

# Упругость анизотропных материалов

А. А. Ташкинов

7 марта 2010 г.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Теория деформаций</b>	<b>7</b>
1.1	Введение	7
1.2	Малые деформации	9
1.3	Малые вращения	11
1.4	Уравнения совместности деформаций	11
1.5	Вычисление перемещений по полю деформаций	13
<b>2</b>	<b>Теория напряжений</b>	<b>17</b>
2.1	Введение	17
2.2	Принцип напряжений	17
2.3	Тензор напряжений	19
2.4	Вычисление вектора напряжений	21
2.5	Уравнения равновесия в напряжениях	23
2.6	Условия равновесия на поверхности	27
2.7	Главные напряжения и направления	28
<b>3</b>	<b>Определяющие соотношения УАМ</b>	<b>33</b>
3.1	Общая характеристика определяющих соотношений	33
3.2	Обобщенный закон Гука	34
3.3	Упругий потенциал	35
3.4	Частные случаи анизотропии упругих свойств	36
3.5	Технические постоянные УАМ	39
<b>4</b>	<b>Краевые задачи УАМ</b>	<b>43</b>
4.1	Общая характеристика полной системы уравнений УАМ	43
4.2	3 типа граничных условий УАМ	44
4.3	Полная система уравнений в перемещениях	44
4.4	Граничные условия краевой задачи в перемещениях	46
4.5	Работа внешних сил	46
4.6	Теорема об единственности решения	47



# Введение

Упругость анизотропных материалов — раздел механики, объектом изучения которого является модель материала или конструкции. Модель наделяется теми или иными свойствами, характерными для данного материала. Задачей упругости анизотропных материалов является изучение равновесия внутреннего состояния материалов и тел.

Внутреннее состояние характеризуется с помощью ряда величин: напряжения, деформации, температуры и т. д. Построение модели материала основывается на понятии материального континуума<sup>1</sup>. При изучении внутреннего состояния в упругости анизотропных материалов рассматривается макроскопическое поведение материалов<sup>2</sup>.

Задачи упругости анизотропных материалов во многом близки к задачам сопротивления материалов, однако, в сопротивлении материалов напряжения и деформации, характеризующие внутреннее состояние изучаются на основе совокупностей геометрических и физических гипотез, при этом напряжения и деформации рассчитываются с помощью простых математических формул, которые сами по себе являются достаточно приближенными. В упругости анизотропных материалов внутреннее состояние изучается с помощью математических моделей, соответствующих законам механики.

Преимущества упругости анизотропных материалов как дисциплины перед сопротивлением материалов заключаются в:

- более точном описании внутреннего состояния (то есть в более точном расчете напряжений и деформаций);
- возможности определения степени достоверности формул сопротивления материалов для конкретных конструкций и условий их нагружения;

В упругости анизотропных материалов принимаются основные гипотезы и предположения. Эти гипотезы используются при построении математических моделей материалов и конструкций:

1. Гипотеза сплошности.
2. Гипотеза твердости.
3. Гипотеза упругости.

---

<sup>1</sup>Представление реального материала как бесконечной совокупности элементарных материальных частиц, которые в геометрическом смысле можно рассматривать как точки, а в физическом смысле как частицы, наделенные свойствами материала в целом.

<sup>2</sup>То есть атомное или молекулярное строение не рассматривается.

**Сплошность** — свойство материала оставаться без различного рода разрывов как до воздействия на него, так и после.

**Твердость** — способность материала или конструкции сохранять форму при физическом воздействии на него.

**Упругость** — способность материала или конструкции полностью восстанавливать свою форму и размеры после снятия нагрузки.

**Идеальная упругость** — способность восстанавливать форму и размеры мгновенно.

Таким образом, в упругости анизотропных материалов модель материала или конструкции наделяется свойствами твердости, сплошности и идеальной упругости.

В упругости анизотропных материалов вводится понятие о естественном начальном состоянии. Предполагается, что до физического воздействия<sup>3</sup> внутреннее состояние материала или конструкции таково, что деформации и напряжения отсутствуют во всех точках. После снятия нагрузки материал или тело возвращается в исходное состояние.

---

<sup>3</sup>То есть до приложения усилий или изменения температуры.

# Глава 1

## Теория деформаций

### 1.1 Введение

Описание деформации тела связано с изучением кинематики материала. Материал при деформации рассматривается как совокупность точек, взаимное расположение которых изменяется в результате физических воздействий на материал или тело. Гипотеза сплошности приводит к тому, что соседние материальные частицы, которые были смежными в естественном начальном состоянии остаются смежными и в деформированном состоянии. Это физическая интерпретация того, что изменение материала происходит непрерывно, при этом никакая материальная частица не превращается в объем исчезающе малый или бесконечно большой.

При деформировании сплошной среды все материальные частицы могут получать перемещения. В основе классической теории деформаций лежит метод описания кинематики сплошной среды с помощью вычисления удлинений линейных элементов и изменений углов между линейными элементами, имеющими общую вершину.

**Линейный элемент** — отрезок, соединяющий 2 бесконечно близкие точки.

Способ описания кинематики сплошной среды, связанный с линейными элементами является предпочтительным по отношению к описанию полных перемещений всех точек материала, поскольку позволяет исключить перемещение точки, не связанные с изменением внутреннего состояния.

Если линейные элементы в естественном начальном состоянии в искомой точке были направлены вдоль осей координат  $X_k$ , то удлинения этих элементов вычисляются следующим образом:

$$\Lambda_\nu^{(k)} = 1 + E_\nu^{(k)} = \sqrt{1 + 2 \cdot E_{kk}}. \quad (1.1)$$

где  $\Lambda_\nu^{(k)}$  — удлинение линейного элемента, направленного вдоль оси  $X_k$ ,  $E_\nu^{(k)}$  — относительное удлинение линейного элемента, направленного вдоль оси  $X_k$ ,  $E_{kk}$  — диагональные компоненты тензора деформаций  $E_{ij}$ , которые можно вычислить, если известна векторная функция перемещений всех точек среды.

$\vec{U} = \vec{U}(X_1, X_2, X_3)$  — непрерывная и дифференцируемая функция координат. При этом  $E_{ij}$  связан с проекциями вектора перемещений  $U$  следующим соотношением:

$$E_{ij}(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial U_m(X_1, X_2, X_3)}{\partial X_j} \right]. \quad (1.2)$$

Изменения углов вычисляется следующим образом: пусть один линейный элемент в некоторой точке в естественном состоянии направлен вдоль оси  $X_i$ , а другой — вдоль оси  $X_j$ .

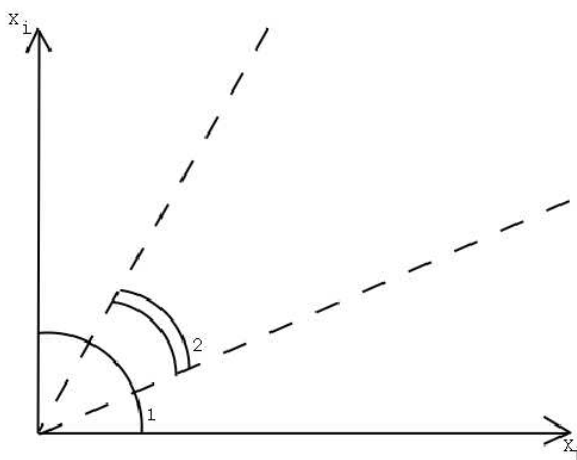


Рис. 1.1: Изменения углов

1 —  $\Theta_{ij}$  — угол между элементами в не деформируемом состоянии; 2 —  $\vartheta_{ij}$  — угол в деформированном состоянии;  $\gamma_{ij} = \Theta_{ij} - \vartheta_{ij}$  — изменение угла между линейными элементами с одной общей вершиной.

$$\sin(\gamma_{ij}) = \frac{2 \cdot E_{ij}}{\Lambda_{\nu}^{(i)} \cdot \Lambda_{\nu}^{(j)}}. \quad (1.3)$$

Из гипотезы о твердости материала следует, что перемещение точек при деформировании являются малыми, также малыми величинами являются относительные удлинения линейных элементов и изменение углов между линейными элементами<sup>1</sup>.

В силу малости производных от перемещений, вследствие твердости материалов и тел, произведением производных в выражении (1.2) можно пренебречь по отношению к самим производным. И тогда для твердых тел и материалов выражение (1.2) преобразуется к виду:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right). \quad (1.4)$$

При этом тензор  $E_{ij}$  является малой величиной порядка  $\alpha$ .

<sup>1</sup>По сравнению с нулем.

$\alpha \ll 1$ ;  
 $\alpha \sim (0.01 \div 0.001) \Rightarrow$  в выражении  $\alpha + \alpha^2$  величиной  $\alpha^2$  можно пренебречь.



$$\sqrt{1 + 2 \cdot E_{kk}} \approx \sqrt{1 + 2 \cdot E_{kk} + E_{kk}^2} = \sqrt{(1 + E_{kk})^2} = 1 + E_{kk}.$$

$$\Lambda_\nu^k = 1 + E_\nu^{(k)} = 1 + E_{kk}. \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) величины  $E_{kk}$  являются диагональными элементами тензора деформации  $E_{ij}$  и имеют однозначный физический смысл: являются относительными удлинениями линейных элементов, направленных до деформации вдоль осей координат  $X_k$ .

С учетом малых величин<sup>2</sup> выражение (1.3) преобразуется к виду:

$$\gamma_{ij} = 2 \cdot E_{ij}, \quad i \neq j. \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) видно, что недиагональные элементы тензора  $E_{ij}$ , в случае малости деформаций, также имеют физический смысл: они равны половине величины изменения прямого угла, который в недеформированном состоянии был образован линейными элементами, направленными вдоль осей  $X_i$  и  $X_j$ .

## 1.2 Малые деформации

Если перемещения и их производные считать малыми величинами, то при описании перемещений точек среды функциями компонент  $U_i(X_1, X_2, X_3)$  вектора перемещений  $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$  можно вывести тензор, который называется тензором малых деформаций и обозначается как  $\varepsilon_{ij} = E_{ij}$  (тензор деформаций Коши):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right]. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.7) следует, что тензор  $\varepsilon_{ij}$  является симметричным<sup>3</sup>. Само выражение (1.7), которое связывает перемещения точек с тензором деформаций называется геометрическим соотношением Коши или геометрическим соотношением теории малых деформаций. Диагональные элементы тензора  $\varepsilon_{ij}$  вычисляются следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial X_3}. \quad (1.8)$$

Для не диагональных элементов:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right], \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right], \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2} \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Поскольку  $\varepsilon_{ij}$  является тензором второго ранга, то при повороте системы координат вокруг своего центра компоненты тензора деформаций в новой системе координат вычисляются по следующей формуле:

<sup>2</sup> $\alpha$  мала по сравнению с 1,  $\sin \gamma \approx \gamma$ .

<sup>3</sup>То есть  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

$$\varepsilon'_{ij} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\varepsilon_{mn}. \quad (1.10)$$

Где  $\varepsilon_{mn}$  — компоненты тензора в исходной системе координат, а  $\alpha_{pq}$  — матрица поворота системы координат:

$$\alpha_{pq} = \begin{pmatrix} \cos(\widehat{X'_1, X_1}) & \cos(\widehat{X'_1, X_2}) & \cos(\widehat{X'_1, X_3}) \\ \cos(\widehat{X'_2, X_1}) & \cos(\widehat{X'_2, X_2}) & \cos(\widehat{X'_2, X_3}) \\ \cos(\widehat{X'_3, X_1}) & \cos(\widehat{X'_3, X_2}) & \cos(\widehat{X'_3, X_3}) \end{pmatrix}$$

Для любого произвольно заданного тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  можно найти также положение осей координат (то есть такую новую систему координат по отношению к исходной), что тензор деформаций в новой системе координат будет иметь только диагональные компоненты.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \varepsilon'_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Эти компоненты называются главными линейными деформациями<sup>4</sup>.

Для тензора малых деформаций, также как и для любого симметричного тензора второго ранга, существуют инварианты, то есть величины, вычисляемые через компоненты тензора и не изменяющие свои значения при повороте системы координат. Для произвольного поворота системы координат вокруг центра, инварианты тензора деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{(1)} &= \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \\ I_\varepsilon^{(1)} &= \frac{V_1 - V}{V}, \\ I_\varepsilon^{(2)} &= \varepsilon_{ij} \cdot \varepsilon_{ji}, \\ I_\varepsilon^{(3)} &= \varepsilon_{ik} \cdot \varepsilon_{km} \cdot \varepsilon_{im}. \end{aligned}$$

$I_\varepsilon^{(1)}$  — изменение объема материальной частицы в деформированном состоянии.

При повороте системы координат вокруг одной из осей количество инвариантов увеличивается. Например, вокруг оси  $X_3$ :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon^{(1)} &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}, \\ I_\varepsilon^{(2)} &= \varepsilon_{33}, \\ I_\varepsilon^{(3)} &= \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2, \\ I_\varepsilon^{(4)} &= (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 4\varepsilon_{12}^2. \end{aligned}$$

Кинематически допустимым полем перемещений для материала называются однозначные непрерывные и дифференцируемые функции компонент вектора перемещений точек среды. Если же рассматривается область, ограниченная поверхностью, и на всей этой поверхности или на ее части заданы перемещения точек, то на кинематически допустимое поле перемещений накладывается дополнительное условие, а именно: функции компонент тензора перемещений на границе области должны принимать заданные значения.

<sup>4</sup>Для произвольного тензора диагональные компоненты называются линейными деформациями, а недиагональные — деформациями сдвига.

### 1.3 Малые вращения

Тензор  $\varepsilon_{ij}$  связан с перемещениями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [U_{i,j} + U_{j,i}]. \quad (1.12)$$

В соотношении (1.12) используется сокращенная тензорная форма записи производных. Само соотношение (1.12) полностью эквивалентно соотношению (1.7), в котором использована полная тензорная форма записи производных. Если независимыми переменными являются переменные  $X_j = (X_1, X_2, X_3)$  и существует произвольная скалярная функция  $f(X_1, X_2, X_3)$ , то частные производные в цифровой индексной форме записываются:  $\frac{\partial f}{\partial X_1}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial X_2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial X_3}$ , в тензорном виде:  $\frac{\partial f}{\partial X_j}$ , а в сокращенном виде:  $f_{i,j}$ .

Рассмотрим наряду с симметричным тензором  $\varepsilon_{ij}$  антисимметричный тензор, построенный по соотношению, аналогичному (1.12):

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} = \frac{1}{2} [U_{i,j} - U_{j,i}]. \quad (1.13)$$

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор деформаций  $\varepsilon_{ij}$  имеет 9 компонент, из них 6 независимых (в силу симметрии). Антисимметричный тензор  $\omega_{ij}$  тоже имеет 9 компонент, из которых независимыми являются только 3:  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{13}$ ,  $\omega_{23}$ . Тензор  $\omega_{ij}$  называют тензором малых вращений. Можно показать, что если при заданном поле перемещений в какой либо точке тензор деформаций  $\varepsilon_{ij} = 0$ <sup>5</sup>, то тензор  $\omega_{ij}$  задает малое вращение среды вокруг данной точки, причем окрестность среды вращается как абсолютно твердая. Это малое вращение происходит за счет деформаций других точек этой окрестности.

### 1.4 Уравнения совместности деформаций

Тензор деформаций в точке вызывает изменение геометрии элементарной частицы, выделенной вокруг этой точки. Из гипотезы сплошности следует, что смежные элементарные частицы не могут деформироваться как угодно произвольно, они должны деформироваться совместно с тем, чтобы среда и в деформированном состоянии оставалась сплошной (непрерывной). Математически это означает, что компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  как функции координат  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3)$  не могут быть произвольно заданы, а должны удовлетворять некоторому условию или каким-то уравнениям, обеспечивающим сплошность среды в деформированном состоянии. Такие уравнения называют уравнениями совместности деформаций.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} - U_{j,i}).$$

Наряду с этими тензорами можно ввести тензор относительных перемещений:

<sup>5</sup>Тензор равен нулю если все его компоненты равны нулю.

$$\nu \equiv U_{i,j}. \quad (1.14)$$

$$\nu = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.15)$$

Докажем тождество для произвольного тензора малых вращений.

$$\omega_{\alpha\beta,\gamma} - \omega_{\alpha\gamma,\beta} = \omega_{\gamma\beta,\alpha}. \quad (1.16)$$

С использованием соотношения (1.13) получим:

$$\frac{1}{2}(U_{\alpha,\beta} - U_{\beta,\alpha})_{,\gamma} - \frac{1}{2}(U_{\alpha,\gamma} - U_{\gamma,\alpha})_{,\beta} = \frac{1}{2}(U_{\gamma,\beta} - U_{\beta,\gamma})_{,\alpha}.$$

Преобразуя левую часть этого тождества получим:

$$\frac{1}{2}U_{\alpha,\beta\gamma} - \frac{1}{2}U_{\beta,\alpha\gamma} - \frac{1}{2}U_{\alpha,\gamma\beta} + \frac{1}{2}U_{\gamma,\alpha\beta} = \frac{1}{2}U_{\gamma,\alpha\beta} - \frac{1}{2}U_{\beta,\alpha\gamma} = \frac{1}{2}(U_{\gamma,\beta} - U_{\beta,\gamma})_{,\alpha}.$$

Для тензора относительных деформаций запишем:

$$\eta_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}, \eta_{\alpha\gamma} = \varepsilon_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha\gamma}.$$

Продифференцируем первое уравнение по  $\gamma$ , а второе по  $\beta$  и вычтем из первого уравнения второе:

$$\eta_{\alpha\beta,\gamma} - \eta_{\alpha\gamma,\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} - \varepsilon_{\alpha\gamma,\beta} + \omega_{\alpha\beta,\gamma} - \omega_{\alpha\gamma,\beta}.$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} - \varepsilon_{\alpha\gamma,\beta} = -\omega_{\gamma\beta,\alpha}. \quad (1.17)$$

Пусть в (1.17)  $\alpha = \gamma$  (поскольку (1.17) справедливо для любого случая):

$$\varepsilon_{\gamma\beta,\gamma} - \varepsilon_{\gamma\gamma,\beta} = -\omega_{\gamma\beta,\gamma}.$$

Для исключения  $\omega_{\gamma\beta}$  из рассмотрения необходимо первое уравнение продифференцировать по  $\gamma$ , а второе — по  $\alpha$  и сложить эти уравнения:

$$\varepsilon_{\gamma\beta,\gamma\alpha} + \varepsilon_{\alpha\gamma,\beta\gamma} - \varepsilon_{\gamma\gamma,\beta\alpha} - \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma\gamma} = 0. \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) называется уравнениями совместности деформаций.

Основной результат уравнений (1.18) заключается в том, что для того чтобы среда в деформированном состоянии оставалась непрерывной, ограничение или дополнительное условие накладывается на вторые производные функций  $\varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3)$  компонент тензора малых деформаций Коши.

Для уравнений (1.18) существуют эквивалентные формы записи, в которых используются другие системы индексов. Одной из таких эквивалентных форм является следующая:

$$\varepsilon_{ik,lj} + \varepsilon_{lj,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0. \quad (1.19)$$

Другой эквивалентной формой является запись уравнений совместности деформаций с использованием трех индексов, например —  $i, j, k$ :

$$\varepsilon_{kk,ij} = (\varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ik,j})_{,k} \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta,\gamma} &= U_{\alpha,\beta\gamma}, \\ \eta_{\alpha\gamma,\beta} &= U_{\alpha,\gamma\beta}, \\ \omega_{\alpha\beta,\gamma} - \omega_{\alpha\gamma,\beta} &= \omega_{\gamma\beta,\alpha} \end{aligned}$$

Уравнения совместности (1.18) – (1.20) в развернутом виде с использованием цифровой индексной формы записи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} \right) \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial}{\partial X_3} \left( \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial X_3} \right) \end{cases} \\
 II \quad & \begin{cases} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Уравнения (1.21) являются уравнениями деформаций, записанными в развернутом виде. Всего их 6 и они состоят из 2х групп — по 3 в каждой. *I* группа записана относительно вторых производных от линейных деформаций, а *II* группа — относительно вторых производных деформаций сдвига.

Общая характеристика уравнений (1.21): уравнения в частных производных, второго порядка, линейные, однородные, с постоянными коэффициентами, равными единице. Уравнения (1.21) образуют систему уравнений, так как одни и те же компоненты тензора деформаций входят в разные уравнения.

Поля деформаций, то есть совокупность независимых компонент тензора деформаций, заданных как функции координат, называются кинематически допустимыми, если они удовлетворяют во всех точках среды уравнениям совместности деформаций.

В уравнениях *I* группы, при получении их из уравнений (1.20)  $j \neq k$ .

## 1.5 Вычисление перемещений по заданному полю деформаций

Если перемещения точек среды заданы как функции координат  $U_i = U_i(X_1, X_2, X_3)$ , то поле деформаций  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3)$  может быть вычислено непосредственно по геометрическим соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right). \tag{1.22}$$

Рассмотрим обратную задачу: пусть задано поле деформаций, то есть заданы функции компонент тензора деформаций как непрерывные и дифференцируемые. Будем считать, что поле деформаций является кинематически допустимым, то есть функции  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2, X_3)$  заданы таким образом, что удовлетворяются все уравнения совместности деформаций (1.21). Если находить перемещения по заданным деформациям  $\varepsilon_{ij}$ , то геометрические соотношения Коши (1.22) следует рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных функций  $U_i$  при заданных функциях  $\varepsilon_{ij}$ . Причем, если к неизвестным функциям  $U_i$  добавить постоянные перемещения  $U_i^* = const^6$ , то такие суммарные перемещения  $U_i + U_i^*$  тоже будут являться решением уравнений (1.22).

<sup>6</sup>То есть перемещения тела или среды как абсолютно жестких.

Для исключения неопределенности в вычислении перемещений выберем некоторую точку  $M^0(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ , находящуюся внутри среды или тела и зададим в этой точке перемещения  $U_i = U_i^0$  и малое вращение  $\omega_{ij} = \omega_{ij}$ .

Для тензора относительных перемещений  $\eta_{ij}$  ранее было получено, что

$$\eta_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (1.23)$$

Уравнения (1.23) выполняются в каждой точке среды или тела и, интегрируя их, получим выражения для перемещений  $U_i$  в произвольной точке:

$$U_i(X'_1, X'_2, X'_3) = U_i^0 + \int_{M^0}^{M'} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dX_j. \quad (1.24)$$

В выражении (1.24) интеграл берется по произвольной траектории  $M^0 - M'$ , полностью лежащей внутри рассматриваемой среды или тела.

Для вычисления перемещений из выражения (1.24) необходимо исключить поле малых вращений  $\omega_{ij}$ , так как оно неизвестно. Разобьем интеграл на два слагаемых:

Используем формулы интегрирования по частям:

$$\int_{X_0}^{X_1} P dQ = PQ \Big|_{X_0}^{X_1} - \int_{X_0}^{X_1} Q dP$$

$$\begin{aligned} \int_{M^0}^{M'} \omega_{ij} dX_j &\rightarrow dX_j = -d(X'_j - X_j); \\ \int_{M^0}^{M'} \omega_{ij} dX_j &= - \int_{M^0}^{M'} \omega_{ij} d(X'_j - X_j) = \\ &- \omega_{ij}(X'_j - X_j) \Big|_{M^0}^{M'} + \int_{M^0}^{M'} (X'_j - X_j) d\omega_{ij} = \\ \omega^0(X'_j - X_j^0) &+ \int_{M^0}^{M'} (X'_j - X_j) d\omega_{ij}. \end{aligned}$$

В последнем выражении вместо неизвестного поля малых вращений присутствует дифференциал этого поля  $d\omega_{ij}$ , который может быть записан:

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial X_k} dX_k = \omega_{ij,k}.$$

$$U_i(X'_1, X'_2, X'_3) = U_i^0 + \omega_{ij}^0(X'_j - X_j^0) + \int_{M^0}^{M'} \varepsilon_{ij} dX_j + \int_{M^0}^{M'} (X'_j - X_j^0) d\omega_{ij}.$$

В соответствии с соотношением (1.17) можно записать:

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}. \quad (1.25)$$

Выражение (1.25) также легко доказывается с использованием соотношений Коши для тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и формулы для тензора малых вращений, связывающей его с перемещениями. Окончательная формула для вычисления перемещений имеет вид:

$$U_i(X'_1, X'_2, X'_3) = U_i^0 + \omega_{ij}^0(X'_j - X_j^0) + \int_{M^0}^{M'} [\varepsilon_{ik} + (X'_j - X_j^0)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})] dX_k. \quad (1.26)$$

Формула (1.26) представляет собой окончательное выражение для вычисления поля перемещений по заданному полю деформаций (формула Чезаро). Используемые в формуле (1.26) константы  $U_i^0$  (3 константы) и  $\omega_{ij}^0$  (3 константы) устанавливаются из условия, вытекающего из способа закрепления тела в пространстве. Если деформируемое тело или материал в

пространстве не закреплены, то перемещения по формуле (1.26) могут быть найдены с точностью до констант.

Перемещения  $U_i$  в произвольной точке  $M'(X'_1, X'_2, X'_3)$  должны быть функциями координат этой точки и не должны зависеть от пути интегрирования  $M^0 - M'$ . Для этого подинтегральное выражение в формуле (1.26) должно представлять собой полный дифференциал. Из условия полного дифференциала вытекают следующие условия к подинтегральной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_l} [\varepsilon_{ik} + (X'_j - X_j)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{kj,i})] &= \\ = \frac{\partial}{\partial X_k} [\varepsilon_{il} + (X'_j - X_j)(\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{lj,i})]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Формула (1.27) представляет собой условие независимости интеграла в формуле (1.26) от пути интегрирования и, таким образом, условие однозначного вычисления перемещений по заданному полю деформаций. То есть для того, чтобы воспользоваться формулой (1.26) поле деформаций должно удовлетворять условию (1.27).

Если в выражении (1.27) сделать все необходимые преобразования, то будет видно, что (1.27) полностью совпадает с уравнениями совместности деформаций, записанными в форме (1.19), следовательно, для однозначного вычисления перемещений заданное поле деформаций должно быть кинетически допустимым. Поэтому уравнения совместности деформаций называют еще условиями единственности вычисления перемещений по заданному полю деформаций.





## Глава 2

# Теория напряжений

### 2.1 Введение

Деформацию можно измерить, а напряжения нет. Поэтому теория напряжений аксиоматическая. В теории напряжений изучаются внутренние силы, возникающие в твердых деформируемых материалах или телах в следствии физических воздействий на них. При внешнем физическом воздействии изменяются расстояния между внутренними точками материала, в следствии этого возникают внутренние силы, которые отражают макроскопическое взаимодействие между атомами или молекулами. Для описания внутренних сил в теории напряжений используются метод сечений и аксиома связи. Внутренние силы могут изменяться при переходе от одной частицы к другой, и поэтому напряженное состояние в теле в общем случае является неоднородным (также как и деформируемое состояние). Напряжение является мерой внутренних сил, возникающих в материале или теле.

Внешние силы:

**Объемные** — действуют на каждую точку объема.

**Поверхностные:**

**Сосредоточенные** — действуют на точку.

**Распределенные** — действуют на участок тела или на все тело.

### 2.2 Принцип напряжений

Важной гипотезой, служащей для описания внутренних сил в деформируемой среде является принцип напряжений Эйлера и Коши: в каждом поперечном сечении, мысленно проведенном внутри тела имеет место взаимодействие сил такого же характера, как и поверхностно распределенных нагрузок (рис. 2.1).

Мысленно отбросим часть тела  $V_1$  и, предположим, что действие отбрасываемой части на оставшуюся часть  $V_2$  можно заменить силами, которые действуют в каждой точке сечения  $A$ , то есть внутреннее состояние части тела  $V_2$  не изменится при той системе сил, которая действует на поверхность сечения  $A$ . Если такая эквивалентная система сил в сечении  $A$  дей-

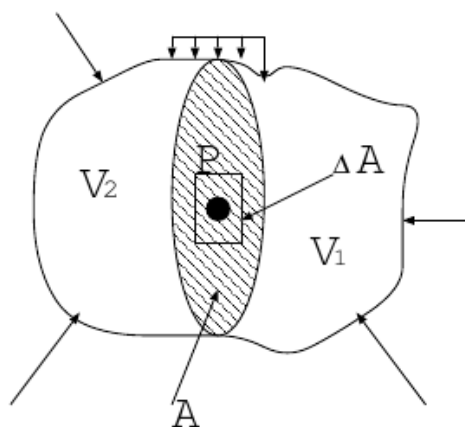


Рис. 2.1: Взаимодействие сил в произвольном сечении

ствительно существует (то есть гипотеза справедлива и принцип напряжений справедлив), то эту систему можно рассматривать как часть внешних сил (поверхностных), действующих на тело  $V_2$ . Выберем в сечении  $A$  произвольную точку  $P$  и рассмотрим в окрестности этой точки произвольную площадку, лежащую в сечении  $A$  —  $\Delta A$ . В каждой точке площадки  $\Delta A$  действуют силы, отражающие взаимодействие частей тела  $V_1$  и  $V_2$ . Рассматривая эти силы как систему мы можем заменить их главным вектором и главным моментом ( $\Delta \vec{S}$  и  $\Delta \vec{M}$ ). Центр приведения — точка  $P$ <sup>1</sup>.

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta A} = \vec{S}. \quad (2.1)$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta A} = 0. \quad (2.2)$$

Одной из основных гипотез классической теории напряжений является то, что один предел является конечной величиной, а другой принимается за нуль, поэтому классическая теория напряжений называется также безмоментной.

Вектор  $\vec{S}$  называется вектором напряжений в точке  $P$ . По сути вектор  $\vec{S}$  представляет собой внутреннюю силу в точке  $P$ , возникшую в результате взаимодействия частей тела  $V_1$  и  $V_2$  в сечении  $A$ . Вектор напряжений непосредственно связан не только с положением точки  $P$  в сечении  $A$ , но и с ориентацией самого сечения. При изменении ориентации площадки  $\Delta A$  в пространстве в этой же точке  $P$  будет меняться и вектор напряжений  $\vec{S}$ . Таким образом, в каждой точке внутри тела можно построить бесконечное множество векторов напряжений  $\vec{S}$ , каждый из которых будет связан с определенной ориентацией площадки  $\Delta A$ . Поскольку ориентация площадки  $\Delta A$  в исходной системе координат может быть задана единичным вектором нормали к площадке  $\vec{n}$ , то и векторы напряжений для каждой такой

<sup>1</sup>То есть  $\Delta \vec{S}$  и  $\Delta \vec{M}$  в совокупности представляют собой эквивалент системы сил на площадке  $\Delta A$ .

площадки можно обозначить как  $\vec{S}^{(n)}$ . Таким образом бесконечная совокупность всех векторов  $\vec{S}^{(n)}$  для всех направлений нормали  $\vec{n}$  в точке  $P$  определяет напряженное состояние в этой точке. Поэтому принцип напряжений может быть сформулирован следующим образом: напряженное состояние во внутренней точке деформируемого тела определяется бесконечной совокупностью векторов напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  в этой точке.

### 2.3 Тензор напряжений

Пусть во внутренней точке тела на площадке с единичным вектором  $\vec{n}$  действует вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ . Для вектора напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ , как и для любого вектора можно построить проекцию на произвольное направление, которая будет называться компонентой вектора напряжений в этом направлении. Компонента на нормаль называется также нормальным напряжением.

$$S_n = \vec{S}^{(n)} \cdot \vec{n}. \quad (2.3)$$

Построим направление в плоскости площадки, заданное единичным вектором  $\vec{\tau}$ , которое лежит одновременно в плоскости, образованной векторами  $\vec{S}^{(n)}$  и  $\vec{n}$ . Направление  $\tau$  называют касательным направлением по отношению к площадке.

$$S_\tau = \sqrt{|\vec{S}^{(n)}|^2 - S_n^2}. \quad (2.4)$$

Если задана система декартовых координат с ортами  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$ , то можно найти компоненты вектора напряжений на направление осей координат.

$$S_i = \vec{S}^{(n)} \cdot \vec{e}_i. \quad (2.5)$$

Где  $S_i$  — направление вектора  $\vec{S}^{(n)}$  на  $X_i$  ось координат. Тогда для вектора напряжений справедлива формула:

$$\vec{S}^{(n)} = S_i \cdot \vec{e}_i. \quad (2.6)$$

Если для выделенной в точке площадки построить вектор нормали к ее противоположной стороне, то этот вектор можно обозначить как  $-\vec{n}$  и тогда, в соответствии с законом Ньютона<sup>2</sup>, на этой противоположной стороне площадки будет действовать вектор напряжений  $\vec{S}^{(-n)}$ , равный по величине  $\vec{S}^{(n)}$  и противоположный ему по направлению.

$$\vec{S}^{(n)} = -\vec{S}^{(-n)}. \quad (2.7)$$

Пусть в произвольной точке тела построено три взаимно ортогональных площадки. Рассмотрим систему координат (рис. 2.2):

<sup>2</sup>III закон Ньютона: каждое действие равно противодействию.

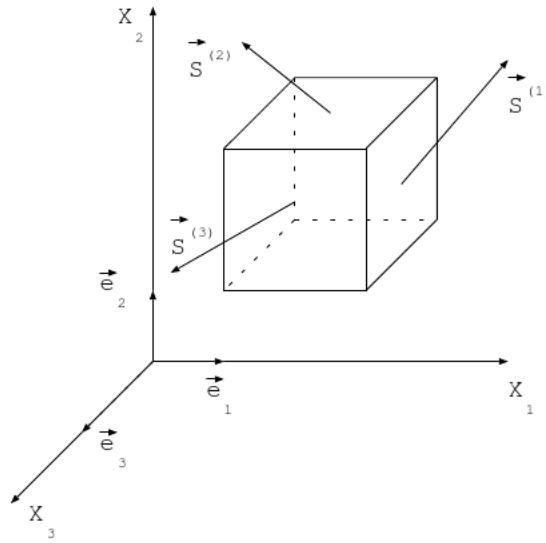


Рис. 2.2: Элементарная частица

Рассмотрим в точке  $P$  элементарную частицу в виде бесконечно малого куба, ребра которого направлены вдоль осей координат. Грани этого куба можно рассматривать как взаимно ортогональные площадки в данной точке  $P$ . Поскольку объем элементарной частицы стремится к нулю, а ориентация граней куба, каждая из которых ортогональна, определяет орту  $\vec{e}_i$  исходной системы координат сохраняется, то эти грани эквивалентны трем ортогональным площадкам в данной точке.

Обозначим эти площадки в соответствии с ортами, перпендикулярными этим площадкам. Построим на каждой площадке вектор напряжений, направление которого не совпадает с направлением осей координат. Каждый из векторов напряжений  $\vec{S}^{(i)}$  имеет свои компоненты на оси координат, например:

$$\vec{S}^{(1)} = S_1^{(1)}\vec{e}_1 + S_2^{(1)}\vec{e}_2 + S_3^{(1)}\vec{e}_3. \quad (2.8)$$

Где  $S_i^{(1)}$  есть компоненты вектора напряжений  $\vec{S}^{(1)}$  на  $X_i$  оси координат.

В общем случае, для любого из  $\vec{S}^{(i)}$  векторов напряжений можно записать:

$$\vec{S}^{(i)} = S_j^{(i)} \cdot \vec{e}_j. \quad (2.9)$$

Где  $i$  и  $j$  пробегает значения от 1 до 3, а  $S_j^{(i)}$  — проекции вектора  $\vec{S}^{(i)}$  на  $X_j$  ось координат.

Для величин  $S_j^{(i)}$  справедлива следующая формула:

$$S_j^{(i)} = \vec{S}^{(i)} \cdot \vec{e}_j. \quad (2.10)$$

Девять величин  $S_j^{(i)}$ , которые представляют собой компоненты трех векторов напряжений на три направления осей координат в исходной системе

координат, можно представить в виде квадратной матрицы размером  $3 \times 3$ . Из формулы (2.10) следует, что при повороте системы координат величины  $S_j^{(i)}$  будут изменяться по правилу преобразования компонент тензора II ранга, следовательно, совокупность величин  $S_j^{(i)}$  можно представить как тензор II ранга  $\sigma_{ij}$ , который называется тензором напряжений. Физический смысл компонент этого тензора напряжений — проекции векторов напряжений на оси координат. В исходной системе координат матрица тензора напряжений имеет следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Первый индекс у тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  обозначает номер оси, перпендикулярной к площадке на которой действует вектор напряжений, а второй индекс — направление, на которое берется проекция вектора напряжений, действующего на этой площадке.

Если векторы напряжений  $\vec{S}^{(i)}$  разложить на компоненты по осям координат и для обозначения этих компонент использовать тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , то получится следующая схема (рис. 2.3):

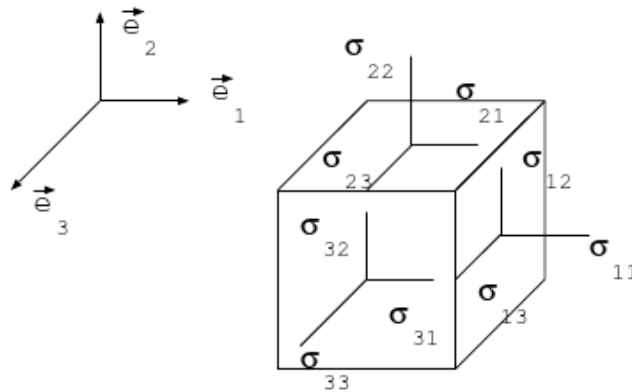


Рис. 2.3: Схема разложения векторов напряжений

Диагональные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  называются нормальными напряжениями, так как представляют собой проекции на нормали трех векторов напряжений на трех площадках. Соответственно, недиагональные компоненты тензора  $\sigma_{ij}$  называются касательными напряжениями. Сам тензор  $\sigma_{ij}$  называется тензором напряжений Коши.

## 2.4 Вычисление вектора напряжений на произвольной площадке

Напряженное состояние в точке характеризуется бесконечной совокупностью векторов напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ , которые действуют на различно ориентированных в точке площадках. Покажем, что вектор напряжений на произ-

вольной площадке можно вычислить по известным трем векторам напряжений, действующим на взаимно ортогональных площадках.

Пусть в произвольной точке тела  $A$  известны три вектора напряжений  $\vec{S}^{(1)}$ ,  $\vec{S}^{(2)}$  и  $\vec{S}^{(3)}$ , которые действуют на трех взаимно ортогональных площадках, параллельных плоскостям декартовой системы координат. Это эквивалентно тому, что в данной точке задан тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ . В качестве элементарных площадок выберем площадки в плоскостях системы координат. В качестве произвольно ориентированной площадки в теле  $A$  выберем треугольник, вершины которого находятся на осях координат (рис. 2.4):

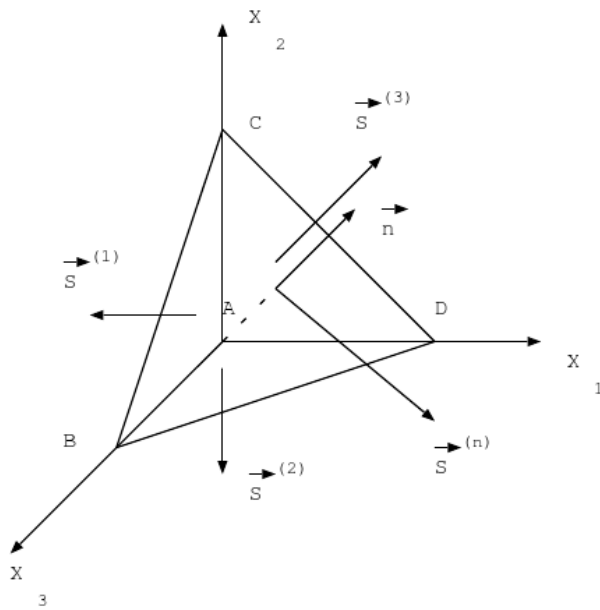


Рис. 2.4: Произвольно ориентированная площадка

Считаем, что ориентация элементарной площадки  $BCD$  нам задана и, следовательно, вектор  $\vec{n}$  единичной нормали, характеризующий положение площадки в пространстве, нам известен. Таким образом, на всех гранях тетраэдра  $ABCD$  действуют векторы напряжений.

Рассмотрим равновесие элементарного тетраэдра  $ABCD$  под действием указанной системы внутренних сил, то есть векторов напряжений  $\vec{S}^{(1)}$ ,  $\vec{S}^{(2)}$ ,  $\vec{S}^{(3)}$  и  $\vec{S}^{(n)}$ . Из условия равновесия следует, что сумма проекций равнодействующих сил, действующих на гранях тетраэдра, на оси координат должна быть равна нулю. При этом сами векторы напряжений и векторы нормалей к площадкам могут быть представлены через их проекции на оси координат. Например, для вектора  $\vec{S}^{(n)}$ :

$$\vec{S}^{(n)} = S_1^{(n)} \vec{e}_1 + S_2^{(n)} \vec{e}_2 + S_3^{(n)} \vec{e}_3. \quad (2.12)$$

$$\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3. \quad (2.13)$$

$S_i^{(n)}$  и  $n_i$  — проекции на оси координат векторов  $\vec{S}^{(n)}$  и  $\vec{n}$ .

Обозначим площади граней элементарного тетраэдра  $ABCD$  следующим образом: площадь грани  $BCD$ , на которой мы ищем напряжение, обозначим как  $dA$ , а площади других граней как  $dA_i$ , где индекс  $i$  указывает на ось координат, перпендикулярной данной площадке. В векторном виде условие равновесия тетраэдра  $ABCD$  можно записать следующим образом:

$$dA\vec{S}^{(n)} = dA_1\vec{S}^{(1)} + dA_2\vec{S}^{(2)} + dA_3\vec{S}^{(3)}. \quad (2.14)$$

$$dA_i = n_i \cdot dA. \quad (2.15)$$

Поскольку площадки  $dA_i$  представляют собой проекции площадки  $dA$  на координатные плоскости, то  $dA_i$  можно вычислить по соотношению (2.15) при заданных проекциях  $n_i$  вектора нормали  $\vec{n}$  к площадке  $dA$ . Например, проекция векторного уравнения (2.14) на ось  $X_1$  с учетом выражения (2.15) приводит к следующему выражению:

$$dAS_1^{(n)} = n_1dA \begin{matrix} \sigma_{11}+ \\ \parallel \\ S_1^{(1)} \end{matrix} + n_2dA \begin{matrix} \sigma_{21}+ \\ \parallel \\ S_1^{(2)} \end{matrix} + n_3dA \begin{matrix} \sigma_{31} \\ \parallel \\ S_1^{(3)} \end{matrix}$$

$$S_1^{(n)} = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{21} + n_3\sigma_{31} = \sigma_{i1}n_i. \quad (2.16)$$

По аналогии для проекций на другие координатные оси координат получаем:

$$S_2^{(n)} = \sigma_{i2}n_i. \quad (2.17)$$

$$S_3^{(n)} = \sigma_{i3}n_i. \quad (2.18)$$

Обобщая уравнения (2.16), (2.17) и (2.18) можно записать:

$$S_i^{(n)} = \sigma_{ji}n_j. \quad (2.19)$$

Где  $n_j$  — проекции вектора  $\vec{n}$ , характеризующего положение площадки в пространстве, а  $\sigma_{ji}$  — тензор деформаций в данной точке. Формула (2.19) называется фундаментальной формулой Коши и связывает компоненты вектора напряжений на произвольной площадке с тензором напряжений в точке. Эта формула доказывает, что напряженное состояние в точке характеризуется не только бесконечной совокупностью векторов напряжений, но и тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ . Зная проекции  $S_i^{(n)}$  вектора напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ , можно восстановить и сам вектор по формуле (2.12).

## 2.5 Уравнения равновесия в напряжениях

До сих пор мы рассматривали напряженное состояние в точке деформируемой среды или тела. Под действием внешних объемных граних или поверхностных сил во всех точках тела возникает напряженное состояние, внутреннее распределение которого в теле является непрерывным и,

в общем случае, неоднородным. Аналогично тому как напряженное состояние в точке характеризуется тензором напряжений, напряженное состояние внутри тела характеризуется полем напряжений, то есть совокупностью координатных зависимостей всех компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ . На поверхности тела  $S$  действуют поверхностные силы  $\vec{T}(X_1, X_2, X_3)$ , в каждой точке объема тела  $V$  действуют объемные силы  $\vec{f}(X_1, X_2, X_3)$ . В результате действия внешних сил  $\vec{f}$  и  $\vec{T}$  внутри тела возникает напряженное состояние, которое характеризуется непрерывными функциями  $\sigma_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ . Предположим, что эти функции не только непрерывны, но и дифференцируемы. Получим уравнения, которым должно удовлетворять поле напряжений  $\sigma_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ . Если тело  $V$  находится в равновесии, то внешние поверхностные и объемные силы должны удовлетворять условиям самоуравновешивания внешней нагрузки. То есть главный вектор и главный момент внешних сил должны быть равны нулю (система внешних сил находится в состоянии равновесия). Тогда для главного вектора внешних сил имеем:

$$\vec{R} = \int \int_S \vec{T}(X_1, X_2, X_3) dS + \int \int \int_V \vec{f}(X_1, X_2, X_3) dV = 0. \quad (2.20)$$

Для главного момента внешних сил  $M$  должно быть справедливо:

$$\vec{M} = \int \int_S \vec{r} \times \vec{T}(X_1, X_2, X_3) dS + \int \int \int_V \vec{r} \times \vec{f}(X_1, X_2, X_3) dV = 0. \quad (2.21)$$

Где  $\vec{r}$  — радиус-вектор из начала координат во внутреннюю точку тела.

Выражения (2.20) и (2.21) называют условием самоуравновешивания внешней нагрузки. Это условие должно выполняться для любого деформируемого тела, находящегося в состоянии равновесия под действием внешних поверхностных и объемных сил. Если деформируемое тело находится в состоянии равновесия, то и любой его внутренний объем также находится в состоянии равновесия (рис. 2.5) и для любого внутреннего объема можно записать условие самоуравновешивания сил аналогичные (2.20) и (2.21).

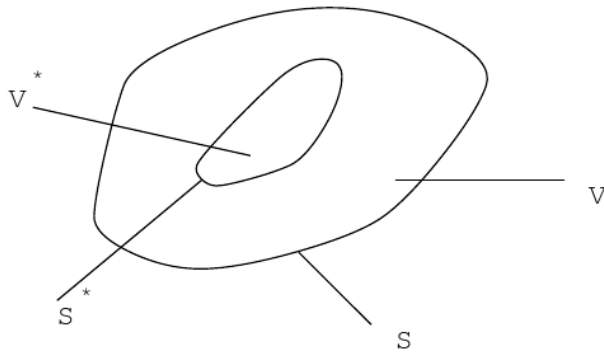


Рис. 2.5: Деформируемое тело



На объем  $V^*$  будут действовать силы, распределенные по поверхности  $S^*$ , которые отображают действие мысленно отбрасываемой части тела  $V - V^*$  на внутренний объем  $V^*$ . Эти внутренние для объема  $V$  силы будут являться поверхностными силами для объема  $V^*$ . Построив в каждой точке поверхности  $S^*$  касательную к поверхности площадку, ориентация которой будет задана в каждой точке вектором нормали  $\vec{n}$  к этой площадке, можно построить в каждой точке на этой площадке вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ . Тогда совокупность всех векторов напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  в каждой точке поверхности  $S^*$  и будет системой поверхностных сил для внутреннего объема  $V^*$ . Объемными силами для части тела  $V^*$  являются те же внешние объемные силы, что и для всего тела  $V$ , но рассматриваемые только для точек объема  $V^*$ .

Запишем для внутренней части  $V^*$  условие самоуравновешивания сил (поверхностных и объемных), действующих на эту часть тела:

$$\begin{aligned}\vec{R}^* &= 0; \\ \vec{M}^* &= 0; \\ \vec{R}^* &= \int \int_{S^*} \vec{S}^{(n)} dS + \int \int_{V^*} \vec{f} dV.\end{aligned}$$

Пусть внутри тела  $V$  под действием внешних сил возникло поле напряжений  $\sigma_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ :

$$\begin{aligned}S_i^{(n)} &= \sigma_{ji}n_j; \\ \vec{S}^{(n)} &= S_i^{(n)}\vec{e}_i; \\ \vec{f} &= f_i\vec{e}_i; \\ \vec{R}^* &= \int \int_{S^*} \sigma_{ji}\vec{e}_i n_j dS + \int \int_{V^*} f_i\vec{e}_i dV.\end{aligned}$$

Применяя к поверхностному интегралу формулу Остроградского-Гаусса получаем:

$$\begin{aligned}\vec{R}^* &= \int \int \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial X_j} \sigma_{ji} \vec{e}_i dV + \int \int \int_{V^*} f_i \vec{e}_i dV = \\ &= \int \int \int_{V^*} \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i \right) \vec{e}_i dV = 0.\end{aligned}$$

Формула  
Остроградского-Гаусса:  
 $\int \int_S F n_i dS =$   
 $= \int \int \int_V \frac{\partial F}{\partial X_i} dV.$

Поскольку  $V^*$  является произвольной частью тела  $V$ , то полученный объемный интеграл может быть равен нулю тогда и только тогда, когда подынтегральная функция равна нулю во всех точках объема  $V^*$ , следовательно, получаем:

$$\begin{aligned}\left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i \right) \vec{e}_i = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i = 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Условие (2.22) однозначно вытекает из условия  $R^* = 0$  и выполняется во всех точках объема  $V^*$ .

По аналогии с выражением (2.21) записываем:

$$\begin{aligned}
\overline{M}^* &= \int \int_{S^*} \vec{r} \times \vec{S}^{(n)} dS + \int \int_{V^*} \vec{r} \times \vec{f} dV = 0; \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial X_i} &= \vec{e}_i; \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial X_j} &= \vec{e}_j; \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial X_j} (\sigma_{ji} \vec{r} \times \vec{e}_i) &= \sigma_{ij}; \\
\overline{M}^* &= \int \int_{S^*} (\sigma_{ji} \vec{r} \times \vec{e}_i) n_j dS + \int \int_{V^*} (\vec{r} \times \vec{e}_i) f_i dV = \\
&= \int \int_{V^*} \frac{\partial}{\partial X_j} (\sigma_{ji} \vec{r} \times \vec{e}_i) dV + \int \int_{V^*} (\vec{r} \times \vec{e}_i) f_i dV = \\
&= \int \int_{V^*} \left( \vec{r} \times \vec{e}_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + \vec{e}_j \times \vec{e}_i \sigma_{ji} + \vec{r} \times \vec{e}_i f_i \right) dV = \\
&= \int \int_{V^*} \left[ \vec{r} \times \vec{e}_i \left( \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i \right) \right] dV + \int \int_{V^*} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \sigma_{ij} dV = \\
&= \int \int_{V^*} \vec{e}_i \times \vec{e}_j \sigma_{ij} dV = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку оставшееся слагаемое представляет собой интеграл по **произвольной** внутренней части тела, то такой интеграл равен нулю тогда и только тогда, когда его подынтегральная функция равна нулю во всех точках объема  $V^*$ , то есть во всех точках объема  $V^*$  справедливо:

$$\vec{e}_j \times \vec{e}_i \sigma_{ji} = 0;$$

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 \sigma_{11} + \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 \sigma_{22} + \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \sigma_{33} + \\
&(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \sigma_{12} + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 \sigma_{21}) + (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \sigma_{13} + \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \sigma_{31}) + \\
&(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \sigma_{23} + \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 \sigma_{32}) = 0.
\end{aligned}$$

Слагаемые с повторяющимися индексами равны нулю, так как равны нулю соответствующие вторые производные. Сомножители слагаемых с величинами  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_{21}$  (а также других аналогичных пар) представляют собой одинаковые единичные векторы, направленные в противоположные стороны и ортогональные другим аналогичным векторам, поэтому полученное векторное уравнение выполняется только при условиях:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31}; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}. \quad (2.23)$$

Условия (2.23) представляют собой условия симметрии  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  тензора напряжений, которое, таким образом, вытекает из условия самоуравновешивания системы сил, действующих на произвольный внутренний объем рассматриваемого тела. С учетом симметрии тензора напряжений основные формулы теории напряжений могут быть записаны в следующем виде:

$$S_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.24)$$

Выражение (2.24) называют фундаментальной формулой Коши.

Эта формула следует из (2.19) и из условий (2.23); выражение (2.22) записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) называется уравнением равновесия в напряжениях. Это уравнение выполняется во всех внутренних точках тела  $V$ . Поле напряжений  $\sigma_{ij}(X_1, X_2, X_3)$ , удовлетворяющее уравнениям равновесия в напряжениях (2.25) называется статически допустимым. В развернутом виде уравнения (2.25) записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_3} + f_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_3} + f_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} + f_3 = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Уравнения (2.26) называют уравнениями равновесия в напряжениях в развернутом виде. Всего уравнений три, они образуют систему дифференциальных уравнений I порядка в частных производных, линейных, неоднородных (при  $f_i = 0$ ), с постоянными коэффициентами. У системы (2.26) имеется частный случай, когда объемными силами и вызываемыми ими напряжениями можно пренебречь по отношению к другим физическим воздействиям (поверхностным силам, изменениям температуры и так далее). В этом случае уравнения равновесия в напряжениях в тензорном виде записываются:

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (2.27)$$

В развернутом виде в выражении (2.26) достаточно  $f_i$  принять равным нулю. В этом частном случае уравнения равновесия в напряжениях становятся однородными.

## 2.6 Условия равновесия на поверхности

Для того чтобы найти условия, связывающие внутренние силы с поверхностными силами для точек поверхности выберем точку  $P$  внутри тела  $V$ , которая бесконечно близко лежит к поверхности  $S$ . Для точки  $P$  можно найти такую точку  $Q$ , которая принадлежит поверхности  $S$  и лежит на одной нормали к касательной площадке с точкой  $P$ . На площадке в точке  $P$ , которая параллельна касательной площадке к поверхности в точке  $Q$  действует вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ . Этот вектор напряжений связан с тензором напряжений фундаментальной формулой Коши в точке  $P$ :

$$S_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.28)$$

Где  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений в точке  $P$ ,  $S_i^{(n)}$  — проекции вектора напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  в точке  $P$ , а  $n_j$  — проекции вектора единичной нормали, одинаковые для площадок в точке  $P$  и в точке  $Q$ <sup>3</sup>. Рассматривая теперь предельный переход точки  $P$  к точке  $Q$  по нормали к касательной площадке получаем, что вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  должен стремиться к поверхностной силе  $\vec{T}$  в точке  $Q$ . Поскольку среда сплошная, данный переход является непрерывным и из асимптотики этого перехода справедливо соотношение:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j. \quad (2.29)$$

Где  $T_i$  — проекции поверхностных сил в точке  $Q$ ,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений в точке  $Q$  и  $n_j$  — проекции вектора единичной нормали площадки, касательной к поверхности тела в точке  $Q$ . Выражение (2.29) — условие равновесия на поверхности в напряжениях. Это условие выполняется во

<sup>3</sup>Так как эти площадки параллельны

всех точках поверхности, где заданы поверхностные силы. Частным случаем поверхности, на которой заданы поверхностные силы является свободная поверхность, то есть поверхность или ее участок, на которой поверхностные силы равны нулю.

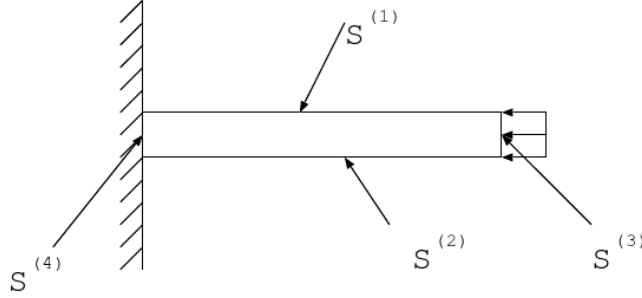


Рис. 2.6: Пример задания сил

$S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  — свободные поверхности,  $S^{(3)}$  — поверхность, на которой заданы силы,  $S^{(4)}$  — поверхность, на которой заданы перемещения.

Тогда для свободной поверхности условие равновесия в напряжениях на поверхности запишется в виде:

$$\sigma_{ij}n_j = 0. \quad (2.30)$$

## 2.7 Главные напряжения и главные направления

Рассматривая напряженное состояние в точке, заданное произвольным тензором напряжений  $\sigma_{ij}$  можно изучить вопрос о том, существует ли такая площадка в точке, на которой вектор напряжений не имеет касательных составляющих<sup>4</sup>. С этим вопросом связан и другой: на каких площадках нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений. Площадки в точке, свободные от касательных напряжений называются главными площадками. Направления, определяемые вектором нормали к таким площадкам называются главными направлениями, а нормальные напряжения, действующие на этих площадках называются главными напряжениями. Если при повороте осей координат одну из осей направить вдоль главного направления, то такая ось будет называться главной осью координат.

Пусть в точке задан произвольный тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , тогда на любой площадке в точке можно найти вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  с проекциями  $S_i^{(n)}$  по фундаментальной формуле Коши:  $S_i^{(n)} = \sigma_{ij}n_j$

$$\vec{S}^{(n)} = \lambda \vec{n}; \quad (2.31)$$

$$S_i^{(n)} = \lambda n_i. \quad (2.32)$$

<sup>4</sup>То есть вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  параллелен вектору нормали площадки  $\vec{n}$ .

Где  $\lambda$  — неизвестная величина, имеющая смысл модуля вектора напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  на той площадке, где нет касательных составляющих у вектора напряжений  $\vec{S}^{(n)}$ . Тогда справедливо следующее выражение:

$$\sigma_{ij}n_j = \lambda n_i;$$

$$\sigma_{ij}n_j - \lambda \delta_{ij}n_j = 0;$$

$$n_j(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0. \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} (\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0 \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \lambda)n_3 = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Система (2.34) — эквивалент выражения (2.33), записанный в развернутом виде. Система (2.34) — система алгебраических линейных однородных уравнений I порядка. Система (2.34), как и любая система линейных однородных уравнений имеет тривиальное решение  $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ , однако, это решение в данной задаче не имеет смысла, поскольку мы ищем единичный вектор ( $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ ).

Нетривиальное решение системы (2.34) существует тогда и только тогда, когда главный определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.35)$$

Раскрывая выражение (2.35) можно найти величину  $\lambda$  из кубического алгебраического уравнения:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \quad (2.36)$$

Уравнение (2.36) следует из выражения (2.35) и называется характеристическим уравнением тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Характеристическое уравнение вида (2.36) может быть записано для любого симметричного тензора II ранга (не обязательно тензора напряжений). Решения алгебраического уравнения (2.36) называются собственными числами тензора II ранга. В общем случае кубическое уравнение вида (2.36) может иметь либо три действительных корня, либо один корень действительный, и два мнимых комплексно сопряженных. Однако, для характеристического уравнения (2.36) известно, что это уравнение всегда имеет три действительных корня. Коэффициенты характеристического уравнения (2.36) называются инвариантами тензора напряжений.

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 \\ I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 \end{cases} \quad (2.37)$$

Выражения (2.37) позволяют находить коэффициенты характеристического уравнения для любого произвольно заданного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

Таким образом, поскольку уравнение (2.36) имеет три корня,  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$  и  $\lambda = \lambda_3$ , то, соответственно, мы имеем три разных решения системы (2.34) и, следовательно, три площадки, на которых вектор напряжений  $\vec{S}^{(n)}$  параллелен вектору  $\vec{n}$ . При решении системы (2.34) надо исходить из того, что эту систему надо дополнить условием  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , иначе решение будет вырожденным.

Величины  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  и есть главные напряжения тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ :  $\lambda_1 \equiv \sigma_1$ ,  $\lambda_2 \equiv \sigma_2$ ,  $\lambda_3 \equiv \sigma_3$ ,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Инварианты  $I_i$  тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  могут быть найдены по следующим формулам:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \end{cases} \quad (2.38)$$

$$(\lambda - \sigma_1)(\lambda - \sigma_2)(\lambda - \sigma_3) = 0. \quad (2.39)$$

Из выражения (2.39) можно получить формулы для  $I_i$  через главные напряжения:

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \\ I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

Докажем, что три главных напряжения, а, следовательно, и три площадки на которых они действуют (главные площадки) являются взаимно ортогональными. Рассмотрим частный случай, когда среди корней характеристического уравнения нет равных, то есть  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ .

Площадки, на которых действуют  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определены нормальными  $\vec{n}^{(1)}$  и  $\vec{n}^{(2)}$  соответственно. Тогда для каждой из этих площадок можно записать выражение, аналогичное формуле (2.32) и фундаментальному соотношению Коши:

$$\sigma_1 n_i^{(1)} = \sigma_{ij} n_j^{(1)};$$

$$\sigma_2 n_i^{(2)} = \sigma_{ij} n_j^{(2)}.$$

Домножим первое уравнение на  $n_i^{(2)}$ , второе — на  $n_i^{(1)}$  и вычтем из первого уравнения второе:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0, \Rightarrow n_i^{(1)} n_i^{(2)} = 0.$$

Последнее выражение представляет собой скалярное произведение векторов  $\vec{n}^{(1)}$  и  $\vec{n}^{(2)}$ , из чего следует, что эти векторы перпендикулярны, то

есть перпендикулярными являются главные площадки, на которые действуют главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Аналогичным образом доказывается ортогональность и для других площадок. Таким образом, три главных направления взаимно ортогональны.

Если два корня равны между собой (например,  $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ ), тогда направление  $\vec{n}^{(1)}$ , соответствующее главному напряжению  $\sigma_1$ , является главным направлением, и любые два взаимно ортогональные направления, лежащие в плоскости перпендикулярной  $\vec{n}^{(1)}$  являются главными направлениями.

Если же между собой равны все три корня, то любые три взаимно ортогональные направления будут являться главными направлениями. Такое напряженное состояние соответствует равностороннему растяжению ( $\sigma_1 > 0$ ) или гидростатическому сжатию ( $\sigma_1 < 0$ ), и поэтому называется еще гидростатическим напряженным состоянием.

Рассмотрим теперь вопрос о площадках, на которых нормальные напряжения достигают экстремальных значений. Если в точке задан тензор напряжений  $\sigma_{ij}$ , то нормальное напряжение  $S_n^{(n)}$  на произвольной площадке с нормалью  $\vec{n}$  вычисляется по формуле:

$$S_n^{(n)} = \vec{S}^{(n)} \cdot \vec{n}. \quad (2.40)$$

Выражение (2.40) в проекциях имеет вид:

$$S_n^{(n)} = \sigma_{ij} n_j n_i. \quad (2.41)$$

Варьируемым значением в формуле (2.41) являются проекции  $n_1, n_2, n_3$  вектора единичной нормали  $\vec{n}$ , а слева — величина, экстремум которой необходимо найти. Экстремум величины  $S_n^{(n)}$  необходимо находить при дополнительном условии:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (2.42)$$

Одним из методов определения экстремума при дополнительном условии в виде равенства является метод множителей Лагранжа. В соответствии с этим методом, наряду с функцией, экстремум которой ищется, строится дополнительная функция, аддитивно включающая в себя дополнительное равенство, записанное в виде тождественного нуля. Применительно к формуле (2.41) с дополнительным условием (2.42) это выглядит следующим образом:

$$F(n_1, n_2, n_3) = S_n^{(n)} - \mu(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1). \quad (2.43)$$

Экстремум функций  $F$  и  $S_n^{(n)}$  совпадают, но экстремум функции  $F$  учитывает дополнительное условие (2.42). Тогда условие экстремума можно записать в виде:

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0;$$

$$S_n^{(n)} = \sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + \sigma_{33}n_3^2 + \sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{13}n_1n_3 + \sigma_{23}n_2n_3;$$

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = 2\sigma_{11}n_1 + 2\sigma_{12}n_2 + 2\sigma_{13}n_3 - 2\mu n_1 = 0;$$

$\mu$  — множитель Лагранжа.

$$(\sigma_{11} - \mu)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0.$$

Аналогично находятся выражения, соответствующие двум оставшимся условиям экстремума, и, в результате, получается система уравнений относительно неизвестных  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$ , полностью совпадающая с системой уравнений (2.34), следовательно нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений на главных площадках, а сами экстремальные значения нормальных напряжений и есть главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Очевидно, что если оси координат направить вдоль главных направлений, то в главных осях координат тензор напряжений характеризуется следующей матрицей:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Наряду с главными напряжениями, которые по определению являются нормальными напряжениями, можно рассматривать аналогичную задачу и для касательных напряжений. Можно понять, что для произвольного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  площадок на которых отсутствуют нормальные напряжения нет. Главными касательными напряжениями называются экстремальные значения касательных напряжений. Площадок, на которых действуют главные касательные напряжения, десять, и существуют простые формулы, которые позволяют на этих площадках находить не только экстремальные значения касательных напряжений, но и нормальные напряжения, а также находить проекции единичных векторов к таким площадкам.



## Глава 3

# Определяющие соотношения УАМ

### 3.1 Общая характеристика определяющих соотношений

В теории деформаций (Глава 1) кинематика сплошной среды<sup>1</sup> рассматривалась вне зависимости от физических воздействий. В теории напряжений (Глава 2) изучались внутренние силы, возникающие в теле или в материале, возникающие в результате физического воздействия, при этом ни в теории деформаций, ни в теории напряжений не учитывались конкретные свойства материала, их способность сопротивляться внешним силам.

Очевидно, что между кинематическими и статическими параметрами внутреннего состояния деформируемого материала<sup>2</sup> должна существовать связь. В общем виде эта связь может быть отражена математической зависимостью следующего вида:

$$\sigma_{ij} = \mathcal{F}_{ij}(\varepsilon_{kl}, T, \tau, \dots). \quad (3.1)$$

Напряжения  $\sigma_{ij}$ , деформации  $\varepsilon_{kl}$ , температура  $T$ , время  $\tau$  — величины, связанные с внутренним состоянием материала, а  $\mathcal{F}_{ij}$  — тензор-оператор, устанавливающий связь между напряжениями  $\sigma_{ij}$  и другими параметрами внутреннего состояния. Соотношение вида (3.1) должно выполняться в каждой точке деформируемого материала. По аналогии с выражением (3.1) можно записать и другое соотношение:

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_{ij}(\sigma_{kl}, T, \tau, \dots). \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) являются обратными по отношению к соотношениям (3.1). Выражения (3.1) и (3.2) называются определяющими соотношениями упругости анизотропных материалов. Если из соотношений (3.1) можно получить (3.2), и, наоборот, из (3.2) — (3.1), то определяющие соотношения являются обратимыми. В соотношениях (3.1) и (3.2) время  $\tau$  отображает

---

<sup>1</sup>То есть описание перемещений точек, вычисление удлинений линейных элементов и изменений углов между ними.

<sup>2</sup>То есть между деформациями и напряжениями.

$$0 \leq \tau \leq t$$

историю изменения внутреннего состояния материала на момент времени  $\tau = t$  для которого записаны выражения (3.1) и (3.2). Определяющие соотношения не только устанавливают связь между величинами, которые характеризуют внутреннее состояние материала, но и отражают физические (деформационные) свойства конкретных материалов.

С помощью определяющих соотношений свойства конкретных материалов придаются изучаемым моделям. Для построения определяющих соотношений (3.1) и (3.2) проводят эксперименты по физическому воздействию на образцы материалов. Из обработки этих экспериментов устанавливают конкретный вид зависимостей (3.1) и (3.2) и значения входящих в эти зависимости констант. Поэтому такие эксперименты называют установочными экспериментами, а константы в выражениях (3.1) и (3.2) — материальными константами. Если в определяющих соотношениях (3.1) и (3.2) отсутствует переменная  $\tau$ , то есть взаимосвязь параметров внутреннего состояния определяется только значениями этих параметров в конкретное время  $\tau = t$ , то такие материалы и определяющие соотношения называются склерономными, в противном случае — реономными. Если свойства материала не зависят от температуры  $T$  в его точках, то такой материал называется термостабильным. Если материал является неоднородным<sup>3</sup>, то, соответственно, и определяющие соотношения (3.1) и (3.2) не будут одинаковыми для всех точек материала, и, соответственно, будут являться неоднородными, при этом важно, что будут изменяться и материальные константы. Если материальные константы представляют собой быстро осциллирующие функции, то такой материал называется микронеоднородным. Если при этом быстро осциллирующие функции являются кусочно постоянными, то такой материал называется композиционным.

## 3.2 Обобщенный закон Гука

Наиболее простым математическим соотношением, соответствующим определяющему соотношению (3.1) является выражение вида:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + c_{ij}. \quad (3.3)$$

Выражение (3.3) является тензорно линейным<sup>4</sup> и содержит два тензора-константы —  $C_{ijkl}$  и  $c_{ij}$ . Из гипотезы о естественном начальном состоянии деформируемого тела (если напряжения равны нулю, то и деформации равны нулю) следует, что  $c_{ij} = 0$ , следовательно, получаем:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (3.4)$$

Это соотношение называется обобщенный закон Гука однородного анизотропного материала. Соответственно, по аналогии с выражением (3.2), можно записать:

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (3.5)$$

<sup>3</sup>То есть его свойства изменяются от точки к точке.

<sup>4</sup>Соответствует линейной функции  $y = ax + b$

Выражение (3.5) полностью эквивалентно выражению (3.4) и также является формой записи обобщенного закона Гука. В силу линейности выражений (3.4) и (3.5) они являются взаимно обратимыми. Тензоры констант  $C_{ijkl}$  и  $D_{ijkl}$  называются тензором модуля упругости и тензором упругих податливостей соответственно.  $C_{ijkl}$  и  $D_{ijkl}$  являются тензорами IV ранга, каждый из них содержит 81 компоненту. Тензоры  $C_{ijkl}$  и  $D_{ijkl}$  являются материальными константами упругости анизотропных материалов.

Обобщенный закон Гука описывает связь между напряжениями и деформациями при действии внешних сил, однако, деформации в материале могут возникать и в следствии изменения температуры. Наиболее простые с математической точки зрения тензорно-линейные соотношения связывающие температурные деформации с изменением температуры имеют вид:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_{ij} \Delta T. \quad (3.6)$$

Где  $\varepsilon_{ij}^T$  — тензор деформаций, вызванных изменением температуры,  $\Delta T$  — изменение температуры в точке, а  $\alpha_{ij}$  — тензор коэффициентов линейного теплового расширения. Тензор  $\alpha_{ij}$  тоже является материальной константой и представляет собой симметричный<sup>5</sup> тензор II ранга.

При одновременном действии внешних сил и изменении температуры в точках, определяющие соотношения термоупругости анизотропных материалов можно записать в виде:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T). \quad (3.7)$$

Где  $\sigma_{ij}$  — напряжения в точке,  $\varepsilon_{kl}$  — полная упругая деформация в точке, а  $\varepsilon_{kl}^T$  — температурная деформация.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T). \quad (3.8)$$

Соотношение (3.8) — гипотеза Дюамеля-Неймана — представляет собой простейшее определяющее соотношение упругости анизотропных материалов.

Если выражения (3.7) и (3.8) обратить, то есть связать деформации с напряжениями, то получим следующие эквивалентные соотношения:

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl} + \varepsilon_{ij}^T. \quad (3.9)$$

### 3.3 Упругий потенциал

В упругости анизотропных материалов используются скалярные величины, которые называются потенциалами напряжений и деформаций. Например, для тензора напряжений можно записать:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (3.10)$$

Где  $W$  — потенциал тензора напряжений (упругий потенциал). Упругий потенциал соответствующий обобщенному закону Гука имеет вид:

<sup>5</sup>Симметрия  $\alpha_{ij}$  следует из симметрии  $\varepsilon_{ij}$

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (3.11)$$

$W$  называют также квадратичной формой тензора деформаций. Можно доказать, что для симметричного тензора  $\Pi$  ранга квадратичная форма всегда есть величина неотрицательная ( $W \leq 0$ ). Упругий потенциал  $W$  имеет и физический смысл — потенциальная энергия деформации материальной частицы или удельная упругая энергия деформации. Величина  $W$  равна нулю только в том случае, когда  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  равны нулю.

Рассмотрим условие симметрии тензоров модулей упругости  $C_{ijkl}$  и упругих податливостей  $D_{ijkl}$ . В силу симметрии  $\varepsilon_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$ :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}. \quad (3.12)$$

Можно понять, что условия симметрии (3.12) сокращают количество независимых постоянных тензора  $C_{ijkl}$  с 81 до 36. Одновременно, условия потенциальности тензора напряжений (3.11) приводит к соотношению:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (3.13)$$

По-парная перестановка индексов (3.13) с учетом применения ее к условиям (3.12) дополнительно сокращает число независимых компонент тензора  $C_{ijkl}$  до 21. Самому общему случаю анизотропии упругих материалов соответствует тензор  $C_{ijkl}$  с 21 независимой компонентой.

### 3.4 Частные случаи анизотропии упругих свойств

Из экспериментов известно, что свойства материалов могут отличаться от точки к точке и в каждой точке могут быть различными для разных направлений. Поэтому по термоупругим свойствам материалы разделяются, с одной стороны, на однородные и неоднородные, а с другой — на изотропные и анизотропные.

Материалы, в которых термоупругие свойства во всех точках одинаковы, называются однородными, а материалы с различными термоупругими свойствами в различных точках — неоднородными. Композиты считаются однородными на макроуровне, когда характеризуются эффективными свойствами, одинаковыми во всех точках. На структурном уровне композиты являются неоднородными, поскольку их термоупругие свойства изменяются скачкообразно при переходе от точки к точке через межфазную поверхность (например, от матрицы к волокну).

Материалы, термоупругие свойства которых во всех направлениях, проведенных через данную точку, одинаковы, называют изотропными в данной точке, а материалы, термоупругие свойства которых различны для различных направлений, проведенных через данную точку — анизотропными в данной точке.

Однородный материал, изотропный хотя бы в одной точке, является изотропным материалом. Соответственно, однородный материал, анизотропный хотя бы в одной точке, является анизотропным.

Проявление анизотропии свойств связано со структурой материалов. Выделяют конструкционную, технологическую и физическую анизотропию свойств материалов.

Конструкционная анизотропия термоупругих свойств композитов “закладывается” в материал при его создании и обусловлена различием термоупругих свойств компонентов композита, их геометрическим параметрами и характером взаимного расположения. Анизотропия свойств композитов связана с ориентацией волокон в матрице, характером чередования слоев и так далее.

Технологическая (деформационная) анизотропия свойств возникает при деформировании материалов под действием нагрузки и связана с возникновением структуры (текстуры), определенным образом ориентированной по отношению к нагрузке. Например, анизотропия свойств при пластическом деформировании металлов или при деформировании керамик с образованием одинаково ориентированных дискообразных микротрещин.

Физическая анизотропия присуща кристаллам и связана с особенностями строения их кристаллической решетки.

Анизотропия термоупругих свойств отражается при задании тензоров модулей упругости  $C_{ijkl}$  (или модулей упругих податливостей  $D_{ijkl}$ ) и коэффициентов теплового расширения  $\alpha_{ij}$ .

В самом общем случае симметричные тензоры модулей упругости  $C_{ijkl}$  и коэффициентов теплового расширения  $\alpha_{ij}$  содержат соответственно 21 независимый коэффициент и 6 независимых коэффициентов, которые могут быть представлены в виде матриц:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{1131} & C_{2231} & C_{3331} & C_{2331} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{3112} & C_{1212} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{array} \right\| \quad (3.14)$$

Симметрия термоупругих свойств анизотропных композитов обусловлена симметричностью их структуры.

Значительное уменьшение числа независимых материальных констант получим в материалах, структура которых имеет двукратную ось симметрии. Говорят, что структура имеет ось симметрии  $n$ -ого порядка, если упругий потенциал  $W(\varepsilon_{ij})$  и напряжения не изменятся после каждого поворота этой оси на угол  $\frac{2\pi}{n}$ . В случае двукратной оси симметрии после каждого поворота системы координат на угол  $180^\circ$  относительно этой оси число отличных от нуля постоянных должно оставаться тем же самым. Допустим, что двукратной осью является ось  $X_3$ . При повороте системы координат  $X'_i$  относительно двукратной оси  $X_3$  на  $180^\circ$  получим:  $X'_1 = -X_1$ ,  $X'_2 = -X_2$ ,  $X'_3 = X_3$ . В матрицах (3.14) остается 13 коэффициентов  $C_{ijkl}$  и 4 коэффициента  $\alpha_{ij}$ . Матрицы (3.14) принимают вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2331} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2331} & C_{3131} & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & 0 & 0 & C_{1212} \end{array} \right\|, \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{array} \right\| \quad (3.15)$$

Тринадцать коэффициентов  $C_{ijkl}$  и четыре коэффициента  $\alpha_{ij}$  соответствуют анизотропным материалам моноклинной системы. Материал обладает одной плоскостью упругой симметрии (плоскость  $X_1X_2$ ).

Рассмотрим гексагональную систему анизотропного материала. В этой системе потребуем, чтобы свойства тела не зависели от поворота системы вокруг оси  $X$ , то есть при следующем преобразовании координат:  $X'_1 = X_1 \cos \Theta + X_2 \sin \Theta$ ,  $X'_2 = X_1 \sin \Theta + X_2 \cos \Theta$ ,  $X'_3 = X_3$ .

Матрицы коэффициентов принимают следующий вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122}) \end{array} \right\|, \quad (3.16)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{array} \right\|$$

Для материалов с гексагональной симметрией в матрицы коэффициентов входят пять независимых констант для тензора  $C_{ijkl}$  и две для тензора  $\alpha_{ij}$ . Такие материалы называют трансверсально-изотропными (или сокращенно транстропными), так как для них плоскость симметрии свойств (в настоящем случае плоскость  $X_1X_2$ ) является плоскостью изотропии, то есть термоупругие свойства материала одинаковы для всех направлений, лежащих в этой плоскости.

Рассмотрим материал, который характеризуется гексагональной симметрией относительно двух взаимно ортогональных осей. Получаем матрицы коэффициентов:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1122} & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{1111}-C_{1122})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{1111}-C_{1122})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{1111}-C_{1122})}{2} \end{array} \right\|, \quad (3.17)$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11} \end{array} \right\|$$

включающие две независимые константы тензора  $C_{ijkl}$  и одну константу тензора  $\alpha_{ij}$ . Таким образом, материал, характеризуемый гексагональной симметрией относительно двух взаимно ортогональных осей, обладает изотропией термоупругих свойств и называется изотропным.

### 3.5 Технические постоянные упругости анизотропных материалов

Компоненты тензоров  $C_{ijkl}$  (или  $D_{ijkl}$ ) и  $\alpha_{ij}$  являются материальными константами материала и характеризуют его термоупругие свойства, причем число таких независимых констант определяется симметрией материала и, соответственно, симметрией тензоров  $C_{ijkl}$  (или  $D_{ijkl}$ ) и  $\alpha_{ij}$ .

Однако на практике удобнее пользоваться не компонентами тензора  $C_{ijkl}$  (или  $D_{ijkl}$ ), а так называемыми техническими постоянными материала, характеризующими жесткость при некоторых простейших видах нагружения (одноосное растяжение, чистый сдвиг, гидростатическое сжатие и др.).

В общем случае физические уравнения (3.9) термоупругости анизотропного материала с триклинной системой структуры при цифровой системе индексов имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{v_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{v_{31}}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{\varkappa_{12,1}}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{\varkappa_{23,1}}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{\varkappa_{13,1}}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_{22} = -\frac{v_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{v_{32}}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{\varkappa_{12,2}}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{\varkappa_{23,2}}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{\varkappa_{13,2}}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{22} \Delta T \\ \varepsilon_{33} = -\frac{v_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{v_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{\varkappa_{12,3}}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{\varkappa_{23,3}}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{\varkappa_{13,3}}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{33} \Delta T \\ \varepsilon_{12} = \frac{\varkappa_{1,12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\varkappa_{2,12}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\varkappa_{3,12}}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{\eta_{23,12}}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{\eta_{13,12}}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{12} \Delta T \\ \varepsilon_{23} = \frac{\varkappa_{1,23}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\varkappa_{2,23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\varkappa_{3,23}}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{\eta_{12,23}}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{\eta_{13,23}}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{23} \Delta T \\ \varepsilon_{13} = \frac{\varkappa_{1,13}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\varkappa_{2,13}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\varkappa_{3,13}}{E_3} \sigma_{33} + \\ \quad + \frac{\eta_{12,13}}{2G_{12}} \sigma_{12} + \frac{\eta_{23,13}}{2G_{23}} \sigma_{23} + \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13} + \alpha_{13} \Delta T \end{array} \right. \quad (3.18)$$

где для  $i, j, k, l = 1, 2, 3$  имеем:

$E_i$  — модули нормальной упругости (модули Юнга) для направлений  $X_1, X_2$  и  $X_3$  соответственно, определяющие величину линейной деформации в направлении  $X_i$  (то есть деформации  $\varepsilon_{ii}$ ) при действии одних только нормальных напряжений в этом же направлении (то есть напряжений  $\sigma_{ii}$ );

$G_{ij}$  — модули сдвига для плоскостей  $X_1X_2, X_2X_3$  и  $X_1X_3$ , определяющие величину сдвиговой деформации в плоскости  $X_iX_j$  (то есть деформации  $\varepsilon_{ij}$ ) при действии одних только касательных напряжений в этой же плоскости (то есть напряжений  $\sigma_{ij}$ );

$v_{ij}$  — коэффициенты Пуассона, определяющие величину линейной деформации в направлении  $X_j$  (то есть деформации  $\varepsilon_{jj}$ ) при действии одних только нормальных напряжений в направлении  $X_i$  (то есть напряжений  $\sigma_{ii}$ );

$\varkappa_{kl,i}$  — коэффициенты взаимного влияния, определяющие величину линейной деформации в направлении  $X_i$  (то есть деформации  $\varepsilon_{ii}$ ) при дей-

ствии одних только касательных напряжений в плоскости  $X_k X_l$  (то есть напряжений  $\sigma_{kl}$ );

$\varkappa_{i,kl}$  — коэффициенты взаимного влияния, определяющие величину сдвиговой деформации в плоскости  $X_k X_l$  (то есть деформации  $\varepsilon_{kl}$ ) при действии одних только нормальных напряжений в направлении  $X_i$  (то есть напряжений  $\sigma_{ii}$ );

$\eta_{i,j,kl}$  — коэффициенты взаимного влияния (коэффициенты Ченцова), определяющие величину сдвиговой деформации в плоскости  $X_k X_l$  (то есть деформации  $\varepsilon_{kl}$ ) при действии одних только касательных напряжений в плоскости  $X_i X_j$  (то есть напряжений  $\sigma_{ij}$ );

$\alpha_{ij}$  — коэффициенты линейного теплового расширения, определяющие величину деформации  $\varepsilon_{ij}$  в отсутствие напряжений при изменении температуры материала на величину  $\Delta T$ .

Таким образом, индексы у коэффициентов взаимного влияния, стоящие до запятой, означают направление напряжения, вызвавшего деформацию, а индексы, стоящие после запятой — направление деформации.

Всего в уравнениях (3.18), связывающих шесть компонент симметричного тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$  с шестью компонентами симметричного тензора напряжений, содержится  $6 \times 6 = 36$  коэффициентов уравнений, из них три модуля Юнга  $E_i$ , три модуля сдвига  $G_{ij} = G_{ji}$ , ( $i \neq j$ ), шесть коэффициентов Пуассона  $\nu_{ij}$ , ( $i \neq j$ ), по девять коэффициентов взаимного влияния  $\varkappa_{kl,i}$  и  $\varkappa_{i,kl}$ , ( $k \neq l$ ), шесть коэффициентов Ченцова  $\eta_{ij,kl}$  ( $i \neq j$ ,  $k \neq l$ ,  $i \neq k$  при  $i = l$ ,  $j \neq l$ , при  $i = k$ ). Однако количество независимых постоянных материала равно 21, а следовательно, и число независимых технических постоянных должно быть таким же. Поэтому существуют дополнительные 15 соотношений, связывающие технические постоянные уравнений (3.18) между собой (по повторяющимся индексам не суммировать!):

$$\begin{aligned} \frac{\nu_{kl}}{E_k} &= \frac{\nu_l k}{E_l} \\ \frac{\varkappa_{i,kl}}{E_i} &= \frac{\varkappa_{kl,i}}{2G_{kl}} \\ \frac{\eta_{ij,kl}}{G_{ij}} &= \frac{\eta_{kl,ij}}{G_{kl}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

При построении физических уравнений анизотропных материалов с симметрией свойств более высокого порядка уравнения (3.18) будут упрощаться в соответствии со схемами коэффициентов матриц тензоров  $C_{ijkl}$  и  $\alpha_{ij}$  для каждого конкретного типа анизотропии свойств.

Для ортотропных материалов с тремя ортогональными осями симметрии второго порядка, совпадающими с осями координат, получим:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{22} \Delta T \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{33} \Delta T \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2G_{12}} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} \end{cases} \quad (3.20)$$

Физические уравнения термоупругости трансверсально-изотропных материалов с осью изотропии  $X_3$  и плоскостью изотропии  $X_1 X_2$  записываются в виде:



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{11} \Delta T \\ \varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{22} \Delta T \\ \varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_{11} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} + \alpha_{33} \Delta T \\ \varepsilon_{12} = \frac{(1+\nu_{12})}{2G_{12}} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2G_{13}} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2G_{23}} \sigma_{23} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

При  $\Delta T = 0$ , в отсутствие изменения температуры, уравнения (3.18) — (3.21) преобразуются в закон Гука в форме выражения (3.5) для рассмотренных классов симметрии анизотропных материалов.

Для изотропного материала физические уравнения термоупругости в форме (3.9) представим в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} \\ \varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Где  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.



## Глава 4

# Краевые задачи УАМ

### 4.1 Общая характеристика полной системы уравнений УАМ

Разделы упругости анизотропных материалов не позволяют самостоятельно находить величины, характеризующие внутреннее состояние материала при деформировании, то есть определить перемещения  $U_i$ , деформации  $\epsilon_{ij}$  и напряжения  $\sigma_{ij}$ . Однако, если объединить уравнения, которые выполняются в каждой точке материала, то можно получить полную систему уравнений, в которой количество неизвестных соответствует количеству уравнений. В такую систему входят:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}); \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0; \quad (4.2)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}. \quad (4.3)$$

Уравнения (4.1) — геометрические соотношения Коши (6 уравнений, 9 неизвестных), (4.2) — уравнения равновесия в напряжениях (3 уравнения, 6 неизвестных), (4.3) — обобщенный закон Гука (6 уравнений).

В уравнения (4.1) — (4.3) входят 15 величин, характеризующие внутреннее состояние материала: три компоненты вектора перемещений  $U_i$ , шесть независимых компонент симметричного тензора деформаций  $\epsilon_{ij}$  и шесть независимых компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ . Всего, в совокупности, (4.1) — (4.3) состоят из 15 уравнений. Уравнения (4.1) — (4.3) образуют систему (неизвестные входят в разные уравнения), эта система является полной, поскольку количество неизвестных соответствует количеству уравнений. Система (4.1) — (4.3) называется полной системой уравнений упругости анизотропных материалов.

Система уравнений (4.1) — (4.3) является системой дифференциальных уравнений в частных производных I порядка, линейных, неоднородных (в общем случае), с постоянными коэффициентами.

Если к полной системе уравнений (4.1) – (4.3) добавить граничные условия на поверхности тела, то можно получить краевые задачи для этой полной системы. Полная система уравнений (4.1) – (4.3) выполняется в каждой точке деформируемого тела.

## 4.2 3 типа граничных условий УАМ

Граничными условиями являются условия на поверхности тела. Могут быть либо кинематическими (когда на поверхности тела заданы перемещения), либо статическими (когда на поверхности тела заданы поверхностные силы). Условиями I типа называют обычно статические граничные условия (граничные условия в напряжениях). Граничные условия в напряжениях полностью соответствуют условиям на поверхности в напряжениях.

$$\sigma_{ij}n_j|_S = T_i, \quad (4.4)$$

где  $S$  — поверхность тела,  $\sigma_{ij}$  — неизвестный тензор напряжений в точках поверхности тела,  $n_j$  — проекции вектора единичной нормали  $\vec{n}$  к поверхностям тела<sup>1</sup>,  $T_i$  — проекции вектора поверхностных сил  $\vec{T}(X_1, X_2, X_3)$ , заданного на поверхности тела  $S$ .

II тип граничных условий — кинематические граничные условия или граничные условия в перемещениях:

$$U_i|_S = U_i^0, \quad (4.5)$$

где  $U_i$  — неизвестные проекции вектора перемещений  $\vec{U}(X_1, X_2, X_3)$  в точках поверхности тела,  $U_i^0$  — функции, заданные на поверхности тела. Как правило, кинематические граничные условия отражают условия закрепления тела при его взаимодействии с другими телами.

Граничные условия (4.4) и (4.5) могут быть однородными, когда заданные на поверхности функции равны нулю.

Граничные условия III типа — смешанные граничные условия — на одних частях тела заданы условия в напряжениях, а на других — условия в перемещениях:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j|_{S_\sigma} = T_i; \\ U_i|_{S_U} = U_i^0; \\ S_\sigma + S_U = S. \end{cases} \quad (4.6)$$

Смешанные граничные условия в наибольшей степени соответствуют прикладным задачам упругости анизотропных материалов.

## 4.3 Полная система уравнений в перемещениях УАМ

Полная система в общем виде включает в себя 15 неизвестных. Одним из наиболее эффективных способов решения систем является исключение из

<sup>1</sup>Проекция вектора единичной нормали  $\vec{n}$  считаются известными в каждой точке, поскольку геометрия тела считается заданной.

системы части неизвестных при сохранении так называемых базовых неизвестных величин, через которые выражаются исключаемые величины. Примем в качестве базовых неизвестных величин системы (4.1) – (4.3) функции компонент вектора перемещений  $U_i(X_1, X_2, X_3)$  и получим новую полную систему уравнений, содержащую только эти неизвестные, причем, полученная система должна быть эквивалентна исходной<sup>2</sup>. Подставим геометрические соотношения Коши (4.1) в обобщенный закон Гука (4.3):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left[ \frac{1}{2}(U_{k,l} + U_{l,k}) \right] = \frac{1}{2}C_{ijkl}U_{k,l} + \frac{1}{2}C_{ijkl}U_{l,k} = C_{ijkl}U_{k,l}.$$

Во втором слагаемом по индексам  $k$  и  $l$  ведется суммирование, поэтому их можно обозначить любыми буквами, поэтому мы можем индекс  $k$  обозначить буквой  $l$ , а индекс  $l$  – буквой  $k$  и, после этого воспользоваться условием симметрии для тензора модулей упругости.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}U_{k,l} = C_{ijkl}\frac{\partial U_k}{\partial X_l}. \quad (4.7)$$

Формула (4.7) – обобщенный закон Гука, выраженный в перемещениях. Подставим выражение (4.7) в уравнение равновесия в напряжениях (4.2):

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left[ C_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial X_l} \right] + f_i = 0.$$

Если рассматриваемая упругая среда является однородной (хотя, в общем случае, и анизотропной), то тензор модулей упругости  $C_{ijkl}$  есть константа, не зависящая от координат. С учетом этого последнее выражение можно записать в виде:

$$C_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial X_j \partial X_l} + f_i = 0. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.8) – полная система уравнений в перемещениях упругости анизотропных материалов. Система уравнений (4.8) состоит из трех уравнений относительно трех базовых неизвестных функций  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  и является эквивалентной исходной системе (4.1) – (4.3). Уменьшив количество уравнений системы, мы получили систему более высокого порядка (вместо производных I порядка – производные II порядка). Система (4.8) – система дифференциальных уравнений в частных производных II порядка, линейных, неоднородных (в общем случае, когда  $f_i \neq 0$ ), с постоянными коэффициентами. Систему (4.8) можно записать в развернутом виде, первое уравнение будет иметь вид:

$$C_{1111} \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_1^2} + C_{1112} \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_1 \partial X_2} + C_{1113} \frac{\partial^2 U_1}{\partial X_1 \partial X_3} + C_{1121} \frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1^2} + \dots + f_1 = 0.$$

Аналогичным образом записываются и два других уравнения системы.

<sup>2</sup>Решения этих систем должны быть одинаковы.

#### 4.4 Граничные условия краевой задачи в перемещениях УАМ

Для полной системы уравнений в перемещениях (4.8) также как и для эквивалентной ей исходной системы уравнений (4.1) – (4.3) можно рассматривать краевые задачи трех типов с граничными условиями, соответствующими граничным условиям в напряжениях (4.4), в перемещениях (4.5) и смешанным граничным условиям (4.6). При этом условия в перемещениях (4.5) остаются неизменными, а в граничных условиях (4.4) и (4.6) необходимо напряжения выразить через перемещения с использованием выражения (4.7). Тогда граничные условия в напряжениях записанные через перемещения имеют вид:

$$C_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial X_l} \vec{n}_j|_S = T_i. \quad (4.9)$$

Аналогичным образом записывается и составляющая смешанных условий, записанная через перемещения. Таким образом в краевых задачах в перемещениях используются граничные условия как для самих неизвестных функций (4.5), так и для их производных (4.9).

#### 4.5 Работа внешних сил

Для упругих анизотропных материалов и тел работа внешних сил равна работе внутренних сил и равна потенциальной энергии деформаций, поскольку сохраняются принципы сохранения энергии. Работа внешних сил для упругого тела записывается следующим образом:

$$A = \int \int_S T_i U_i dS + \int \int \int_V f_i U_i dV, \quad (4.10)$$

где  $T_i$  — проекции поверхностных сил,  $U_i$  в первом слагаемом — перемещение точек поверхности  $S$ ,  $f_i$  — проекции объемных сил,  $U_i$  во втором слагаемом — проекции перемещений точек объема.

Из граничных условий в напряжениях на поверхности следует:

$$\sigma_{ij} n_j = T_i,$$

$$\begin{aligned} A &= \int \int_S \sigma_{ij} U_i n_j dS + \int \int \int_V f_i U_i dV = \int \int \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial X_j} (\sigma_{ij} U_i) + f_i U_i \right] dV = \\ &= \int \int \int_V U_i \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + f_i \right) dV + \int \int \int_V \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \sigma_{ij} dV. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как подынтегральная функция равна нулю.

$$A = \int \int \int_V \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \sigma_{ij} dV. \quad (4.11)$$

Выражение (4.11) связывает работу внешних сил  $A$  с величинами, описывающими внутреннее деформированное состояние материала или тела.

$$\sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{1}{2} \sigma_{ji} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right].$$

$$A = \int \int \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV. \quad (4.12)$$

(4.12) — формула, связывающая работу внешних сил с внутренними параметрами материала.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl};$$

$$A = \int \int \int_V C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dV.$$

В соответствии с формулой (3.11) последнее выражение можно переписать в виде:

$$A = 2 \int \int \int_V W dV.$$

Где  $W$  — потенциал тензора напряжений, который имеет физический смысл удельной потенциальной энергии деформации, то есть потенциальной энергии материальной частицы в каждой точке тела. Интеграл имеет смысл потенциальной энергии деформации всего тела с объемом  $V$ .

$$W^* = \frac{1}{2} A. \quad (4.13)$$

Где  $W^*$  — потенциальная энергия деформации всего тела  $V$ , а сама формула (4.13) представляет собой математическую формулировку теоремы Клапейрона: потенциальная энергия деформации упругого тела равна половине работы внешних сил, совершенных на перемещениях, вызванных действием этих сил.

## 4.6 Теорема об единственности решения краевых задач УАМ

В зависимости от типа граничных условий существует три типа краевых задач упругости анизотропных материалов.

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + f_i = 0; \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}); \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{ij} n_j |_S = T_i. \quad (4.15)$$

$$U_i |_S = U_i^0. \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \sigma_{ij} n_j |_{S_\sigma} = T_i; \\ U_i |_{S_U} = U_i^0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Доказательство теоремы об единственности решения мы будем вести одновременно для краевых задач всех трех типов: (4.14) – (4.15), (4.14) – (4.16), (4.14) – (4.17). Доказательство будем вести от противного. Предположим, что существует решение для всех трех типов краевых задач:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(X_1, X_2, X_3); \\ \varepsilon'_{ij}(X_1, X_2, X_3); \\ U'_i(X_1, X_2, X_3). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Решения (4.18) удовлетворяют системе (4.14) и всем трем типам граничных условий (4.15), (4.16) и (4.17). Пусть существует и другое решение:

$$\begin{aligned} \sigma''_{ij}(X_1, X_2, X_3); \\ \varepsilon''_{ij}(X_1, X_2, X_3); \\ U''_i(X_1, X_2, X_3). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Решение (4.19) тоже полностью удовлетворяет системе (4.14) и граничным условиям (4.15), (4.16) и (4.17). Составим разности этих решений:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} - \sigma''_{ij} &= \tilde{\sigma}_{ij}; \\ \varepsilon'_{ij} - \varepsilon''_{ij} &= \tilde{\varepsilon}_{ij}; \\ U'_i - U''_i &= \tilde{U}_i \end{aligned}$$

Получим систему уравнений и граничные условия для функций  $\tilde{\sigma}_{ij}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  и  $\tilde{U}_i$ , для чего в каждое из уравнений системы (4.14) подставим функции решения (4.18), затем функции решения (4.19) и вычтем из одного уравнения другое, например, для первого уравнения:

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij,j} + f_i &= 0; \\ \sigma''_{ij,j} + f_i &= 0; \\ \sigma'_{ij,j} - \sigma''_{ij,j} &= 0; \\ (\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij})_{,j} &= 0; \\ \tilde{\sigma}_{ij,j} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично для других уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{U}_{i,j} + \tilde{U}_{j,i}); \\ \tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}; \\ \tilde{\sigma}_{ij,j} = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Для этих величин получим граничные условия всех трех типов:

$$\tilde{\sigma}_{ij}n_j|_S = 0; \quad (4.21)$$

$$\tilde{U}_i|_S = 0; \quad (4.22)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{ij}n_j|_{S_\sigma} = 0; \\ \tilde{U}_i|_{S_U} = 0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Таким образом для разности двух решений мы получили полную систему (4.20) и однородные граничные условия трех типов: (4.21), (4.22) и (4.23). Запишем для этой краевой задачи выражение, которое связывает



работу внешних сил на перемещениях этих сил с параметрами внутреннего состояния, аналогичное формуле (4.12):

$$\tilde{A} = \int \int \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV.$$

При этом для работы  $\tilde{A}$  должно быть справедливо:

$$\tilde{a} = \int \int_S \tilde{T}_i \tilde{U}_i dS + \int \int \int_V \tilde{f}_i \tilde{U}_i dV = \int \int_S \tilde{T}_i \tilde{U}_i dS.$$

Где поверхностные силы  $\tilde{T}_i$  и объемные силы  $\tilde{f}_i$  — те объемные и поверхностные силы, которые соответствуют краевым задачам для разности решений (4.18) - (4.19). Из первого уравнения системы (4.20) следует, что  $\tilde{f}_i = 0$ , следовательно и соответствующий интеграл равен нулю. Для граничных условий (4.21), соответствующих краевой задаче I типа,  $\tilde{T}_i = 0$ , для краевой задачи II типа  $\tilde{U}_i = 0$ , а для краевой задачи III типа интеграл по поверхности  $S$  можно разбить на два: по поверхности  $S_U$  и по поверхности  $S_\sigma$ , каждый из которых будет равен нулю, так как на поверхности  $S_U$   $\tilde{U}_i = 0$ , а на поверхности  $S_\sigma$   $\tilde{T}_i = 0$ . Следовательно, величина  $\tilde{A} = 0$  для всех типов краевых задач. Таким образом:

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij} dV &= 0; \\ \int \int \int_V \tilde{W} dV &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Где  $\tilde{W} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{kl}$  является квадратичной формой симметричного тензора  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ . Ранее было показано, что квадратичная форма есть величина неотрицательная ( $\tilde{W} \geq 0$ ), причем,  $\tilde{W} = 0$  только тогда, когда  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$ . Тогда интеграл (4.24) может быть равен нулю только когда величина  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  во всех точках объема равна нулю. Значит во всех точках объема  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$ , следовательно,  $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon''_{ij}$ , таким образом, по полю деформаций двух разных решений быть не может. Из третьего уравнения системы (4.20) следует, что при  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = 0$ ,  $\tilde{\sigma}_{ij}$  тоже равна нулю, следовательно,  $\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij}$  во всех точках объема тела, то есть и для поля напряжений не может быть различных решений для всех типов краевых задач. Из геометрических соотношений Коши следует, что  $\tilde{U}_i$  тоже равно нулю во всех точках тела, отсюда можно сделать вывод, о том, что  $U'_i = U''_i$  с точностью до константы, однако изменение перемещений на константу соответствует перемещению тела как абсолютно твердого в пространстве и никак не связано с внутренним состоянием деформируемого тела, поэтому поле перемещений точек друг относительно друга тоже является единственным.