c}{G \cdot 0,1 \cdot d_{3,4}^4} = -3,22 \cdot 10^{-3} + \frac{170 \cdot 0,4}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (40 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= -3,22 \cdot 10^{-3} + 3,32 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-2} = \Delta\varphi_{0-3} + \Delta\varphi_2 \approx \Delta\varphi_{0-3} + \frac{M_2 \cdot b}{G \cdot 0,1 \cdot d_{1,2}^4} = 0,1 \cdot 10^{-3} + \frac{-40 \cdot 0,3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (26 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= 0,1 \cdot 10^{-3} - 3,28 \cdot 10^{-3} = -3,18 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\Delta\varphi_{0-1} = \Delta\varphi_{0-2} + \Delta\varphi_1 \approx \Delta\varphi_{0-2} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot 0,1 \cdot d_{1,2}^4} = -3,18 \cdot 10^{-3} + \frac{60 \cdot 0,2}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot (26 \cdot 10^{-3})^4} =$$

$$= -3,18 \cdot 10^{-3} + 3,28 \cdot 10^{-3} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Строим эпюру углов закручивания вала  $\Delta\varphi_i$  (рис. 4.3, в).

Таблица 4

№ варианта	$a, \text{ м}$	$b, \text{ м}$	$c, \text{ м}$	$T_1, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$T_2, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$T_3, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$T_4, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$[\tau]_{\text{кр}}, \text{ МПа}$	$[\Theta], \text{ град/м}$
1	1,1	1,0	0,8	20	200	310	600	80	1,3
2	0,9	0,2	1,0	22	190	290	590	75	1,2
3	0,7	0,4	1,2	24	180	300	580	70	1,1
4	1,4	0,6	0,6	28	170	280	570	65	1,0
5	1,2	0,8	0,9	32	160	270	560	60	0,9
6	1,0	1,1	1,4	36	150	260	550	55	0,8
7	0,2	0,9	1,6	38	140	250	540	50	0,7
8	0,4	0,7	1,8	42	130	240	530	45	0,6
9	0,6	1,4	2,0	46	120	230	520	40	0,5
10	0,8	1,2	0,7	50	110	220	510	35	0,4

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Щ	
А, Ж, Н, У, Щ					
Б, З, О, Ф, Э					
В, И, П, Х, Ю					
Г, К, Р, Ц, Я					
Д, Л, С, Ч					
Е, М, Т, Ш					

### Задача № 5 Оценка рациональности формы сечения вала

**Задание** Для валов а) круглого сплошного, б) кольцевого, в) квадратного сечения определить распределение напряжений по сечению на опасном участке. Оценить рациональность изготовления валов различной формы сечения. Схему нагружения и материал вала взять из решения задачи 4. Данные для расчета кольцевого вала приведены в табл. 5.1.

#### Порядок выполнения

1. Выписать из решения задачи 4 величину крутящего момента и размеры сечения сплошного круглого вала на опасном участке, исходя из условия прочности и жесткости.
2. Определить размеры вала кольцевого сечения ( $d_{кол}, D_{кол}$ ), исходя из условия прочности и жесткости (по наибольшему значению). Полученные результаты округлить согласно ГОСТ 6636-69 ( $d_{кол}$  до ближайшего меньшего,  $D_{кол}$  до ближайшего большего значения) из ряда предпочтительных чисел  $Ra 40$  (см. Приложение 2).
3. Определить размеры вала квадратного сечения ( $a \times a$ ), исходя из условия прочности и жесткости (по наибольшему значению). Полученные результаты округлить согласно ГОСТ 6636-69 до ближайшего большего значения из ряда предпочтительных чисел  $Ra 40$ .
4. Вычислить величину напряжений и определить их распределение в опасном сечении сплошного круглого, кольцевого и квадратного валов. Построить эпюры.
5. Оценить рациональность сечений валов по прочности и по жесткости. Дать заключение.

#### Указания к выполнению

Возникающие в поперечном сечении вала касательные напряжения направлены перпендикулярно к радиусу и вычисляются по формуле 
$$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}} \cdot \rho.$$

Максимальные касательные напряжения возникают на внешнем контуре сечения и вычисляются, соответственно, по формуле 
$$\tau_{кр}^{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}},$$
 где

$M_{кр}$  – внутренний крутящий момент в сечении вала;

$W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления рассматриваемого сечения вала;

$J_{\rho}$  – полярный момент инерции рассматриваемого сечения вала;

$\rho$  – расстояние от центра сечения вала до точки, в которой вычисляются напряжения.

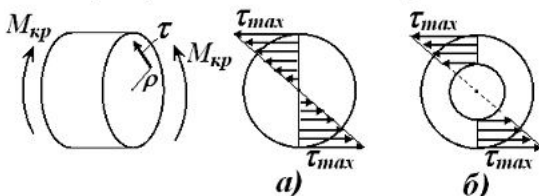


Рис. 5.1

Эпюра распределения касательных напряжений по сечению круглого сплошного вала представлена на рис. 5.1, а.

Касательные напряжения в поперечном сечении вала кольцевого сечения определяются аналогично напряжениям круглого вала сплошного сечения. Эпюра распределения касательных напряжений по сечению кольцевого вала представлена на рис. 5.1, б.

Относительный угол закручивания кольцевого вала определяется аналогично углу закручивания круглого сплошного вала:

$$\Theta_{кр} = \frac{M_{кр}}{J_{\rho}^{кол} \cdot G}.$$

Геометрические характеристики вала кольцевого сечения определяются следующим образом:

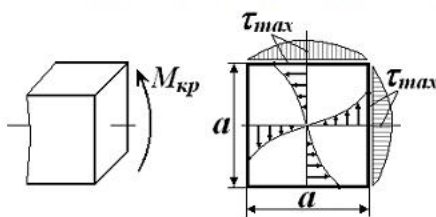


Рис. 5.2

полярный момент сопротивления

$$W_{\rho}^{кол} = \frac{\pi D_{кол}^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2 D_{кол}^3 (1 - \alpha^4);$$

полярный момент инерции

$$I_{\rho}^{кол} = \frac{\pi D_{кол}^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D_{кол}^4 (1 - \alpha^4), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{d_{кол}}{D_{кол}}$$

( $D_{кол}$  – наружный диаметр кольца,  $d_{кол}$  – внутренний диаметр кольца).

Задача о распределении касательных напряжений в сечении вала квадратного сечения методами сопромата не решается. Методами теории упругости была получена эпюра распределения касательных напряжений по сечению квадратного вала (см. рис. 5.2).

Максимальные напряжения возникают в середине сторон квадрата и определяются по формуле

$$\tau_{кр}^{max} = \frac{M_{кр}}{W_k}, \quad \text{где} \quad W_k \approx 0,208 \cdot a^3 - \text{характеристика прочности при кручении (см. Приложение 11).}$$

Относительный угол закручивания вала квадратного сечения определяется по формуле

$$\Theta_{кр} = \frac{M_{кр}}{J_k \cdot G}, \quad \text{где} \quad J_k \approx 0,141 \cdot a^4 - \text{характеристика жесткости при кручении (см. Приложение 11).}$$

Для оценки рациональности сечения валов по условию прочности и по условию жесткости вводятся безразмерные величины, характеризующие отношение прочности (жесткости) вала к его весу:

$$\text{удельный момент сопротивления} \quad w_{кр} = \frac{W_\rho}{\sqrt{A^3}};$$

$$\text{удельный момент инерции} \quad j_{кр} = \frac{J_\rho}{A^2}, \quad \text{где } A - \text{площадь сечения вала.}$$

Чем больше значения  $w_{кр}$  и  $j_{кр}$ , тем выше способность вала сопротивляться деформации кручения.

Таблица 5.3

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_{кол} / D_{кол}$	0,5	0,35	0,45	0,4	0,75	0,6	0,7	0,8	0,65	0,55

### Пример решения задачи

Дано: вал сплошного круглого ( $d$ ), кольцевого ( $d_{кол} / D_{кол} = 0,3$ ) и квадратного ( $a \times a$ ) сечений.

Найти: а) поперечные размеры валов;  
б) распределение касательных напряжений в опасном сечении валов;  
в) оценить рациональность формы сечения валов.

Решение: при решении задачи 4 в качестве опасного участка был выявлен I участок вала, так как на нем крутящий момент достигает наибольшего значения  $|M_{кр1}| = 60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

1. Определяем поперечные размеры валов

а) Диаметр сплошного круглого вала (см. решение задачи 4)

$$\text{по условию прочности:} \quad d_{кр}^{np} = 190 \text{ мм},$$

$$\text{по условию жесткости:} \quad d_{кр}^{жс} = 150 \text{ мм}.$$

Принимаем диаметр круглого сплошного вала по наибольшему значению  $d_{кр} = 190 \text{ мм}$ .

б) Определяем размеры сечения кольцевого вала из условия прочности ( $|\tau_{кр}^{max}| = \frac{|M_{кр}|}{W_\rho^{кол}} \leq [\tau]_{кр}$ ):

$$D_{кол}^{np} \approx \sqrt[3]{\frac{W_\rho^{кол}}{0,2(1-\alpha^4)}} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{кр}|}{0,2 \cdot [\tau]_{кр} \cdot (1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{60 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 45 \cdot 10^6 \cdot (1-0,3^4)}} = 0,189 = 189 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69 (Приложение 2):  $D_{кол}^{np} \approx 190 \text{ мм}$ .

Определяем размеры сечения кольцевого вала из условия жесткости ( $|\Theta_{кр}| = \frac{|M_{кр}|}{J_\rho^{кол} \cdot G} \leq [\Theta]_{кр}$ ):

$$D_{кол}^{жс} \approx \sqrt[4]{\frac{J_\rho^{кол}}{0,1(1-\alpha^4)}} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{кр}|}{0,1 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр} \cdot (1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{60 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2} \cdot (1-0,3^4)}} = 0,144 = 144 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $D_{кол}^{жс} \approx 150 \text{ мм}$ .

Принимаем диаметр кольцевого вала по наибольшему значению:  $D_{кол} = 190 \text{ мм}$ .

$$d_{кол} = 0,3 \cdot D_{кол} = 0,3 \cdot 190 = 57 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69 (до ближайшего меньшего)  $d_{кол} = 56 \text{ мм}$ .

Уточняем значение  $\alpha = d_{кол} / D_{кол} = 56 / 190 = 0,29$ .

в) Определяем размеры сечения вала квадратного сечения из условия прочности:

$$a^{np} \approx \sqrt[3]{\frac{W_k}{0,208}} \geq \sqrt[3]{\frac{|M_{кр}|}{0,208 \cdot [\tau]_{кр}}} = \sqrt[3]{\frac{60 \cdot 10^3}{0,208 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 0,186 = 186 \text{ мм}.$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $a^{np} = 190 \text{ мм}$ .

Определяем размеры сечения вала квадратного сечения из условия жесткости:

$$\alpha^{жс} \approx \sqrt[4]{\frac{J_k}{0,141}} \geq \sqrt[4]{\frac{|M_{кр}|}{0,141 \cdot G \cdot [\Theta]_{кр}}} = \sqrt[4]{\frac{60 \cdot 10^3}{0,141 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 1,75 \cdot 10^{-2}}} = 0,132 = 132 \text{ мм.}$$

Округляем результат согласно ГОСТ 6636-69:  $\alpha^{жс} = 140 \text{ мм.}$

Принимаем размер стороны квадрата по наибольшему значению  $\underline{a = 190 \text{ мм.}}$

2. Определяем максимальные касательные напряжения в сечениях валов:

а) сплошного круглого вала –  $\tau_{кр}^{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} \approx \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot d^3} = \frac{60 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 0,19^3} = 43,74 \cdot 10^6 = 43,7 \text{ МПа.}$

Строим эпюру распределения касательных напряжений по сечению вала (см. рис. 5.3, а).

б) кольцевого вала –  $\tau_{кр}^{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}^{кол}} \approx \frac{M_{кр}}{0,2 \cdot (1 - \alpha^4) \cdot D_{кол}^3} = \frac{60 \cdot 10^3}{0,2 \cdot (1 - 0,29^4) \cdot 0,19^3} = 44,0 \cdot 10^6 = 44,0 \text{ МПа}$

Строим эпюру распределения касательных напряжений по сечению вала (см. рис. 5.3, б).

в) вала квадратного сечения –  $\tau_{кр}^{max} = \frac{M_{кр}}{W_k} \approx \frac{M_{кр}}{0,208 \cdot a^3} = \frac{60 \cdot 10^3}{0,208 \cdot 0,19^3} = 42,06 \cdot 10^6 = 42,1 \text{ МПа.}$

Строим эпюру распределения касательных напряжений по сечению вала (см. рис. 5.3, в).

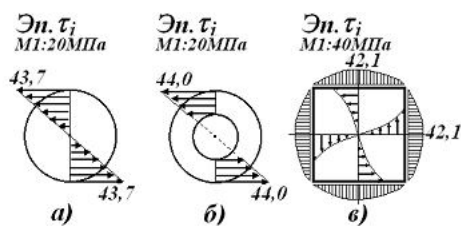


Рис. 5.3

3. Определяем значения основных геометрических характеристик валов

*Площадь сечения*

а) сплошного круглого вала:  $A_{кр} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,19^2}{4} = 2,83 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$

б) кольцевого вала:  $A_{кол} \approx 0,8 \cdot D_{кол}^2 \cdot (1 - \alpha^2) = 0,8 \cdot 0,19^2 \cdot (1 - 0,29^2) = 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2;$

в) вала квадратного сечения:  $A_{кв} = a^2 = 0,19^2 = 3,61 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$

*Момент сопротивления*

а) сплошного круглого вала:  $W_{\rho}^{кр} \approx 0,2 \cdot d^3 = 0,2 \cdot 0,19^3 = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$

б) кольцевого вала:  $W_{\rho}^{кол} \approx 0,2 D_{кол}^3 \cdot (1 - \alpha^4) = 0,2 \cdot 0,19^3 \cdot (1 - 0,29^4) = 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3;$

в) вала квадратного сечения:  $W_k \approx 0,208 \cdot a^3 = 0,208 \cdot 0,19^3 = 1,43 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$

*Момент инерции*

а) сплошного круглого вала:  $J_{\rho}^{кр} \approx 0,1 \cdot d^4 = 0,1 \cdot 0,19^4 = 1,30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$

б) кольцевого вала:  $J_{\rho}^{кол} \approx 0,1 \cdot D_{кол}^4 \cdot (1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 0,19^4 \cdot (1 - 0,29^4) = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$

в) вала квадратного сечения:  $J_k \approx 0,141 \cdot a^4 = 0,141 \cdot 0,19^4 = 1,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$

4. Оцениваем рациональность формы сечения валов по условию прочности и жесткости.

а) Вал сплошного круглого сечения:

$$w_{кр}^{кр} = \frac{W_{\rho}^{кр}}{\sqrt{A_{кр}^3}} = \frac{1,37 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(2,83 \cdot 10^{-2})^3}} = 0,29; \quad j_{кр}^{кр} = \frac{J_{\rho}^{кр}}{A_{кр}^2} = \frac{1,30 \cdot 10^{-4}}{(2,83 \cdot 10^{-2})^2} = 0,16.$$

б) Вал кольцевого сечения:

$$w_{кр}^{кол} = \frac{W_{\rho}^{кол}}{\sqrt{A_{кол}^3}} = \frac{1,36 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(2,65 \cdot 10^{-2})^3}} = 0,32; \quad j_{кр}^{кол} = \frac{J_{\rho}^{кол}}{A_{кол}^2} = \frac{1,29 \cdot 10^{-4}}{(2,65 \cdot 10^{-2})^2} = 0,18.$$

в) Вал квадратного сечения:

$$w_{кр}^{кв} = \frac{W_k}{\sqrt{A_{кв}^3}} = \frac{1,43 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(3,61 \cdot 10^{-2})^3}} = 0,21; \quad j_{кр}^{кв} = \frac{J_k}{A_{кв}^2} = \frac{1,84 \cdot 10^{-4}}{(3,61 \cdot 10^{-2})^2} = 0,14.$$

Отношение критериев рациональности

по прочности:  $w_{кр}^{кол} \div w_{кр}^{кр} \div w_{кр}^{кв} = 0,32 \div 0,29 \div 0,21 = 1,52 \div 1,38 \div 1,0;$

по жесткости:  $j_{кр}^{кол} \div j_{кр}^{кр} \div j_{кр}^{кв} = 0,18 \div 0,16 \div 0,14 = 1,29 \div 1,14 \div 1,0.$

**Вывод:** наиболее рациональным является вал кольцевого сечения, наименее рациональным – вал квадратного сечения (по условию прочности и жесткости соответственно в 1,5 и 1,3 раза).



## Задача № 6 Расчет на прочность при деформации смятия и сдвига

**Задание** На опасном участке вала из задачи 4 с помощью стандартной призматической шпонки (ГОСТ 23360-78) зафиксировано зубчатое колесо. Подобрать размеры шпонки ( $b \times h \times l$ ) по условию прочности на смятие. Проверить выбранную шпонку по условию прочности на срез.

Допускаемое напряжение смятия для шпоночных соединений:

при стальной ступице колеса  $[\sigma]_{см} = 110 - 190 \text{ МПа}$ ,

при чугунной ступице колеса  $[\sigma]_{см} = 70 - 100 \text{ МПа}$ .

Допускаемое напряжение на срез шпонок  $[\tau]_{ср} = 70...100 \text{ МПа}$ .

### Порядок выполнения

1. Вычертить схему шпоночного соединения.
2. Выписать из задачи 4 необходимые данные: максимальный крутящий момент на валу, диаметр вала в опасном сечении.
3. Определить  $[\sigma]_{см}$  и  $[\tau]_{ср}$  для заданных условий соединения.
4. Выбрать поперечные размеры шпонки  $b \times h$ , согласно ГОСТ 23360-78 (Приложение 9).
5. Определить минимальную длину шпонки из условия прочности на смятие.
6. Проверить прочность шпоночного соединения на срез.

### Указания к выполнению

Смятие и сдвиг являются разными видами деформации, приводящими к различным видам разрушения конструкций (рис. 6.1). Однако на практике эти два вида деформации обычно действуют одновременно, так как вызываются одинаковыми нагрузками и, соответственно, расчет на смятие и сдвиг осуществляется совместно.

**Смятие** – вид контактного разрушения поверхности изделия, вызываемый действием нормальных сжимающих сил в зоне контакта (например, смятие поверхности детали под гайкой и головкой болта). Условие прочности на смятие в общем виде:

$$\sigma_{см} = \frac{|F_{см}|}{A_{см}} \leq [\sigma]_{см},$$

где  $\sigma_{см}$  – нормальные напряжения, возникающие в зоне смятия;  
 $F_{см}$  – сжимающая сила, нормальная к поверхности смятия;  
 $A_{см}$  – площадь, по которой происходит смятие;  
 $[\sigma]_{см}$  – допускаемые напряжения на смятие.

Для простоты расчетов предполагают, что напряжения смятия распределены по площади контакта равномерно. Если соприкасаются детали из материалов разной твердости, то расчет на смятие осуществляется для детали из наиболее мягкого материала.

**Срез** – вид разрушения, вызываемый деформацией сдвига.

Условие прочности на срез в общем виде:  $\tau_{ср} = \frac{|Q_{ср}|}{A_{ср}} \leq [\tau]_{ср}$ ,

где  $\tau_{ср}$  – касательные напряжения, действующие по площади среза;  
 $Q_{ср}$  – сдвигающая (перерезывающая) сила;  
 $A_{ср}$  – площадь, по которой происходит срез;  
 $[\tau]_{ср}$  – допускаемые напряжения на срез.

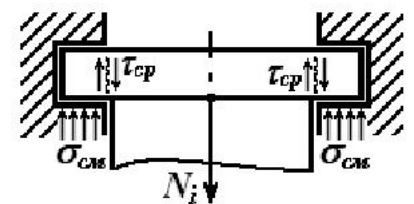


Рис. 6.1

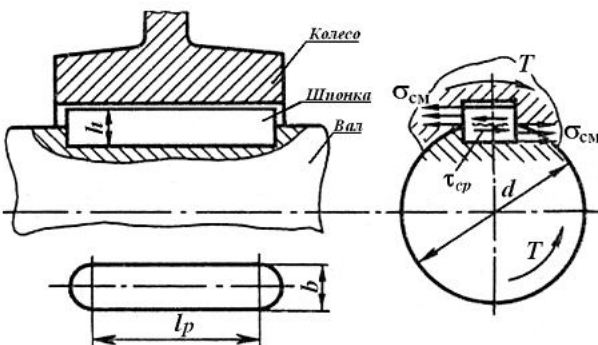


Рис. 6.2

**Шпоночные соединения** применяют для закрепления деталей на валах при передаче крутящего момента. Момент передается с вала на деталь боковыми гранями призматической шпонки. При этом на них возникают напряжения смятия  $\sigma_{см}$ , а в продольном сечении шпонки напряжения среза  $\tau_{ср}$  (рис. 6.2).

Как правило, для стандартных шпонок смятие является более опасным видом деформации, поэтому основной расчет проводят по условию прочности на смятие, а расчет на срез выполняют как проверочный.

При упрощенном расчете принимают:  $\sigma_{см} = \frac{|F_{см}|}{A_{см}} = \frac{|2T|}{d \cdot A_{см}} = \frac{|2T|}{d \cdot (0,5 \cdot h) \cdot l_p} \leq [\sigma]_{см}$ ,

где  $T$  – передаваемый момент;  
 $d$  – диаметр вала в месте установки шпонки;  
 $A_{см}$  – площадь, по которой происходит смятие шпонки;  
 $0,5h$  – условная глубина паза в ступице колеса;  
 $l_p$  – рабочая длина шпонки (для шпонок с плоскими торцами  $l_p = l$ , со скругленными торцами  $l_p = l - b$ )

Расчет шпонок на срез выполняется по формуле:  $\tau_{ср} = \frac{|Q_{ср}|}{A_{ср}} = \frac{|2T|}{d \cdot A_{ср}} = \frac{|2T|}{d \cdot b \cdot l_p} \leq [\tau]_{ср}$ ,

где  $A_{ср}$  – площадь, по которой происходит срез шпонки;  
 $b$  – ширина шпонки.

### Пример решения задачи

Дано: стальное колесо закреплено на валу при помощи шпонки со скругленными торцами (рис. 6.3), крутящий момент на колесе  $M_{max} = M_4 = 330 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $d_4 = 40 \text{ мм}$  (согласно решения задачи 4).

Найти: необходимые размеры призматической шпонки по условию прочности на смятие и на срез.

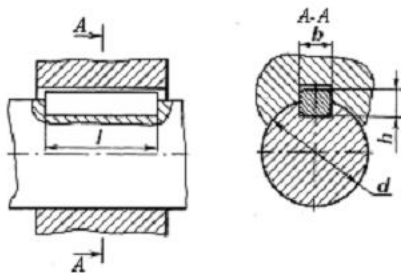


Рис. 6.3

### Решение:

1. По диаметру вала выбираем поперечные размеры стандартной призматической шпонки, согласно ГОСТ 23360-78 (Приложение 9):

$$b = 12 \text{ мм}; h = 8 \text{ мм}; t_1 = 5,0 \text{ мм}; t_2 = 3,3 \text{ мм}; l = 28 \dots 140 \text{ мм}.$$

2. Принимаем  $[\sigma]_{см} = 110 \text{ МПа}$ .

3. Определяем рабочую длину шпонки из условия прочности на смятие:

$$\sigma_{см} = \frac{|2M|}{d \cdot A_{см}} = \frac{|2M|}{d \cdot (0,5 \cdot h) \cdot l_p} \leq [\sigma]_{см}.$$

Таким образом,  $l_p \geq \frac{|2M|}{d \cdot (0,5 \cdot h) \cdot [\sigma]_{см}} = \frac{2 \cdot 330}{40 \cdot 10^{-3} \cdot (0,5 \cdot 8 \cdot 10^{-3}) \cdot 110 \cdot 10^6} = 37,5 \cdot 10^{-3} = 37,5 \text{ мм}$ .

4. Определяем полную длину шпонки:  $l \geq l_p + b = 37,5 + 12 = 49,5 \text{ мм}$ .

Округляем в большую сторону, согласно Примечания к ГОСТ 23360-78:  $l = 50 \text{ мм}$   
 $(l_p = l - b = 50 - 12 = 38 \text{ мм})$ .

5. Проверяем выбранную шпонку по условию прочности на срез:

$$\tau_{ср} = \frac{|2M|}{d \cdot A_{ср}} = \frac{|2M|}{d \cdot b \cdot l_p} = \frac{2 \cdot 330}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot 38 \cdot 10^{-3}} = 36,2 \cdot 10^6 = 36,2 \text{ МПа} \leq [\tau]_{ср} = 70 \dots 100 \text{ МПа}.$$

Ответ: Шпонка  $12 \times 8 \times 50$  ГОСТ 23360-78

## Задача № 7 Расчеты на прочность по нормальным напряжениям при плоском прямом изгибе

**Задание.** Двухопорная балка находится под действием системы сил и моментов. Подобрать размеры и тип профиля балки из условия прочности по нормальным напряжениям. Балка изготовлена из стали: допускаемые напряжения изгиба  $[\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}$ .





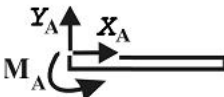
Схема балки приведена на рис. 7.3. Данные для расчета приведены в табл. 7.1.

### Порядок выполнения

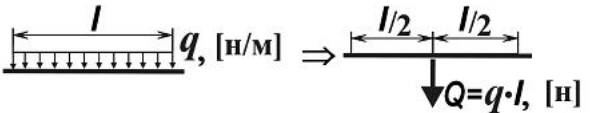
1. Вычертить схему балки с указанием числовых значений размеров и приложенных сил.
2. Составить уравнения равновесия и определить величину опорных реакций (реакций связей).
3. Определить значения внутренней поперечной силы  $Q$  по участкам балки. Начертить схему с эпюрой распределения  $Q$ .
4. Определить значения внутреннего изгибающего момента  $M_{из}$  по участкам балки. Начертить схему с эпюрой распределения  $M_{из}$ .
5. Найти из условия прочности по нормальным напряжениям минимальную величину осевого момента сопротивления сечения балки.
6. Подобрать по величине момента сопротивления номер профиля балки и выписать его основные характеристики (номер, момент сопротивления  $W_x$ , площадь  $A$ , момент инерции  $J_x$ , статический момент  $S_x$ ):
  - двутавра (ГОСТ 8239-89) (см. Приложение 6);
  - швеллера (ГОСТ 8240-97) (см. Приложение 7).

### Указания к выполнению

Согласно положениям статики всякое несвободное твердое тело (перемещение которого ограничено связями с другими телами) можно рассматривать как свободное, если отбросить связи и заменить их действие силами реакции этих связей:

Вид связи	Реакции	Название связи	Количество реакций
		шарнирно-подвижная опора	1
		шарнирно-неподвижная опора	2
		заделка	3

Распределенную нагрузку  $q$  рекомендуется предварительно заменить эквивалентной сосредоточенной силой  $Q$ .



Для нахождения величины и направления реакций связей используют условия равновесия системы сил, согласно которым, система сил находится в состоянии равновесия, если алгебраическая сумма проекций всех сил на оси координат равна нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки также равна нулю:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$

Направление сил реакций связей выбирают произвольно. Если значения сил при решении получатся отрицательными, то истинное направление расчетных сил противоположно предварительно выбранному.

Уравнения равновесия целесообразно составлять таким образом, чтобы в них входили суммы моментов сил относительно точек, через которые проходят неизвестные реакции связей. В этом случае в каждое уравнение войдет только одна неизвестная величина.

*Изгибом* называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях балки возникают изгибающие моменты  $M_{из}$  и поперечная сила  $Q$ . Если все внешние нагрузки, включая опорные реакции, лежат в одной из главных плоскостей балки и вызывают искривление оси стержня в этой плоскости, изгиб называется плоским.

Величины внутренней поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M_{из}$  на  $i$ -ом участке балки определяются с помощью метода сечений через внешние силы и изгибающие моменты по правилам:

- поперечная сила в любом сечении балки равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси балки

$$Q = \sum_{\text{от\_сечения}}^{\text{с\_одной\_стороны}} F_i ;$$

- изгибающий момент в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести данного сечения

$$M_{из_i} = \sum_{\text{от\_сечения}}^{\text{с\_одной\_стороны}} M_i .$$

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов необходимо записать соответствующие аналитические выражения для каждого участка балки. При этом необходимо помнить о правилах знаков для  $Q$  и  $M_{из}$ :

- поперечная сила  $Q$  считается положительной, если вызывающая ее внешняя сила стремится повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по ходу часовой стрелки;
- изгибающий момент  $M_{из}$  считается положительным, если балка на рассматриваемом участке изгибается выпуклостью вниз.

При построении эпюр следует использовать дифференциальные зависимости между распределенной нагрузкой, поперечной силой и изгибающим моментом:  $q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M_{из}}{dx^2}$ .

Под действием изгибающего момента  $M_{из}$  в поперечных сечениях балки возникают *нормальные напряжения*  $\sigma_{из}$ :  $\sigma_{из} = \frac{M_{из} \cdot y}{I_x}$ , где

$M_{из}$  – внутренний изгибающий момент в сечении балки;

$I_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$y$  – расстояние до нейтральной оси сечения.

*Нейтральным слоем* называется граница между сжимаемыми и растягиваемыми волокнами балки. При изгибе нейтральный слой искривляется, не изменяя своей длины. Нормальные напряжения на нейтральном слое равны нулю.

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения балки называется *нейтральной осью*. Если сечение имеет ось симметрии, перпендикулярную плоскости изгиба, нейтральная ось будет совпадать с ней.

Под действием поперечной силы  $Q$  в поперечных сечениях балки возникают *касательные напряжения*  $\tau_{из}$ . Однако для длинных тонких стальных балок, ненагруженных вблизи опор, максимальная величина нормальных напряжений в сечениях обычно значительно превышает максимальную величину касательных, поэтому основным расчетом на прочность для таких балок является расчет по нормальным напряжениям. Расчет на прочность по касательным напряжениям является проверочным (см. задачу 9).

Нормальные напряжения распределяются по сечению линейно и достигают максимальной величины на волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси. Для пластичного материала (сталь):

$$\sigma_{из}^{max} = \frac{M_{из} \cdot y_{max}}{I_x} = \frac{M_{из}}{W_x} .$$

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки для пластичных материалов

имеет вид:  $|\sigma_{из}^{max}| = \frac{|M_{из}^{max}|}{W_x} \leq [\sigma]_{из}$ ,

где  $\sigma_{из}^{max}$  – максимальные нормальные напряжения в сечении балки;

$[\sigma]_{из}$  – допускаемые напряжения изгиба материала балки;

$M_{из}^{max}$  – максимальный внутренний изгибающий момент в сечении балки;

$W_x$  – момент сопротивления сечения балки относительно нейтральной оси.

Соответственно, минимальный осевой момент сопротивления сечения пластичной балки из

условия прочности по нормальным напряжениям определяется по формуле:

$$W_x^{min} \geq \frac{M_{из}^{max}}{[\sigma]_{из}}$$

### Пример решения задачи

Дано: на двухопорную балку (рис. 7.1, а) действуют поперечные силы и изгибающие моменты:  $m = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $q = 3 \text{ кН/м}$ ;  $l_1 = l_2 = 3 \text{ м}$ ;  $l_3 = 4 \text{ м}$ . Балка изготовлена из стали:  $[\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}$ .

Найти:

- величину внутренней поперечной силы  $Q$  по участкам балки;
- величину внутреннего изгибающего момента  $M_{из}$  по участкам балки;
- подобрать размеры профиля балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

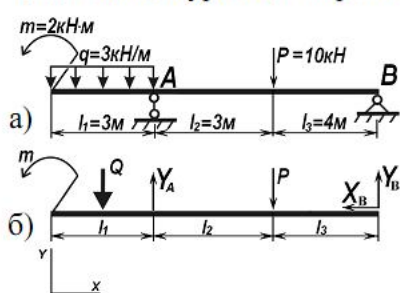
Решение:

1. Определяем величину и направление опорных реакций балки.

Заменяем реакции реакциями связей (Рис 7.1, б).

Приводим распределенную нагрузку к сосредоточенной силе:  $Q = q \cdot l_1 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ кН}$ .

Составляем уравнения равновесия и определяем неизвестные опорные реакции.



$$\begin{cases} \sum X_i = -X_B = 0 \\ \sum Y_i = -Q - P + Y_A + Y_B = 0 \\ \sum M_B = m + Q \cdot (l_1 / 2 + l_2 + l_3) - Y_A \cdot (l_2 + l_3) + P \cdot l_3 = 0 \end{cases}$$

$$X_B = 0;$$

$$Y_A = \frac{m + Q \cdot (l_1 / 2 + l_2 + l_3) + P \cdot l_3}{l_2 + l_3} = \frac{2 + 9 \cdot 8,5 + 10 \cdot 4}{7} = 16,93 \text{ кН};$$

$$Y_B = Q + P - Y_A = 9 + 10 - 16,93 = 2,07 \text{ кН}.$$

Рис. 7.1

Проверка: составляем дополнительное уравнение равновесия моментов относительно точки A:

$$\sum M_A = m + Q \cdot (l_1 / 2) - P \cdot l_2 + Y_B \cdot (l_2 + l_3) = 2 + 9 \cdot 1,5 - 10 \cdot 3 + 2,07 \cdot 7 \approx 0.$$

$$Y_A = 16,9 \text{ кН}; \quad Y_B = 2,1 \text{ кН}.$$

2. Определяем величину внутренней поперечной силы  $Q$  по участкам балки методом сечений.

Разбиваем балку на участки. Границы участков – точки приложения сосредоточенных сил и пар сил, начало и конец распределенной нагрузки. Рассматриваемая балка имеет 3 участка (рис. 7.2, а).

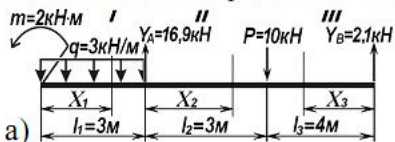
Определяем значение  $Q$  на каждом участке.

I участок:  $0 \leq x_1 \leq l_1$ .

Проводим секущую линию на расстоянии  $x_1$  от левой границы участка. Часть балки справа от сечения мысленно отбрасываем, а ее действие компенсируем внутренней поперечной силой  $Q$ . По 3-му закону Ньютона величина этой силы равна суммарному действию внешних поперечных сил слева от сечения.

Составим уравнение проекций всех сил, расположенных слева от сечения на ось  $y$  с учетом правила знаков:  $Q(x_1) = -q \cdot x_1$ .

Величина  $Q$  линейно зависит от величины координаты  $x_1$ . Очевидно, что эпюра  $Q(x_1)$  будет представлять прямую, наклонную к оси  $x$ . Для построения эпюры поперечной силы на I-ом участке достаточно определить значения силы  $Q$  в начале и в конце участка:



$$\begin{aligned} \text{при } x_1 = 0 \quad Q(0) &= -q \cdot 0 = 0; \\ \text{при } x_1 = l_1 \quad Q(l_1) &= -q \cdot l_1 = -3 \cdot 3 = -9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Если эпюра  $Q$  пересекает ось  $x$  в некоторой точке  $K$ , необходимо найти значение  $x_K$  из уравнения  $Q(x_K) = 0$ , так как оно понадобится в дальнейшем при нахождении значений изгибающих моментов на этом участке.

II участок:  $0 \leq x_2 \leq l_2$ .

Проводим секущую линию на расстоянии  $x_2$  от левой границы участка. Часть балки справа от сечения мысленно отбрасываем, а ее действие компенсируем внутренней поперечной силой  $Q$ .

Уравнение проекций всех сил, расположенных слева от сечения на ось  $y$ :

$$Q(x_2) = -q \cdot l_1 + Y_A = -3 \cdot 3 + 16,9 = 7,9 \text{ кН}.$$

Величина  $Q$  на этом участке не зависит от величины координаты  $x_2$ . Эпюра  $Q(x_2)$  будет представлять прямую, параллельную оси  $x$ .

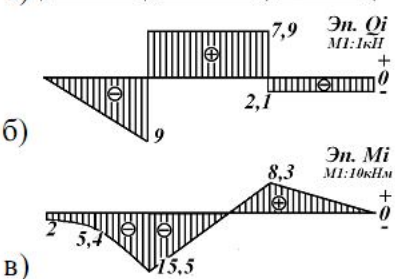


Рис. 7.2

III участок: для упрощения расчетов рассмотрим правую часть балки  $l_3 \leq x_3 \leq 0$ .

Проводим секущую линию на расстоянии  $x_3$  от правой границы участка. Часть балки слева от сечения мысленно отбрасываем, а ее действие компенсируем внутренней поперечной силой  $Q$ .

Уравнение проекций сил, расположенных справа от сечения на ось  $y$ :  $Q(x_3) = -Y_B = -2,1 \text{ кН}$ .

Величина  $Q$  на этом участке не зависит от величины координаты  $x_3$ . Эпюра  $Q(x_3)$  будет представлять прямую, параллельную оси  $x$ .

Строим эпюру поперечных сил  $Q(x)$  (рис. 7.2, б).

3. Определяем величину внутреннего изгибающего момента  $M_{из}$  по участкам балки.

I участок:  $0 \leq x_1 \leq l_1$ .

Компенсируем момент, создаваемый правой (отброшенной) частью балки внутренним изгибающим моментом  $M_{из}$ . Величина этого момента равна суммарному действию внешних изгибающих моментов слева от сечения. Составим уравнение проекций моментов всех сил и пар сил, расположенных слева от сечения на ось  $z$  с учетом правила знаков:  $M_{из}(x_1) = -m - q \cdot x_1 \cdot x_1/2$ .

(Для самопроверки определим, выполняются ли на участке дифференциальные зависимости Журавского:  $\frac{d^2 M_{из}}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q$ .  $\frac{d^2 (-m - q \cdot x_1^2/2)}{dx^2} = \frac{d(-q \cdot x_1)}{dx} = -q$ . Зависимости выполняются).

Эпюра  $M_{из}(x_1)$  будет представлять собой параболу. Для построения параболы необходимо определить значения  $M_{из}(x_1)$  в трех точках:

- в начале участка ( $x_1 = 0$ ),

- в конце участка ( $x_1 = l_1$ ),

- в середине участка ( $x_1 = l_1/2$ ), если эпюра  $Q(x_1)$  не пересекает ось  $x$  на данном участке, или в точке  $K$  ( $x_1 = x_K$ ), если эпюра  $Q(x_1)$  пересекает ось  $x$  на данном участке в точке  $K$ .

при  $x_1 = 0$   $M_{из}(0) = -m - q \cdot 0 = -2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

при  $x_1 = l_1$   $M_{из}(l_1) = -m - q \cdot l_1^2/2 = -2 - 3 \cdot 3^2/2 = -15,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

при  $x_1 = l_1/2$   $M_{из}(l_1/2) = -m - q \cdot l_1^2/8 = -2 - 3 \cdot 3^2/8 = -5,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

II участок:  $0 \leq x_2 \leq l_2$ .

Компенсируем момент, создаваемый правой (отброшенной) частью балки внутренним изгибающим моментом  $M_{из}$ . Уравнение проекций моментов всех сил и пар сил, расположенных слева от сечения на ось  $z$ :  $M_{из}(x_2) = -m - q \cdot l_1 \cdot (l_1/2 + x_2) + Y_A \cdot x_2$ .

(Проверим выполнение зависимостей Журавского:  $\frac{d^2 (-m - q \cdot l_1 \cdot (l_1/2 + x_2) + Y_A \cdot x_2)}{dx^2} = \frac{d(-q \cdot l_1 + Y_A)}{dx} = 0$ .

Зависимости выполняются).

Величина  $M$  линейно зависит от величины координаты  $x_2$ . Эпюра  $M_{из}(x_2)$  будет представлять прямую, наклонную к оси  $x$ . Для построения эпюры достаточно определить значения  $M_{из}(x_2)$  в начале и в конце участка:

при  $x_2 = 0$   $M_{из}(0) = -m - q \cdot l_1 \cdot (l_1/2 + 0) + Y_A \cdot 0 = -2 - 3 \cdot 3^2/2 = -15,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

при  $x_2 = l_2$   $M_{из}(l_2) = -m - q \cdot l_1 \cdot (l_1/2 + l_2) + Y_A \cdot l_2 = -2 - 3 \cdot 3 \cdot (1,5 + 3) + 16,93 \cdot 3 = 8,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

III участок: рассмотрим правую часть балки  $l_3 \leq x_3 \leq 0$ .

Компенсируем момент, создаваемый левой (отброшенной) частью балки внутренним изгибающим моментом  $M_{из}$ . Уравнение проекций моментов всех сил и пар сил, расположенных справа от сечения на ось  $z$ :  $M_{из}(x_3) = Y_B \cdot x_3$ .

(Проверим выполнение зависимостей Журавского:  $\frac{d^2 (Y_B \cdot x_3)}{dx^2} = \frac{d(Y_B)}{dx} = 0$ . Зависимости выполняются).

Величина  $M_{из}$  линейно зависит от величины координаты  $x_3$ . Эпюра  $M_{из}(x_3)$  будет представлять прямую, наклонную к оси  $x$ .

при  $x_3 = l_3$   $M_{из}(l_3) = Y_B \cdot l_3 = 2,07 \cdot 4 = 8,3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

при  $x_3 = 0$   $M_{из}(0) = Y_B \cdot 0 = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_{из}(x)$  (см. рис. 7.2, в).

4. Определяем размеры сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{из}^{max} = \frac{|M_{из}^{max}|}{W_x} \leq [\sigma]_{из}.$$

Находим осевой момент сопротивления балки в опасном сечении ( $|M_{из}^{max}(x)| = 15,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ):

$$W_x^{min} = \frac{|M_{из}^{max}|}{[\sigma]_{из}} = \frac{15,5 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 129,2 \cdot 10^{-6} = 129,2 \text{ см}^3.$$

В соответствии с *ГОСТ 8239-89* и *ГОСТ 8240-97* подбираем номер профиля балки

Двутавр № 18:  $W_x = 143,0 \text{ см}^3$ ;  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ;  $J_x = 1290,0 \text{ см}^4$ .

Швеллер № 8а:  $W_x = 132,0 \text{ см}^3$ ;  $A = 22,2 \text{ см}^2$ ;  $J_x = 1190,0 \text{ см}^4$ .

Таблица 7.1

№ варианта	$P, \text{ кН}$	$m, \text{ кН}\cdot\text{м}$	$q, \text{ кН/м}$	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$l_3, \text{ м}$
1	10	21	28	1,0	2,2	0,5
2	12	23	26	1,1	2,0	0,6
3	14	25	24	1,2	1,8	0,7
4	16	27	22	1,3	1,6	0,8
5	18	29	20	1,4	1,4	0,9
6	20	31	18	1,5	1,2	1,1
7	22	33	16	1,6	1,0	1,2
8	24	35	14	1,7	0,8	1,3
9	26	37	12	1,8	0,6	1,4
10	28	39	10	1,9	0,4	1,5

1-я буква имени	1-я буква фамилии				
	А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Щ
А, Ж, Н, У, Щ					
Б, З, О, Ф, Э					
В, И, П, Х, Ю					
Г, К, Р, Ц, Я					
Д, Л, С, Ч					
Е, М, Т, Ш					



## Задача № 8 Сравнение прочности балок различных сечений. Выбор оптимального сечения

**Задание** Оценить рациональность использования различных профилей для балок, работающих на изгиб. Выбрать наиболее рациональный профиль.

Схему нагружения балки и величину внутренних усилий взять из решения задачи 7. Геометрические характеристики сечений балок различного профиля приведены в Приложении 10.

### Порядок выполнения

- Для балки из задачи 7 подобрать геометрические размеры поперечного сечения, вычислить площадь  $A$  и осевой момент сопротивления  $W_x$ :
  - двутаврового профиля (ГОСТ 8239-89) (см. Приложение 6);
  - швеллера (ГОСТ 8240-97) (см. Приложение 7);
  - круглого профиля ( $d$ );
  - прямоугольного профиля ( $h/b=2$ );
  - квадратного профиля ( $a \times a$ ).
- Оценить рациональность подобранных сечений по значению удельного момента сопротивления.
- Сделать вывод (выбрать наиболее рациональное сечение).

### Указания к выполнению

Для оценки рациональности сечений балок по условию прочности при изгибе вводится безразмерная величина, характеризующая отношение прочности балки по нормальным напряжениям к ее весу – удельный момент сопротивления:

$$w = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}, \quad \text{где}$$

$W_x$  – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной оси;

$A$  – площадь поперечного сечения балки.

Чем больше значение  $w$ , тем выше рациональность сечения (способность сопротивляться деформации изгиба).

### Пример решения задачи

Дано: согласно решению задачи 5,  $W_x^{min} = 129,2 \text{ см}^3$

Найти: наиболее рациональное сечение для балки, работающей на изгиб.

Решение: 1. Определяем геометрические характеристики сечений

а) двутавр № 18:  $W_x = 143,0 \text{ см}^3$ ;  $A = 23,4 \text{ см}^2$ ;  $J_x = 1290,0 \text{ см}^4$ ;

б) швеллер № 8а:  $W_x = 132,0 \text{ см}^3$ ;  $A = 22,2 \text{ см}^2$ ;  $J_x = 1190,0 \text{ см}^4$ ;

в) круг:  $W_x = \pi \cdot d^3 / 32$ , следовательно  $d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 129,2}{3,14}} = 10,96 \text{ см}^3$

Округляем, согласно ГОСТ 6636 – 69 (Приложение 2)  $d=11 \text{ см}$ .

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 11^3}{32} = 130,6 \text{ см}^3; \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 11^2}{4} = 95 \text{ см}^2.$$

г) прямоугольник ( $h/b=2$ ):  $W_x = b \cdot h^2 / 6 = 2 \cdot b^3 / 3$ ;  $b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 129,2} = 5,8 \text{ см}$ ;

Округляем, согласно ГОСТ 6636 – 69 (Приложение 2)  $b=6,0 \text{ см}$ .

$$W_x = b \cdot h^2 / 6 = 2 \cdot 6,0^3 / 3 = 144 \text{ см}^3; \quad A = b \cdot h = 2 \cdot 6,0^2 = 72,0 \text{ см}^2$$

д) квадрат:  $W_x = a^3 / 6$ ;  $a = \sqrt[3]{6 \cdot W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 129,2} = 9,2 \text{ см}$ ;

Округляем, согласно ГОСТ 6636 – 69 (Приложение 2)  $a=9,5 \text{ см}$ .

$$W_x = a^3 / 6 = 9,5^3 / 6 = 142,9 \text{ см}^3; \quad A = a^2 = 9,5^2 = 90,3 \text{ см}^2.$$

2. Оцениваем рациональность выбранных сечений  $w = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}$

$$\text{а) двутавр } w = \frac{143,0}{\sqrt{23,4^3}} = 1,26; \quad \text{б) швеллер } w = \frac{132,0}{\sqrt{22,2^3}} = 1,26; \quad \text{в) круг } w = \frac{130,6}{\sqrt{95^3}} = 0,14;$$

$$\text{г) прямоугольник } w = \frac{144,0}{\sqrt{72,0^3}} = 0,24; \quad \text{д) квадрат } w = \frac{142,9}{\sqrt{90,3^3}} = 0,17.$$

По степени рациональности сечения соотносятся следующим образом:

швеллер : двутавр : прямоугольник : квадрат : круг = 1,26 : 1,26 : 0,24 : 0,17 : 0,14 = 9 : 9 : 1,7 : 1,2 : 1

Вывод: по условию прочности наиболее рациональная форма сечения – швеллер и двутавр, наименее рациональная – круг (примерно в 9 раз).

## Задача № 9 Расчеты на прочность при плоском прямом изгибе с учетом действия касательных напряжений

**Задание** Оценить прочность балки с учетом действия на нее касательных напряжений. Схему нагружения балки и ее геометрические характеристики взять из решения задачи 7.

### Порядок выполнения

1. Определить опасное сечение и проверить прочность балки по нормальным напряжениям.
2. Определить опасное сечение и проверить прочность балки по касательным напряжениям.
3. Определить опасное сечение и проверить прочность балки с учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений. Построить эпюры распределения нормальных и касательных напряжений по сечению балки.

### Указания к выполнению

Проверка прочности по нормальным напряжениям была рассмотрено в задаче 7.

Под действием поперечной силы  $Q$  в поперечных сечениях балки возникают *касательные*

напряжения  $\tau_{из}$ , вычисляемы по формуле Журавского:  $\tau_{из} = \frac{Q \cdot S_x^*}{I_x \cdot b}$ ,

где  $Q$  – внутренняя поперечная сила в сечении балки;  
 $I_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;  
 $b$  – толщина сечения в исследуемой точке;

$S_x^*$  – статический момент отсеченной площади  $A^*$  сечения (выше исследуемой точки) относительно нейтральной оси (см. рис. 7.1).  $S_x^* = A^* \cdot y_0$ ,

где  $y_0$  – расстояние от центра тяжести отсеченной площади  $A^*$  сечения до нейтральной оси.

Касательные напряжения распределяются по сечению балки нелинейно и, как правило, достигают максимального значения на волокнах нейтральной оси. Условие прочности по

касательным напряжениям при изгибе балки имеет вид:  $|\tau_{из}^{max}| = \frac{|Q^{max}| \cdot S_x^{max}}{I_x \cdot b} \leq [\tau]_{из}$ , где

$[\tau]_{из}$  – допускаемые касательные напряжения изгиба материала балки. Обычно принимают  $[\tau]_{из} = 0,6 \cdot [\sigma]_{из}$ .

Проверка прочности с учетом *совместного действия нормальных и касательных напряжений* делается для балок, поперечные сечения которых имеют тонкую стенку, резко изменяющуюся вблизи крайних волокон. Проверку прочности производят в точках перехода от малой ширины к большой.

Проверку осуществляют в сечениях балки, в которых и нормальные, и касательные напряжения одновременно достигают больших величин.

Балки из пластичного материала проверяют по третьей гипотезе прочности по формуле:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{\sigma_{из}^2 + 4 \cdot \tau_{из}^2} \leq [\sigma]_{из}, \text{ где}$$

$\sigma_{экв}$  – условные нормальные напряжения, равноопасные сочетанию нормальных и касательных напряжений;

$\sigma_{из}$  – фактические нормальные напряжения в опасном сечении балки;

$\tau_{из}$  – фактические касательные напряжения в опасном сечении балки;

$[\sigma]_{из}$  – допускаемые нормальные напряжения изгиба материала балки.

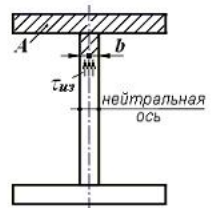


Рис. 9.1

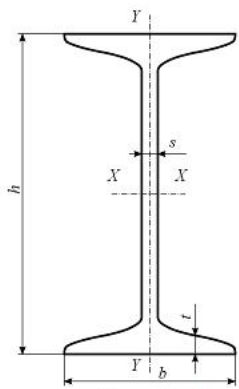


Рис. 9.2

### Пример решения задачи

**Дано:** для изготовления балки (рис. 7.1) выбран стальной двутавровый профиль № 18 (ГОСТ 8239-89) (см. решение задачи 7) с параметрами (рис. 9.2):

$$h = 180 \text{ мм}; b = 90 \text{ мм}; s = 5,1 \text{ мм}; t = 8,1 \text{ мм};$$

$$W_x = 143,0 \text{ см}^3; J_x = 1290,0 \text{ см}^4; S_x = 81,4 \text{ см}^3; [\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}.$$

**Найти:** а) проверить прочность балки по нормальным напряжениям;

б) проверить прочность балки по касательным напряжениям;

в) проверить прочность балки с учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений.

**Решение:** 1. Согласно эпюре изгибающих моментов (рис. 7.2, в), нормальные напряжения достигают максимального значения в крайнем сечении 1-го участка ( $M_{из}^{max}(x) = 15,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ):

$$|\sigma_{из}^{max}| = \frac{M_{из}^{max}}{W_x} = \frac{15,5 \cdot 10^3}{143,0 \cdot 10^{-6}} = 108,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 108,4 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

2. Допускаемые касательные напряжения для материала балки:  $[\tau]_{из} = 0,6 \cdot [\sigma]_{из} = 0,6 \cdot 120 = 72 \text{ МПа}$ . Согласно эпюре поперечных сил (рис. 7.2, б), касательные напряжения достигают максимального значения также в крайнем сечении 1-го участка ( $Q^{max} = 9 \text{ кН}$ ):

$$|\tau_{из}^{max}| = \frac{Q^{max} \cdot S_x^{max}}{I_x \cdot s} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 11,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,1 \text{ МПа} \leq [\tau]_{из} = 72 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

3. Для проверки прочности балки с учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений выбираем сечение, в котором изгибающий момент  $M_{из}$  и поперечная сила  $Q$  одновременно достигают больших значений (необязательно максимальных). Согласно эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 7.2, б, в), касательные и нормальные напряжения достигают больших значений в крайнем сечении 1-го участка, соответственно  $Q^{max} = 9 \text{ кН}$ ,  $M_{из}^{max}(x) = 15,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Строим эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении (рис. 9.3, а, б). Эпюра нормальных напряжений представляет собой линейную зависимость.

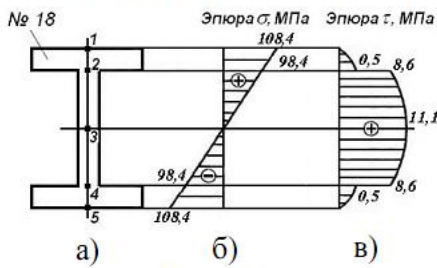


Рис. 9.3

В точке 1:  $\sigma_{из}^1 = \sigma_{из}^{max} = 108,4 \text{ МПа}$

В точке 2:

$$\sigma_{из}^2 = \frac{M_{из}^{max} \cdot y_2}{I_x} = \frac{15,5 \cdot 10^3 \cdot 81,9 \cdot 10^{-3}}{1290 \cdot 10^{-8}} = 98,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 98,4 \text{ МПа},$$

где  $y_2 = h/2 - t = 180/2 - 8,1 = 81,9 \text{ мм}$ .

В точке 3:  $\sigma_{из}^3 = 0$ , так как  $y_3 = 0$ .

В точках 4, 5:  $\sigma_{из}^4 = -\sigma_{из}^2$ ,  $\sigma_{из}^5 = -\sigma_{из}^1$ , так как сечение симметрично относительно нейтральной оси, при этом  $y_4 = -y_2$ ,  $y_5 = -y_2$ .

Строим эпюру распределения касательных напряжений в опасном сечении (рис. 9.3, а, в).

В точке 1:  $\tau_{из}^1 = 0$ , так как площадь отсеченной части  $A^{I*} = 0$  и, следовательно, статический момент этой площади  $S_x^{I*} = 0$ .

В точке 2 происходит резкое изменение ширины поперечного сечения, поэтому необходимо вычислить два значения касательных напряжений.

Выше т. 2 ширина поперечного сечения равна  $b = 145 \text{ мм}$ :

$$\tau_{из}^{2'} = \frac{Q^{max} \cdot S_x^{2*}}{I_x \cdot b} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 62,7 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 90 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,5 \text{ МПа}.$$

Ниже т. 2 ширина поперечного сечения равна  $s = 7,5 \text{ мм}$ :

$$\tau_{из}^{2''} = \frac{Q^{max} \cdot S_x^{2*}}{I_x \cdot s} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 62,7 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 8,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,6 \text{ МПа}.$$

Где статический момент отсеченной площади в обоих случаях:

$$S_x^{2*} = A^{2*} \cdot y_0 = b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 90 \cdot 8,1 \cdot \left( \frac{180}{2} - \frac{8,1}{2} \right) = 62,7 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 62,7 \text{ см}^3.$$

В точке 3:  $\tau_{из}^3 = \tau_{из}^{max} = \frac{Q^{max} \cdot S_x^{max}}{I_x \cdot s} = \frac{9 \cdot 10^3 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 5,1 \cdot 10^{-3}} = 11,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 11,1 \text{ МПа}.$

В точках 4, 5:  $\tau_{из}^4 = \tau_{из}^2$ ,  $\tau_{из}^5 = \tau_{из}^1$ , так как сечение симметрично относительно нейтральной оси.

Проверку прочности производят в точках скачкообразного изменения ширины сечения.

Наиболее опасной является точка 2:  $\sigma_{из}^2 = 98,4 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{из}^2 = 8,6 \text{ МПа}$ .

Согласно третьей гипотезе прочности в опасном сечении:

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\sigma_{из}^2 + 4 \cdot \tau_{из}^2} = \sqrt{98,4^2 + 4 \cdot 8,6^2} = 99,9 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

Если условие прочности не выполняется, необходимо выбрать балку с большим сечением (следующий номер профиля по ГОСТ) и повторить проверку прочности в опасной точке.

В целях упрощения расчета и с учетом увеличения запаса прочности в качестве расчетных можно взять максимальные значения напряжений в сечении, т. е.  $\sigma_{из}^1 = 108,4 \text{ МПа}$ ;  $\tau_{из}^3 = 11,1 \text{ МПа}$ .

$$\sigma_{эквIII} = \sqrt{\sigma_{из}^2 + 4 \cdot \tau_{из}^2} = \sqrt{108,4^2 + 4 \cdot 11,1^2} = 110,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{из} = 120 \text{ МПа}.$$

Прочность балки обеспечена.

## Задача № 10 Расчет сжатого стержня на устойчивость

**Задание.** Подобрать размер сечения квадратной деревянной стойки ( $c \times c$ ) из условия устойчивости с использованием коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ . Определить величину критической силы  $F_{кр}$  и коэффициент запаса устойчивости  $[n]_y$  выбранной стойки.

Для древесины (сосна, ель вдоль волокна): допускаемое напряжение сжатия  $[\sigma]_c = 10 \text{ МПа}$ ; модуль продольной упругости  $E = 10^4 \text{ МПа}$ , рекомендуемый коэффициент запаса устойчивости  $[n]_y = 3$ .

Схема стойки и данные для расчета приведены в табл. 10.1, 7.2.

### Порядок выполнения

1. Вычертить схему стойки с указанием числовых значений размеров и приложенных сил.
2. Определить размеры поперечного сечения стойки по упрощенной формуле расчета на устойчивость, принимая  $\varphi_1 = 0,5$ .
3. Определить гибкость  $\lambda$  и коэффициент  $\varphi_1'$  принятого сечения.
4. Определить значение  $\varphi_2$  во 2-м приближении, присвоив ему среднее значение между  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$ . Определить размеры поперечного сечения стойки по упрощенной формуле.
5. Повторить действия 3-5. Вычисления необходимо продолжать, пока расхождение между  $\varphi_i$  и  $\varphi_i'$  не станут меньше 5%. Обычно для этого бывает достаточно 2-3 итераций.
6. Уточнить гибкость найденной стойки и по формуле Эйлера или Ясинского определить величину критической силы.
7. Определить коэффициент запаса устойчивости стойки. Сравнить его с рекомендуемым. Сделать вывод.

### Указания к выполнению

Центрально сжатый стержень (стойка) при некотором критическом значении сжимающей нагрузки  $F_{кр}$  может перейти от состояния простого сжатия к состоянию *продольного изгиба* (рис. 10.1). То есть произойдет потеря устойчивости, сопровождающаяся потерей формы стержня и снижением его прочностных характеристик.

Способность стержня сопротивляться потере устойчивости характеризуется

безразмерной величиной – *гибкостью*:  $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$ , где

$\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления его концов;

$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$  – наименьший радиус инерции поперечного сечения стержня;

$J_{\min}$  – наименьший осевой момент инерции поперечного сечения стержня (см. Приложение 10);  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Если гибкость стержня  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ , критическую силу вычисляют по *формуле Эйлера*:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2} = A \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}.$$

Если гибкость стержня  $\lambda_{\text{пред}} > \lambda \geq \lambda_0$ , критическую силу вычисляют по *эмпирической формуле Ясинского-Тетмайера*:

$$F_{кр} = A \cdot \sigma_{кр} = A \cdot (a - b \cdot \lambda).$$

$\lambda_0$ ,  $\lambda_{\text{пред}}$ ,  $a$ ,  $b$  – являются справочными величинами, зависящими от материала стержня (см. Приложение 13).

Если гибкость стержня  $\lambda < \lambda_0$ , стержень рассчитывают на прочность без учета опасности потери устойчивости, то есть производят расчет на простое сжатие по формуле:  $F_{кр} = A \cdot \sigma_T$ .

При практических расчетах на устойчивость пользуются, как правило, упрощенной формулой, заменяя расчет на продольный изгиб расчетом на сжатие по пониженным допускаемым напряжениям:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]_{сж}, \quad \text{где}$$

$[\sigma]_{сж}$  – допускаемые напряжения на сжатие;

$\varphi$  – коэффициент снижения допускаемых напряжений (коэффициент продольного изгиба). Зависит от материала и гибкости стержня. Является справочной величиной (см. Приложение 12).

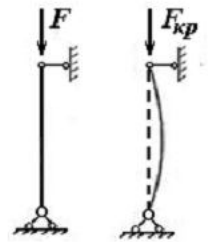


Рис. 10.1

Определение размеров поперечного сечения сжатого стержня из условия устойчивости является статически неопределимой задачей, поэтому она решается методом последовательных приближений. Задача считается решенной, если перегруз не превышает 5%, а недогруз 15% от допускаемой нагрузки:  $-5\% \leq \Delta\sigma_i \leq 15\%$ .

$$\Delta\sigma_i = \frac{[\sigma]_y - |\sigma_i|}{[\sigma]_y} \cdot 100\% , \quad \text{где}$$

$\sigma_i = \frac{F}{A_i}$  – напряжения в стержне, найденные на  $i$ -ом шаге приближения;

$A_i$  – площадь сечения стержня на  $i$ -ом шаге приближения;

$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y}$  – допускаемые напряжения материала стержня при расчете на устойчивость;

$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A_i}$  – критическое напряжение для стержня.

На практике вычисления прекращают при выполнении условия:  $\Delta\varphi_i = \frac{|\varphi_i - \varphi'_i|}{\varphi_i} \cdot 100\% \leq 5\%$ ,

где  $\varphi_i$  и  $\varphi'_i$  – значения коэффициента продольного изгиба в начале и конце последнего приближения.

### Пример решения задачи

Дано: деревянная стойка длиной  $l = 1$  м (рис. 10.2) находится под действием сжимающей силы  $F = 10$  кН. Допускаемые напряжения материала стойки  $[\sigma]_c = 20$  МПа.

Найти: а) размеры квадратного сечения стойки ( $c \times c$ );  
б) величину критической силы  $F_{кр}$ ;  
в) коэффициент запаса устойчивости  $n_y$ .

Решение:

1. Согласно табл. 10.2, коэффициент приведения длины стойки  $\mu = 1$ .

а) Принимая  $\varphi_1 = 0,5$ , находим размеры поперечного сечения стойки по упрощенной формуле расчета на устойчивость:  $A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]_c} = \frac{10 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 20 \cdot 10^6} = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow c_1 = \sqrt{A_1} = 3,16 \cdot 10^{-2} \approx 32 \text{ мм}$  (результат округляем до целого числа в мм).

Определяем гибкость стойки:  $\lambda_1 = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 1}{c_1} \cdot \sqrt{12} = \frac{3,46}{32 \cdot 10^{-3}} = 108$ , где

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{c^4}{12 \cdot c^2}} = \frac{c}{\sqrt{12}} \quad (\text{согласно Приложению 10, для квадратного сечения } I_x = I_y = \frac{c^4}{12}).$$

Определяем коэффициент продольного изгиба  $\varphi'_1$  методом линейной интерполяции (см. Приложение 12):

при  $\lambda = 100$   $\varphi = 0,31$ ;

при  $\lambda = 110$   $\varphi = 0,25$ ;

при  $\lambda = 108$   $\varphi'_1 = 0,31 - \frac{0,31 - 0,25}{110 - 100} \cdot 8 = 0,262$ .

Коэффициент  $\varphi_i$  расходится с  $\varphi'_i$  более чем на 5%.

б) Делаем 2-е приближение, принимая  $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,262}{2} = 0,381$ .

$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot [\sigma]_c} = \frac{10 \cdot 10^3}{0,381 \cdot 20 \cdot 10^6} = 13,12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \Rightarrow c_2 = \sqrt{A_2} = 3,62 \cdot 10^{-2} \approx 36 \text{ мм}$ .

Гибкость стойки:  $\lambda_2 = \frac{3,46}{c_2} = \frac{3,46}{36 \cdot 10^{-3}} = 96$ .

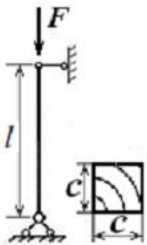


Рис. 10.2

Определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\text{при } \lambda = 90 \quad \varphi = 0,38;$$

$$\text{при } \lambda = 100 \quad \varphi = 0,31;$$

$$\text{при } \lambda = 96 \quad \varphi_2' = 0,38 - \frac{0,38 - 0,31}{100 - 90} \cdot 6 = 0,338.$$

Коэффициент  $\varphi_2$  расходится с  $\varphi_2'$  более чем на 5%:

$$\Delta\varphi_2 = \frac{|\varphi_2 - \varphi_2'|}{\varphi_2'} \cdot 100\% = \frac{|0,381 - 0,338|}{0,338} \cdot 100\% = 12,7\% > 5\%$$

в) Делаем 3-е приближение, принимая  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,381 + 0,338}{2} = 0,36.$

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot [\sigma]_c} = \frac{10 \cdot 10^3}{0,36 \cdot 20 \cdot 10^6} = 13,89 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \quad \Rightarrow \quad c_3 = \sqrt{A_3} = 3,73 \cdot 10^{-2} \approx 37 \text{ мм.}$$

Гибкость стойки:  $\lambda_3 = \frac{3,46}{c_3} = \frac{3,46}{37 \cdot 10^{-3}} = 93,5.$

Определяем коэффициент продольного изгиба:  $\varphi_3' = 0,38 - \frac{0,38 - 0,31}{100 - 90} \cdot 3,5 = 0,356.$

Коэффициент  $\varphi_3$  расходится с  $\varphi_3'$  менее чем на 5%:

$$\Delta\varphi_3 = \frac{|\varphi_3 - \varphi_3'|}{\varphi_3'} \cdot 100\% = \frac{|0,36 - 0,356|}{0,356} \cdot 100\% = 1,1\% < 5\%.$$

Заданным значениям соответствует брус сечением  $37 \times 37$  мм.

2. Определяем критическую силу.

Согласно Приложению 13, расчетные данные для древесины (сосна, ель):

$$a = 29,3 \text{ МПа}; \quad b = 0,19 \text{ МПа}; \quad \lambda_{пред} = 59.$$

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{l \cdot l}{c_1} \cdot \sqrt{12} = \frac{3,46}{37 \cdot 10^{-3}} = 93,5 > \lambda_{пред} = 59, \text{ значит, гибкость стойки находится в границах}$$

применимости формулы Эйлера:  $F_{кр} = A \cdot \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} = \frac{(37 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 3,14^2 \cdot 10^{10}}{(93,5)^2} = 15,4 \cdot 10^3 = 15,4 \text{ кН.}$

3. Определяем коэффициент запаса устойчивости  $n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{15,4}{10} = 1,5 < [n]_y = 3.$

Коэффициент запаса устойчивости меньше рекомендуемого для древесины. Размер поперечного сечения стойки желательно увеличить.

Ответ: поперечный размер стойки  $37 \times 37$  мм. Потеря устойчивости произойдет при  $F_{кр} = 15,4$  кН. Запас устойчивости  $n_y = 1,5.$

Таблица 10.1

1-я буква имени	Параметры стойки	1-я буква фамилии				
		А, Е, Л, Р, Х, Э	Б, Ж, М, С, Ц, Ю	В, З, Н, Т, Ч, Я	Г, И, О, У, Ш	Д, К, П, Ф, Щ
А, Ж, Н, У, Щ	$F$ , кН	5	10	15	20	25
	$l$ , м	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2
Б, З, О, Ф, Э	$F$ , кН	30	6	40	45	50
	$l$ , м	2,0	8,0	3,6	3,4	3,2
В, И, П, Х, Ю	$F$ , кН	34	26	46	38	28
	$l$ , м	6,0	5,6	5,2	4,8	4,4
Г, К, Р, Ц, Я	$F$ , кН	4	35	8	16	24
	$l$ , м	7,6	3,8	7,0	6,6	6,2
Д, Л, С, Ч	$F$ , кН	36	42	44	32	48
	$l$ , м	5,8	5,4	5,0	4,6	4,2
Е, М, Т, Ш	$F$ , кН	2	12	22	14	18
	$l$ , м	7,8	7,4	7,2	6,8	6,4

Таблица 10.2

Значения коэффициента $\mu$				
№ варианта				
1	2	3	4	5
$\mu = 1$	$\mu = 0,33$	$\mu = 1,35$	$\mu = 0,5$	$\mu = 0,5$
№ варианта				
6	7	8	9	10
$\mu = 2$	$\mu = 0,7$	$\mu = 0,44$	$\mu = 1,26$	$\mu = 0,35$

## Приложение 1 Физико-механические свойства некоторых материалов

Материал	Временное сопротивление $\sigma_B$ , МПа	Предел текучести $\sigma_T$ , МПа	Предел выносливости $\sigma_{-1}$ , МПа	Допускаемые напряжения на срез $[\tau]_{ср.}, МПа$	Допускаемые напряжения на смятие $[\sigma]_{сж.}, МПа$	Модуль упругости $E \cdot 10^{-5}$ , МПа	Коэффициент Пуассона $\mu$
Сталь: Ст2	330	195	120...160	(0,3...0,4)· $\sigma_T$	0,5· $\sigma_B$	2,0	0,3
Ст3	380	200	120...160				
Ст4	410	235	120...160				
Ст5	490	255	120...160				
10	340	210	120...160				
20	420	240	120...160				
25	460	280	–				
30	500	300	170...210				
35	540	320	170...220				
40	580	340	180...240				
45	610	360	190...250				
50	640	380	200...260				
55	660	390	216				
60	690	410	220...280				
09Г2	440	305	235				
10Г2С1	490	355	230				
10ХНДП	470	345	284				
10ХСНД	530	390	284				
14Г2	460	335	295				
14ХГС	580	420	–				
15ХСНД	490	345	304				
17Г1С	530	320	–				
Чугун: Сч15	150 / 650	–	–	53	120	0,8...1,5	0,23...0,27
Сч35	340 / 1100	–	–	90	180	1,3...1,5	
Латунь Л68	320	90	120			1,1	0,32...0,34
Бронза: БрОЦС5-5-5	200	40...50	–			1,0	0,33
БрАЖ9-4	550	200	–			1,0...1,1	

Примечание. После косой черты для хрупких материалов указан предел прочности при сжатии

## Приложение 2 Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636 – 69 (фрагмент\*)

Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40	Ra 20	Ra 40
1,0	1,00	4,0	4,00	16,0	16,0	63	63	250	250
	1,05		4,20		17,0		67		260
1,1	1,10	4,5	4,50	18,0	18,0	71	71	280	280
	1,15		4,80		19,0		75		300
1,2	1,20	5,0	5,00	20,0	20,0	80	80	320	320
	1,30		5,30		21,0		85		340
1,4	1,40	5,6	5,6	22,0	22,0	90	90	360	360
	1,50		6,0		24,0		95		380
1,6	1,60	6,3	6,3	25,0	25,0	100	100	400	400
	1,70		6,7		26,0		105		420
1,8	1,80	7,1	7,1	28,0	28,0	110	110	450	450
	1,90		7,5		30,0		120		580
2,0	2,00	8,0	8,0	32	32	125	125	500	500
	2,10		8,5		34		130		530
2,2	2,20	9,0	9,0	36	36	140	140	560	560
	2,40		9,5		38		150		600
2,5	2,50	10,0	10,0	40	40	160	160	630	630
	2,60		10,5		42		170		670
2,8	2,80	11,0	11,0	45	45	180	180	710	710
	3,00		11,5		48		190		750
3,2	3,20	12,0	12,0	50	50	200	200	800	800
	3,40		13,0		53		210		850
3,6	3,60	14,0	14,0	56	56	220	220	900	900
	3,80		15,0		60		240		950

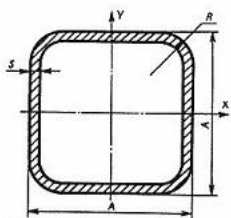
Примечание. Из установленных стандартом рядов (Ra5, Ra10, Ra20, Ra40) приведены ряды Ra20, Ra40 с более мелкой градацией



**Приложение 3. Трубы стальные электросварные прямошовные (в соответствии с ГОСТ 10704-91)**

**размеры**

Наружный диаметр $D$ , мм	Площадь труб $A$ , см <sup>2</sup> , при толщине стенки $b$ , мм																
	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,5	2,8	3	3,2	3,5	3,8	4	4,5	5	5,5
10	0,28	0,33															
10,2	0,29	0,34															
12	0,35	0,41	0,47	0,52													
13	0,38	0,44	0,51	0,57													
14	0,41	0,48	0,55	0,62													
16	0,47	0,56	0,64	0,72													
18	0,53	0,63	0,73	0,82	0,92												
19	0,57	0,67	0,77	0,87	0,97	1,07											
20	0,60	0,71	0,82	0,92	1,03	1,13											
21,3	0,64	0,76	0,87	0,99	1,10	1,21											
22	0,66	0,78	0,91	1,02	1,14	1,26											
24	0,72	0,86	0,99	1,13	1,25	1,38	1,51	1,69									
25	0,75	0,90	1,04	1,18	1,31	1,44	1,58	1,77									
26	0,79	0,93	1,08	1,23	1,37	1,51	1,64	1,84									
27	0,82	0,97	1,13	1,28	1,42	1,57	1,71	1,92									
28	0,85	1,01	1,17	1,33	1,48	1,63	1,78	2,00									
30	0,91	1,09	1,26	1,43	1,59	1,76	1,92	2,16									
32	0,97	1,16	1,35	1,53	1,71	1,88	2,06	2,32	2,57	2,73							
33	1,00	1,20	1,39	1,58	1,76	1,95	2,13	2,39	2,66	2,83							
33,7		1,22	1,42	1,61	1,80	1,99	2,18	2,45	2,72	2,89							
35		1,27	1,48	1,68	1,88	2,07	2,27	2,55	2,83	3,01							
36		1,31	1,52	1,73	1,93	2,14	2,33	2,63	2,92	3,11							
38		1,39	1,61	1,83	2,05	2,26	2,47	2,79	3,09	3,30							
40		1,46	1,70	1,93	2,16	2,39	2,61	2,94	3,27	3,49							
42		1,54	1,78	2,03	2,27	2,51	2,75	3,10	3,45	3,67							
44,5		1,63	1,89	2,16	2,41	2,67	2,92	3,30	3,67	3,91							
45		1,65	1,92	2,18	2,44	2,70	2,96	3,34	3,71	3,96							
48			2,05	2,33	2,61	2,89	3,16	3,57	3,97	4,24	4,50	4,89					
48,3			2,06	2,35	2,63	2,91	3,18	3,60	4,00	4,27	4,53	4,92					
51			2,18	2,48	2,78	3,08	3,37	3,81	4,24	4,52	4,80	5,22					
53			2,27	2,58	2,89	3,20	3,51	3,96	4,41	4,71	5,00	5,44					
54			2,31	2,63	2,95	3,27	3,58	4,04	4,50	4,80	5,10	5,55					
57			2,44	2,78	3,12	3,45	3,79	4,28	4,77	5,09	5,41	5,88					
60			2,58	2,93	3,29	3,64	3,99	4,51	5,03	5,37	5,71	6,21	6,71				
63,5			2,73	3,11	3,49	3,86	4,23	4,79	5,34	5,70	6,06	6,59	7,12				
70			3,02	3,44	3,85	4,27	4,68	5,30	5,91	6,31	6,71	7,31	7,90	8,29			
73			3,15	3,59	4,02	4,46	4,89	5,53	6,17	6,59	7,01	7,64	8,26	8,67			
76			3,28	3,74	4,19	4,65	5,10	5,77	6,44	6,88	7,31	7,97	8,61	9,04	10,10	11,15	12,18
88				4,34	4,87	5,40	5,93	6,71	7,49	8,01	8,52	9,29	10,05	10,55	11,80	13,03	14,25
89				4,39	4,93	5,46	6,00	6,79	7,58	8,10	8,62	9,40	10,17	10,68	11,94	13,19	14,42
102					5,66	6,28	6,89	7,81	8,72	9,33	9,93	10,83	11,72	12,31	13,78	15,23	16,67
108					6,00	6,66	7,31	8,28	9,25	9,89	10,53	11,48	12,43	13,06	14,62	16,17	17,70
114					6,34	7,03	7,72	8,75	9,78	10,46	11,13	12,14	13,15	13,82	15,47	17,11	18,74
127					7,08	7,85	8,62	9,77	10,92	11,68	12,44	13,57	14,70	15,45	17,31	19,15	20,98
133					7,42	8,23	9,04	10,24	11,45	12,25	13,04	14,23	15,42	16,20	18,16	20,10	22,02
140					7,81	8,67	9,52	10,79	12,06	12,91	13,75	15,00	16,25	17,08	19,15	21,20	23,23
152					8,49	9,42	10,35	11,74	13,12	14,04	14,95	16,32	17,68	18,59	20,84	23,08	25,30
159					8,88	9,86	10,83	12,29	13,73	14,70	15,65	17,09	18,52	19,47	21,83	24,18	26,51
168					9,39	10,42	11,45	12,99	14,52	15,54	16,56	18,08	19,59	20,60	23,10	25,59	28,06
177,8					9,95	11,04	12,13	13,76	15,39	16,47	17,54	19,16	20,76	21,83	24,49	27,13	29,76
193,7						12,04	13,23	15,01	16,78	17,96	19,14	20,90	22,66	23,83	26,73	29,63	32,50
219								17,00	19,01	20,35	21,68	23,68	25,68	27,00	30,31	33,60	36,87
244,5										22,75	24,25	26,49	28,72	30,21	33,91	37,60	41,28
273												29,62	32,12	33,79	37,94	42,08	46,20
325														40,32	45,29	50,24	55,18
355,6														44,16	49,61	55,04	60,46
377														46,85	52,63	58,40	64,16
406,4														50,54	56,79	63,02	69,24
426														53,00	59,56	66,10	72,62
530																82,43	90,58

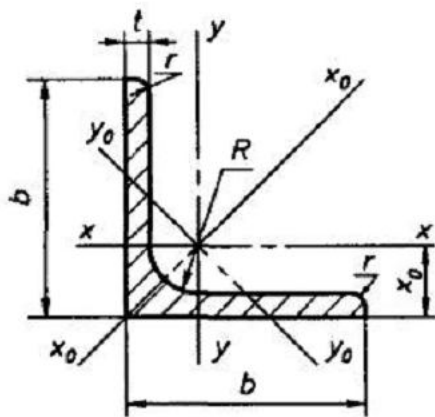


Приложение 4 Трубы стальные квадратные. ГОСТ 8639-82 (фрагмент)

$$J_x = J_y$$

$$W_x = W_y$$

Наружный размер А, мм	Толщина стенки S, мм	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Наружный размер А, мм	Толщина стенки S, мм	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>	Наружный размер А, мм	Толщина стенки S, мм	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Момент инерции, см <sup>4</sup>	Момент сопротивления, см <sup>3</sup>
10	0,8	0,283	0,222	0,039	0,079	35	4,0	4,68	3,67	7,30	4,17	70	6,0	14,74	11,57	98,69	28,20
	0,9	0,314	0,246	0,042	0,85		5,0	5,57	4,37	8,05	4,60		7,0	16,80	13,19	108,56	31,02
	1,0	0,343	0,269	0,045	0,090	40	1,4	2,13	1,67	5,24	2,62	80	8,0	18,74	14,71	116,81	33,37
	1,2	0,398	0,312	0,050	0,100		1,5	2,27	1,78	5,57	2,78		3,0	9,09	7,13	89,05	22,26
	1,4	0,448	0,352	0,053	0,107		2,0	2,97	2,33	7,07	3,53		3,5	10,50	8,24	101,44	25,36
15	0,8	0,443	0,348	0,147	0,196	42	2,5	3,64	2,85	8,42	4,21	90	4,0	11,88	9,33	113,17	28,29
	0,9	0,494	0,388	0,161	0,215		3,0	4,28	3,36	9,61	4,81		5,0	14,57	11,44	134,73	33,68
	1,0	0,543	0,426	0,176	0,233		3,5	4,90	3,85	10,66	5,33		6,0	17,14	13,46	153,84	38,46
	1,2	0,638	0,501	0,199	0,265		4,0	5,48	4,30	11,57	5,79		7,0	19,60	15,38	170,63	42,66
	1,4	0,728	0,571	0,220	0,293		5,0	6,57	5,16	13,01	6,50		8,0	21,94	17,22	185,20	46,30
	1,5	0,771	0,605	0,229	0,305		6,0	7,54	5,92	13,96	6,98		9,0	24,17	18,97	197,66	49,41
20	0,8	0,603	0,474	0,368	0,368	45	3,0	4,52	3,55	11,30	5,38	100	10,0	26,28	20,63	208,10	52,03
	0,9	0,674	0,529	0,406	0,406		3,5	5,18	4,07	12,56	5,98		11,0	28,28	22,20	216,64	54,16
	1,0	0,743	0,583	0,442	0,442		4,0	5,80	4,56	13,67	6,51		3,0	10,28	8,07	128,82	28,63
	1,2	0,878	0,689	0,510	0,510		5,0	6,97	5,47	15,45	7,36		4,0	13,48	10,59	164,63	36,58
	1,4	1,01	0,791	0,572	0,572	50	6,0	8,02	6,30	16,69	7,95	5,0	16,57	13,00	197,12	43,80	
	1,5	1,071	0,841	0,600	0,600		2,0	3,37	2,65	10,29	4,57	6,0	19,54	15,34	226,44	50,32	
	2,0	1,37	1,075	0,723	0,723		3,0	4,88	3,83	14,15	6,29	7,0	22,40	17,58	252,71	56,16	
25	0,8	0,763	0,599	0,740	0,592	55	3,5	5,60	4,40	15,79	7,02	110	8,0	25,14	19,73	276,08	61,35
	0,9	0,854	0,670	0,820	0,656		4,0	6,28	4,93	17,25	7,67		3,0	11,48	9,02	178,95	35,79
	1,0	0,943	0,740	0,897	0,718		5,0	7,57	5,94	19,66	8,38		4,0	15,08	11,84	229,71	45,94
	1,2	1,12	0,878	1,04	0,835		6,0	8,74	6,86	21,42	9,52		5,0	18,57	14,58	276,30	55,26
	1,4	1,29	1,01	1,18	0,945		7,0	9,80	7,69	22,60	10,04		6,0	21,94	17,22	318,89	63,78
	1,5	1,37	1,07	1,24	0,996		8,0	10,74	8,43	23,23	10,33		7,0	25,20	19,78	357,62	71,52
	2,0	1,77	1,39	1,53	1,22	60	2,0	3,77	2,96	14,36	5,74	120	8,0	28,34	22,25	392,65	78,53
	2,5	2,14	1,68	1,77	1,41		2,5	4,64	3,64	17,27	6,91		9,0	31,37	24,62	424,11	84,82
	3,0	2,48	1,95	1,95	1,56		3,0	5,48	4,31	19,93	7,97		6,0	24,34	19,11	433,59	78,83
	3,5	2,74	2,18	2,18	1,66		3,5	6,30	4,94	22,35	8,94		7,0	28,00	21,98	488,14	88,75
30	0,8	0,923	0,725	1,30	0,870	65	4,0	7,08	5,56	24,54	9,82	140	8,0	31,54	24,76	538,11	97,84
	0,9	1,03	0,811	1,45	0,966		4,5	7,84	6,16	26,51	10,60		9,0	34,97	27,45	583,63	106,11
	1,0	1,14	0,897	1,59	1,06		5,0	8,57	6,73	28,26	11,30		6,0	26,74	20,99	572,94	95,49
	1,2	1,36	1,07	1,86	1,24		6,0	9,94	7,80	31,15	12,46		7,0	30,80	24,18	647,09	107,85
	1,3	1,46	1,15	1,99	1,33		7,0	11,20	8,79	33,28	13,31		8,0	34,74	27,27	715,66	119,28
	1,4	1,57	1,23	2,12	1,41		8,0	12,34	9,69	34,70	13,88		9,0	38,57	30,28	778,82	129,80
	1,5	1,67	1,31	2,24	1,49	70	2,0	4,57	3,59	25,45	8,48	150	9,0	38,57	30,28	778,82	129,80
	2,0	2,17	1,70	2,79	1,86		2,5	5,64	4,43	30,81	10,27		6,0	31,54	24,76	935,19	133,60
	2,5	2,64	2,07	3,27	2,18		3,0	6,69	5,25	35,81	11,94		7,0	36,40	28,57	1061,44	151,63
	3,0	3,08	2,42	3,66	2,44		3,5	7,70	6,04	40,44	13,48		8,0	41,14	32,29	1179,83	168,55
	3,5	3,50	2,75	3,98	2,65		4,0	8,68	6,82	44,73	14,91		9,0	45,77	35,93	1290,58	184,37
	4,0	3,88	3,04	4,23	2,82		5,0	10,57	8,30	52,30	17,43		7,0	39,20	30,77	1322,44	176,32
35	0,8	1,083	0,850	2,10	1,20	75	6,0	12,34	9,69	58,60	19,53	180	8,0	44,34	34,81	1472,85	196,38
	0,9	1,21	0,953	2,34	1,34		7,0	14,00	11,00	63,71	21,24		9,0	49,37	38,75	1614,37	215,25
	1,4	1,85	1,45	3,45	1,97		8,0	15,54	12,20	67,71	22,57		10,0	54,28	42,61	1747,21	232,96
	1,5	1,97	1,55	3,65	2,09	80	3,0	7,88	6,19	58,45	16,70	200	8,0	53,94	42,34	2634,06	292,67
	2,0	2,57	2,02	4,61	2,63		3,5	9,10	7,14	66,34	18,95		9,0	60,17	47,23	2900,49	322,28
	2,5	3,14	2,46	5,44	3,11		4,0	10,28	8,07	73,74	21,07		10,0	66,28	52,03	3153,95	350,44
	3,0	3,68	2,89	6,17	3,52		5,0	12,57	9,87	87,12	24,89		12,0	78,17	61,36	3623,01	402,56
	3,5	4,20	3,30	6,78	3,88								14,0	89,59	70,33	4043,41	449,27

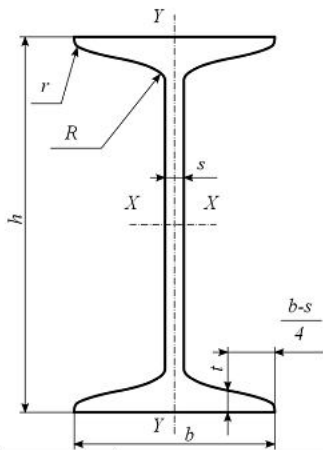


**Приложение 5 Уголки стальные горячекатаные равнополочные.  
ГОСТ 8509-93 (фрагмент)**

- $b$  - ширина полки;
- $t$  - толщина полки;
- $R$  - радиус внутреннего закругления;
- $r$  - радиус закругления полки;
- $F$  - площадь поперечного сечения;
- $I$  - момент инерции;
- $x_0$  - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки;
- $I_{xy}$  - центробежный момент инерции;
- $i$  - радиус инерции.

Номер уголка	$b$	$t$	$R$	$r$	$F, \text{см}^2$	Справочные значения величин для осей										Масса 1 м, кг
						$x - x$			$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			$I_{xy}, \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	
						$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$I_{x_0}, \text{см}^4$	$i_{x_0}, \text{см}$	$I_{y_0}, \text{см}^4$	$W_{y_0}, \text{см}^3$	$i_{y_0}, \text{см}$			
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60	0,89
2,5	25	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73	1,12
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80	1,27
3	30	3	4,0	1,3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85	1,36
		4	4,0	1,3	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89	1,78
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,59	0,63	1,03	0,89	1,46
		4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94	1,91
3,5	35	3	4,5	1,5	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97	1,60
		5	4,5	1,5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05	2,58
4	40	3	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09	1,85
		4	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13	2,42
		5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17	2,98
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21	2,08
		4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26	2,73
		5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30	3,37
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33	2,32
		4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38	3,05
		6	5,5	1,8	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46	4,47
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52	3,44
		5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57	4,25
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69	3,90
		5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74	4,81
		6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78	5,72
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88	4,87
		5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90	5,38
		6	8,0	2,7	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94	6,39
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02	5,80
		7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10	7,96
		8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15	9,02
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17	6,78
		6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19	7,36
		7	9,0	3,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23	8,51
		8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27	9,65
9	90	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43	8,33
		8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51	10,93
		9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55	12,20
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68	10,06
		10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83	15,10
11	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96	11,89
		8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00	13,50

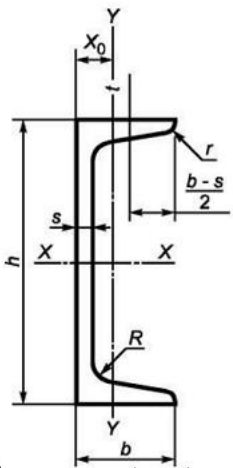
Приложение 6. Двутавры стальные горячекатаные. ГОСТ 8239-89 (фрагмент)



- $h$  - высота двутавра;
- $b$  - ширина полки;
- $s$  - толщина стенки;
- $t$  - средняя толщина полки;
- $R$  - радиус внутреннего закругления;
- $r$  - радиус закругления полки
- $I$  - момент инерции;
- $W$  - момент сопротивления;
- $S$  - статический момент полусечения;
- $i$  - радиус инерции.

Номер двутавра	Размеры, мм						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$			X - X				Y - Y		
									$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

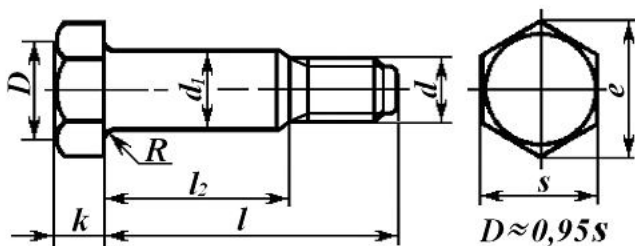
## Приложение 7 Швеллеры стальные горячекатаные. ГОСТ 8240-97 (фрагмент)



$h$  - высота (швеллера);  
 $b$  - ширина полки;  
 $s$  - толщина стенки;  
 $t$  - толщина полки;  
 $R$  - радиус внутреннего закругления;  
 $r$  - радиус закругления полки;  
 $X_0$  - расстояние от оси  $Y - Y$  до наружной грани стенки;  
 $F$  - площадь поперечного сечения;  
 $I$  - момент инерции;  
 $W$  - момент сопротивления;  
 $i$  - радиус инерции;  
 $S_x$  - статический момент полусечения.

Номер швеллера	h	b	s	t	R не более	r	Площадь поперечного сечения $F, \text{см}^2$	Масса $l$ м, кг	Справочные значения для осей						$X_0, \text{см}$	
									X-X			Y-Y				
									$I_x, \text{см}^4$	$W_{x3}, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_{y3}, \text{см}^3$		$i_0, \text{см}$
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75

## Приложение 8 Болты повышенной точности с шестигранной уменьшенной головкой для отверстий из-под развертки по ГОСТ 7817-80 размеры, мм

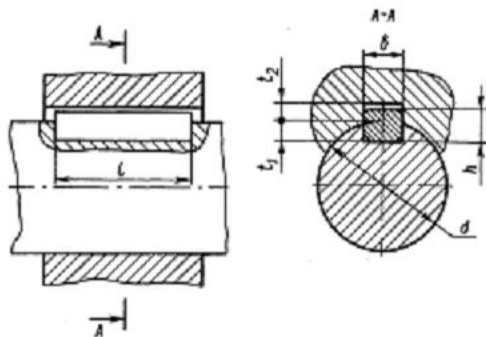


$d$  - номинальный диаметр резьбы;  
 $d_1$  - диаметр стержня;  
 $k$  - высота головки;  
 $S$  - размер под ключ;  
 $e$  - диаметр описанной окружности;  
 $R$  - радиус под головкой;  
 $l$  - длина болта;  
 $l_2$  - длина гладкой части болта

$d$	6	8	10	12	16	20	24	30	36	42	48			
Шаг														
крупный	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	3	3,5	4	4,5	5			
мелкий	-	1	1,25		1,5		2		3					
$d_1$	7	9	11	13	17	21	25	32	38	44	50			
$k$	4,0	5,5	7,0	8,0	10	13	15	19	23	26	30			
$S$	10	12	14	17	22	27	32	41	50	60	70			
$e$ , не менее	11,0	13,2	15,5	18,9	24,5	30,1	35,8	45,9	56,1	67,4	78,6			
$R$	0,25	0,40		0,60		0,80		1,00	1,20	1,60				
$l$	20...35	40...75	30...35	40...80	30...35	40...105	35...105	45...105	55...105	60...105	75...210	90...300	110...300	120...300
$l - l_2$	12	15	15	18	18	20	22	28	32	38	50	55	65	70

Примечания: ряд длин болтов  $l$ : 20...80 (через 5), 80...200 (через 10), 200...300 (через 20) мм.  
 При  $d = 6$  мм  $l \leq 75$  мм; при  $d = 8$  мм  $l \leq 80$  мм; при  $d = 10$  мм  $l \leq 120$  мм; при  $d = 12$  мм  $l \leq 180$  мм;  
 при  $d = 16...24$  мм  $l \leq 200$  мм; при  $d = 30$  мм  $l \leq 240$  мм; при  $d = 36...48$  мм  $l \leq 300$  мм.

Приложение 9 Шпонки призматические. ГОСТ 23360-78 (фрагмент)



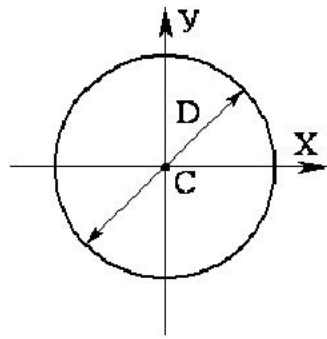
Диаметр вала $d$ , мм	Сечение шпонки, мм		Глубина паза, мм		Длина $l$ , мм
	$b$	$h$	Вал $t_1$	Втулка $t_2$	
Свыше 6 до 8	2	2	1,2	1,0	6...20
Свыше 8 до 10	3	3	1,8	1,4	6...36
Свыше 10 до 12	4	4	2,5	1,8	8...45
Свыше 12 до 17	5	5	3,0	2,3	10...56
Свыше 17 до 22	6	6	3,5	2,8	14...70
Свыше 22 до 30	7	7	4,0	3,3	18...90
	8	7	4,0	3,3	18...90
Свыше 30 до 38	10	8	5,0	3,3	22...110
Свыше 38 до 44	12	8	5,0	3,3	28...140
Свыше 44 до 50	14	9	5,5	3,8	36...160
Свыше 50 до 58	16	10	6,0	4,3	45...180
Свыше 58 до 65	18	11	7,0	4,4	50...200
Свыше 65 до 75	20	12	7,5	4,9	56...220
Свыше 75 до 85	22	14	9,0	5,4	63...250
Свыше 85 до 95	24	14	9,0	5,4	70...280
	25	14	9,0	5,4	70...280
Свыше 95 до 110	28	16	10,0	6,4	80...320
Свыше 110 до 130	32	18	11,0	7,4	90...360

Примечание:

- Длины шпонок  $l$  в указанных пределах выбирают из ряда: 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 25; 28; 32; 36; 40; 45; 50; 56; 63; 70; 80; 90; 100; 110; 125; 140; 160; 180; 200; 220; 250; 280; 320; 360 мм
- Пример условного обозначения шпонки размером  $b = 16$  мм,  $h = 10$  мм,  $l = 50$  мм: Шпонка 16×10×50 ГОСТ 23360-78.

# Приложение 10 Геометрические характеристики некоторых плоских фигур

**C** – центр тяжести сечения;  
**A** – площадь;  $W_x, W_y$  – осевые моменты сопротивления;  
 $J_x, J_y$  – осевые моменты инерции;  $W_\rho$  – полярный момент сопротивления;  
 $J_\rho$  – полярный момент инерции;  $i_x, i_y$  – радиусы инерции



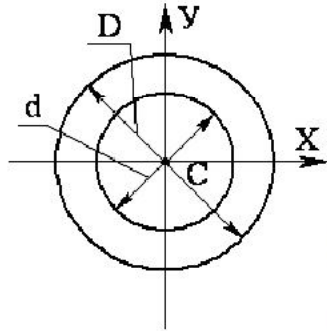
**Круг**

$$A = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \approx 0,8D^2;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4; \quad I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4;$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3; \quad W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3;$$

$$i_x = i_y = i = 0,25D$$



**Кольцо**

$$\alpha = d / D$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) \approx 0,8D^2(1 - \alpha^2);$$

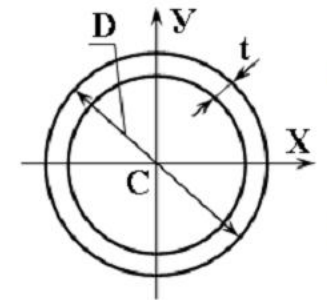
$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4);$$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4(1 - \alpha^4);$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4);$$

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3(1 - \alpha^4)$$

$$i_x = i_y = i = 0,25\sqrt{D^2 - d^2}$$

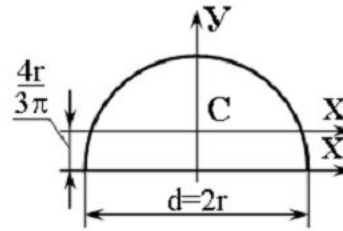


**Тонкое кольцо (труба)**  $D \gg t$

$$D_0 = D - t \quad A = \pi D_0 t;$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D_0^3 t}{8} \approx 0,39D_0^3 t; \quad I_\rho = \frac{\pi D_0^3 t}{4} \approx 0,79D_0^3 t$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D_0^2 t}{4} \approx 0,79D_0^2 t; \quad W_\rho = \frac{\pi D_0^2 t}{2} \approx 1,57D_0^2 t$$



**Полукруг**

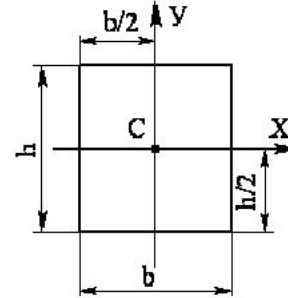
$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{8} \approx 0,4d^2;$$

$$I_x = \frac{\pi d^4}{128} \left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \approx 0,11r^4;$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,39r^4$$

для нижних волокон  $W_{x_H} \approx 0,259r^3;$  для верхних волокон  $W_{x_B} \approx 0,191r^3;$

$$W_y = \frac{\pi D^3}{64} \approx 0,05d^3$$



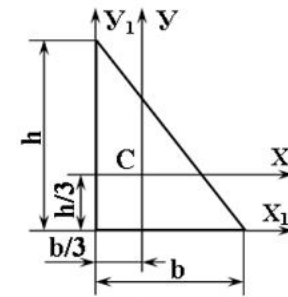
**Прямоугольник**

$$A = b \cdot h;$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{b^3h}{12};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{b^2h}{6};$$

$$i_x = 0,29h; \quad i_y = 0,29b$$

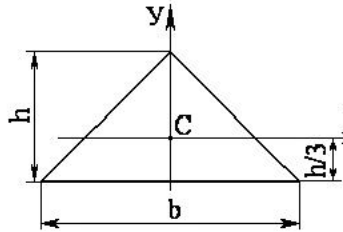


**Прямоугольный треугольник**

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad I_x = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{b^3h}{36};$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{y_1} = \frac{b^3h}{12};$$

для нижних волокон  $W_{x_H} = \frac{bh^2}{12};$  для верхних волокон  $W_{x_B} = \frac{bh^2}{24}$

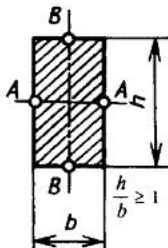


**Прямоугольный треугольник**

$$A = \frac{b \cdot h}{2}; \quad I_x = \frac{bh^3}{36}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{48};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{24}; \quad i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} \approx 0,24h$$

## Приложение 11 Геометрические характеристики жесткости и прочности прямоугольного сечения при кручении прямого бруса



$J_k = \beta \cdot h \cdot b^3$      $\vartheta = \frac{M_k}{G \cdot J_k}$     Наибольшее напряжение возникает в серединах длинных сторон сечения (в т. А)  $\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}$ , в т. В напряжение  $\tau = \gamma \cdot \tau_{max} = \gamma \cdot \frac{M_k}{W_k}$   
 $W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2$

**Значение коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в зависимости от  $h/b$**

h/b	1,00	1,20	1,25	1,50	1,75	2,00	2,50	3,00	4,00	5,00	6,00	8,00	1,00	Св.10
$\alpha$	0,208	0,219	0,221	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\beta$	0,141	0,166	0,172	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,299	0,307	0,312	0,333
$\gamma$	1,00	0,93	0,91	0,86	0,82	0,79	0,77	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74	-

## Приложение 12 Коэффициенты уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость

Гибкость $\lambda$	Коэффициент снижения допускаемых напряжений $\varphi$				
	стали <i>Ст.1, Ст.2, Ст.3, Ст.4</i>	Сталь <i>Ст.5</i>	стали повышенного качества $\sigma_m \geq 320$ МПа	Чугун	Дерево
<0,4	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25
120	0,45	0,37	0,30	–	0,22
130	0,40	0,33	0,26	–	0,18
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14
160	0,29	0,24	0,19	–	0,12
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08

Примечание: значения коэффициента  $\varphi$  для значений гибкости  $\lambda$ , не указанных в таблице, определяются методом линейной интерполяции.

## Приложение 13. Коэффициенты для расчета по формуле Ясинского-Тетмайера

Материал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$c$ , МПа	$\lambda_0$	$\lambda_{np}$
Сталь Ст2	264	0,70	-	60	105
Сталь Ст3	310	1,14	-	61	100
Сталь Ст4, 20	328	1,15	-	60	96
Сталь Ст5, 30	464	3,26	-	60	90
Сталь 40	321	1,16	-	60	90
Сталь 45	449	1,67	-	52	85
Сталь С235	295	1,00	-	60	102
Сталь С275	345	1,10	-	63	91
Дюралюминий Д16Т	406	2,84	-	30	53
Чугун	776	12	0,053	-	80
Сосна, ель	29,3	0,19	-	-	59

Примечание: Для чугуна формула Ясинского имеет вид:  $\sigma_{np} = a - b\lambda + c\lambda^2$ .



ПЕРМСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕРИАЛОВ, ТЕХНОЛОГИЙ И КОНСТРУИРОВАНИЯ МАШИН

Курсовая работа  
по сопротивлению материалов

Выполнил: студент гр. МОНз-14-1

Иванов И. И.

Вариант: 05

Проверил: преподаватель

Петров П. П.

Пермь 2016