Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный технический университет»

А.Н. Паршаков

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

*Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных
заведений, обучающихся по техническим направлениям
подготовки и специальностям*

Издательство
Пермского государственного технического университета
2010

УДК 534(075.8)
ББК 22.213+22.336]я73
П18

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *Г.Ф. Путин*
(Пермский государственный университет);

д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю.Л. Райхер*
(Институт механики сплошных сред УрО РАН)

Паршаков, А.Н.

П18 Физика колебаний: учеб. пособие / А.Н. Паршаков. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 302 с.

ISBN 978-5-398-00500-4

Рассмотрены общие свойства колебательных процессов, происходящих в радиотехнических, механических и других системах, а также различные методы их изучения. Большое внимание уделено рассмотрению параметрических, автоколебательных и других нелинейных систем. Изучение данных колебательных систем проведено известными методами теории колебаний без подробного изложения и обоснования самих методов. По наиболее важным темам приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов электротехнических направлений и специальностей технических вузов.

УДК 534(075.8)
ББК 22.213+22.336]я73

ISBN 978-5-398-00500-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Под колебаниями понимают процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Такое определение объединяет широкий круг явлений, встречающихся в природе и находящих многочисленные применения в технике.

Динамические системы, в которых могут существовать колебания, принято называть колебательными системами. В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают собственные (затухающие и незатухающие) колебания, вынужденные колебания, параметрические колебания и самоподдерживающиеся (автоколебания). Однако последовательная классификация различных колебательных систем возможна только при условии замены конкретных реальных систем моделями, в которых отражается только ограниченное число особенностей, существенных для изучаемых колебательных процессов.

Простейшей колебательной системой с одной степенью свободы является так называемый гармонический (линейный) осциллятор, описываемый дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

В данной системе реализуются гармонические колебания вида

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha),$$

где a – амплитуда колебания; ω – круговая частота колебания (мы будем называть ее просто частотой), $\omega = 2\pi/T$, T – период; α – начальная фаза. Гармонические колебания представляют особый интерес не только в силу простоты их аналитического представления. Эта форма движений наиболее обычна для колебательных процессов в системах с постоянными параметрами (линейные системы) и чрезвычайно часто встречается в реальных процессах, изучаемых не только в физике, технических дисциплинах, но и в химии, биологии.

Рассмотрим в качестве нетривиального (хотя уже и ставшего классическим) примера – известную модель экологии «*хищник*–

жертва» (модель Лотка–Вольтерра). В этой модели рассматриваются два вида животных, один из которых питается другим. Например, на замкнутом ареале живут лисы (хищники) и зайцы (вегетарианцы). Зайцы (их число $N_1(t)$) питаются только растительной пищей, имеющейся в избытке. Лисы (их число $N_2(t)$) питаются только зайцами. Поставим вопрос: могут ли лисы съесть всех зайцев?

Если жертвы живут на ареале одни и пищи им хватает, то численность этого вида будет увеличиваться с некоторой скоростью, пропорциональной числу жертв на данный момент:

$$\dot{N}_1 = \alpha_1 N_1.$$

Здесь и далее точкой над переменной обозначена производная по времени, α_1 – постоянный положительный коэффициент прироста. Если бы на ареале жили одни хищники, то из-за отсутствия пищи они вымирали бы с постоянной скоростью, пропорциональной их числу на данный момент:

$$\dot{N}_2 = -\alpha_2 N_2$$

(α_2 – постоянный положительный коэффициент вымирания). Разумно допустить, что при совместном проживании обоих видов численность хищников будет увеличиваться тем быстрее, чем чаще они сталкиваются с жертвами (соответственно уменьшается число жертв). Эта частота столкновений пропорциональна произведению $N_1 N_2$. Таким образом, для описания численности двух совместно проживающих видов мы приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{N}_1 = N_1\left(\alpha_1 - \beta_2 N_2\right), \quad \dot{N}_2 = -N_2\left(\alpha_2 - \beta_1 N_1\right), \qquad (*)$$

(β_2 – положительная постоянная, характеризующая гибель жертв из-за встречи с хищниками; β_1 – положительная постоянная, характеризующая размножение хищников).

Интуитивно понятно, что в данной системе на достаточно большом временном интервале в среднем должно реализоваться состояние равновесия, относительно которого возможны колебания численности обоих видов. Пусть $\langle N_1 \rangle$ и $\langle N_2 \rangle$ – средние значения числа жертв и хищников, характеризующие состояние равновесия. Из уравнений (*) при $\langle \dot{N}_1 \rangle = \langle \dot{N}_2 \rangle = 0$ находим

$$\langle N_1 \rangle = \frac{\alpha_2}{\beta_1}, \quad \langle N_2 \rangle = \frac{\alpha_1}{\beta_2}. \tag{**}$$

Предположим, что существуют малые отклонения $n_1(t)$ и $n_2(t)$ от равновесных значений $\langle N_1 \rangle$ и $\langle N_2 \rangle$, т.е. будем считать, что $N_1(t) = \langle N_1 \rangle + n_1$, $N_2(t) = \langle N_2 \rangle + n_2$, причем $n_1 << \langle N_1 \rangle$, $n_2 << \langle N_2 \rangle$. Подставляя выражения для $N_1(t)$ и $N_2(t)$ в (*) с учетом (**) и пренебрегая членами второго порядка малости $\sim n_1 n_2$, получаем

$$\dot{n}_1 = -\beta_2 \langle N_1 \rangle n_2 = -\frac{\beta_2 \alpha_2}{\beta_1} n_2, \quad \dot{n}_2 = \beta_1 \langle N_2 \rangle n_1 = \frac{\beta_1 \alpha_1}{\beta_2} n_1 .$$

Дифференцируя первое из этих уравнений по времени и используя второе, приходим, как ни странно, к уравнению для гармонического осциллятора $\ddot{n}_1 + \omega^2 n_1 = 0$ (такое же уравнение получается и для n_2, где $\omega^2 = \alpha_1 \alpha_2$). Отсюда сразу следует, что в принятой нами модели численность животных обоих видов будет периодически изменяться по гармоническому закону.

Мы начнем рассмотрение колебательных процессов в идеализированных динамических системах с одной степенью свободы (главы 1–5). Далее будут рассмотрены системы с двумя степенями свободы, а также колебательные и некоторые волновые процессы в системах с распределенными параметрами (главы 6–7). Теоретические методы анализа колебательных систем сопровождаются рассмотрением их разнообразного практического применения в науке и технике. При этом предполагается, что читатель уже знаком с предварительными сведениями о колебаниях в рамках стандартного курса теории колебаний в техническом вузе.

Глава 1

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Общий подход к рассмотрению колебаний. Фазовый портрет колебательной системы

При рассмотрении колебательных систем особое внимание уделяется системам с малым затуханием, в которых энергия, рассеиваемая за период колебаний, мала по сравнению с общим запасом энергии самих колебаний. Такими системами являются резонансные элементы входных цепей радиоприемных устройств, колебательные контуры полосовых фильтров, частотомеров, спектр-анализаторов, маятник или баланс в часовых механизмах и др. В подобных системах их колебательные свойства проявляются наиболее ярко и весьма слабо зависят от величины и характера затухания. Поэтому, ограничиваясь не слишком большими по сравнению с периодом колебаний интервалами времени, можно вообще пренебречь затуханием и рассматривать колебательную систему как консервативную. Несмотря на отсутствие в природе идеализированных консервативных колебательных систем, их изучение позволяет получить важную информацию, помогающую изучению систем, отличных от консервативных.

Ограничим рассмотрение консервативных колебательных систем системами с одной степенью свободы, поведение которых определяется одной независимой переменной x. Для упругих механических систем под величиной x можно понимать линейную или угловую координату, характеризующую отклонение системы от положения равновесия. В электрических же системах за основную переменную часто принимают заряд конденсатора q. В общем случае для описания движений в консервативных системах рассматривают дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \tag{1.1}$$

(здесь и далее точкой над x обозначено дифференцирование по времени).

К уравнению типа (1.1) приводится, например, уравнение колебаний гармонического осциллятора (рис. 1.1), для которого второй закон Ньютона выглядит как

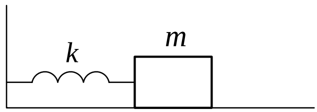


Рис. 1.1

$$m\ddot{x} = -kx,$$

где m – масса, k – жесткость пружины. Введя обозначение $\omega_0^2 = k/m,$ последнее уравнение можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (1.2)$$

где ω_0 – частота собственных незатухающих колебаний гармонического (линейного) осциллятора (пружинного маятника).

Для идеального математического маятника (рис. 1.2) с длиной подвеса l и массой $m,$ находящегося в поле тяготения с ускорением свободного падения $g,$ дифференциальное уравнение движения для угловой координаты φ имеет вид

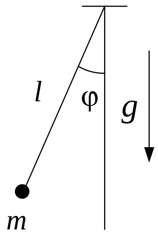


Рис. 1.2

$$ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = -mgl \sin\varphi$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0, \qquad (1.3)$$

где $\omega_0^2 = g/l.$ Уравнение типа (1.3) описывает также колебания физического маятника, но с другим значением $\omega_0.$

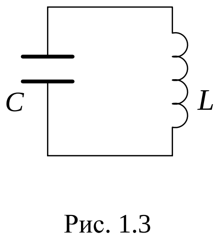


Рис. 1.3

В случае электрического колебательного контура без сопротивления (рис. 1.3) дифференциальное уравнение колебаний заряда конденсатора q имеет вид

$$L\ddot{q}+\frac{q}{C}=0\,, \tag{1.4}$$

где L – индуктивность контура (при отсутствии ферромагнетиков $L=\text{const}$), C – емкость конденсатора (при отсутствии сегнетоэлектриков она также постоянна). Уравнение (1.4) сводится к уравнению (1.2), если положить $x=q$ и обозначить $\omega_0^2=1/(LC)$.

Уравнения (1.2) и (1.3) описывают колебания в консервативных системах, но уравнение (1.2) линейно относительно координаты x и, следовательно, описывает движения в линейной колебательной системе. Уравнение же (1.3) нелинейно относительно координаты φ, и поэтому колебательная система, описываемая этим уравнением, нелинейна.

В общем случае и уравнение (1.4) также является нелинейным. Это происходит, если в индуктивности используется сердечник из ферромагнитных материалов. Их магнитная проницаемость существенно зависит от величины магнитного поля, т.е. от протекающего по обмотке тока $I=\dot{q}.$ В этом случае индуктивность контура L является функцией скорости изменения заряда $L(\dot{q})$ и тогда уравнение (1.4) можно записать в виде

$$\ddot{q}+\frac{q}{C\cdot L(\dot{q})}=0\,,$$

что явно сводится к уравнению вида (1.1).

Начнем с изучения случая, когда уравнение (1.1), описывающее движение в рассматриваемой колебательной системе, не содержит $\dot{x}$. Тогда общим видом подобного дифференциального уравнения второго порядка будет

$$\ddot{x}=f(x)\,. \tag{1.5}$$

Для механических колебаний это означает, что возвращающая сила, отнесенная к единичной массе, не зависит от скорости, и определяется только положением. Будем полагать функцию $f(x)$ голоморфной, интегрируемой и в общем случае нелинейной функцией координаты x. Выбрав в качестве новой переменной $\dot{x}$, можно исключить из (1.5) время в явном виде, хотя по-прежнему $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Для этого запишем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \cdot \dot{x}.$$

Тогда в новых переменных $(x, \dot{x})$ уравнение (1.5) принимает вид

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x)}{\dot{x}}. \tag{1.6}$$

После интегрирования получаем

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \int f(x)dx = w,$$

где w – некоторая постоянная интегрирования.

Имея в виду механическую аналогию, под величиной $\dot{x}^2/2$ можно понимать величину, пропорциональную кинетической энергии системы (коэффициентом пропорциональности является либо масса, либо момент инерции системы). Тогда w имеет смысл полной энергии системы, отнесенной к единичной массе. Интеграл же $\int f(x)dx$, взятый с обратным знаком, представляет функцию, пропорциональную потенциальной энергии системы $u(x)$

$$u(x) = -\int f(x)dx.$$

Поэтому соотношение

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + u(x) = w \tag{1.7}$$

является естественной записью условия консервативности колебательной системы, выражающегося в неизменности полного запаса энергии системы.

Для более общего случая, когда возвращающая сила зависит и от скорости, уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{F(x,\dot{x})}{\dot{x}}.$$

В этом случае (1.1) будет описывать консервативную систему при условии существования однозначного интеграла этого уравнения вида $\Phi(x,\dot{x}) = \text{const}$.

Введение переменных $(x,\dot{x})$ позволяет использовать известный метод рассмотрения поведения исследуемой системы с помощью *фазовой плоскости* – плоскости переменных $(x,\dot{x})$. Суть этого метода заключается в следующем. Каждому состоянию системы соответствует пара значений x и $\dot{x}$, т.е. точка на фазовой плоскости (*описывающая* или *изображающая точка*). Очевидно, при движении, совершаемом системой, будут происходить изменения величин x и $\dot{x}$, а следовательно, описывающая точка будет перемещаться по некоторой кривой, которую принято называть *фазовой траекторией* движения. Ее явный вид является интегралом уравнения (1.6). Из общих свойств дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку фазовой плоскости должна проходить только одна фазовая траектория, за исключением особых точек, в которых $f(x)$ и $\dot{x}$ одновременно обращаются в нуль. В этих точках направление и число фазовых траекторий становятся неопределенными.

В механических колебательных системах в качестве переменных $x, \dot{x}$ обычно выбирают координату и скорость. В электрических колебательных системах (см., например, рис. 1.3) в качестве таких переменных можно выбирать ток I и напряжение U на конденсаторе. Связано это с тем, что напряжение пропорционально заряду, а ток – производная от заряда. Таким образом, фазовая плоскость может быть построена также в переменных (I,U).

Рассмотрим условия, при которых в системе возникают состояния равновесия. В этом состоянии при $x = x_i$ скорость движения обращается в нуль, и в системе должны отсутствовать силы, т.е. должны выполняться равенства $\dot{x}_i = 0$ и $f\left(x_i\right) = 0.$ Очевидно, в этих точках потенциальная функция $u(x)$ при $x = x_i$ имеет экстремум

$$\left.\frac{d}{dx}u(x)\right|_{x_i} = 0 .$$

Особые точки, в которых выполняется это условие, называются *особыми точками первого порядка*. Если $\left.\frac{d^n}{dx^n}u(x)\right|_{x_i} = 0,$ но $\left.\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}u(x)\right|_{x_i} \neq 0,$ то мы имеем дело с особыми точками порядка n.

Таким образом, положения равновесия системы $\left(\dot{x}_i = 0,\right.$ $\left.f(x_i) = 0\right)$ соответствуют особым точкам. Найдем теперь уравнение фазовых траекторий вблизи положения равновесия, соответствующего минимуму потенциальной функции (а следовательно, и потенциальной энергии). Пусть координаты особой точки на фазовой плоскости будут $x = x_i, \dot{x}_i = 0$. Обозначим $u\left(x_i\right) = u_i$.

Если $u(x)$ при $x = x_i$ имеет минимум, то

$$\left.\frac{d}{dx}u(x)\right|_{x_i} = 0, \quad \left.\frac{d^2}{dx^2}u(x)\right|_{x_i} > 0 .$$

Разложим в окрестности точки $x = x_i$ потенциальную функцию $u(x)$ в ряд по степеням $\xi = x - x_i$

$$u(x) = u\left(x_i\right) + \left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \cdot \xi + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} \cdot \xi^2 + \ldots$$

Тогда с точностью до высших степеней $\xi = x - x_i$ уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\frac{\eta^2}{2}+u_i+\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}u(x)\bigg|_{x_i}\cdot\xi^2=w$$

или

$$\eta^2+\alpha\xi^2=2\left(w-u_i\right), \tag{1.8}$$

где

$$\eta=\dot{x}\big|_{x_i},\ \alpha=\frac{d^2u(x)}{dx^2}\bigg|_{x_i}>0\,.$$

Итак, с точностью до высших степеней $\xi=x-x_i$ мы получили в качестве уравнений фазовых траекторий вблизи положения равновесия, соответствующего минимуму потенциальной функции, уравнения эллипсов (1.8). Эти эллипсы различаются величиной полуосей, определяемых разностью $w - u_i$. Выбирая различные значения w, пропорциональные полной энергии системы, мы получаем различные эллипсы, которые по мере приближения w к u_i уменьшаются, стягиваясь в точку при $w=u_i$.

Наличие на фазовой плоскости замкнутых фазовых траекторий указывает на существование периодических движений. Непосредственно в окрестности особой точки, отвечающей минимуму потенциальной функции, происходят периодические движения с эллиптическими траекториями, соответствующие гармоническим колебаниям. Это сразу следует из уравнений

$$x=a\cos\left(\omega t+\alpha\right),$$

$$\dot{x}=-a\omega\sin\left(\omega t+\alpha\right),$$

которые отображаются на фазовой плоскости эллипсом (для этого нужно второе уравнение поделить на ω, возвести их в квадрат и сложить). Реальное движение тем ближе к гармоническому, чем меньше превышение запаса энергии системы над запасом энергии в точке равновесия, т.е. чем меньше величина $w-u_i$.

В системах, в которых потенциальная энергия представляет собой квадратичную функцию координаты x, $\frac{d^n}{dx^n}u(x)$ всегда равна нулю при $n > 2$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $\dot{x}^2 + \alpha x^2 = \text{const}$ для любых значений $w - u_i$. Этот вариант относится к тривиальному случаю линейной системы, так как если $u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$, то $f(x) = -\alpha_1 - 2\alpha_2 x$, и тогда уравнение движения имеет вид $\ddot{x} + 2\alpha_2 x = -\alpha_1$. А это известное дифференциальное уравнение гармонического осциллятора.

Таким образом, положение равновесия (минимум потенциальной функции) соответствует на фазовой плоскости особой точке, называемой особой точкой типа *центр*, относительно которого система может совершать колебания, близкие к гармоническим или точно гармонические. Для представления на фазовой плоскости таких движений характерно наличие семейства замкнутых фазовых траекторий, окружающих центр, причем они всегда стремятся к эллипсам при уменьшении амплитуды колебаний, т.е. энергии.

Рассмотрим теперь случай, когда положение равновесия системы x_k (а следовательно, и особая точка на фазовой плоскости) соответствует максимуму потенциальной функции $u(x)$. Тогда в этой точке

$$\left.\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right|_{x_k} = -\alpha < 0,$$

и уравнение (1.8) в окрестности особой точки x_k примет вид

$$\eta^2 - \alpha\xi^2 = 2\left(w - u_k\right).$$

Это уравнение гиперболы с асимптотами

$$\eta = \pm\sqrt{\alpha}\xi .$$

Таким образом, через особую точку на фазовой плоскости, соответствующей максимуму потенциальной функции, проходят две фазовые траектории и в ее окрестности все остальные фазовые траектории имеют вид гипербол. Такая точка представляет особую точку типа *седло*. Подобные точки соответствуют неустойчивому положению равновесия, так как любое сколь угодно малое отклонение системы от положения равновесия приводит к удалению от точки равновесия на фазовой плоскости. Это соответствует движению по одной из уходящих фазовых траекторий.

Совокупность семейства фазовых траекторий и особых точек принято называть *фазовым портретом* системы. Рассмотрим для иллюстрации полученных выше результатов фазовый портрет системы, для которой потенциальная функция $u(x)$ представлена на рис. 1.4, *а*. Для этого воспользуемся уравнением (1.7). Из него находим

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(w - u(x)\right)}\,. \tag{1.9}$$

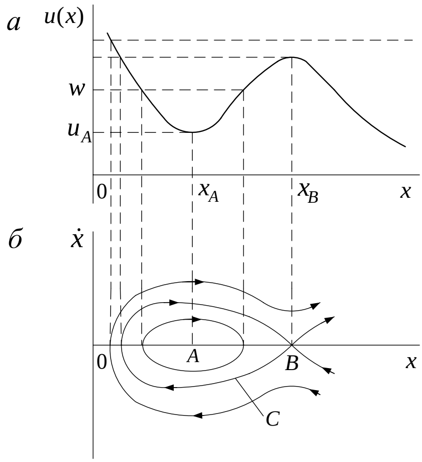


Рис. 1.4

Задаваясь различными значениями w (т.е. полной энергии системы), по уравнению (1.9) можно построить фазовый портрет, отображенный на рис. 1.4, *б*. Здесь наблюдаем два характерных случая (точки A и B). Точка $A\left(x_A, 0\right)$ (ей соответствует минимум потенциальной функции $u(x)$) является особой точкой типа центр, а точка $B\left(x_B, 0\right)$ (ей соответствует максимум потенциальной функции $u(x)$) является особой точкой типа седло и отвечает неустойчивому положению равновесия. По самому определению величины $\dot{x}$ значения $\dot{x} > 0$ соответствуют росту x, а $\dot{x} < 0$ – убыванию x. Поэтому движения описывающей точки по фазовым траекториям происходят в верхней части фазовой плоскости в сторону возрастания x, а в нижней – в сторону убывания x. Из рис. 1.4, *б* видно, что существуют еще фазовые траектории, пограничные между областями фазовой плоскости, соответствующими движениям различного характера. Эти линии (например, линия C) носят названия *разделительных линий* или *сепаратрис*. Их расположение наглядно показывает области возможных движений различного типа и те значения фазовых координат x и $\dot{x}$, при которых одно движение переходит в другое. Кривая C выделяет вокруг точки A область, внутри которой существуют колебательные движения вокруг устойчивого положения равновесия. Вне кривой C эти движения отсутствуют и характер движения системы, т.е. вид фазовых траекторий, может быть определен только при задании вида потенциальной функции $u(x)$ для большей области изменения координаты x.

Метод фазовой плоскости является исключительно полезным при качественном рассмотрении различных колебательных систем, особенно нелинейных. В заключение рассмотрим так называемый *метод изоклин*, применяемый для построения фазового портрета систем с нелинейностью любого типа. Для этого введем временное обозначение $\dot{x} = y$ (это позволит нам лучше понять геометрический смысл метода изоклин). С учетом новой переменной уравнение (1.6) можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(x, y\right). \tag{1.10}$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка определяет бесконечное множество интегральных кривых $y = y(x)$. Ранее уже говорилось, что через любую точку фазовой плоскости $M\left(x, y\right)$ проходит только одна линия $y = y(x)$, являющаяся решением уравнения (1.10). Причем тангенс угла наклона к данной линии в точке M (равный dy/dx) определяется непосредственно соотношением (1.10).

Таким образом, дифференциальное уравнение (1.10) определяет в каждой точке $M(x, y)$ направление касательной к графику $y = y(x)$. Совокупность этих направлений образует так называемое *поле направлений*, а точку $M(x, y)$ вместе с заданным в ней направлением называют *элементом поля направлений*. Тогда интегрирование дифференциального уравнения (1.10) сводится геометрически к соединению близких элементов в интегральные кривые, касательные к которым имеют в каждой точке направление, совпадающее с направлением поля. Эти рассуждения хорошо иллюстрируются на известном опыте с железными опилками, помещенными в магнитное поле. Сами опилки (микромагнитики) образуют поле направлений, а интегральными линиями этого поля служат линии вектора индукции магнитного поля.

При построении картины поля на практике удобно выбирать не произвольные точки на плоскости Y, X, а строить *изоклины*, т.е. линии, на которых поле направлено одинаково. Их уравнение получается, если правую часть (1.10) приравнять константе, т.е. написать

$$\varphi(x, y) = k,$$

где k – тангенс угла наклона поля, соответствующий данной изоклине.

Для иллюстрации метода рассмотрим, например, уравнение $\frac{dy}{dx} = x + y$. Приравнивание правой части постоянным числам, например –3, –2, –1, –1/2, 0, 1, 2, 3, дает изоклины, которые в нашем примере являются прямыми линиями, изображенными на рис. 1.5. На каждой из этих изоклин короткими штрихами показано направление поля (для $k = -1$ оно совпадает с самой изоклиной). На основе этих направлений нанесено несколько интегральных кривых уравнения $\frac{dy}{dx} = x + y$ (выделены жирными линиями). Видно, что одной из таких линий является прямая $x + y = -1$. Кроме того, видно, что геометри-

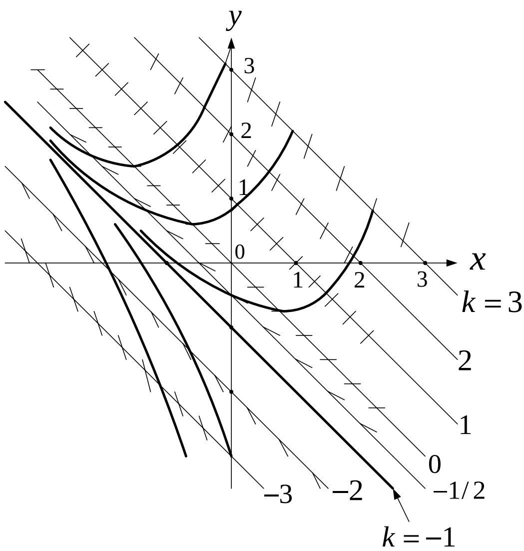


Рис. 1.5

ческим местом самых низких точек на интегральных линиях служит прямая $x + y = 0$. В общем случае уравнения (1.10) для нахождения геометрического места самых низких или самых высоких точек на интегральных линиях нужно построить изоклину $\varphi(x, y) = 0$.

1.2. Колебания маятника. Метод последовательных приближений

В качестве одной из простейших механических нелинейных консервативных систем рассмотрим идеальный маятник. Это может быть как математический (рис. 1.6, *а*), так и физический маятник (рис. 1.6, *б*). Так как математический маятник можно рассматривать как частный случай физического маятника, то дальнейшее будет касаться физического маятника. Запишем для него основной закон динамики вращательного движения $I\ddot{\varphi} = M$ в виде

$$I\ddot{\varphi} = -mgL\sin\varphi\,. \tag{1.11}$$

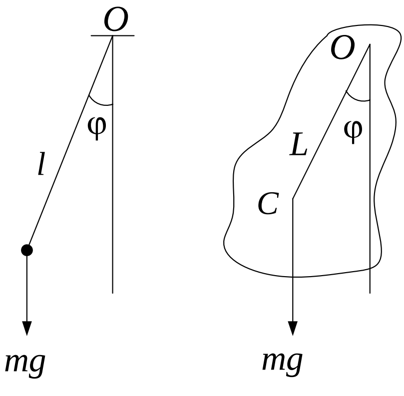


Рис. 1.6

Здесь I – момент инерции маятника относительно точки подвеса O.

Введем в приближении малых амплитуд период колебаний маятника и частоту:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgL}{I}}.$$

Тогда уравнение (1.11) после переобозначения $x = \varphi$ будет выглядеть как

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0. \qquad (1.12)$$

Запишем данное дифференциальное уравнение в переменных $x, \dot{x}$:

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\omega_0^2 \sin x}{\dot{x}}.$$

Здесь произведение $\omega_0^2 \sin x$ можно рассматривать как возвращающую силу $f(x)$. Тогда с точностью до постоянной находим $u(x) = -\int f(x)dx = -\omega_0^2 \cos x$ и можно записать

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = w + \omega_0^2 \cos x.$$

Используя это выражение, легко построить фазовые траектории движения и нарисовать на фазовой плоскости общий фазовый портрет данной системы (рис. 1.7).

Замкнутые траектории, окружающие особые точки с координатами $\dot{x} = 0, x = 2n\pi$ (n – любое целое число), соответствуют колебательным движениям маятника около положения устойчивого равновесия, отвечающего минимуму потенциальной энергии. Точки $\dot{x} = 0, x = (2n-1)\pi$ представляют особые точки типа седло и соответствуют неустойчивому верхнему положению равновесия маятника – максимуму потенциальной энергии. Убегающие траектории, которые получаются при $w > \omega_0^2$, соответствуют вращательным движениям маятника. Эти движения возникают при сообщении маятнику начального импульса, который обеспечивает прохождение маятника через верхнее положение с отличной от нуля скоростью. На фазовой плоскости это будет соответствовать выходу описывающей точки за пределы области, ограниченной кривыми C_1 и C_2. Эти кривые, проходящие через седла и являющиеся в окрестности данных точек асимптотами гиперболических фазовых траекторий, являются сепаратрисами. Они разделяют топологически разные области на фазовой плоскости: область траекторий, приходящих из бесконечности и уходящих в бесконечность, и область замкнутых траекторий. Ограничимся в дальнейшем рассмотрением чисто колебательных движений, соответствующих замкнутым фазовым траекториям.

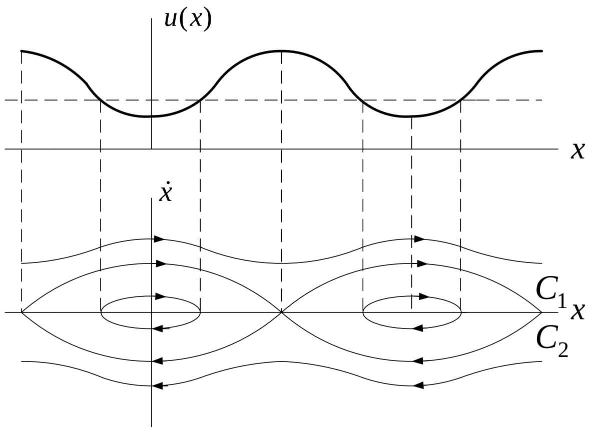


Рис. 1.7

Прежде чем приступить к отысканию закона колебаний маятника, т.е. решению уравнения (1.12), найдем выражение для периода колебаний T (заметим, что $T \neq 2\pi / \omega_0$!). Для этого применим энергетический подход. Выберем в качестве начала отсчета потенциальной энергии самое нижнее положение маятника (положение устойчивого равновесия). Тогда из закона сохранения энергии следует

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = mgL(\cos\varphi - \cos a),$$

где a – максимальное значение угла отклонения (амплитуда колебаний). Найдем из этого уравнения скорость колебаний

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{4\pi}{T_0}\sqrt{\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}, \qquad (1.13)$$

где $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgL}}$ – период колебаний маятника в приближении малых амплитуд. Для определения истинного периода колебаний T разрешим уравнение (1.13) относительно dt, проинтегрируем его по углу от $\varphi = 0$ до $\varphi = a$ и умножим результат на четыре. В итоге получаем

$$T = \frac{T_0}{\pi}\int_0^a \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \qquad (1.14)$$

Путем последовательной замены переменных $x = \dfrac{\sin(\varphi/2)}{\sin(a/2)}$ и $x = \sin u$ полученное выражение для периода колебаний можно привести к полному эллиптическому интегралу первого рода:

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}},$$

где обозначено $k = \sin(a/2)$. Данный интеграл не выражается через элементарные функции. Тогда воспользуемся тем, что $|k\sin x| \le 1$ и разложим подынтегральное выражение в биномиальный ряд с отрицательным показателем

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 = \ldots .$$

После почленного интегрирования получаем выражение для периода в виде бесконечного сходящегося ряда:

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{a}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{a}{2} + \ldots\right].$$

С достаточной для практики точностью можно учесть только первые два члена этого ряда

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{a}{2}\right]. \qquad (1.15)$$

На рис. 1.8 приведена зависимость относительного отклонения периода колебаний T от периода колебаний в приближении малых амплитуд как функция угловой амплитуды колебаний маятника. В данном случае мы встречаемся с зависимостью периода колебаний от их амплитуды, т.е. колебания в рассматриваемой системе являются *неизохронными*.

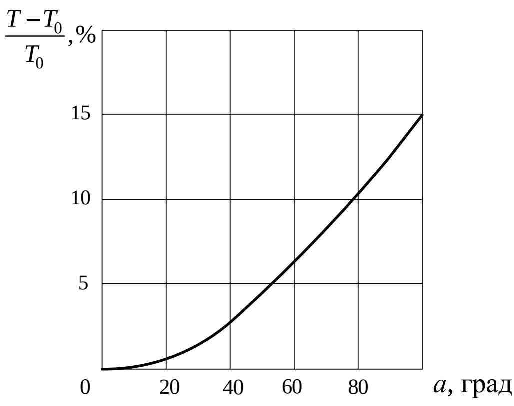


Рис. 1.8

Если бы рассматриваемая система была линейной, то описывающее ее уравнение имело бы вид $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$. Это уравнение отличается от уравнения (1.12) тем, что вместо $\sin x$ стоит просто x. Формально это означает, что в разложении синуса мы использовали только первое слагаемое. Тогда, воспользовавшись этим приближением, вместо (1.14) получаем

$$T = \frac{T_0}{\pi} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}},$$

что после интегрирования дает $T = T_0$ независимо от амплитуды колебаний, т.е. колебания в линейной системе являются *изохронными*.

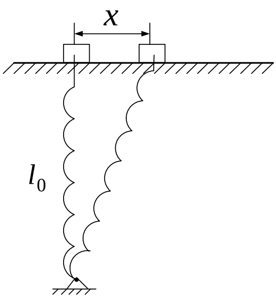


Рис. 1.9

Заметим, что из предположения малости колебаний не обязательно следует линейное описание системы. Для этого обратимся к нестандартному пружинному маятнику (рис. 1.9). Грузик массой m, который может перемещаться без трения по горизонтальной плоскости, упруго закреплен с помощью вертикальной пружины с коэффициентом жесткости k. В положении равновесия пружина не растянута и ее длина равна l_0.

Для описания динамики колебаний найдем выражение для потенциальной энергии $U(x) = \frac{1}{2} k \Delta l^2$, где Δl – удлинение пружины, x – смещение грузика от положения равновесия. Исходя из рис. 1.9 находим $\Delta l = \sqrt{{l_0}^2 + x^2} - l_0$. Тогда

$$U(x) = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{k}{2} \left(\sqrt{{l_0}^2 + x^2} - l_0 \right)^2.$$

Предполагая колебания малыми $\left(x \ll l_0\right)$, последнее выражение можно представить в виде

$$U(x) = \frac{kx^4}{8l_0^{\,2}} = \alpha x^4,$$

где $\alpha = \dfrac{k}{8l_0^{\,2}}$.

Тогда сила, действующая на груз,

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{kx^3}{2l_0^{\,2}},$$

и уравнение колебаний приобретет вид

$$m\ddot{x} + \frac{k}{2l_0^{\,2}}x^3 = 0.$$

Это явно нелинейное уравнение при любых x. Более того, и колебания в такой системе неизохронны при любых амплитудах. Для доказательства обратимся к закону сохранения энергии

$$U(x) + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = U(a),$$

где a – амплитуда колебаний. Найдем отсюда скорость колебаний

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[U(a) - U(x)\right]}\,.$$

Разрешая это уравнение относительно dt:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[U(a) - U(x)\right]}}\,,$$

и интегрируя обе части полученного равенства, получим выражение для периода колебаний:

$$T = 4\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[U(a) - U(x)\right]}}.$$

Если сюда подставить найденное нами выражение для $U(x)$, то

$$T = 4\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{\frac{2\alpha}{m}\left[a^4 - x^4\right]}}.$$

Введем замену переменных $u = x/a$. Тогда выражение для периода можно записать в виде

$$T = \frac{4\sqrt{m}}{a\sqrt{2\alpha}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Этот интеграл выражается через гамма-функцию $\Gamma(z)$:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 1{,}311.$$

И для периода колебаний получаем окончательное выражение:

$$T = 3{,}71\sqrt{\frac{m}{k}\frac{l_0}{a}}.$$

Займемся теперь решением уравнения движения (1.12) (напомним, что под величиной x понимается угол отклонения маятника от положения устойчивого равновесия). Это уравнение относится к классу нелинейных дифференциальных уравнений и не существует универсальных методов их точного решения. Поэтому познакомимся с весьма распространенным методом приближенного расчета интересующей нас системы – методом последовательных приближений. Для этого выразим $\sin x$ в виде ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots .$$

Ограничиваясь рассмотрением значений $x \ll 1$, остановимся на члене с x^3. Тогда уравнение (1.12) примет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{\omega_0^2}{6} x^3 = 0.$$

Представив это уравнение в форме

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha\omega_0^2 x^3 = 0 \qquad (1.16)$$

($\alpha = -1/6$), будем искать решение (1.16) в виде ряда по степеням α:

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots .$$

Здесь x_0 представляет решение уравнения (1.16) в так называемом «нулевом» приближении (при $\alpha = 0$), x_1 – первое приближение и т.д. Тогда для x_0 имеем уравнение

$$\ddot{x}_0 + \omega_0{}^2 x_0 = 0 .$$

Однако здесь кроется ошибка. Это уравнение для определения x_0 предполагает, что колебания маятника при любой амплитуде являются изохронными, т.е. независящими от амплитуды. В действительности же, как мы установили ранее, период движения маятника с конечной амплитудой принципиально отличается от периода колебаний с бесконечно малой амплитудой. Так как величина отклонения периода T от $T_0 = 2\pi/\omega_0$ должна существенно зависеть от степени нелинейности системы, вполне естественно ввести в рассмотрение новую частоту ω – частоту колебаний с заданной амплитудой в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \beta + \alpha^2 \cdot \beta_1 + \dots,$$

где $\beta, \beta_1 ...$ – некоторые пока еще неизвестные величины. Если при расчете ограничиться первым приближением по α, то можно положить

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha \cdot \beta. \tag{1.17}$$

Подставляя найденную отсюда величину ω_0^2 в (1.16), получаем с точностью до первой степени по α уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x - \alpha\beta x + \omega^2 \alpha x^3 = 0\ . \tag{1.18}$$

Тогда уравнение нулевого приближения (для x_0) имеет вид

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0\ . \tag{1.19}$$

При выбранных нами начальных условиях $\left(x(0) = a,\, \dot{x}(0) = 0\right)$ его решением будет

$$x_0 = a \cos \omega t.$$

Получим теперь уравнение для первого приближения. Для этого значение $x = x_0 + \alpha x_1$ подставим в уравнение (1.18):

$$\left(\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1\right) + \omega^2 \left(x_0 + \alpha x_1\right) - \alpha\beta\left(x_0 + \alpha x_1\right) + \omega^2 \alpha \left(x_0 + \alpha x_1\right)^3 = 0.$$

Тогда, учитывая только слагаемые первой степени по α и соотношение (1.19), получаем

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta x_0 - \omega^2 x_0^3$$

или

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta a \cos \omega t - \omega^2 a^3 \cos^3 \omega t.$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим преобразованием (прил. 4), можем записать

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \beta a \cos \omega t - \frac{1}{4}\omega^2 a^3 \cos 3\omega t - \frac{3}{4}\omega^2 a^3 \cos \omega t.$$

Из теории известно, что решение этого неоднородного дифференциального уравнения содержит так называемый секулярный член $\sim t \cdot \sin \omega t,$ вызванный наличием в правой части уравнения члена с резонансной частотой. Ясно, что подобное решение не соответствует никакому реальному движению. Для избавления от секулярного члена выберем величину β так, чтобы

$$a\beta - \frac{3}{4}a^3\omega^2 = 0\ .$$

Тем самым мы сразу убьем двух зайцев: устраним, во-первых, «нехорошее» решение и, во-вторых, из (1.17) можем найти значение частоты ω:

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\alpha a^2} = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8}a^2}\ .$$

Нетрудно убедиться, что при достаточно малых амплитудах это выражение приводит к полученной нами формуле (1.15), связывающей период колебаний T с периодом T_0 в линейной системе. Теперь уравнение первого приближения для x_1 запишется как

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -\frac{1}{4}\omega^2 a^3 \cos 3\omega t. \tag{1.20}$$

Его решение, как легко проверить, имеет вид

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{a^2}{32}\cos 3\omega t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Первые два слагаемых являются общим решением однородного уравнения (1.20), а третье – частное решение неоднородного уравнения.

Полное же решение уравнения (1.16) с учетом нулевого приближения $x = x_0 + \alpha x_1$ запишется следующим образом:

$$x = a\cos\omega t + \alpha\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{a^2}{32}\cos 3\omega t\right).$$

Значения постоянных C_1 и C_2 можно найти, требуя от этого решения, чтобы оно удовлетворяло тем же начальным условиям $x(0) = a,\ \dot{x}(0) = 0$. Проделав соответствующие выкладки, получим окончательно приближенное решение с точностью до первой степени $\alpha\,(\alpha = -1/6)$:

$$x = a\left(1 + \frac{a^2}{192}\right)\cos\omega t - \frac{a^3}{192}\cos 3\omega t;\quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{8}a^2}.$$

В найденном нами решении, которое годится для не слишком больших отклонений маятника (когда с достаточной для нас точностью можно считать $\sin x = x - x^3/6$), следует отметить две особенности:

1) колебания неизохронны (частота колебаний является функцией амплитуды);

2) колебания не являются чисто синусоидальными – в них присутствуют гармоники (в нашем случае третья гармоника).

1.3. Колебания в электрическом контуре с нелинейными элементами

Рассмотрим теперь электрический колебательный контур без затухания с конденсатором, в котором нет линейной зависимости напряжения от заряда. Подобными нелинейными свойствами обладают конденсаторы, в которых в качестве диэлектрика используются сегнетоэлектрики, или емкости, возникающие в *p*–*n*-переходах полупроводниковых диодов при обратном напряжении смещения.

Как известно, для конденсаторов с сегнетоэлектриками характерно отсутствие прямой пропорциональности между зарядом q и напряжением U_c на обкладках. Если пренебречь гистерезисом, то эту зависимость качественно можно отобразить на рис. 1.10. Используя привычное понятие емкости $C = q/U_c$, зависимость $U_c(q)$ можно перевести в зависимость $C(q)$, примерный вид которой для типичного сегнетоэлектрика приведен на рис. 1.11. Кроме того, емкость конденсатора с сегнетоэлектриком может зависеть от скорости изменения заряда, что приводит к частотной зависимости емкости. Поэтому нелинейные характеристики таких конденсаторов могут существенно изменяться при значительном увеличении частоты электрических колебаний в контуре, содержащем нелинейный элемент.

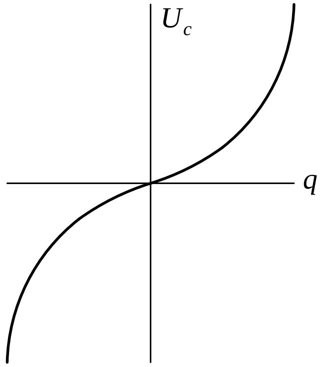


Рис. 1.10

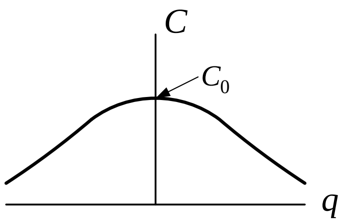


Рис. 1.11

Полагая индуктивность L независящей от токов и напряжений, запишем закон Ома для контура (рис. 1.12):

$$L\frac{dI}{dt} + U_c = 0,$$

или

$$L\ddot{q} + U_c(q) = 0. \qquad (1.21)$$

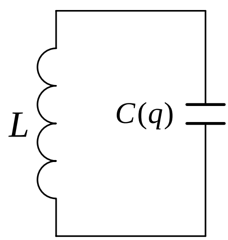


Рис. 1.12

Для построения фазового портрета данной колебательной системы аппроксимируем нелинейную вольт-кулоновскую характеристику (см. рис. 1.10) кубической параболой:

$$U_c(q) = \frac{q}{C_0}\left(1 + \gamma q^2\right),$$

где C_0 – максимальное значение емкости (см. рис. 1.11), γ – коэффициент нелинейности. Введем переменную $x = q$. Тогда уравнение (1.21) можно записать в виде

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{1}{C_0 L}\frac{x\left(1+\gamma x^2\right)}{\dot{x}}. \tag{1.22}$$

Используем для построения фазового портрета рассмотренный нами ранее метод изоклин. В соответствии с ним уравнения семейства изоклин запишутся следующим образом:

$$\dot{x} = -\frac{\left(x+\gamma x^3\right)}{k_i C_0 L},$$

где k_i – произвольные числа. Отсюда видно, что для данной нелинейной системы изоклинами на фазовой плоскости являются кубические параболы с различным коэффициентами k_i. Исключение составляют только изоклина бесконечности $\left(k_i = \infty\right)$, совпадающая с осью $x\left(\dot{x} = 0\right)$, и нулевая изоклина $\left(k_i = 0\right)$, совпадающая с осью $\dot{x}\left(x = 0\right)$. На рис. 1.13 показано построение фазовых траекторий методом изоклин для электрического колебательного контура с нелинейным диэлектриком. Замкнутость фазовых траекторий подтверждает, что мы имеем дело с консервативной системой. При малых амплитудах колебаний, как и в случае идеального маятника, фазовые траектории близки к эллипсам, т.е. малые движения в нелинейной системе близки к гармоническим. Это связано с тем, что при малых x можно пренебречь влиянием на колебательный процесс нелинейного члена γx^3 по

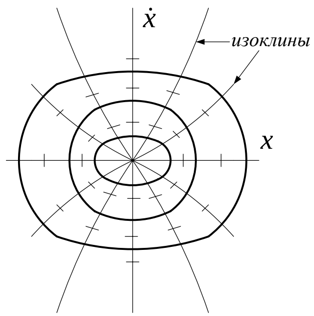


Рис. 1.13

сравнению с линейным членом. С ростом x форма колебаний отличается от синусоидальной и их различие тем больше, чем больше амплитуда колебаний.

Итак, с учетом сделанных допущений мы сводим решение нашей задачи к нахождению приближенного решения дифференциального уравнения

$$L\ddot{x}+\frac{1}{C_0}\left(x+\gamma x^3\right)=0,$$

или

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x+\gamma\omega_0^2 x^3=0,$$

где $\omega_0^2=1/\left(LC_0\right)$. Это уравнение принадлежит к тому же типу, что и рассмотренное нами ранее уравнение колебаний маятника, поэтому сразу запишем его решение при начальных условиях $x=a=q_0$ (q_0 – начальный заряд конденсатора), $\dot{x}\left(0\right)=I\left(0\right)=0$:

$$x=a\left(1-\gamma\frac{a^3}{32}\right)\cos\omega t+\gamma\frac{a^3}{32}\cos 3\omega t, \tag{1.23}$$

$$\omega^2=\frac{\omega_0^2}{1-\frac{3}{4}\gamma a^2}. \tag{1.24}$$

Если выбранная нами аппроксимация $U_c\left(q\right)$ точно передает зависимость напряжения на конденсаторе от заряда, решение (1.23) в первом приближении верно лишь постольку, поскольку можно пренебречь последующими членами. То же самое относится и к выражению для частоты (1.24). Поэтому при больших амплитудах колебаний приближенное решение становится непригодным независимо от точности аппроксимации. Здесь сказывается сама ограниченность метода последовательных приближений, не дающего точных выражений для реальных движений в системе в случае больших ампли-

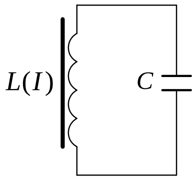


Рис. 1.14

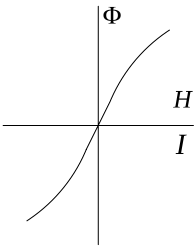


Рис. 1.15

туд. В дальнейшем мы познакомимся с другим приемом определения частоты колебаний в подобных системах для случая приближенного гармонического закона колебаний.

Обратимся теперь к другому примеру электрической нелинейной консервативной системы, а именно – колебательному контуру с индуктивностью, зависящей от протекающего по ней тока (рис. 1.14). С подобными системами приходится встречаться, если в индуктивности применяются сердечники из ферромагнитного материала. В таких случаях для каждого данного сердечника можно получить зависимость между намагничивающим полем H и магнитным потоком Φ – *кривая намагничивания*. Если пренебречь гистерезисом, то ее примерный вид представлен на рис. 1.15. Так как величина поля H пропорциональна току, текущему в катушке, то по оси абсцисс можно в соответствующем масштабе откладывать ток I.

Используя основной закон электромагнитной индукции, запишем закон Ома для контура, представленного на рис. 1.14:

$$\frac{d\Phi(I)}{dt}+\frac{q}{C}=0. \tag{1.25}$$

Данное уравнение можно записать как

$$\frac{d\Phi}{dI}\ddot{q}+\frac{q}{C}=0. \tag{1.26}$$

Для ограниченного интервала значений $I=\dot{q}$ (до области насыщения) можно аппроксимировать кривую намагничивания полиномом, содержащим нечетные степени I:

$$\Phi(I)=L_0\left(I-\gamma I^3\right), \tag{1.27}$$

где $\gamma << 1$ – коэффициент нелинейности. Величина $d\Phi / dI = L_0 - 3L_0\gamma I^2$ (в пределах выбранного интервала значений тока) называется мгновенным значением индуктивности. Умножая уравнение (1.26) на dq и интегрируя, получаем уравнение семейства интегральных кривых на фазовой плоскости $(q, \dot{q})$:

$$L_0\dot{q}^2 - \frac{3}{2}\gamma L_0\dot{q}^4 + \frac{1}{C}q^2 = \text{const}.$$

Оно представляет собой уравнение семейства кривых, близким к эллипсам в области малых q и $\dot{q}$.

Для приближенного количественного рассмотрения задачи о колебаниях воспользуемся методом последовательных приближений. Уравнение (1.26) при выбранной нами простейшей полиномиальной аппроксимации (1.27) записывается следующим образом:

$$\ddot{q}\left(L_0 - 3\gamma L_0\dot{q}^2\right) + \frac{1}{C}q = 0,$$

или

$$\ddot{q} - 3\gamma\dot{q}^2\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0\,, \qquad (1.28)$$

где $\omega_0^2 = 1/\left(L_0 C\right)$.

Пусть

$$q = x = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \ldots$$

Ограничимся первым приближением $q = x = x_0 + \gamma x_1$. Вводя поправку к частоте, обусловленную нелинейностью, в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \gamma p, \qquad (1.29)$$

перепишем (1.28):

$$\ddot{x}_0 + \gamma\ddot{x}_1 - 3\gamma\left(\dot{x}_0 + \gamma\dot{x}_1\right)^2\left(\ddot{x}_0 + \gamma\ddot{x}_1\right) + \left(\omega^2 - \gamma p\right)\left(x_0 + \gamma x_1\right) = 0.$$

Если в этом уравнении оставить члены первого порядка малости по γ, то получаем

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 + \gamma\left(\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - p x_0 - 3\dot{x}_0^2 \ddot{x}_0\right) = 0. \tag{1.30}$$

Уравнение нулевого приближения ($\gamma = 0$) имеет вид

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0.$$

Его решение при начальных условиях $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$: $x_0 = a\cos\omega t$. Тогда в соответствии с (1.30) получаем уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = pa\cos\omega t - 3a^3\omega^4 \sin^2\omega t \cdot \cos\omega t,$$

или после тригонометрических преобразований

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left(pa - \frac{3}{4}a^3\omega^4\right)\cos\omega t - \frac{3}{4}a^3\omega^4 \cos 3\omega t.$$

Для устранения из решения этого уравнения секулярного члена, вызванного наличием в правой части члена с резонансной частотой, потребуем

$$pa - \frac{3}{4}a^3\omega^4 = 0. \tag{1.31}$$

Это сразу дает $p = \frac{3}{4}a^2\omega^4$. Для частоты колебаний ω в соответствии с (1.29) получаем уравнение

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\gamma a^2 \omega^4,$$

или с точностью до членов порядка γ

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{3}{4}\gamma a^2 \omega_0^2\right).$$

Теперь с учетом (1.31) получаем уравнение первого приближения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{3}{4} a^3 \omega^4 \cos 3\omega t.$$

Его решением является

$$x_1 = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{3a^3 \omega^2}{32} \cos 3\omega t.$$

Тогда полное решение с учетом прежних начальных условий будет выглядеть как

$$q = x = a\left(1 + \frac{3}{32} \gamma a^2 \omega^2\right) \cos \omega t - \frac{3}{32} \gamma a^3 \omega^2 \cos 3\omega t.$$

Таким образом и здесь мы получаем качественно те же особенности, что и в случаях, рассмотренных ранее (неизохронность колебаний и появление гармоник).

Приведем еще один способ решения задачи о колебаниях в электрическом контуре с нелинейной индуктивностью. Выберем в качестве основной переменной не заряд q, а магнитный поток Φ. Тогда, дифференцируя по времени уравнение (1.25), получаем

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{C} I = 0,$$

где ток I является функцией магнитного потока. Нелинейную зависимость $I = \varphi(\Phi)$ также можно изобразить в виде кубической параболы с коэффициентом нелинейности γ_0:

$$I = \frac{1}{L_0}\left(\Phi + \gamma_0 \Phi^3\right).$$

Такое преобразование легко представить графически, если на рис. 1.15 поменять местами оси координат. Тогда уравнение свободных колебаний в рассматриваемом электрическом контуре с нелинейной индуктивностью запишется как

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{L_0 C}\left(\Phi + \gamma_0 \Phi^3\right) = 0\,.$$

Отсюда находим уравнение фазовых траекторий в переменных $x = \Phi$ и $\dot{x} = \dot{\Phi}$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{1}{CL_0}\frac{x\left(1 + \gamma_0 x^2\right)}{\dot{x}}\,,$$

что в точности совпадает с уравнением фазовых траекторий для электрического контура с нелинейным конденсатором (1.22). Поэтому фазовый портрет свободных колебаний магнитного потока в контуре с нелинейной индуктивностью аналогичен фазовому портрету свободных колебаний заряда в контуре с нелинейным конденсатором (см. рис. 1.13), а при равенстве коэффициентов нелинейности просто совпадают.

Такой прием получения более удобных соотношений для описания той же системы через соответствующий выбор основной переменной мы используем и в дальнейшем при анализе вынужденных колебаний.

1.4. Сложение гармонических колебаний

В дальнейшем мы встретимся с физическими ситуациями, в которых происходит сложение двух и более гармонических колебаний одной системы. Это, например, имеет место для так называемых связанных систем или при одновременном действии на систему нескольких сил. Прежде чем переходить к вопросу о сложении колебаний, рассмотрим так называемый векторный способ представления гармонического колебания $x = a\cos\left(\omega t + \alpha\right)$. Такое колебание отображается вектором длиной a, вращающимся с угловой скоростью

ω против часовой стрелки (рис. 1.16). Направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе колебания α.

В математическом плане обобщением данного способа является использование *комплексных* чисел вида $z = x + iy$, где x и y – вещественные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Числа x и y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначаются символами $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Комплексное число z отображается точкой на плоскости xOy (рис. 1.17) с координатами (x, y). При этом действительные числа отображаются точками оси x (*действительная ось*), мнимые числа – точками оси y (*мнимая ось*). Кроме того, каждой точке (x, y) соответствует определенный вектор ρ – радиус-вектор этой точки. Поэтому комплексные числа можно представлять также в виде радиус-векторов на плоскости.

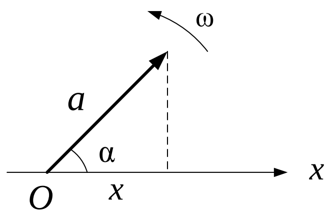


Рис. 1.16

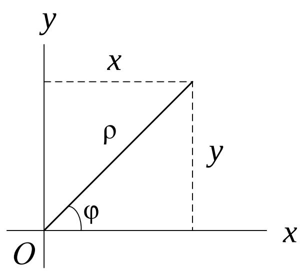


Рис. 1.17

В полярных координатах координаты любой точки плоскости можно определить как $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$. Расстояние ρ от начала координат до точки, изображающей число, называется *модулем* комплексного числа z (обозначается $|z|$) $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Число φ называется аргументом комплексного числа z. С помощью классической формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

любое комплексное число z с модулем ρ и аргументом φ можно записать в следующей *показательной форме*:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}.$$

Мнимую единицу можно рассматривать как векторный оператор, имеющий определенный физический смысл. Когда какой-либо вектор умножается на i (т.е. оператор i действует на вектор), то вектор поворачивается на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Наряду с комплексным числом $z = x + iy$ можно ввести *комплексно сопряженное* число $z^* = x - iy$ или в показательной форме $z^* = \rho\exp(-i\varphi)$. Нетрудно видеть, что $z \cdot z^* = \rho^2$. Произведение $z \cdot z^*$ называется квадратом модуля комплексного числа z и иногда обозначается как $|z|^2$.

В соответствии с вышесказанным любое гармоническое колебание типа $x = a\cos(\omega t + \alpha)$ можно записывать в виде

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left[ae^{i(\omega t + \alpha)}\right].$$

Такое представление значительно облегчает решение многих задач, связанных с исследованием колебаний. Для этого $\sin x$ или $\cos x$ заменяют функцией $e^{ix} = \exp(ix)$, а для того, чтобы вернуться к исходной форме записи, берут мнимую часть решения в случае синуса и действительную часть в случае косинуса.

Сложение колебаний одного направления одинаковых частот. Пусть складываемые колебания имеют вид

$$x_1 = a_1\cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2\cos(\omega t + \alpha_2).$$

Представляя эти колебания в виде вращающихся с одинаковой угловой скоростью векторов a_1 и a_2 (рис. 1.18), нетрудно понять, что результирующее колебание также представляется в виде вектора с длиной a, вращающегося с той же угловой скоростью ω. Иначе говоря, сумма гармонических колебаний также является гармоническим колебанием с частотой ω, имеющим амплитуду a и начальную фазу α:

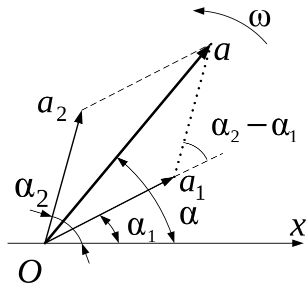


Рис. 1.18

$$x = x_1 + x_2 = a\cos(\omega t + \alpha).$$

Значения амплитуды и начальной фазы легко найти из рис. 1.18:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1), \tag{1.32}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}.$$

Частные случаи:

1. Разность фаз $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$ (синфазные колебания). В этом случае амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний: $a = a_1 + a_2$.

2. Разность фаз $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ (противофазные колебания). Тогда амплитуда результирующего колебания $a = |a_1 - a_2|$ (знак модуля поставлен из-за того, что амплитуда колебания по определению величина положительная).

Если частоты колебаний $\omega_1 \neq \omega_2$, то векторы a_1 и a_2 вращаются с разной угловой скоростью. Это приводит к тому, что результирующий вектор a начинает пульсировать по величине и вращается с непостоянной скоростью, т.е. результирующее колебание не будет гармоническим.

Сложение колебаний одного направления близких частот (биения). Особый интерес представляет случай, когда складываемые гармонические колебания одного направления мало отличаются по частоте, т.е. разность частот $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ много меньше, как ω_1, так и ω_2 (величина $\Delta\omega$ называется *расстройкой*). Значения начальных фаз складываемых колебаний можно для упрощения положить равными нулю. Итак, требуется сложить два колебания $x_1 = a_1 \cos \omega t$ и $x_2 = a_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t$, полагая $\Delta\omega << \omega$.

Воспринимая величину $\Delta\omega t$ как медленно изменяющуюся разность фаз $\Delta\alpha$, результирующее колебание можно представить в виде вектора, вращающегося с почти постоянной угловой скоростью ω, длина которого медленно пульсирует со временем, т.е.

$$x = x_1 + x_2 = A(t)\cos(\omega t),$$

где

$$A^2(t) = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 a_2 \cos(\Delta\omega t)$$

(см. формулу (1.32)). Такие колебания называются биениями. Их можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω, амплитуда которого медленно изменяется со временем по некоторому периодическому закону (рис. 1.19). Максимальное значение амплитуды равно $a_1 + a_2$, минимальное – $|a_1 - a_2|$.

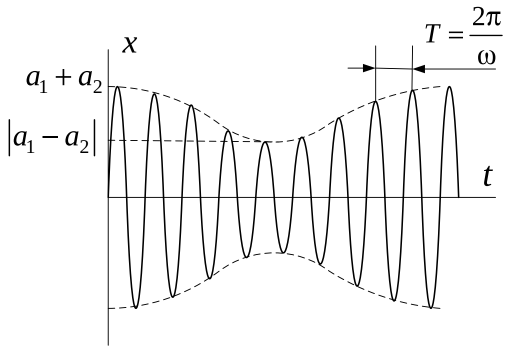


Рис. 1.19

Рассмотрим *частный случай* сложения одинаковых амплитуд $(a_1 = a_2 = a)$. Тогда

$$A^2(t) = 2a^2(1 + \cos\Delta\omega t) = 4a^2\cos^2\frac{\Delta\omega t}{2}.$$

В этом случае

$$x(t) = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right| \cdot \cos\omega t.$$

Такое колебание отражено на рис. 1.20. Наличие знака модуля у медленно изменяющейся амплитуды приводит к тому, что частота изменения амплитуды (частота биений) в два раза больше частоты $\Delta\omega/2$, т.е. частота биений равна частоте расстройки системы.

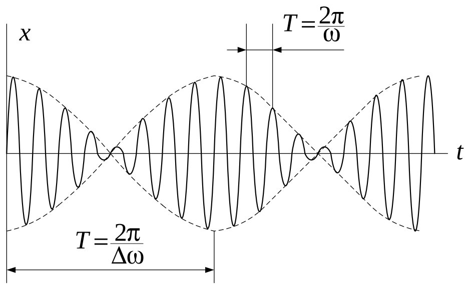


Рис. 1.20

Сложение колебаний одного направления с одинаковым последовательным сдвигом фазы. С этим приходится встречаться, например, в задаче о формировании волновых пакетов. Но наиболее явно это проявляется при рассмотрении интерференционных и дифракционных явлений. Итак, требуется найти сумму большого числа N гармонических колебаний одного направления с одинаковой частотой ω и амплитудой a, каждое из которых сдвинуто по фазе относительно соседних на δ:

$$x = \sum_{n=1}^{N} a\cos\left[\omega t + (n-1)\delta\right].$$

В данном случае векторную диаграмму можно отобразить в виде ломаной линии, состоящей из звеньев одинаковой длины, причем каждое звено образует угол δ с предыдущим звеном (рис. 1.21). Очевидно, результат сложения имеет вид $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, где A – амплитуда результирующего колебания, α – его фазовый сдвиг относительно первой компоненты $a\cos\omega t$. Из рис. 1.21 следует $\frac{A}{2} = OC\cdot\sin\beta = OC\cdot\sin\frac{2\pi - N\delta}{2} = OC\cdot\sin\frac{N\delta}{2}$. Кроме того, $\frac{a}{2} = OC\cdot\sin\frac{\delta}{2}$. Из этих соотношений находим результирующую амплитуду:

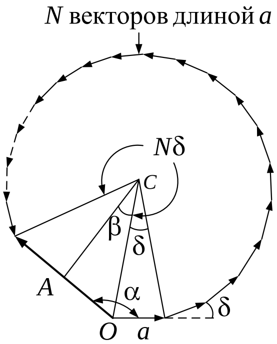


Рис. 1.21

$$A = a\left|\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right|. \qquad (1.33)$$

Величина фазового сдвига α, как видно на рис. 1.21, определяется как $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, где $2\beta = 2\pi - N\delta$. Отсюда находим

$$\alpha = (N-1)\frac{\delta}{2}.$$

Таким образом, результирующее колебание запишется в виде

$$x = a\left|\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right|\cos\left[\omega t + (N-1)\frac{\delta}{2}\right].$$

Заметим, что этот же результат можно получить, представив косинусы в виде комплексных экспонент и вычислив сумму ряда как сумму геометрической прогрессии

$$x=\sum_{n=1}^{N} a\exp\left\{i\left[\omega t+(n-1)\delta\right]\right\}=a\cdot e^{i\omega t}\left[1+e^{i\delta}+\ldots+e^{i(N-1)\delta}\right]=$$

$$=ae^{i\omega t}\frac{1-e^{iN\delta}}{1-e^{i\delta}}=ae^{i\omega t}\frac{e^{\frac{iN\delta}{2}}(e^{-\frac{iN\delta}{2}}-e^{\frac{iN\delta}{2}})}{e^{\frac{i\delta}{2}}(e^{-\frac{i\delta}{2}}-e^{\frac{i\delta}{2}})}.$$

Выражения, стоящие в скобках в числителе и знаменателе, как нетрудно убедиться из формулы Эйлера, равны соответственно $-2\sin\frac{N\delta}{2}$ и $-2\sin\frac{\delta}{2}$. Поэтому

$$x=a\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\exp\left\{i\left[\omega t+\frac{(N-1)\delta}{2}\right]\right\}.$$

Если теперь взять вещественную часть от x, то получаем прежний результат.

Исследуем теперь поведение амплитуды результирующего колебания (1.33) при большом числе колебаний N. В этом случае сдвиг фазы результирующего колебания α практически равен разности фаз первого и последнего колебаний:

$$\alpha=(N-1)\frac{\delta}{2}\approx\frac{N\delta}{2}.$$

При этом $\sin\frac{N\delta}{2}\approx\sin\alpha$, $\sin\frac{\delta}{2}\approx\sin\frac{\alpha}{N}\approx\frac{\alpha}{N}$. Тогда выражение (1.33) можно представить как функцию разности фаз первого и последнего колебаний:

$$A = aN\left|\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right|.$$

Так как интенсивность колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, то интенсивность суммарного колебания I можно записать как

$$I = I_0\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2},$$

где I_0 – интенсивность результирующего колебания при сложении колебаний одинаковой фазы. На рис. 1.22 представлена зависимость интенсивности I от разности фаз первого и последнего складываемых колебаний α. Первый (центральный) максимум интенсивности I_0 наблюдается при $\alpha = 0$ (очевидный результат!). При $\alpha = \pm m\pi$ $(m = 1, 2, 3...)$ интенсивность обращается в нуль (колебания взаимно гасят друг друга). При $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ наблюдается второй максимум с интенсивностью около 4 % от центрального, при $\alpha = \frac{5}{2}\pi$ – третий максимум, интенсивность около 1,5 % и т.д.

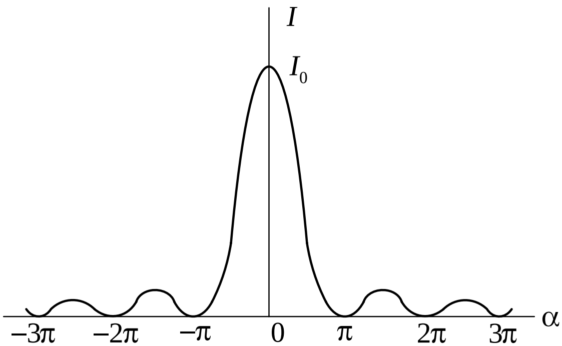


Рис. 1.22

Сложение колебаний одного направления со случайным сдвигом фазы. Пусть разность фаз между двумя соседними векторами, рассмотренными в последнем разделе, может принимать случайные значения, лежащие в интервале от 0 до 2π. Тогда векторная сумма и результирующий вектор A могут быть отражены, например, как на рис. 1.23. Определим теперь, как амплитуда результирующего колебания может зависеть от числа складываемых колебаний N. Для этого рассмотрим проекцию вектора A на оси x и y:

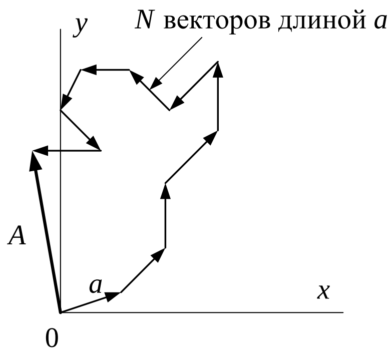


Рис. 1.23

$$A_x = \sum_{i=1}^{N} a\cos\varphi_i, \quad A_y = \sum_{i=1}^{N} a\sin\varphi_i \, ,$$

где множители $\cos\varphi_i$ и $\sin\varphi_i$ принимают случайные значения от –1 до +1, причем все значения для достаточно больших N встречаются приблизительно одинаково часто (равновероятны). Так как интенсивность колебаний определяется квадратом амплитуды, то составим выражение $A^2 = A_x^2 + A_y^2$ и усредним его по времени. Тогда

$$\left\langle A_x^2 \right\rangle = a^2 \left\langle \sum_{i=1}^{N} \cos^2\varphi_i + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \cos\varphi_i \sum_{j=1}^{N} \cos\varphi_j \right\rangle .$$

Так как фазы φ_i независимы, то среднее от суммы равно сумме средних значений. С учетом того, что множители $\cos\varphi_i$ и $\cos\varphi_j$, входящие в общий член $2\cos\varphi_i\cos\varphi_j$ двойной суммы, принимают случайные значения от –1 до +1, то при усреднении сумма всех таких произведений практически равна нулю. Среднее же значение суммы

$\left\langle \sum_{i=1}^{N} \cos^2 \varphi_i \right\rangle$ сводится к умножению числа членов ряда N на среднее значение $\left\langle \cos^2 \varphi_i \right\rangle$, равное 1/2. Следовательно, $\left\langle A_x^2 \right\rangle = \dfrac{Na^2}{2}$. Аналогично: $\left\langle A_y^2 \right\rangle = \dfrac{Na^2}{2}$. Поэтому $\left\langle A^2 \right\rangle = Na^2$. Следовательно, наиболее вероятное значение амплитуды системы, участвующей в N одинаковых гармонических колебаниях с амплитудой a и случайными фазами, равно всего лишь $\sqrt{N}a$. Заметим, что при сфазированности всех колебаний амплитуда равнялась бы Na !

Предположим, что в проведенном выше анализе величина a не амплитуда гармонического колебания, а среднее расстояние, проходимое частицей между двумя случайными столкновениями (средняя длина свободного пробега). Тогда после N таких столкновений (с одинаковыми в среднем временными интервалами) частица отойдет от своего положения в среднем только на расстояние $\sqrt{N}a$. Поэтому пройденный путь пропорционален квадратному корню из времени, прошедшему с начала движения, а не первой степени времени. Это свойственно всем случайным процессам, характеризующим диссипацию энергии.

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Пусть точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях вдоль осей x и y. Выберем начало отсчета времени так, чтобы уравнения отдельных колебаний выглядели следующим образом:

$$x = a\cos\omega t,\ y = b\cos(\omega t + \alpha), \tag{1.34}$$

здесь α – разность фаз колебаний.

Уравнения (1.34) определяют в параметрической форме уравнение траектории $y(x)$, по которой движется точка, участвующая в обоих колебаниях. Найдем это уравнение, исключив из (1.34) параметр t. Для этого найдем из первого уравнения

$$\cos\omega t = \frac{x}{a},\ \sin\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

и подставим во второе уравнение (после раскрытия $\cos(\omega t + \alpha)$). Получаем

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

или после несложных преобразований

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha. \tag{1.35}$$

Это уравнение эллипса, ориентированного произвольным образом относительно осей x и y. Таким образом, точка, участвующая в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковой частотой, движется в общем случае по эллиптической траектории.

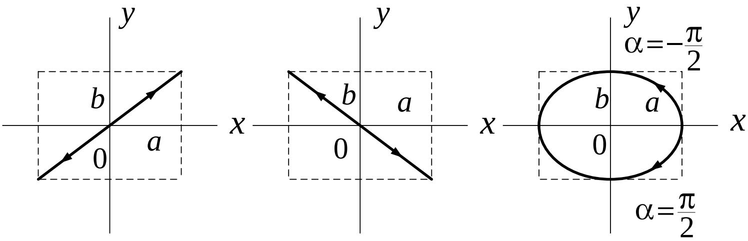
Частные случаи:

1. $\alpha = 0.$ Тогда из уравнения (1.35) следует $y = \frac{b}{a}x,$ т.е. точка перемещается по прямой (рис. 1.24, *а*), причем расстояние ее от начала координат изменяется со временем по гармоническому закону $r = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\omega t.$ В этом случае говорят, что колебания имеют линейную поляризацию.

2. $\alpha = \pm\pi.$ Тогда из уравнения (1.35) следует, что точка совершает гармонические колебания вдоль прямой $y = -\frac{b}{a}x$ (рис. 1.24, *б*).

3. $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}.$ Теперь точка совершает движение по эллипсу, приведенному к координатным осям (рис. 1.24, *в*): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$ Нетрудно убедиться в том, что при $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ движение совершается по часовой

стрелке, при $\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$ – против часовой стрелки. При равенстве амплитуд a и b эллипс вырождается в окружность.



а *б* *в*

Рис. 1.24

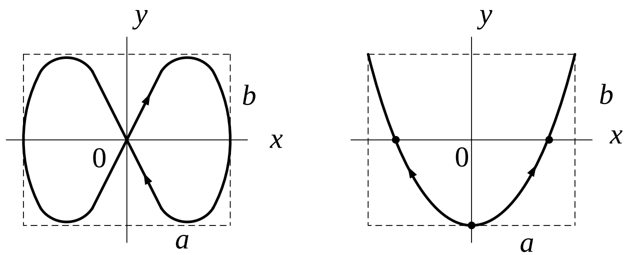
Из сказанного следует довольно неожиданный и имеющий большое практическое значение вывод о том, что движение точки по эллипсу может быть представлено как суперпозиция двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. В этом случае говорят, что колебание имеет эллиптическую поляризацию. Понятие поляризации – одно из важнейших в оптике и оно основано на представлении о сложении двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.

При небольшом различии частот двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний на величину $\Delta\omega$ уравнение (1.34) можно представить как

$$x = a\cos\omega t,$$
$$y = b\cos\left[\left(\omega + \Delta\omega\right)t + \alpha\right] = b\cos\left[\omega t + \left(\alpha + \Delta\omega \cdot t\right)\right],$$

т.е. их можно рассматривать как колебания одинаковой частоты, но с медленно изменяющейся по линейному закону разностью фаз. Результирующее движение в этом случае происходит по медленно изменяющейся кривой, последовательно принимающей форму прямой линии или эллипса, что соответствует всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$.

Если частоты двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаний неодинаковы, но их отношение равно отношению целых чисел (кратные частоты), то траектория движения имеет довольно сложный вид кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. На рис. 1.25, *а* представлена замкнутая траектория, являющаяся сложением колебаний $x = a\cos\omega t$, $y = b\cos(2\omega t + \pi/2)$. Если же сложить колебания $x = a\cos\omega t$, $y = b\cos 2\omega t$, то траектория вырождается в незамкнутую



а *б*

Рис. 1.25

кривую (рис. 1.25, *б*) с уравнением параболы $y = b\left(2\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$, по которой точка движется туда и обратно. И чем ближе к единице отношение частот, тем более сложной оказывается фигура Лиссажу. Наблюдение фигур Лиссажу позволяет точно определить отношение частот колебаний ω_x и ω_y по числу пересечений n_x и n_y данных кривых с осями координат x и y:

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$$

(для рис. 1.25, *б* $\omega_x : \omega_y = 1:2$).

Глава 2

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

2.1. Особенности колебаний в диссипативных системах и методы их рассмотрения

Как уже отмечалось ранее, в реальных колебательных системах всегда происходит диссипация (рассеяние) энергии и, как следствие, уменьшение общего запаса энергии. Существует множество характеристик колебательных процессов, которые обусловлены наличием в системе потерь энергии и которые являются существенными как для линейных, так и нелинейных систем. Сюда можно отнести оценку резонансной амплитуды в линейной системе или в системе с малой нелинейностью, вид установившегося движения при наличии вынуждающей силы, закон изменения со временем амплитуды свободных колебаний, устойчивость различных состояний и др.

На перечисленные выше вопросы и ряд других теория консервативных колебательных систем принципиально не может дать ответа. Естественно, что учет диссипации неизбежно усложняет анализ и если можно получить ответы на интересующие нас вопросы в рамках консервативной трактовки, то целесообразно этим воспользоваться. Что же касается ряда общих свойств системы, обладающей затуханием, то выводы, сделанные из анализа идеализированных консервативных систем, могут оказаться принципиально неверными. И если на достаточно малом временном интервале эти различия могут проявляться весьма незначительно, то по истечении достаточно большого промежутка времени движение в реальной диссипативной системе будет уже и количественно, и качественно отличаться от движения в идеализированной консервативной системе.

При математическом описании автономных (т.е. без внешнего воздействия) консервативных систем всегда существует интеграл типа $\Phi(x, \dot{x}) = \text{const}$, который является математическим выражением постоянства запаса энергии движения системы с одной степенью свободы. В неконсервативной системе $\Phi\left(x,\dot{x}\right)=w(t),$ где величина $w(t)$ характеризует мгновенное значение запаса колебательной энергии системы. В подобных системах $dw/dt<0,$ что физически соответствует наличию потерь, приводящих к непрерывному уменьшению запаса энергии, а сама эта производная выражает величину мощности потерь, рассеиваемой на диссипативных элементах колебательной системы.

Для простейшей системы, в которой движение описывается энергетическим уравнением типа (1.7)

$$\frac{\dot{x}^2}{2}+u(x)=w(t),$$

нетрудно получить уравнение для действующих в ней сил. Для этого продифференцируем по времени это соотношение

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}^2}{2}+u(x)\right]=\dot{x}\left(\ddot{x}+\frac{du}{dx}\right)=\frac{dw}{dt}.$$

Если вспомнить, что $u(x)=-\int\limits_0^x f(x)dx$, где $f(x)$ – возвращающая сила, то получаем

$$\ddot{x}-f(x)-\frac{1}{\dot{x}}\frac{dw}{dt}=0.$$

Выражение $\frac{1}{\dot{x}}\frac{dw}{dt}$ дает величину силы трения, которая в различных системах характеризуется той или иной зависимостью от состояния движения системы. Оно должно обращаться в нуль при $\dot{x}=0,$ т.е. в отсутствие движения. Это следует из физических соображений, а именно из того, что сила трения и потери энергии могут быть только при наличии движения. Отсюда следует, что в функции dw/dt переменная $\dot{x}$ должна входить в степени, большей первой. Кроме того, выражение $f=\frac{1}{\dot{x}}\frac{dw}{dt}$ должно быть знакопеременным относительно скорости движения в системе или тока в электрическом колебательном контуре.

Для многих диссипативных систем сила трения зависит только от скорости (или силы тока) и не зависит от координаты (заряда), однако характер этой зависимости может быть различным и зависящим от свойств системы и условий, в которых совершается движение.

Сила трения, не зависящая от величины скорости и связанная лишь с ее знаком, называется силой *сухого трения* и подчиняется закону Кулона–Амонтона $F = -\mu N$. Здесь F – проекция силы трения на направление относительной скорости тела, μ – коэффициент трения, N – сила нормального давления. Этот идеализированный вид трения позволяет понять особенности процессов в механических системах, но ему нельзя найти аналога процессов, реализующихся в простых колебательных цепях. Идеализированная характеристика сухого трения имеет вид, представленный на рис. 2.1 (f_0 – значение силы трения, отнесенной к единичной массе). Здесь характерно наличие разрыва в точке $\dot{x} = 0$, что не позволяет аналитически описать данную зависимость каким-либо простым выражением. Поэтому, естественно, удобно рассматривать отдельные этапы движения в системе, на которых выполняются разные законы диссипации.

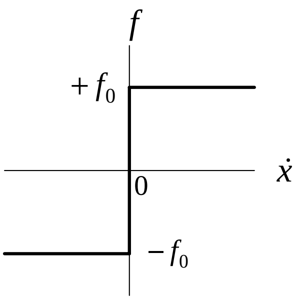


Рис. 2.1

С необходимостью раздельного рассмотрения этапов движения приходится сталкиваться также и в тех случаях, когда сила трения (сопротивления) выражается степенной функцией скорости с четным показателем степени, например, в случае так называемого «квадратичного» трения, пропорционального квадрату скорости. В этом случае коэффициент пропорциональности δ в выражении $\frac{1}{\dot{x}}\frac{dw}{dt} = \delta \cdot \dot{x}^2$ следует считать отрицательным при $\dot{x} > 0$ и положительным при $\dot{x} < 0$. Заметим, что величина силы трения не испытывает скачка при $\dot{x} = 0$.

При наличии скачкообразного изменения силы трения в точке $\dot{x} = 0$ удобно разбить задачу о собственных колебаниях в диссипативной системе на два этапа: первый из них соответствует одному знаку трения, второй – другому. Эти этапы при свободных колебаниях поочередно сменяют друг друга, и изучение всего движения в целом требует раздельного анализа обоих этапов при соответствующем «сшивании» полученных решений.

Линейная зависимость силы трения от скорости наиболее распространена в механических системах и описывает вязкое трение при небольших скоростях. В этом случае сила трения имеет вид $\delta \cdot \dot{x}$ при любых $\dot{x}$. В электрических цепях сила трения выражается в виде $RI\left(I = \dot{q}\right)$, соответственно мощность потерь равна RI^2. Для «кубического» трения имеем $-\frac{1}{\dot{x}}\frac{dw}{dt} = \delta \cdot \dot{x}^3$. Этот закон, встречающийся в механике больших скоростей, справедлив также для электрических систем с нелинейным диссипативным элементом, причем часто встречается комбинация линейного и кубического трения.

Для исследования движений в нелинейных диссипативных системах, как и в консервативных системах, можно применять различные качественные и количественные методы. Однако не все эти методы можно без дополнительных оговорок или модификаций использовать для анализа диссипативных систем. При рассмотрении собственных колебаний метод фазовой плоскости остается полностью пригодным, приводя лишь к большему разнообразию типов особых точек и фазовых траекторий. Так, например, в фазовых портретах уже не встречаются особые точки типа центр, но зато могут появиться особые точки типа фокус или узел, в которые стягиваются все фазовые траектории, расположенные в определенной области вокруг этих особых точек. В фазовых портретах диссипативных колебательных систем будут встречаться также сходящиеся траектории вместо совокупности замкнутых траекторий, окружающих особые точки, соответствующие устойчивым положениям равновесия.

Отмеченные выше существенные особенности диссипативных систем связаны с тем, что любые собственные колебания неизбежно затухают. Это приводят к тому, что нельзя без существенных оговорок использовать метод последовательных приближений, в котором за нулевое приближение принимается гармоническое движение. Данный метод может применяться лишь для ограниченных временных интервалов в случае достаточно малого затухания. Это заставляет в случаях, когда не удается найти прямое и точное решение дифференциального уравнения, искать другие пути приближенного решения. К ним можно отнести *метод поэтапного рассмотрения,* а также *метод медленно меняющихся амплитуд*. Метод поэтапного рассмотрения принципиально прост и дает хорошие результаты, но достаточно громоздок, так как требует последовательного сшивания решения для каждого этапа с последующим. Его безусловное преимущество состоит в том, что он пригоден для любых систем с любыми характеристиками трения и вида нелинейности. Метод медленно меняющихся амплитуд является весьма мощным средством анализа движений в исследуемых системах, обладает большой общностью и может дать непрерывное решение для любых временных интервалов. Данный метод в полной мере применим лишь к ограниченному (правда широкому и весьма важному) классу колебательных систем с малой диссипацией и малой нелинейностью, в которых колебания мало отличаются от гармонических.

2.2. Гармонический осциллятор с затуханием

Второй закон Ньютона для гармонического осциллятора (см. рис. 1.1) при наличии сил сопротивления имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \tag{2.1}$$

где m – масса, k – жесткость пружины, r – коэффициент сопротивления. Если ввести обозначения

$$2\beta = \frac{r}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

то уравнение (2.1) перепишется следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{2.2}$$

где β – коэффициент затухания, ω_0 – частота собственных колебаний осциллятора при отсутствии затухания. Уравнение (2.2) описывает также затухающие колебания в электрическом контуре с постоянным омическим сопротивлением R при постоянных L и C. В данном случае

$$2\beta = \frac{R}{L}, \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Прежде чем приступить к решению уравнения (2.2), рассмотрим вначале фазовый портрет такой системы. В переменных $(x, \dot{x})$ уравнение интегральных кривых фазовых траекторий запишется как

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{2\beta\dot{x} + \omega_0^2}{\dot{x}}\,. \tag{2.3}$$

С помощью подстановки $\dot{x} = x \cdot z$ (z – новая переменная) последнее уравнение приводится к виду

$$\frac{zdz}{z^2 + 2\beta z + \omega_0^2} = -\frac{dx}{x}\,.$$

При достаточно малом затухании $(\beta < \omega_0)$ его интеграл легко найти:

$$\ln\left[x^2\left(z^2 + 2\beta z + \omega_0^2\right)\right] = \frac{2\beta}{\omega}\operatorname{arctg}\left(\frac{z+\beta}{\omega}\right) + \ln C, \tag{2.4}$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, C – произвольная постоянная, определяемая из начального положения системы (значениями x и $\dot{x}$ при $t = 0$). В «старых» переменных x и $\dot{x}$ уравнение (2.4) будет выглядеть как

$$\dot{x}^2+2\beta x\dot{x}+\omega_0^2x^2=C\exp\left(\frac{2\beta}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}+\beta x}{\omega x}\right).$$

Это уравнение и отражает фазовый портрет гармонического осциллятора с затуханием. Скорость отображающей точки при ее движении по фазовой траектории

$$\sqrt{\dot{x}^2+\left(\frac{d\dot{x}}{dt}\right)^2}=\sqrt{\dot{x}^2+\left(2\beta\dot{x}+\omega_0^2x\right)^2}$$

не обращается в нуль нигде кроме начала координат. Чтобы лучше понять детали фазового портрета, введем новые переменные $u=\omega x,\ v=\dot{x}+\beta x$ (такое преобразование соответствует некоторому повороту системы координат $(x,\dot{x})$). Переменные u и v можно считать прямоугольными координатами. Тогда, очевидно,

$$\dot{x}^2+2\beta x\dot{x}+\omega_0^2x^2=u^2+v^2,$$

и

$$u^2+v^2=C\exp\left(\frac{2\beta}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right).$$

Соответственно в полярных координатах ($u=\rho\cos\varphi,\ v=\rho\sin\varphi$) имеем

$$\rho=C_1\exp\left(\frac{\beta\varphi}{\omega}\right).$$

Таким образом, фазовые траектории на плоскости (u,v) представляют собой логарифмические спирали, скручивающиеся к точке равновесия $(u=0,\ v=0)$, которая называется *устойчивым фокусом* (рис. 2.2). При малых β/ω витки спирали близки к окружностям $u^2+v^2=C_1^2$, которые на плоскости $(x,\dot{x})$ превращаются в эллипсы $\dot{x}^2+2\beta x\dot{x}+\omega_0^2x^2=C_1^2$. Следовательно, при малом затухании витки спирали близки на одном обороте к эллипсам. Из вида фазового портрета можно сделать вывод о том, что при любых начальных условиях (кроме определяющих состояние равновесия) движение гармонического осциллятора представляет собой затухающий колебательный процесс. Все спирали на фазовой плоскости асимптотически приближаются к началу координат, а радиус-вектор изображающей точки уменьшается с каждым оборотом спирали.

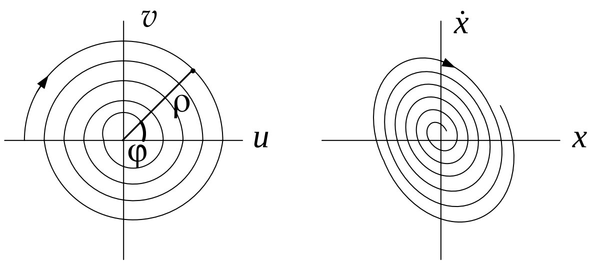


Рис. 2.2

Если $\omega_0^2 < \beta^2$ (большое затухание), то процесс становится затухающим апериодическим. В этом случае фазовые траектории на плоскости $(x, \dot{x})$ будут описываться уравнением [1]

$$\dot{x}^2 + 2\beta x\dot{x} + \omega_0^2 x^2 = C\left[\frac{\dot{x} + (\beta + q)x}{\dot{x} + (\beta - q)x}\right]^{\frac{\beta}{q}},$$

где $q = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Состояние равновесия становится *устойчивым узлом* $(x = 0, \dot{x} = 0)$. Соответствующий фазовый портрет представлен на рис. 2.3. Изменение знака β (отрицательное трение, сопротивление и т.д.) приводит к тому, что состояние равновесия становится неустойчивым (рис. 2.4).

Отметим, что рассмотренные нами уравнения фазовых траекторий для линейной системы остаются справедливыми для нелинейных

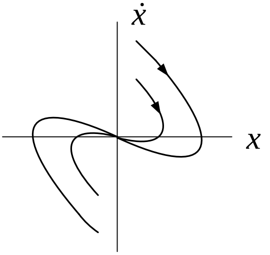


Рис. 2.3

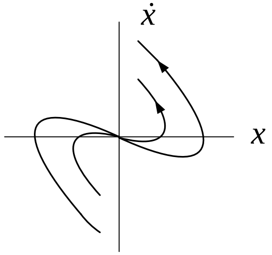


Рис. 2.4

систем в ближней окрестности особых точек. Для таких систем в окрестности особой точки первого порядка можно записать разложение нелинейной функции в ряд по степеням малых отклонений от особой точки $(x = x_i,\, \dot{x} = 0)$. Тогда для уравнения (1.1) $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ в окрестности особой точки имеем

$$F\left(x_i + \xi, \eta\right) = F\left(x_i, 0\right) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x_i} \cdot \xi + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{0} \cdot \eta + \ldots$$

Пренебрегая высшими степенями ξ и η и учитывая, что $F\left(x_i, 0\right) = 0,$ получим уравнение фазовой траектории в окрестности особой точки

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta}{\eta},$$

что совпадает с уравнением (2.3).

В системе, нелинейной за счет одного из консервативных параметров, наличие линейного трения также приводит к качественному изменению фазового портрета системы по сравнению с фазовым портретом подобной же системы в пренебрежении затуханием (трением). При этом исчезают существовавшие в случае консервативных систем особые точки типа центр и на их месте появляются особые точки – устойчивый фокус или устойчивый узел. Вместо континуума замкнутых фазовых траекторий возникают свертывающиеся траектории, приводящие из любого места фазовой плоскости (при любом начальном состоянии) к устойчивой особой точке – состоянию покоя. Наличие нелинейного консервативного параметра в колебательной системе в первую очередь сказывается на форме фазовых траекторий, которые в этом случае не являются логарифмическими спиралями на всей фазовой плоскости, а переходят в них в окрестностях особой точки типа фокус. На рис. 2.5 приведен для иллюстрации фазовый портрет математического маятника при учете линейного трения. Описывающее его дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0.$$

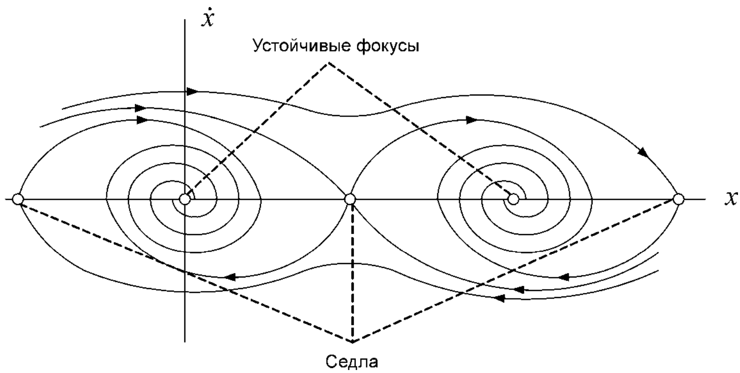


Рис. 2.5

В отличие от фазового портрета маятника без учета трения (см. рис. 1.7) здесь не появляются убегающие траектории, нет замкнутых траекторий и нет замкнутых разделительных линий – сепаратрис. Все траектории из любой точки фазовой плоскости стягиваются к одной из точек устойчивого положения равновесия – устойчивым фокусам. Это означает, что при наличии потерь система в общем случае после конечного числа оборотов колебательным путем придет к устойчивому состоянию равновесия – покою, соответствующему нижнему положению маятника относительно точки подвеса.

Наличие затухания, обусловленного линейным трением, не вносит в фазовые портреты новых особых точек, а лишь меняет характер уже существующих и исключает возможность появления особых точек типа центр.

Приступим теперь к детальному решению уравнения (2.2). Известно, что такое уравнение решается с помощью подстановки $x(t) = \exp(\lambda t)$, где λ – некоторая постоянная величина. После дифференцирования и сокращения на экспоненту приходим к так называемому характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0. \tag{2.5}$$

Если корни этого уравнения не совпадают $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, то общее решение уравнения (2.2) можно записать в виде

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Если же $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то решение уравнения (2.2) выглядит следующим образом:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}.$$

Найдем корни характеристического уравнения (2.5):

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Отсюда видно, что в зависимости от соотношения величин β^2 и ω_0^2 существует три разных вида решения уравнения (2.2), каждый из которых описывает различные законы движения. Рассмотрим их.

1. $\beta^2 < \omega_0^2$ (слабое затухание). В этом случае корни характеристического уравнения удобно представить в виде $\lambda_1 = -\beta + i\omega$, $\lambda_2 = -\beta - i\omega$, где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \tag{2.6}$$

Тогда общее решение уравнения (2.2) будет являться действительной частью выражения

$$x = \mathrm{Re}\left[e^{-\beta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)\right]$$

или

$$x = a_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \alpha\right). \tag{2.7}$$

Здесь a_0 и α – произвольные постоянные, а величина ω, определяемая формулой (2.6), дает частоту затухающих колебаний. В соответствии с уравнением (2.7) движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой, медленно изменяющейся со временем по закону $a(t) = a_0\exp\left(-\beta t\right)$ (рис. 2.6). Верхняя из пунктирных линий на рис. 2.6 дает график функции $a(t)$, начальное же смещение x_0 зависит не только от величины a_0, но и от начальной фазы α: $x_0 = a_0\cos\alpha$.

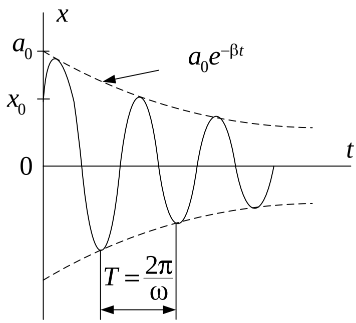


Рис. 2.6

Для характеристики скорости затухания колебаний вводят понятие *логарифмического декремента затухания*:

$$\lambda = \ln\frac{a\left(t\right)}{a\left(t+T\right)} = \beta T$$

($T = 2\pi/\omega$ – период колебаний). Кроме того, важной характеристикой системы является так называемая *добротность* колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}.$$

Данная величина, как мы сейчас докажем, с точностью до множителя 2π равна отношению энергии, запасенной в колебательной системе в данный момент, к убыли этой энергии за один период колебаний. Известно, что полная энергия колебательной системы W пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. В соответствии с этим полная энергия при затухающих колебаниях убывает со временем по закону $W = W_0 \exp(-2\beta t)$. Откуда находим, что скорость убывания энергии

$$-\frac{dW}{dt} = 2\beta W.$$

Так как при малом затухании энергия за период колебаний T изменяется незначительно, то ее убыль можно найти как

$$-\Delta W = 2\beta T \cdot W.$$

Откуда

$$\frac{W}{-\Delta W} = \frac{1}{2\beta T} = \frac{1}{2\lambda} = \frac{Q}{2\pi}.$$

Величина добротности, как мы увидим позднее, существенно определяет и поведение системы при внешнем гармоническом воздействии.

2. $\beta^2 > \omega_0^2$ (сильное затухание). Теперь корни характеристического уравнения являются вещественными. В этом случае решение уравнения (2.2) запишется в виде

$$x = e^{-\beta t}\left[C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}\right], \quad q = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Если теперь положить $F = C_1 + C_2$, $G = C_1 - C_2$, то получим смещение в виде

$$x = e^{-\beta t}\left[F\,\mathrm{ch}(qt) + G\,\mathrm{sh}(qt)\right], \tag{2.8}$$

где $\mathrm{ch}(x) = \left[\exp(x) + \exp(-x)\right]/2$ – гиперболический косинус, а $\mathrm{sh}(x) = \left[\exp(x) - \exp(-x)\right]/2$ – гиперболический синус. Выражение (2.8) описывает апериодический процесс – выведенная из положения равновесия система возвращается к нему, не совершая колебаний. На рис. 2.7 показаны два возможных варианта возвращения системы к положению равновесия при апериодическом движении. Реализация этих вариантов зависит от начальных условий. Движение по кривой *1* происходит, если систему, выведенную из положения равновесия, отпускают без толчка или с небольшой скоростью. Если же системе сообщают начальную скорость $|v_0| > |x_0|\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}\right)$, то система будет возвращаться к равновесию по кривой *2* при наличии только одного экстремума.

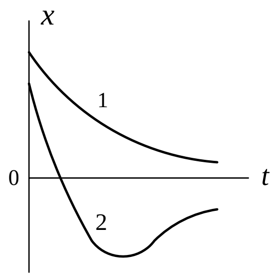


Рис. 2.7

3. $\beta^2 = \omega_0^2$ (критическое затухание). В этом случае движение подчиняется закону

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right)e^{-\beta t},$$

т.е. также представляет апериодический процесс.

Критическое затухание («успокоение») имеет важное значение в измерительных приборах, таких, как баллистические гальванометры, которые испытывают резкие импульсные воздействия и должны возвращаться в положение равновесия за минимальное время. Пусть, например, на такой гальванометр, световой зайчик которого при $t = 0$ стоит на нуле, подается некоторый импульсный электрический сигнал. В результате этого световой зайчик начинает двигаться со скоростью v_0 по линейной шкале. Тогда в качестве начальных условий имеем $x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$. Отсюда находим $x = v_0 t e^{-\beta t}$. Эта зави-

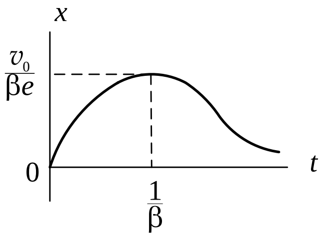


Рис. 2.8

симость отражена на рис. 2.8. Максимум смещения, равный $v_0/(\beta e)$, достигается за время $t = 1/\beta$, причем можно показать, что в системе с критическим затуханием возврат в положение с нулевым смещением происходит за минимальное время (в отличие от закритического затухания).

2.3. Метод поэтапного рассмотрения

Точное решение задачи о свободных колебаниях в нелинейных диссипативных системах в подавляющем большинстве случаев наталкивается на серьезные и часто неразрешимые трудности. Поэтому (как и в случае консервативных систем) приходится искать методы приближенного расчета, которые позволили бы с заданной точностью найти количественные соотношения, определяющие движение в исследуемой системе. Из ряда возможных приближенных методов рассмотрим в первую очередь метод поэтапного рассмотрения. Этот метод заключается в том, что в соответствии с особенностями системы все движение в ней разбивается на ряд этапов, каждый из которых соответствует такой области изменения переменных, где исследуемая система с достаточной точностью описывается либо линейным дифференциальным уравнением, либо нелинейным, но заведомо интегрируемым уравнением. Найдя решения для всех заданных этапов, в качестве начальных условий для первого этапа берем заданные начальные условия. Значения переменных $(t, x, \dot{x})$ конца первого этапа считаются начальными условиями для второго этапа (производится так называемое сшивание решений). Повторяя эту операцию продолжения решения от этапа к этапу со сшиванием поэтапных решений на основе непрерывности переменных x и $\dot{x}$, можно получить значения исследуемых величин в любой момент времени. Если разбиение всего движения системы основано на замене общей нелинейной характеристики ломаной линией с бóльшим или меньшим числом прямолинейных участков, то подобный путь обычно называется кусочно-линейным методом. В этом случае на каждом этапе система описывается линейным дифференциальным уравнением.

Начнем с простейшей механической системы – пружинного маятника (см. рис. 1.1), в которой трение описывается идеализированным законом сухого трения. Уравнение, описывающее движение в такой колебательной системе, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f,$$

где $\omega_0^2 = k/m$, f – сила сухого трения, отнесенная к единичной массе. Значение этой силы можно записать как

$$f = \begin{cases} -f_0, & \dot{x} > 0, \\ +f_0, & \dot{x} < 0. \end{cases}$$

Понятно, что законы движения будут иметь разный вид в зависимости от того, в каком направлении движется тело (т.е. каков знак $\dot{x}$). Если же ввести подстановки $x = x_1 - f_0/\omega_0^2$ для $\dot{x} > 0$ и $x = x_2 + f_0/\omega_0^2$ для $\dot{x} < 0$, то приходим к уравнению, имеющему одинаковый вид для обоих знаков $\dot{x}$:

$$\ddot{x}_{1,2} + \omega_0^2 x_{1,2} = 0. \tag{2.9}$$

Фазовые траектории, соответствующие этому уравнению, представляют собой эллипсы, но с центрами, находящимися в разных местах в зависимости от знака $\dot{x}$. Если $\dot{x} > 0$, то центр эллипса находится в точке $x_1 = 0$, т.е. $x = -f_0/\omega_0^2$, если же $\dot{x} < 0$, то центр эллипса находится в точке $x_2 = 0$, т.е. $x = +f_0/\omega_0^2$. При построении полного фазового портрета необходимо выполнить соответствующее построение для $x_1\,(\dot{x} > 0)$ и для $x_2\,(\dot{x} < 0)$, сомкнув при $\dot{x} = 0$ фазовые траектории верхней и нижней полуплоскости. Так как центры эллипсов в верхней и нижней полуплоскости смещены друг относительно

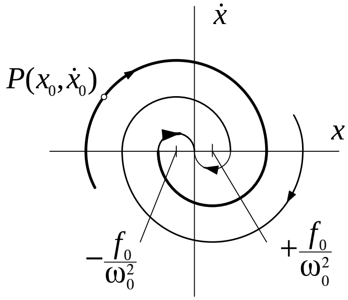


Рис. 2.9

друга, то, очевидно, мы не получим замкнутых фазовых траекторий, как это было без трения. В результате получается фазовый портрет, изображенный на рис. 2.9. Из него сразу виден основной характер колебаний в данной системе, а именно их затухание и прекращение движения после конечного числа колебаний (при заданных начальных условиях). Например, одно такое движение от начальных условий $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$ (точка P) отображено более жирной фазовой траекторией. Здесь также проявляется одно характерное свойство колебательных систем с сухим трением, а именно наличие *зоны застоя*, т.е. прекращение движения $(\dot{x} = 0)$ может произойти при любых x в области $-f_0/\omega_0^2 \le x \le f_0/\omega_0^2$ и система необязательно придет к состоянию покоя в точке $x = 0, \dot{x} = 0.$ Причем, чем больше трение, тем больше зона застоя.

Займемся теперь решением уравнения (2.9). Очевидно, его решение можно представить в виде

$$x_{1,2} = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t\,.$$

Если задать начальные условия $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0,$ то для первого этапа, соответствующего $\dot{x} < 0,\ 0 \le t \le \pi/\omega_0,$ будем иметь

$$x = \left(x_0 - \frac{f_0}{\omega_0^2}\right)\cos\omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

(это нетрудно проверить, учитывая заданные начальные условия). Значение x в конце первого этапа, равное $-x_0 + 2\dfrac{f_0}{\omega_0^2}$, следует считать начальным условием для второго этапа при $\frac{\pi}{\omega_0} \le t \le \frac{2\pi}{\omega_0}$. Отсюда находим

$$x = \left(x_0 - 3\frac{f_0}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t - \frac{f_0}{\omega_0^2} .$$

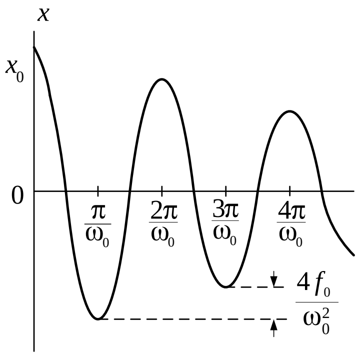


Рис. 2.10

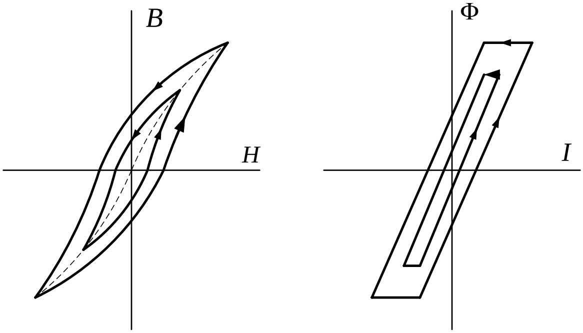
Поступая аналогично на следующих этапах, получаем подобные выражения, графическое представление которых отображено на рис. 2.10. Однако в соответствии с особенностями системы с сухим трением подобные расчеты имеют смысл до тех пор, пока при $\dot{x} = 0$ значение $|x| > \frac{f_0}{\omega_0^2}$, т.е. пока система не придет в зону застоя. Если в момент наибольшего отклонения возвращающая сила окажется меньше силы сухого трения, то система не будет продолжать движение и остается в зоне застоя. За каждый период колебания амплитуда уменьшается на величину $4\frac{f_0}{\omega_0^2}$ (это легко понять с учетом закона сохранения энергии). Таким образом, через N целых периодов отклонение

$$|x| = x_0 - 4N\frac{f_0}{\omega_0^2}$$

и в итоге система совершит только конечное число колебаний, определяемое из условия

$$\frac{x_0 \omega_0^2}{4 f_0} > N > \frac{x_0 \omega_0^2}{4 f_0} - \frac{1}{4} .$$

Разберем еще один пример колебаний в электрическом контуре с индуктивностью, содержащей ферромагнитный сердечник, обладающий гистерезисом. Напомним, что явление гистерезиса проявляется в том, что при действии на ферромагнетик переменного магнитного поля напряженности H индукция магнитного поля B изменяется по так называемой петле гистерезиса (рис. 2.11, *а*). Так как величина B связана с магнитным потоком Φ, а величина H – с током катушки $I = \dot{q}$, то подобную петлю можно отобразить в координатах (Φ, I). Для упрощения анализа заменим реальную петлю гистерезиса на идеализированную (рис. 2.11, *б*).



а *б*

Рис. 2.11

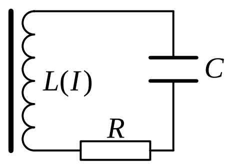


Рис. 2.12

Уравнение колебаний в контуре (рис. 2.12), исходя из закона Ома, можно записать в виде

$$\frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0,$$

или

$$\frac{d\Phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0. \qquad (2.10)$$

Так как производная $d\Phi/dI$ определяет эффективную индуктивность контура $L,$ то наличие петли гистерезиса означает для нас, что индуктивность контура принимает разные значения на различных участках петли (либо $L = \text{const},$ либо $L = 0$). Это и позволит нам применить метод поэтапного рассмотрения для исследования колебаний в таком контуре.

Для этапов, где $d\Phi/dI = L = \text{const},$ уравнение (2.10) приводится к виду

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} + 2\vartheta\frac{dq}{d\tau} + q = 0. \tag{2.11}$$

Здесь в качестве масштаба времени выбрано безразмерное время $\tau = \omega_0 t,$ $\omega_0^2 = 1/LC, q$ – заряд емкости, $2\vartheta = R/(\omega_0 L).$ Для этапов, где $\Phi = \text{const},$ получаем

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0 RC}q. \tag{2.12}$$

Рассмотрим сначала этап возрастания I и $\Phi(I)$ от начальной точки $q(0) = -q_0, \dot{q}(0) = I(0) = 0$ до максимального значения $\dot{q}$ и соответственно $\Phi.$ Этот этап подчиняется уравнению (2.11). Как мы уже знаем, фазовая траектория в этом случае является участком спирали. Затем рассмотрим этап постоянного магнитного потока, который подчиняется уравнению (2.12). На этом этапе уравнение фазовой траектории представляется отрезком прямой $\dot{q} = -q/(\omega_0 RC).$ Далее рассмотрим этап убывания $\Phi(I),$ когда вновь вступает в силу уравнение (2.11) и т.д.

При этом происходит постепенный переход от одной петли гистерезиса к другой, соответствующей меньшим значениям тока и магнитного потока из-за наличия диссипации энергии на активном сопротивлении. Вообще говоря, здесь происходит некоторое отклонение хода зависимости $\Phi(I)$ от выбранного нами идеализированного закона, но при достаточно узкой петле гистерезиса этим можно пренебречь.

Повторяя эти шаги по этапам, можно получить выражение для изменения q и $\dot{q}$ во времени. На фазовой плоскости соответствующий фазовый портрет системы имеет вид, отображенный на рис. 2.13, *а*. Фазовые траектории будут представлять отрезки спиралей, соединенных отрезками прямой $\dot{q} = -q/\left(\omega_0 RC\right)$ в точках $I = \dot{q}$, соответствующих началам и концам этапов $\Phi = \mathrm{const}$. Таким образом, при учете гистерезисных явлений происходит более быстрое уменьшение амплитуды свободных колебаний исследуемого контура. Это обусловлено тем, что наличие гистерезиса приводит к потерям энергии в материале сердечника за счет перемагничивания ферромагнетика и в конечном итоге к выделению тепла. По этой причине наличие ферромагнитного сердечника с гистерезисными свойствами в индуктивности колебательного контура даже при отсутствии в нем активного сопротивления приводит к потерям, и такая система оказывается принципиально диссипативной.

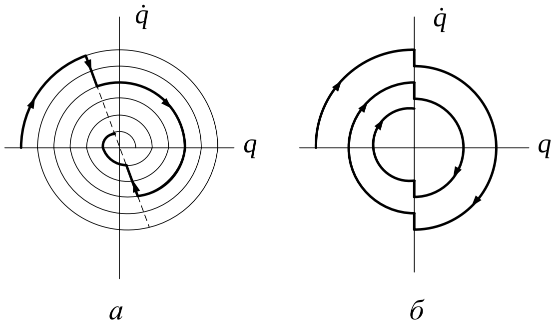


Рис. 2.13

На рис. 2.13, *б* показан фазовый портрет подобного идеального контура, не обладающего активным сопротивлением, но содержащего индуктивность с сердечником, имеющим гистерезисные свойства. Здесь фазовая траектория составляется из полуокружностей, радиус которых уменьшается в зависимости от ширины петель гистерезиса.

В этом процессе этап движения, соответствующий $\Phi = \text{const}$, происходит мгновенно, что связано с отсутствием в контуре активного сопротивления, которое ограничивало бы скорость изменения тока.

2.4. Линейные случаи реализации сил сухого трения

Сила сухого трения, рассмотренная ранее, является существенно нелинейной. Однако в некоторых особенных случаях благодаря свойствам механических систем происходит любопытное преобразование силы сухого трения в силу линейного характера – в вязкое сопротивление и даже в линейную восстанавливающую силу. Иногда встречаются ситуации, когда сила сухого трения приводит не к затуханию колебаний, а к некоторому стационарному режиму колебаний с амплитудой, пропорциональной коэффициенту трения. Рассмотрим некоторые из таких задач.

1. **Стержень на двух валах.** На двух быстро вращающихся навстречу друг другу одинаковых валах свободно положен однородный стержень (рис. 2.14). Оси валов параллельны и расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии $2l$. Полагая силу трения между валами и стержнем подчиняющейся закону сухого трения, исследовать характер движения стержня после того, как он будет выведен из положения равновесия.

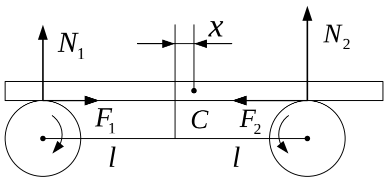


Рис. 2.14

Пусть в произвольный момент времени t центр масс стержня C смещен на расстояние x относительно оси симметрии. Тогда силы давления стержня на валы составят

$$N_1 = \frac{l - x}{2l} mg, \quad N_2 = \frac{l + x}{2l} mg.$$

Соответственно проекции сил трения

$$F_1 = \frac{l - x}{2l} \mu mg, \quad F_2 = \frac{l + x}{2l} \mu mg,$$

где m – масса стержня, μ – коэффициент трения. Тогда суммарная сила трения имеет вид

$$F = F_1 + F_2 = -\frac{\mu m g}{l} x,$$

т.е. пропорциональна смещению x и имеет противоположное направление. Уже здесь отчетливо видно, что в такой системе сила сухого трения играет несвойственную ей роль и преобразуется в линейную возвращающую силу. Тогда второй закон Ньютона для стержня будет выглядеть как

$$m\ddot{x} = -\frac{\mu m g}{l} x,$$

что соответствует дифференциальному уравнению гармонических колебаний $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$ где $\omega_0^2 = \mu m g / l.$

2. **Точка на шероховатой плоскости.** Рассмотрим движение материальной точки M по шероховатой плоскости $xOy,$ когда кроме постоянной составляющей скорости v_y имеется значительно меньшая составляющая v_x (рис. 2.15). Это, например, может соответствовать случаю, когда на движение тела со скоростью v_y накладываются перпендикулярные вибрации с небольшой скоростью v_x. В такой ситуации вектор полной скорости v составляет малый угол α с осью y:

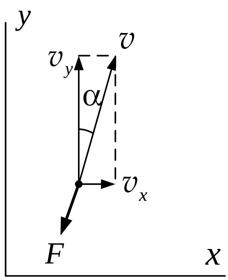


Рис. 2.15

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_x}{v_y}.$$

Этим же углом определяется и направление полной силы трения F. Следовательно, проекции силы трения на оси x и y с точностью до величин второго порядка малости можно определить следующим образом:

$$F_x = -F \cdot \alpha = -F \frac{v_x}{v_y}, \quad F_y = -F.$$

Если ввести обозначение $F / v_y = r = \text{const}$, то проекция силы F_x примет вид

$$F_x = -r v_x,$$

т.е. оказывается пропорциональной скорости v_x и противоположной ей по знаку. Таким образом, можно сказать, что сила F_x проявляется в виде силы линейного вязкого трения. Конечно, это свойство имеет место лишь при условии $|v_x| << |v_y|$. Данное свойство применяется на практике в некоторых демпферах (успокоителях колебаний) и примечательно тем, что отсутствует зона застоя, проявляющаяся в системах с сухим трением.

3. **Пружинный маятник на ленте транспортера.** На горизонтальной ленте транспортера, движущейся со скоростью u, находится груз массой m, связанный со стенкой пружиной жесткостью k (рис. 2.16). В начальный момент времени пружина не деформирована, а груз из-за трения движется вместе с лентой. Исследовать характер движения груза и определить амплитуду возникших колебаний.

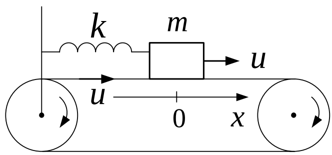


Рис. 2.16

Казалось бы, из-за трения колебания груза должны быть затухающими, и тогда непонятно, о какой амплитуде идет речь. Происходит же здесь следующее. Так как скорость груза никогда не может превысить скорость ленты, то сила трения, исключая самый начальный этап движения, всегда равна μmg и направлена в одну и ту же сторону. Работа такой силы за одно полное колебание будет равна нулю и колебания станут незатухающими.

Исследуем фазовый портрет такой системы. Вначале, когда пружина еще не растянута и груз движется вместе с лентой, сила

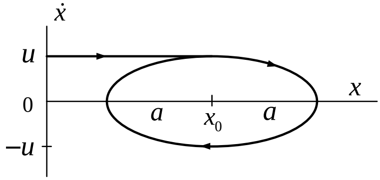


Рис. 2.17

трения является трением покоя и равна силе упругости пружины. Это означает, что скорость тела вначале не изменяется (рис. 2.17). Затем, когда пружина растянется настолько, что сила упругости сравняется с силой трения скольжения, груз начнет отставать от ленты. Обозначим величину деформации пружины (положение груза) в этот момент как x_0. Эта точка является положением равновесия тела и его можно найти из условия $kx_0 = \mu mg$. При дальнейшем движении груза сила упругости будет расти, а сила трения будет оставаться постоянной, что приведет к уменьшению скорости тела. При некотором предельном растяжении пружины тело остановится и затем начнет двигаться обратно. Обратное движение тела в точности повторяет его прямое движение, так как величины силы упругости и силы трения будут теми же самыми в той же точке, сменится лишь знак скорости. После того, как тело пройдет положение равновесия (точка x_0), его скорость будет уменьшаться по модулю до нуля (сила трения стала больше силы упругости). После остановки тело начнет двигаться вправо, увеличивая скорость, и подойдет к положению равновесия со скоростью, равной скорости ленты. Таким образом, после того как груз в первый раз достигнет положения равновесия установятся гармонические колебания с некоторой амплитудой a.

Для определения амплитуды колебаний запишем для участка движения от x_0 до $x_0 + a$ теорему об изменении кинетической энергии:

$$-\frac{1}{2}mu^2 = \mu mga - \frac{1}{2}k\left(x_0 + a\right)^2 + \frac{1}{2}ka^2 .$$

Откуда с учетом соотношения $kx_0 = \mu mg$ находим

$$a = u\sqrt{\frac{m}{k}} .$$

Этот же результат можно получить и из формальных соображений. Так как колебания грузика являются гармоническими, то можно записать

$$x = x_0 + a\sin\omega t,$$

где x_0 – положение равновесия тела, a – амплитуда колебаний, ω – частота, равная $\sqrt{k/m}$. Продифференцируем последнее соотношение по времени:

$$u = \frac{dx}{dt} = a\omega\cos\omega t\,.$$

Полагая здесь $t = 0$, находим

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = u = a\omega.$$

Откуда

$$a = \frac{u}{\omega} = u\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Изменим несколько условие задачи. Пусть теперь начальная скорость груза равна нулю. Требуется выяснить, при какой скорости ленты движение груза будет гармоническим. Как зависит амплитуда установившихся колебаний от скорости ленты u?

Для понимания характера происходящего движения груза попробуем, как и в предыдущей задаче, построить фазовый портрет системы. Вначале скорость ленты явно больше скорости груза, и сила трения будет равна силе трения скольжения μmg. Полная сила, действующая на груз, будет равна $\mu mg - kx$. Под действием данной силы груз может приобрести максимальную скорость $v_{\max}$, которую найдем из условия

$$\frac{1}{2}mv^2{}_{\max} = \int_0^{x_0}(\mu mg - kx)dx\,,$$

где x_0 – положение равновесия груза, определяемое соотношением

$$kx_0 = \mu mg.$$

Из этих двух соотношений находим максимальную скорость груза, которую он мог бы приобрести под действием силы $\mu mg - kx$:

$$v_{\max} = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}},$$

если, разумеется, она не превышает скорости ленты.

Так как груз не может двигаться быстрее ленты, то дальнейший анализ движения груза зависит от того, превышает ли расчетное значение $v_{\max}$ скорость ленты, или нет. Рассмотрим вначале случай $v_{\max} < u$.

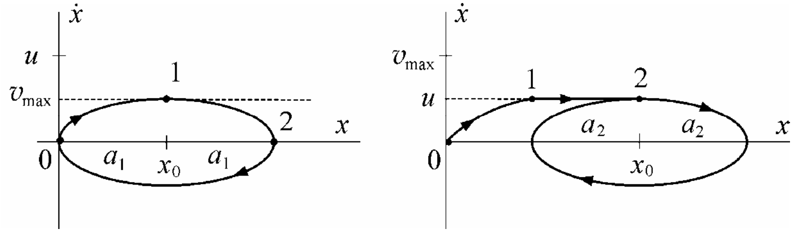
В этой ситуации максимальная скорость груза будет достигнута в точке равновесия x_0 (участок 0–1, рис. 2.18, *а*), и затем его скорость начнет убывать (участок 1–2) до остановки груза. После остановки груз начнет двигаться в обратную сторону и в итоге вернется в точку 1. Таким образом, при выполнении условия

$$u > \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

сразу начнутся гармонические колебания с амплитудой

$$a_1 = x_0 = \frac{\mu mg}{k}.$$

Если же расчетное значение $v_{\max}$ превышает u, то после достижения грузом скорости ленты его скорость некоторое время будет оставаться постоянной (участок 1–2, рис. 2.18, *б*) до точки $x = x_0$ и мы приходим к ситуации, рассмотренной в предыдущем случае. Таким образом, при $u < \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}$ установятся гармонические колебания с амплитудой



а *б*

Рис. 2.18

$$a_2 = u\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

Ее максимальное значение нетрудно найти, если вместо скорости u подставить значение v_{max}:

$$a_{2\max} = \mu g\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\mu mg}{k}\ ,$$

что, естественно, совпадает со значением a_1.

2.5. Метод медленно меняющихся амплитуд

Изложенный ранее метод поэтапного рассмотрения не накладывает никаких ограничений на нелинейность исследуемой колебательной системы и пригоден для любых законов затухания. Однако он приводит к громоздким вычислениям, причем полученные результаты относятся только к одному виду движения при заданных начальных условиях. От этих недостатков свободен метод, предложенный Ван-дер-Полем и получивший в дальнейшем название метод *медленно меняющихся амплитуд* (ММА). Этот метод является мощным средством анализа движений, позволяющим получить непрерывное решение для любых временных интервалов. Основной областью применения метода ММА являются системы с малой диссипацией и малой нелинейностью, в которых колебания мало отличаются от гармонических. Это могут быть электрические контуры с ферромагнитным сердечником при малых потерях на гистерезис в областях, далеких от насыщения, контуры с нелинейными емкостями при аналогичных ограничениях, многочисленные аналоги указанных выше высокодобротных линейных и нелинейных систем и др. Условия малой нелинейности и малого затухания в силу непрерывности изменения свойств системы и решения описывающего ее дифференциального уравнения приводят к тому, что движение в данном случае будет близко к точно гармоническому, соответствующему линейной консервативной системе.

Дифференциальное уравнение колебаний в колебательной системе, близкой к линейной консервативной, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x, \dot{x}). \tag{2.13}$$

Здесь $f(x, \dot{x})$ – заданная ограниченная регулярная функция, не связанная условиями малости, а μ – малый параметр, величина которого характеризует степень близости данной системы к линейной консервативной с частотой колебаний ω. При $\mu = 0$ решение уравнения (2.13) будет иметь вид

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t,$$

где a и b – постоянные, задаваемые начальными условиями, т.е. начальным запасом энергии системы.

Следуя Ван-дер-Полю, будем полагать, что и решение уравнения (2.13) при $\mu \neq 0$ может быть записано в аналогичном виде

$$x = u\cos\omega t + v\sin\omega t,$$

где $u(t)$ и $v(t)$ – уже медленно меняющиеся функции времени (медленно меняющиеся амплитуды), такие, что $\dot{u} << u$ и $\dot{v} << v.$ Перейдем от переменных $(x, \dot{x})$ к переменным (u, v) посредством соотношений

$$x = u\cos\omega t + v\sin\omega t, \quad \dot{x} = -u\omega\sin\omega t + v\omega\cos\omega t. \tag{2.14}$$

Следует обратить внимание на то, что последнее выражение для $\dot{x}$ не является непосредственным результатом дифференцирования x по времени t, так как истинная производная имеет вид

$$\dot{x} = -u\omega \sin \omega t + v \cos \omega t + \dot{u} \cos \omega t + \dot{v} \sin \omega t,$$

что отличается от (2.14). Поэтому мы должны считать, что переменные (u, v) связаны дополнительным условием

$$\dot{u} \cos \omega t + \dot{v} \sin \omega t = 0. \tag{2.15}$$

Переход от переменных $(x, \dot{x})$ к переменным (u, v) эквивалентен переходу от одной декартовой системы координат к другой, также прямоугольной с общим началом системы координат, повернутой на угол ωt по часовой стрелке (рис. 2.19). Это означает, что система координат (u, v) в координатной плоскости $(x, \dot{x})$ вращается с угловой скоростью ω. Если продифференцировать по времени второе выражение в (2.14) (получаем $\ddot{x}$) и подставить результат в уравнение (2.13) с учетом выражения для x, то приходим к уравнению

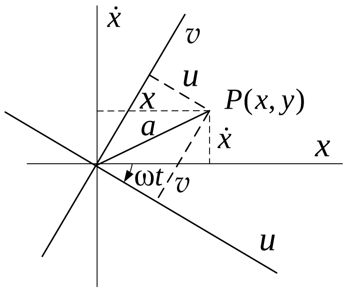


Рис. 2.19

$$-\dot{u}\omega \sin \omega t + \dot{v}\omega \cos \omega t = \mu f\left(u, v, t\right), \tag{2.16}$$

где обозначено

$$f\left(u, v, t\right) = f\left(u \cos \omega t + v \sin \omega t, -u\omega \sin \omega t + v\omega \cos \omega t\right).$$

Умножая (2.16) последовательно на $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ и складывая, получаем с учетом (2.15) систему уравнений

$$\dot{u} = -\frac{\mu}{\omega} f\left(u, v, t\right) \sin \omega t, \quad \dot{v} = \frac{\mu}{\omega} f\left(u, v, t\right) \cos \omega t. \tag{2.17}$$

Эта система двух дифференциальных уравнений первого порядка точно соответствует исходному уравнению (2.13) второго порядка. Она не дает никаких преимуществ в смысле упрощения решения задачи. Однако из нее следует, что производные $\dot{u}$ и $\dot{v}$ имеют порядок малости μ, что подтверждает справедливость выбранных условий $\dot{u} << u$ и $\dot{v} << v$. Существенный шаг в сторону нахождения приближенного решения можно сделать, если заменить мгновенные значения правых частей уравнений (2.17) их средними величинами за каждый период колебаний, равный $2\pi/\omega$. Произведя усреднение по времени от нуля до $2\pi/\omega$, приходим к системе так называемых «укороченных» уравнений

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mu f\left(u,v,t\right)\sin\omega t dt, \quad \dot{v} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\mu f\left(u,v,t\right)\cos\omega t dt, \quad (2.18)$$

в которых величины u и v, входящие под знак интеграла, предполагаются временно постоянными. Эта система вида

$$\dot{u} = \varphi(u,v), \quad \dot{v} = \psi(u,v)$$

уже не содержит в правых частях в явном виде время и во многих случаях ее можно проинтегрировать, получая временной ход медленно меняющихся функций $u(t)$ и $v(t)$, являющихся «амплитудами» искомого решения. Систему уравнений (2.18) можно получить из системы (2.17), если ее правые части разложить в ряд Фурье и отбросить все осциллирующие члены. В этом и заключается «укорачивание», приводящее от системы уравнений, точно соответствующих исходному уравнению (2.13), к приближенным укороченным уравнениям.

Полученная система укороченных уравнений позволяет отыскивать состояния равновесия для переменных u и v, что соответствует стационарным движениям. Для стационарных движений (состояний)

$$u = a_i, v = b_i, \dot{u} = 0, \dot{v} = 0$$

и тогда

$$\varphi(a_i, b_i) = 0, \quad \psi(a_i, b_i) = 0.$$

Решения этой системы уравнений должны дать возможные стационарные амплитуды гармонических движений, приближенно отражающих реальный стационарный процесс.

Устойчивость стационарных движений можно определять известным методом теории возмущений, заключающимся в составлении уравнений для малых вариаций вокруг найденных стационарных значений $u = a_i, v = b_i$, соответствующих равновесию вспомогательной системы, описываемой укороченными уравнениями. Если задать $u = a_i + \eta, v = b_i + \zeta$, то для вариаций η и ζ имеем уравнения

$$\dot{\eta} = \varphi(a_i + \eta,\ b_i + \zeta),$$

$$\dot{\zeta} = \psi(a_i + \eta,\ b_i + \zeta).$$

Разлагая правые части этой системы в ряд в окрестности стационарных значений a_i, b_i и пренебрегая высшими степенями малых величин η и ζ, получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \left.\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|_{a_i, b_i} \eta + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right|_{a_i, b_i} \zeta = \alpha_{11}\eta + \alpha_{12}\zeta, \\ \dot{\zeta} &= \left.\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|_{a_i, b_i} \eta + \left.\frac{\partial\psi}{\partial v}\right|_{a_i, b_i} \zeta = \alpha_{21}\eta + \alpha_{22}\zeta. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Полагая зависимость вариаций от времени в виде $\eta = \eta_0 e^{\lambda t}$, $\zeta = \zeta_0 e^{\lambda t}$ и подставляя эти выражения в (2.19), находим два линейных уравнения для амплитуд вариаций η_0 и ζ_0:

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} - \lambda)\eta_0 + \alpha_{12}\zeta_0 &= 0, \\ \alpha_{21}\eta_0 + (\alpha_{22} - \lambda)\zeta_0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Как обычно, поведение вариаций будет определяться видом решений характеристического уравнения, которое получается из условия нетривиальности решения системы (2.20):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.21}$$

Если оба корня имеют знак минус у вещественной части $\lambda,$ то соответствующее стационарное решение $u=a_i,\ v=b_i$ устойчиво. Если же хотя бы одно из значений λ имеет знак плюс у вещественной части, то исследуемое решение неустойчиво. Наличие или отсутствие мнимой части в λ определяет характер устойчивости или неустойчивости стационарного решения. Мы не будем сейчас углубляться в детали вопроса об исследовании устойчивости стационарных движений, а вернемся к нему позднее при рассмотрении параметрических и неавтономных систем. Для диссипативных же систем, очевидно, может существовать только одно стационарное состояние – состояние покоя, которое всегда устойчиво.

Рассмотрим теперь другой вариант метода ММА с переходом от исходных переменных $(x,\dot{x})$ к новым переменным – амплитуде A и фазе $\theta,$ которые также являются медленно изменяющимися функциями времени. Будем искать решение исходного уравнения (2.13) в виде

$$x = A(t)\cos\left[\omega t + \theta(t)\right].$$

Здесь A и θ представляют собой полярные координаты описывающей точки на плоскости переменных u и v (см. рис. 2.19). Очевидно, между переменными A,θ и u,v существует связь $u = A\cos\theta,$ $v = A\sin\theta$ и $A^2 = u^2 + v^2,\ \operatorname{tg}\theta = -v/u.$

Введем новую переменную $\dot{x}$:

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \theta). \tag{2.22}$$

Эта переменная, как и ранее в соотношении (2.14), не есть результат дифференцирования x по времени, ибо истинная производная от x по t имеет вид

$$\dot{x} = \dot{A}\cos(\omega t + \theta) - A\omega\sin(\omega t + \theta) - A\dot{\theta}\sin(\omega t + \theta).$$

Поэтому для согласования с выражением (2.22) нам приходится полагать

$$\dot{A}\cos(\omega t + \theta) - A\dot{\theta}\sin(\omega t + \theta) = 0. \qquad (2.23)$$

Это соотношение можно рассматривать как дополнительное условие, накладываемое на переменные A и θ.

Если переменную $\dot{x}$ продифференцировать по времени и вместе с x подставить в уравнение (2.13), то приходим к уравнению

$$-\dot{A}\omega\sin(\omega t + \theta) - A\omega\dot{\theta}\cos(\omega t + \theta) = \mu f(A, \theta, t), \qquad (2.24)$$

где

$$f(A, \theta, t) = f\left[A\cos(\omega t + \theta), -A\omega\sin(\omega t + \theta)\right].$$

Из системы уравнений (2.23) и (2.24) нетрудно найти

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{\omega} f(A, \theta, t)\sin(\omega t + \theta),$$

$$A\dot{\theta} = -\frac{\mu}{\omega} f(A, \theta, t)\cos(\omega t + \theta).$$

Здесь $A(t)$ и $\theta(t)$ являются медленными функциями времени, что позволяет усреднить правые части данной системы уравнений за период $T = 2\pi/\omega$, считая, что за это время A и θ *не изменяются*. Выполнив процедуру усреднения по времени, приходим к системе двух укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(A, \theta, t)\sin(\omega t + \theta)\,dt, \\ A\dot{\theta} &= -\frac{\mu}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f(A, \theta, t)\cos(\omega t + \theta)\,dt. \end{aligned} \qquad (2.25)$$

С целью упрощения вычислений интегралов в (2.25) введем замену $\alpha = \omega t + \theta$ (напомним, что величина θ под знаком интеграла считается постоянной). Тогда данная система перепишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{A} &= -\frac{\mu}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f\left(A\cos\alpha, -A\sin\alpha\right)\sin\alpha d\alpha, \\ \dot{\theta} &= -\frac{\mu}{2\pi A\omega}\int_0^{2\pi} f\left(A\cos\alpha, -A\sin\alpha\right)\cos\alpha d\alpha. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь $f\left(A\cos\alpha, -A\sin\alpha\right)$ есть значение функции $f\left(x, \dot{x}\right)$, входящей в исходное уравнение (2.13) при $x = A\cos\alpha$, $\dot{x} = -A\sin\alpha$.

Из системы укороченных уравнений (2.26) можно определить стационарные значения амплитуды и фазы колебаний, исследовать процессы установления этих величин (переходные процессы), а также определить устойчивость найденных решений. Первое из этих уравнений определяет амплитуду колебаний в стационарном режиме, второе – зависимость частоты колебаний от амплитуды. Так как в стационарном режиме $A = \text{const}$, то из второго уравнения (2.26) следует

$$\theta = \Delta\omega\, t + \theta_0,$$

где величину $\Delta\omega$ можно трактовать как малую поправку к частоте ω. В общем случае эта поправка зависит от амплитуды колебаний. Тогда решение исходного уравнения (2.13) будет иметь вид

$$x = A\cos\left[\left(\omega + \Delta\omega\right)t + \theta_0\right].$$

Применение такого варианта метода ММА иногда упрощает нахождение стационарных решений, особенно в задачах, где отсутствует опорное колебание, вызванное, например, внешней силой, модуляцией параметра, синхронизирующим сигналом, фазовый сдвиг которого относительно искомого решения естественно вошел бы в решение. К подобным системам относятся, в частности, пассивные линейные и нелинейные колебательные системы, автоколебательные системы и др. Некоторое облегчение этот вариант метода ММА дает также в случаях, когда нелинейные характеристики каких-либо параметров колебательной системы аппроксимируются высокими степенями разложения в ряд.

Проиллюстрируем теперь метод ММА на некоторых простых примерах, для которых мы уже знаем решение, что позволит сравнить результаты применения различных методов.

Гармонический осциллятор с постоянным затуханием. Колебания в рассматриваемой системе описываются уравнением (2.2)

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Перепишем данное уравнение в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -2\beta\dot{x}.$$

Тогда условием применимости метода ММА в данной задаче будет требование малости коэффициента затухания β. Очевидно, $\mu f\left(x, \dot{x}\right) = -2\beta\dot{x}.$ Применим вариант метода с медленно меняющимися амплитудой и фазой. В этом случае укороченные уравнения (2.26) для осциллятора с трением будут иметь вид

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} 2\beta\omega_0 A\sin^2\alpha d\alpha,$$
$$\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi A\omega_0}\int_0^{2\pi} 2\beta\omega_0 A\sin\alpha\cos\alpha d\alpha.$$

Отсюда находим

$$\dot{A} = -A\beta, \quad A\dot{\theta} = 0.$$

Эти уравнения легко интегрируются:

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad \theta = \theta_0,$$

и для переменной x получаем

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega_0 t + \theta_0\right).$$

Заметим, что найденное приближенное решение несколько отличается от точного решения

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega t + \theta_0\right),$$

где $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$, т.е. скорость уменьшения амплитуды та же, что и в точном решении, а частота колебаний немного отличается.

Нелинейный контур без затухания. Рассмотрим электрический контур с конденсатором, заполненным сегнетоэлектриком (см. подразд. 1.3). Уравнение колебаний заряда на конденсаторе имеет вид

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \gamma \omega_0^2 x^3 = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\gamma \omega_0^2 x^3, \tag{2.27}$$

где γ – малый коэффициент нелинейности (подобное уравнение получается и для нелинейного осциллятора). Это уравнение принадлежит к типу (2.13) и к нему можно применить метод ММА. Используем вариант с медленно меняющимися амплитудами u и v, т.е. решение будем искать в виде

$$x = u \cos \omega_0 t + v \sin \omega_0 t.$$

Однако на этом пути нас ждут неприятности. Дело в том, что мы ищем решение на той же частоте, что входит в уравнение (2.27), т.е. на резонансной частоте (об этом подробно говорилось в подразд. 1.2). В этом случае окончательное решение должно содержать секулярный член, пропорциональный времени, т.е. не существует стационарных колебаний. Наличие же стационарной ненулевой амплитуды в данной системе вытекает из условия ее консервативности. В связи с этим решение уравнения (2.27) будем искать в виде

$$x = u \cos \omega t + v \sin \omega t, \tag{2.28}$$

где $\omega \neq \omega_0$ – неизвестная пока частота. Для того чтобы можно было воспользоваться методом ММА, перепишем (2.27):

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\left(\omega^2-\omega_0^2\right)x-\gamma\omega_0^2 x^3 \qquad (2.29)$$

и введем малый параметр

$$\xi=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2}<<1,$$

характеризующий относительную расстройку частоты. В этом случае, пренебрегая произведением $\xi\gamma$, уравнение (2.29) можно переписать как

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\xi\omega^2 x-\gamma\omega^2 x^3.$$

Тогда система укороченных уравнений (2.18) будет иметь вид

$$\dot{u}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\omega^2\left(\xi x-\gamma x^3\right)\sin\omega t dt,$$

$$\dot{v}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\omega^2\left(\xi x-\gamma x^3\right)\cos\omega t dt,$$

где x задано уравнением (2.28). После интегрирования получаем

$$\dot{u}=\frac{\omega v}{2}\left[-\xi+\frac{3}{4}\gamma\left(u^2+v^2\right)\right],$$

$$\dot{v}=\frac{\omega v}{2}\left[\xi-\frac{3}{4}\gamma\left(u^2+v^2\right)\right].$$

Здесь величина u^2+v^2 есть квадрат амплитуды колебаний: $u^2+v^2=$ $=a^2(t)$.

Не занимаясь решением полученной системы укороченных уравнений, исследуем возможность установления стационарного режима колебаний с постоянной амплитудой a_0. Установление данного режима $\left(\dot{u}=0, \dot{v}=0\right)$ требует удовлетворения системы уравнений

$$v_0\left(-\xi+\frac{3}{4}\gamma a_0^2\right)=0, \quad u_0\left(\xi-\frac{3}{4}\gamma a_0^2\right)=0.$$

Это возможно, если $u_0 = v_0 = 0$ или $\xi = \frac{3}{4}\gamma a_0^2$. Первая возможность соответствует состоянию покоя. Наличие же стационарной ненулевой амплитуды возможно только при ненулевой расстройке. Отсюда находим значение частоты

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\gamma a_0^2}.$$

Данное соотношение, отражающее неизохронность рассмотренной нелинейной системы, было получено нами ранее другими методами (см. выражение (1.24)). Заметим, что если бы мы в самом начале при выборе решения положили расстройку равной нулю, то единственным стационарным состоянием было бы состояние покоя при $u_0 = v_0 = 0$.

Глава 3
ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

При изучении внешнего воздействия на колебательные системы необходимо различать силовое и параметрическое воздействия. При силовом воздействии параметры колебательной системы (например, частота ω_0, коэффициент затухания β) не изменяются. Параметрическое же воздействие, напротив, изменяет только эти параметры. Очевидно, что чисто силовое воздействие на колебательные системы может быть только при их определенной идеализации, а именно при допущении линейности системы. Если же происходит параметрическое воздействие, то колебательная система должна иметь хотя бы один параметр, величина которого зависит от мгновенного значения действующей на систему внешней силы. В реальных системах, которые принципиально нелинейны, нельзя строго разделить силовое и параметрическое воздействия. Пусть, например, мы воздействуем на какую-либо колебательную систему внешней силой. Тогда при небольших амплитудах внешнего воздействия колебательная система остается линейной и, следовательно, имеет место силовое воздействие. По мере увеличения амплитуды внешней силы или увеличении амплитуды вынужденных колебаний в системе появляется нелинейная зависимость какого-либо параметра системы от мгновенного значения внешней силы. Такое воздействие следует считать смешанным, т.е. и силовым, и параметрическим.

В электрических системах осуществить внешнее периодическое воздействие можно достаточно просто за счет индуктивной или емкостной связи. В случае механических колебательных систем решение задачи о действии периодической внешней силы наталкивается на известные трудности, так как согласно законам механики источник такой силы будет испытывать обратное воздействие со стороны колебательной системы. Одним из наиболее простых способов механического внешнего воздействия на механическую колебательную систему является задание смещения $\xi(t)$ некоторой определенной

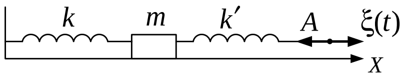


Рис. 3.1

точки A системы, в которой кроме колеблющейся массы m есть две пружины с жесткостями k и k' (рис. 3.1). Если через x обозначить смещение массы m от положения равновесия, то уравнение ее движения без учета сил трения имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = k'\left[\xi(t) - x\right] \text{ или } m\ddot{x} + \left(k + k'\right)x = k'\xi(t).$$

Тогда правую часть последнего уравнения $k'\xi(t)$ можно считать внешней периодической силой, а собственная частота системы $\omega_0 = \sqrt{\left(k + k'\right)/m}$.

Анализ вынужденных колебаний в линейных системах облегчается благодаря возможности применения принципа суперпозиции. Согласно этому принципу, если внешняя сила $F_1(t)$ вызывает вынужденное колебание $x_1(t)$, а сила $F_2(t)$ – колебание $x_2(t)$, то сила $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ создает вынужденное колебание $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Этот принцип, справедливый только для линейных систем, означает, что в них отсутствует нелинейное взаимодействие колебаний, вызванных различными одновременно действующими силами.

Кроме того, в колебательных системах наряду с вынужденными колебаниями под действием внешней силы, возникают также собственные колебания. Однако в диссипативных системах собственные колебания через время $t \gg 1/\beta$ затухают и переходной процесс, связанный с включением или выключением внешней силы, можно считать закончившимся.

3.1. Вынужденные колебания в линейной системе при гармоническом воздействии

Основным уравнением вынужденных колебаний под действием внешней синусоидальной силы в линейной механической системе с трением является

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t, \tag{3.1}$$

а для колебательного контура с активным сопротивлением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q / C = \mathscr{E}_0 \cos\omega t. \tag{3.2}$$

В этих уравнениях: m – масса, r – коэффициент сопротивления, k – жесткость пружины, F_0 – амплитуда внешней силы, L – индуктивность контура, R – активное сопротивление, C – емкость, $\mathscr{E}_0$ – амплитуда внешней ЭДС, ω – частота внешнего возмущения. Если уравнение (3.1) поделить на m и ввести обозначения $\frac{r}{2m} = \beta$ – коэффициент затухания, $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$ – частота собственных незатухающих колебаний, $\frac{F_0}{m} = f_0$, то уравнение (3.1) запишется в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t. \tag{3.3}$$

К такому же виду приводится и уравнение (3.2) после замены $q = x$, $2\beta = R / L$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $f_0 = \mathscr{E}_0 / L$.

Рассмотрим вначале осциллятор без затухания, т.е. положим в уравнении (3.3) $\beta = 0$. Его общее решение, как известно, складывается из двух частей

$$x(t) = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t + A\cos\omega t.$$

Первые два слагаемых дают общее решение однородного уравнения $\left(f_0 = 0\right)$, третье слагаемое дает частное решение неоднородного уравнения. Как нетрудно убедиться,

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Выберем в качестве начальных условий при $t = 0 \quad x(0) = 0,$ $\dot{x}(0) = 0.$ Тогда находим $a = -A, b = 0,$ и движение такого неавтономного осциллятора будет описываться функцией

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_0 t\right). \tag{3.4}$$

Если ω и ω_0 близки между собой, то процесс, отображаемый формулой (3.4), может быть описан как биения с частотой $|\omega - \omega_0|$. При приближении к резонансу, т.е. когда $\omega \to \omega_0$, частота этих биений будет неограниченно уменьшаться, а их амплитуда – неограниченно увеличиваться: будут получаться все более редкие и глубокие биения. Проследим, как происходит нарастание амплитуды колебаний при резонансе. В этом случае

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \left(\omega_0 - \omega\right)\left(\omega_0 + \omega\right) \approx 2\omega_0\left(\omega_0 - \omega\right),$$

и после несложных тригонометрических преобразований получаем

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0}\frac{\sin\left[\left(\omega_0 - \omega\right)t/2\right]}{\left(\omega_0 - \omega\right)t/2} t \sin\omega_0 t\ .$$

При точном резонансе $\left(\omega_0 = \omega\right)$

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin\omega_0 t,$$

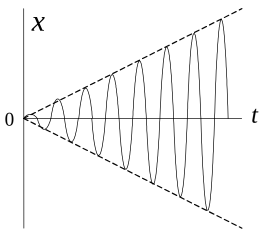


Рис. 3.2

т.е. при периодическом воздействии амплитуда колебаний ведет себя как непериодическая функция времени (рис. 3.2). Множитель t соответствует секулярному росту амплитуды, а скорость ее нарастания зависит от величин f_0 и ω_0.

Секулярный рост амплитуды – одно из простейших проявлений неустойчивости системы по отношению к внешним воздействиям. Такая неустойчивость есть следствие идеализации исходной модели. И для устранения данной неустойчивости в зависимости от ситуации модель должна учитывать либо нелинейные эффекты (система остается консервативной), либо линейную диссипацию (вязкость, трение, сопротивление и т.п.). В первом случае нелинейные эффекты приводят к сдвигу частоты собственных колебаний ω_0 (неизохронность колебаний) и постепенному выходу системы из резонанса. Во втором случае неограниченный рост амплитуды сдерживается неизбежной диссипацией энергии.

Рассмотрим теперь влияние затухания на процесс установления вынужденных колебаний и обратимся к уравнению (3.3). Общее решение соответствующего однородного уравнения, как мы уже знаем, имеет вид

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos\left(\omega' t + \alpha\right).$$

Если рассматривать достаточно большие времена, то данное решение экспоненциально затухает до нуля. Остается найти частное (не содержащее произвольных постоянных) решение уравнения (3.3).

Используем метод комплексных амплитуд, т.е. будем считать, что все переменные – величины комплексные, а в окончательном решении примем во внимание только их действительную часть. Тогда (3.3) запишется как

$$\ddot{\tilde{x}} + 2\beta\dot{\tilde{x}} + \omega_0^2 \tilde{x} = f_0 \exp\left(i\omega t\right). \qquad (3.5)$$

Здесь и в дальнейшем символ «~» над какой-либо величиной означает, что это величина комплексная, а $x = \operatorname{Re}\tilde{x}$. Будем искать частное решение уравнения (3.5) в виде

$$\tilde{x} = \tilde{A} \exp\left(i\omega t\right), \qquad (3.6)$$

где $\tilde{A}$ – комплексная амплитуда. После дифференцирования по времени и подстановки в (3.5) приходим к алгебраическому уравнению

$$-\omega^2 \tilde{A} + 2i\beta\omega\tilde{A} + \omega_0^2 \tilde{A} = f_0$$

(мы сократили на общий множитель $\exp(i\omega t)$). Отсюда находим

$$\tilde{A} = \frac{f_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2i\beta\omega}.$$

Представим комплексное число в знаменателе в показательной форме (см. подразд. 1.4)

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 2i\beta\omega = \rho e^{i\varphi},$$

где

$$\rho = \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}, \tag{3.7}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{3.8}$$

Тогда для комплексной амплитуды $\tilde{A}$ получаем

$$\tilde{A} = \frac{f_0}{\rho}\exp(-i\varphi).$$

В соответствии с этим выражение (3.6) запишется как

$$\tilde{x} = \frac{f_0}{\rho}\exp\left[i\left(\omega t - \varphi\right)\right].$$

Таким образом, находим истинное решение уравнения (3.3)

$$x = \operatorname{Re}\tilde{x} = \frac{f_0}{\rho}\cos\left(\omega t - \varphi\right)$$

или в полном виде

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right).$$

Здесь

$$\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = A(\omega) \tag{3.9}$$

является амплитудой вынужденных колебаний.

Отметим основные особенности полученного решения. Во-первых, установившиеся колебания происходят на частоте вынуждающей силы, т.е. осциллятор «забывает» о своей частоте, подчиняясь внешнему воздействию. Во-вторых, колебания не совпадают по фазе с изменением внешней силы, причем величина отставания φ зависит от частоты вынуждающей силы. И самое главное – при фиксированных параметрах колебательной системы амплитуда колебаний A зависит от частоты вынуждающей силы. Заметим также, что и скорость колебаний v зависит от частоты внешней силы:

$$v = \dot{x} = -\frac{f_0\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \varphi\right). \tag{3.10}$$

На рис. 3.3 представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты колебаний при разных значениях коэффициента затухания β, так называемые *резонансные кривые* $\left(\beta_3 > \omega_0 > \beta_2 > \beta_1\right)$. Максимальная амплитуда колебаний (резонанс) достигается не при точном совпадении собственной частоты осциллятора с частотой вынуждающей силы, а смещается влево по оси частот на величину, зависящую от β. Значение частоты резонанса $\omega_{\text{рез}}$ нетрудно определить из выражения (3.9), найдя минимум знаменателя. Таким образом, находим

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Подставляя это выражение в (3.9), получаем значение амплитуды при резонансе:

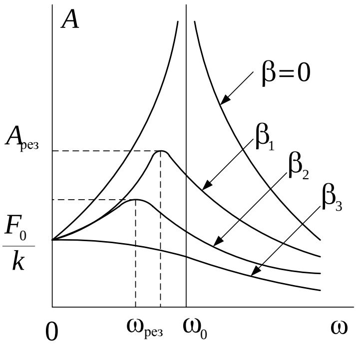


Рис. 3.3

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

При малом затухании $(\beta << \omega_0)$ можно считать, что резонанс наблюдается на частоте собственных колебаний: $\omega_{рез} \approx \omega_0$, и амплитуда при резонансе

$$A_{рез} \approx \frac{F_0}{2\beta m\omega_0}.$$

По поводу резонансных кривых можно отметить следующее. Резонанс не наблюдается при закритическом затухании $(\beta > \omega_0)$. При стремлении ω к нулю все кривые начинаются из точки $x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$. Это значение равно смещению осциллятора под действием постоянной силы. При $\omega \to \infty$ все кривые асимптотически стремятся к нулю, так как система не успевает в силу своей инерционности реагировать на такое быстрое возмущение.

Сравнивая значение амплитуды при резонансе и смещение при малых частотах, нетрудно увидеть, что их отношение при малом затухании равно добротности колебательной системы Q:

$$\frac{A_{рез}}{x_0} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q.$$

Таким образом, добротность колебательной системы является некоторым коэффициентом усиления и показывает, во сколько раз амплитуда в момент резонанса превышает смещение осциллятора из положения равновесия под действием постоянной силы той же величины, что и амплитуда переменной силы.

Резонанс существует не только для смещения, но и для скорости. Правда, в отличие от смещения резонанс скорости наблюдается точно на частоте собственных колебаний. Это легко увидеть из выражения для амплитуды скорости $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \frac{f_0\omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4\beta^2}}.$$

Обратимся теперь к мощности, потребляемой осциллятором от внешнего источника. Так как и внешняя сила F и скорость колебаний v периодически изменяются, т.е. смысл рассчитать среднюю за период колебаний мощность, поглощаемую осциллятором $\langle P\rangle = \langle F(t)\cdot v(t)\rangle$. С учетом выражения (3.10) находим

$$\langle P\rangle = -\frac{F_0^2\omega}{m\rho}\left\langle \cos\omega t \cdot \sin\left(\omega t - \varphi\right)\right\rangle,$$

где значение ρ определяется выражением (3.7). Раскроем $\sin\left(\omega t - \varphi\right)$ и учтем, что среднее по периоду $T = 2\pi/\omega$ от произведения $\cos\omega t \sin\omega t$ равно нулю, а среднее значение квадрата косинуса равно $1/2.$ Тогда

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2\omega}{2m\rho}\sin\varphi.$$

Значение $\sin\varphi$ можно найти из (3.8): $\sin\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\varphi} =$ $= 2\beta\omega/\rho.$ Таким образом, с учетом (3.7) получаем

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2\beta\omega^2}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]}.$$

Легко проверить, что точно такое же выражение (но со знаком минус) получается и для средней мощности сил трения

$\langle P_{\text{тр}} \rangle = -\langle 2\beta\dot{x} \cdot \dot{x} \rangle$, где $\dot{x}$ дается выражением (3.10). Это не удивительно, так как в стационарном режиме установившихся колебаний внешняя сила должна возмещать потери энергии из-за наличия сил сопротивления. На рис. 3.4 приведена зависимость средней передаваемой осциллятору мощности от частоты внешней силы (*резонансная кривая поглощения*). Максимум поглощения, как и резонанс скорости, наблюдается на частоте ω_0. Его значение

$$\langle P_{\max} \rangle = \frac{F_0^2}{4\beta m}$$

сильно зависит от коэффициента затухания. Нетрудно показать, что вблизи резонанса $(\omega \approx \omega_0)$ значение поглощаемой мощности можно представить как

$$\langle P \rangle = \frac{\langle P_{\max} \rangle}{1 + \left(\dfrac{\omega_0 - \omega}{\beta} \right)^2}. \tag{3.11}$$

Разность значений частот внешней силы $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, при которых поглощаемая мощность равна половине максимальной мощности (рис. 3.4), часто называют *шириной резонансной кривой поглощения*. Из (3.11) нетрудно найти, что $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta$. Теперь у нас есть еще одна возможность определить добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi\omega_0}{2\pi\beta} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Таким образом, добротность характеризует «остроту» резонанса.

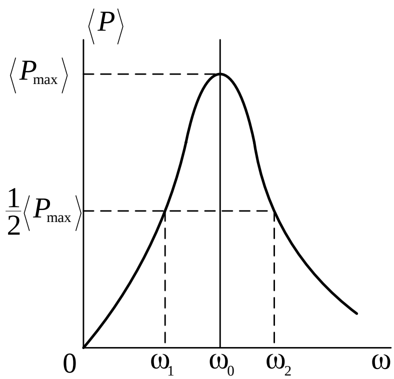


Рис. 3.4

В настраиваемых радиотехнических контурах добротность служит мерой селективности: благодаря большой остроте резонансного максимума можно получать сигнал, свободный от наложения сигналов с близкими частотами. В случае обычных радиотехнических контуров, работающих на частоте порядка 1 МГц, величина Q – порядка нескольких сотен. На более высоких частотах медные резонаторы имеют значение Q порядка 30 000, а для пьезоэлектрических кристаллов добротность может достигать $5 \cdot 10^5$. Добротностью Q часто характеризуют оптическое поглощение в кристаллах и ядерный магнитный резонанс. Эффект Мессбауэра в ядерной физике характеризуется величиной Q порядка 10^{10}.

Для понимания причины резонанса обратимся к выражению (3.8) для сдвига фазы колебаний относительно вынуждающей силы, которое графически отражено на рис. 3.5. Из него следует, что частоте ω_0 соответствует $\varphi = \pi/2$. Так как при слабом затухании $\omega_{рез} \approx \omega_0$, то и в момент резонанса значение φ можно положить равным $\pi/2$. В этом случае фаза скорости, как следует из (3.10), становится равной фазе внешней силы. А это означает, что осциллятор в момент резонанса движется в направлении действия силы, что и создает благоприятные условия для накопления энергии осциллятором и соответствующего резкого усиления колебаний (вспомните, как раскачивают качели!).

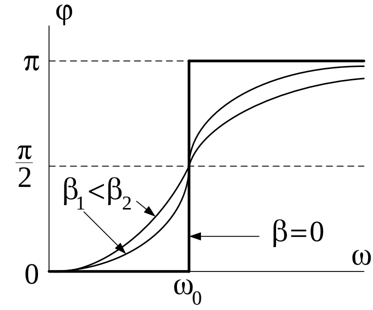


Рис. 3.5

Использование явления резонанса чрезвычайно разнообразно. На его основе исследуют, в частности, собственные колебания молекул в веществе. Молекулы некоторых газов, молекулы с электрическим дипольным моментом, парамагнитные атомы и ионы во внешнем магнитном поле и др. имеют такой набор энергетических уровней, которому соответствуют собственные (резонансные) частоты, лежащие в сверхвысокочастотном (СВЧ) диапазоне радиоволн. Если такая молекула или атом облучается СВЧ электромагнитными колебаниями, частота которых удовлетворяет условию $\hbar\omega = E_1 - E_2$ (E_1 и E_2 – значения энергии на верхнем и нижнем уровнях), то может произойти резонансное поглощение. Исследование резонансных частот, ширины и формы спектральных линий позволяет определять структуру молекул, структуру атомных ядер и строение электронных оболочек атомов; устанавливать характер взаимодействия между атомами и молекулами в веществе и многое другое.

Резонанс можно использовать и для глобальных измерений. С его помощью удалось, например, определить параметры осциллятора Земля – атмосфера. Внешней силой в этом случае служит Луна, которая, вращаясь вокруг Земли, вызывает два раза в сутки приливы атмосферы с периодом 12 ч 40 мин. Очевидно, что если атмосферу сместить, то благодаря возвращающей гравитационной силе возникнут колебания атмосферы относительно Земли. Для измерения параметров β и ω_0 такого глобального осциллятора достаточно найти амплитуду и сдвиг фазы колебаний при каком-нибудь одном значении ω. Измерили величину атмосферных приливов и время их задержки, что позволило по одной известной точке построить резонансную кривую.

3.2. Электрические колебания. Импеданс

Обратимся теперь к вынужденным колебаниям в контуре, содержащем соединенные последовательно активное сопротивление R, индуктивность L, емкость C и источник внешнего переменного напряжения $U = U_0 \cos\omega t$. Уравнение колебаний заряда q на емкости C, как мы уже знаем, имеет вид $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \dfrac{U_0}{L}\cos\omega t$, где $\beta = \dfrac{R}{2L}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$. Установившееся решение данного уравнения было получено в предыдущем разделе

$$q = q_0 \cos(\omega t - \psi), \tag{3.12}$$

где q_0 – максимальный заряд конденсатора,

$$q_0 = \frac{U_0}{L\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{U_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{3.13}$$

$\operatorname{tg}\psi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \dfrac{R}{\dfrac{1}{\omega C} - \omega L}$ дает сдвиг фазы колебаний заряда конденсатора относительно внешнего переменного напряжения. Дифференцируя (3.12) по времени, получаем выражение для тока

$$I = I_0 \cos(\omega t - \psi + \pi/2), \tag{3.14}$$

здесь I_0 – максимальный ток в цепи,

$$I_0 = \omega q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{3.15}$$

В выражение для тока (3.14) входит сдвиг фазы колебаний *заряда* относительно *внешнего напряжения* $U(t)$. Это не совсем удобно. Логично значение тока выразить через его сдвиг фазы относительно $U(t)$. Для этого перепишем (3.14)

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi),$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\psi - \dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\psi} = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}.$

Отсюда следует, что ток отстает по фазе от внешнего напряжения $(\varphi > 0)$, если $\omega L > 1/\omega C$, и опережает напряжение $(\varphi < 0)$, если $\omega L < 1/\omega C$.

В силу закона Ома напряжение от внешнего источника $U_0 \cos \omega t$ должно быть равно сумме напряжений на активном сопротивлении U_R, емкости U_C и индуктивности U_L: $U_R + U_C + U_L = = U_0 \cos \omega t.$ Здесь

$$U_R = IR = U_{Rm} \cos(\omega t - \varphi), \quad U_{Rm} = I_0 R; \tag{3.16}$$

$$U_C = \frac{q}{C} = U_{Cm} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad U_{Cm} = \frac{I_0}{\omega C}; \tag{3.17}$$

$$U_L = L\dot{I} = U_{Lm} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad U_{Lm} = \omega L I_0. \tag{3.18}$$

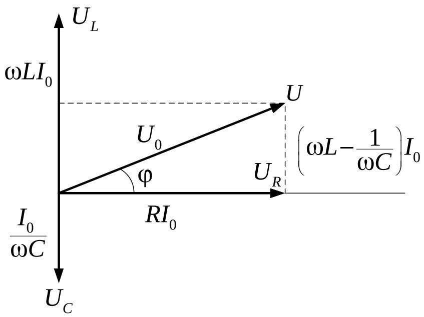


Рис. 3.6

Из выражений (3.16)–(3.18) видно, что на активном сопротивлении напряжение совпадает по фазе с током, на емкости – отстает по фазе от тока на $\pi/2$, на индуктивности – опережает по фазе ток на $\pi/2$. Полученные фазовые соотношения между током и всеми напряжениями можно наглядно представить с помощью векторной диаграммы. Для этого в качестве направления, от которого будем отсчитывать фазы, выберем ось тока. Тогда получается диаграмма, изображенная на рис. 3.6. Заметим, что из нее легко получить формулу (3.15).

Резонансное поведение электрического колебательного контура определяется его добротностью Q, определяемой на резонансной частоте. Правда, здесь возникает вопрос, о резонансе какой величины идет речь? Из выражений (3.15) и (3.16) следует, что резонанс тока и напряжения на активном сопротивлении происходит точно на частоте собственных колебаний ω_0. Из выражений же (3.17) и (3.18) нетрудно убедиться, что резонанс напряжения на конденсаторе наблюдается на частоте $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 2\beta^2 / \omega_0^2}$, а резонанс напряжения на индуктивности – на частоте $\omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\beta^2 / \omega_0^2}}$. Несовпадение резонансных максимумов по частоте может быть весьма существенным при использовании таких систем в радиоизмерительных устройствах. И все три максимума совпадают только при малом затухании. Поэтому в дальнейшем будем относить добротность к частоте собственных колебаний ω_0

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Найдем резонансные значения тока и напряжений

$$I_{0\,\text{рез}} = \frac{U_0}{R}, \quad U_{Rm\,\text{рез}} = I_{0\,\text{рез}} R = U_0, \quad U_{Cm\,\text{рез}} = \frac{I_{0\,\text{рез}}}{\omega_0 C} = \frac{U_0}{\omega_0 RC} = U_0 Q,$$

$$U_{Lm\,\text{рез}} = \omega_0 L I_{0\,\text{рез}} = U_0 Q.$$

Из последних двух формул следует, что добротность контура показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе (или индуктивности) в момент резонанса превышает приложенное внешнее напряжение. На рис. 3.7 и 3.8 приведены резонансные кривые для напряжения на конденсаторе и тока.

Полученные нами результаты для установившихся вынужденных колебаний в электрическом колебательном контуре можно применять для анализа цепей переменного тока, в которые включены в произвольном порядке емкости, индуктивности и активные сопротивления. Анализ такой цепи можно считать законченным, если нам известны токи и напряжения во всех ее ветвях. Эти величины для произвольного момента времени можно найти, составив и решив соответствующие дифференциальные уравнения. Если же нас интересует только установившийся режим, то существует более простой и элегантный метод. Он основан на двух идеях: переменные токи и напряжения могут быть представлены комплексными числами; и при заданной частоте любая ветвь или элемент контура характеризуется отношением напряжения к току.

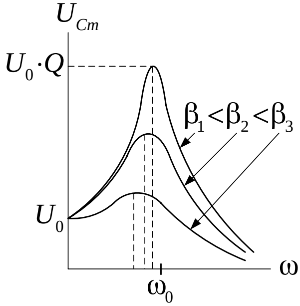


Рис. 3.7

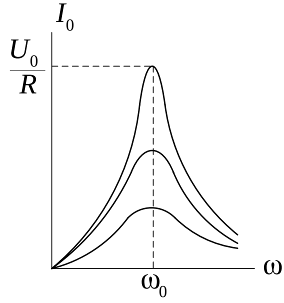


Рис. 3.8

Ранее мы выяснили, что переменное синусоидальное напряжение, приложенное к какому-либо участку цепи, содержащей L, C и R, рождает ток, изменяющийся также по синусоидальному закону, но со сдвигом по фазе (так обстоит дело только с линейными системами). С использованием комплексных чисел изменяющееся во времени напряжение можно записать в виде

$$U(t) = \tilde{U} \exp\left(i\omega t\right), \tag{3.19}$$

где $\tilde{U}$ – комплексное число, независящее от времени. При этом, конечно, подразумевается, что настоящее переменное во времени напряжение $U(t)$ представляется действительной частью комплексной функции в правой части уравнения (3.19). Подобным образом будем записывать и все другие величины, изменяющиеся со временем синусоидально с той же частотой ω, т.е. будем записывать:

$$I = \tilde{I} \exp\left(i\omega t\right), \tag{3.20}$$

$$\mathscr{E} = \tilde{\mathscr{E}} \exp\left(i\omega t\right)$$

и т.д. В дальнейшем можно снять символ «~» над $\tilde{I}$, $\tilde{\mathscr{E}}$ и писать просто $I, \mathscr{E}$ (вместо $\tilde{I}$, $\tilde{\mathscr{E}}$), помня при этом, что они изменяются со временем всегда так, как записано в (3.19).

Найдем теперь связь между переменным током и напряжением на индуктивности $U = LdI/dt$. Так как ток изменяется по закону (3.20), то

$$U = (i\omega L) \cdot I. \tag{3.21}$$

В этой формуле напряжение пропорционально силе тока с коэффициентом пропорциональности, который является комплексным числом. Этот коэффициент пропорциональности называется *импедансом*, и его часто обозначают как Z. Итак, импеданс индуктивности $Z_L = i\omega L$. Установим соотношения, подобные (3.21), и для других элементов. Для конденсатора имеем $U = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int Idt = \dfrac{1}{i\omega C} I$ (мы учли равенство (3.20)). Тогда импеданс конденсатора $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$. И совсем просто обстоит дело с активным сопротивлением. Для него $U = IR$, т.е. импеданс сопротивления $Z_R = R$ – число действительное. Соотношение (3.21) можно переписать в виде $I = Y \cdot U$, где Y – комплексное число, называемое *полной проводимостью*. Для индуктивности $Y_L = \dfrac{1}{i\omega L}$, для конденсатора $Y_C = i\omega C$, для сопротивления $Y_R = \dfrac{1}{R}$.

Из рассмотренных элементов можно построить любой контур. Для последовательного соединения, так как напряжения складываются, а токи на элементах одинаковы, полный импеданс равен сумме импедансов:

$$Z_{\text{посл}} = \sum Z_i .$$

При параллельном соединении, например двух элементов, так как складываются токи, а напряжения одинаковы, $I = I_1 + I_2 = = Y_1 U + Y_2 U = (Y_1 + Y_2) U$, т.е. при параллельном соединении складываются полные проводимости Y.

Все рассмотренное звучит так, как будто мы говорим о протекании постоянных токов! И действительно, мы свели задачу о цепи переменного тока к задаче о цепи постоянного тока с единственным различием: числа, с которыми мы имеем дело (токи, напряжения, импедансы, проводимости и др.), являются комплексными числами. Более того, остаются в силе и правила Кирхгофа, записанные через импедансы (нужно только помнить про временной экспоненциальный множитель $\exp(i\omega t)$ и из полученного результата взять действительную часть).

В качестве примера рассмотрим контур из параллельно включенных элементов R, L, C (рис. 3.9). Полная проводимость трех параллельных ветвей

$$Y = \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L} = \frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Переменное напряжение $U_0 \cos\omega t$ заменим на $U_0 \exp(i\omega t)$ и в дальнейших выкладках множитель $\exp(i\omega t)$ будем опускать. Тогда комплексный ток, потребляемый от источника переменного напряжения U_0, выражается равенством

$$I = YU_0 = U_0 \left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right].$$

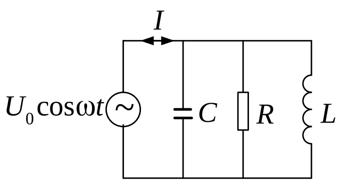


Рис. 3.9

Осталось только помножить этот результат на $\exp(i\omega t)$ и взять его действительную часть

$$I(t) = \mathrm{Re}\left\{U_0 e^{i\omega t}\left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]\right\}.$$

Для этого вспомним, что любое комплексное число можно представить в виде $x + iy = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi = y/x$. Таким образом, получаем

$$I(t) = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

где $\varphi = \mathrm{arctg}\left[R\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)\right]$.

Заметим, что не составит труда найти и токи, протекающие по любым другим участкам цепи (точно так же, как это делается для постоянных токов). Рассмотренный метод применим только к линейным элементам контуров, т.е. к элементам, в которых ток пропорционален напряжению. Для нелинейных элементов понятие импеданса неприменимо.

3.3. Амортизация колебаний. Антирезонанс

Обычно основное назначение амортизаторов сводится к уменьшению давления на фундамент или другую опору при действии некоторой периодической силы (например, вибрирующих машин, станков, двигателей внутреннего сгорания и др.).

На рис. 3.10 изображена простейшая колебательная система, которую при определенных условиях можно рассматривать как амортизирующее устройство. Здесь m – масса вибрирующего тела, k – жесткость пружины амортизатора, r – коэффициент сопротивления. Полагая внешнюю силу $F(t)$ изменяющейся по гармоническому закону, уравнение колебаний тела запишем в виде

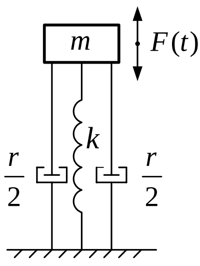


Рис. 3.10

$$m\ddot{x}+r\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t,$$

где F_0 – амплитуда внешней силы, ω – ее частота. Данным уравнением мы занимались неоднократно, поэтому сразу запишем выражение для амплитуды колебаний вибрирующего тела

$$A=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+r^2\omega^2}}.$$

Со стороны вибрирующего тела на опору в этом случае действует сила $F_1=kx+r\dot{x},$ амплитудное значение которой

$$F_{1m}=A\sqrt{k^2+r^2\omega^2}.$$

Эффективность работы амортизатора можно характеризовать коэффициентом амортизации

$$\alpha=\frac{F_{1m}}{F_0}=\sqrt{\frac{k^2+r^2m^2}{\left(k-m\omega^2\right)^2+r^2\omega^2}},$$

который, естественно, должен быть меньше единицы. Данный коэффициент несложно выразить через добротность колебательного контура $Q=k/\left(\omega_0 r\right)$ и отношение частоты внешней силы ω к частоте собственных колебаний ω_0: $\gamma=\omega/\omega_0$ $\left(\omega_0=\sqrt{k/m}\right)$

$$\alpha=\sqrt{\frac{Q^2+\gamma^2}{Q^2\left(1-\gamma^2\right)^2+\gamma^2}}.$$

Нетрудно видеть, что α меньше единицы при $\left(1-\gamma^2\right)^2>1$, т.е. при $\gamma>\sqrt{2}$.

На рис. 3.11 приведена зависимость коэффициента амортизации от отношения частот $\gamma=\omega/\omega_0$ при нескольких значениях добротности. Из них видно, что в интересующей нас области $\left(\gamma > \sqrt{2}, \alpha < 1\right)$ для эффективной амортизации колебательная система должна иметь как можно бо́льшую добротность Q и как можно меньшую частоту собственных колебаний ω_0. Однако при слишком высокой добротности амортизаторов в них могут возникать опасные вибрации за счет возбуждения паразитных резонансных колебаний. Это обстоятельство хорошо известно из практики работы мощных турбогенераторов и других подобных механизмов.

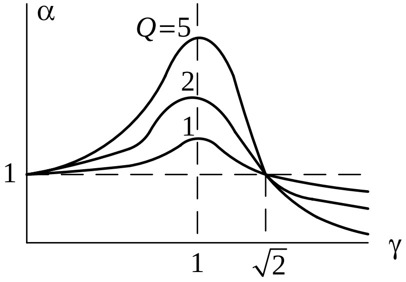


Рис. 3.11

Если вибрирующее тело является источником колебаний не одной частоты, то во многих практических случаях вполне достаточно рассчитать и выполнить амортизатор для наименьшей из совокупности возбуждающихся в вибрирующем устройстве частот.

Рассмотренный выше пример показывает, что путем правильного подбора параметров колебательной системы удается снизить реакцию системы на внешнее периодическое воздействие. В связи с этим возникает вопрос: а можно ли создать ситуацию, в которой точка приложения переменной силы остается все время неподвижной? Такая ситуация возможна, если система имеет по крайней мере две степени свободы. Это удивительное явление представляет не только очевидный теоретический интерес, но может быть использовано и в практических целях.

Рассмотрим вынужденные колебания двухмассовой системы, в которой внешняя периодическая сила $F_0 \sin\omega t$ приложена к первому телу (рис. 3.12). Дифференциальное уравнение движения каждого из двух тел можно записать в виде

$$\begin{gathered} -k_1 x_1 + k_2\left(x_2 - x_1\right) + F_0 \sin\omega t = m_1 \ddot{x}_1, \\ -k_2\left(x_2 - x_1\right) = m_2 \ddot{x}_2, \end{gathered} \tag{3.22}$$

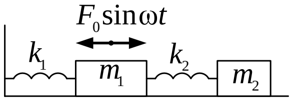


Рис. 3.12

где m_1, m_2 – массы грузов, k_1, k_2 – жесткости обеих пружин, $x_1(t), x_2(t)$ – смещения грузов из положения равновесия. Для упрощения анализа будем пренебрегать трением. Общее стационарное решение системы уравнений (3.22), очевидно, имеет вид $x_1 = A_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right)$, $x_2 = A_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right)$, где A_1, A_2 являются амплитудами вынужденных колебаний каждого тела, а значения φ_1 и φ_2 определяют сдвиг фазы колебаний каждого тела относительно внешней силы. Если же оставить в стороне вопрос о фазах колебаний и попытаться получить информацию только об амплитудах колебаний, то в качестве частного решения можно взять

$$x_1 = A_1 \sin\omega t, \quad x_2 = A_2 \sin\omega t. \tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в (3.22), приходим к системе двух алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний

$$-A_1 m_1 \omega^2 + k_1 A_1 - k_2\left(A_2 - A_1\right) = F_0,$$

$$-A_2 m_2 \omega^2 + k_2\left(A_2 - A_1\right) = 0.$$

Из данной системы нетрудно найти A_1 и A_2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{F_0\left(k_2 - m_2\omega^2\right)}{\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2{}^2}, \\ A_2 &= \frac{F_0 k_2}{\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2{}^2}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Как и ожидалось, значения амплитуд сильно зависят от частоты вынуждающей силы. Так, в частности, при определенных значениях ω знаменатели в (3.24) обращаются в нуль, а величины A_1 и A_2 стремятся к бесконечности; это означает наступление резонанса в системе. Значения резонансных частот определяются из уравнения

$$\left(k_1 + k_2 - m_1\omega^2\right)\left(k_2 - m_2\omega^2\right) - k_2{}^2 = 0. \tag{3.25}$$

Гораздо интереснее другой факт – обращение в нуль числителя в первой из формул (3.24). Если частота возбуждения удовлетворяет равенству

$$\omega = \omega^* = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}\,, \tag{3.26}$$

то для амплитуд A_1 и A_2 находим

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{F_0}{k_2}.$$

Не следует бояться того, что значение A_2 оказалось отрицательным. Это означает только то, что колебания второго тела противоположны по фазе внешней гармонической силе. Особенного внимания заслуживает равенство $A_1 = 0$, т.е. первая масса остается все время неподвижной, хотя именно к ней приложена вынуждающая сила! Это и есть тот удивительный эффект, который невозможен в статических задачах. Иногда такое состояние системы называют *антирезонансом*. На рис. 3.13 показано изменение амплитуды A_1 в зависимости от отношения частоты возбуждения ω к частоте ω^* при $F_0 = 1, k_1 = k_2 = 1, m_1 = m_2 = 1.$ Отчетливо виден антирезонанс при $\omega = \omega^*$, а также два резонанса при значениях $\omega = \omega_{\text{рез}1} = 0,62$ и $\omega = \omega_{\text{рез}2} = 1,62,$ являющихся корнями уравнения (3.25).

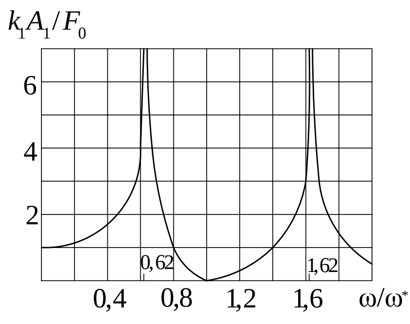


Рис. 3.13

Возможность антирезонанса практически используется при устройстве *динамических гасителей* колебаний. Пусть, например, имеется одномассовая система, к которой приложена гармоническая возмущающая сила. В такой системе колебания неизбежны при любых параметрах системы. Однако, если ввести в систему дополнительный груз на упругой связи, то получается изображенная на рис. 3.12 двухмассовая система, и, как мы только что видели, колебания основного (первого) груза полностью исчезнут, если параметры k_2 и m_2 дополнительной части системы подобраны согласно условию (3.26). В этом случае второй груз выполняет роль динамического гасителя колебаний для основной системы.

При соответствующей настройке виброгасителя, когда исчезают колебания основной конструкции, дополнительный груз, как правило, вибрирует очень сильно. Амплитуда A_2 колебаний гасителя равна отношению амплитуды внешней силы к жесткости дополнительной пружины; для легкого гасителя, когда значение m_2 невелико, эта жесткость также должна быть малой (этого требует условие настройки гасителя).

Идея динамического виброгасителя, бесспорно, увлекательна и может даже показаться, что в ней следует видеть панацею от всяких нежелательных вибраций. К сожалению, у динамического виброгасителя есть один серьезный недостаток: он способен гасить колебания лишь строго фиксированной частоты. Всякое изменение частоты возмущения вызовет нарушение условия (3.26) и дополнительная часть системы утратит свойства гасителя; возможно даже, что условия работы основной системы не улучшатся, а ухудшатся.

На рис. 3.13 видно, что вторая масса гасит колебания лишь в малой окрестности частоты $\omega = \omega^*$. Если же, например, частота возмущения составит $\omega = \omega_{\text{рез}2}$, то возникнет резонанс, которого не было бы при отсутствии такого «гасителя». Путем введения в систему гасителя вязкого сопротивления можно несколько расширить диапазон частот, внутри которого происходит интенсивное гашение колебаний. Поэтому, когда в колебательную систему вводится гаситель, он обычно снабжается демпфирующим элементом с заданным вязким сопротивлением.

3.4. Гармонический осциллятор под действием непериодической силы

До сих пор мы занимались задачами, в которые входила внешняя периодическая сила. А как поведет себя гармонический осциллятор под действием произвольной непериодической силы $F(t)$, когда движение описывается уравнением $\ddot{x}+\omega^2 x = F(t)$? Воспользуемся для получения ответа методом, аналогичным до определенного момента методу Ван-дер-Поля (см. подразд. 2.5). Будем полагать

$$x(t) = A(t)\cos\omega t + B(t)\sin\omega t,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – неопределенные функции времени. Введем переменную

$$\dot{x}(t) = -A(t)\omega\sin\omega t + B(t)\omega\cos\omega t,$$

которая не является непосредственным результатом дифференцирования x по t. Это означает, что переменные $A(t)$ и $B(t)$ связаны условием

$$\dot{A}\cos\omega t + \dot{B}\sin\omega t = 0\,.$$

Продифференцируем $\dot{x}$ по времени

$$\ddot{x} = -\dot{A}\omega\sin\omega t - A\omega^2\cos\omega t + \dot{B}\omega\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

и подставим в исходное уравнение $\ddot{x}+\omega^2 x = F(t)$. Тогда получаем

$$-\dot{A}\omega\sin\omega t + \dot{B}\omega\cos\omega t = F(t).$$

Умножая это уравнение последовательно на $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ и складывая, получаем с учетом дополнительного условия, накладываемого на функции $A(t)$ и $B(t)$:

$$\dot{A}(t) = -\frac{1}{\omega}F(t)\sin\omega t, \quad \dot{B}(t) = \frac{1}{\omega}F(t)\cos\omega t.$$

Эта система двух дифференциальных уравнений первого порядка точно соответствует исходному уравнению второго порядка $\ddot{x}+\omega^2 x = F(t),$ но в отличие от рассмотренного ранее метода Ван-дер-Поля в ее правые части уже не входят функции $A(t)$ и $B(t),$ что позволяет данную систему сразу проинтегрировать. Отсюда находим

$$A(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t F(\tau)\sin\omega\tau d\tau, \quad B(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t F(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Если, например, $F(t) = F_0\cos\omega t$, то

$$B(t) = \frac{F_0}{\omega}\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right]$$

и при $t\to\infty$ решение уходит в бесконечность – секулярный рост. Очевидно, если с ростом времени коэффициенты $A(t)$ и $B(t)$ остаются малыми, то резонанса не будет. Таким образом, условие отсутствия резонанса можно записать в виде $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(\tau)\sin\omega\tau d\tau = 0$ и $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(\tau)\cos\omega\tau d\tau = 0.$

Математически последнее соотношение означает, что функция $F(t)$ не должна содержать собственных функций нашей задачи. Если же $F(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} F_{0i}\cos\omega_i t$ (т.е. внешняя сила может быть представлена рядом Фурье) и одна из частот ω_i совпадает с собственной частотой осциллятора, то возникает резонанс. Все составляющие других частот в этом случае будут мало существенными.

3.5. Резонанс в нелинейных системах

Если осциллятор линейный, то при действии на него внешней периодической силы наблюдается, по существу, единственный основной эффект – линейный резонанс на частоте, близкой к собственной. Чем меньше потери в осцилляторе, тем острее и выше резонансная кривая. Что может быть качественно нового в нелинейном осцилляторе при резонансе? Одно из основных отличий связано с неизохронностью нелинейной колебательной системы. При приближении частоты внешней силы к частоте собственных колебаний бóльшим амплитудам колебаний уже соответствует другая частота. В результате система выходит из резонанса и, начиная с некоторой амплитуды, осциллятор перестает замечать внешнюю силу. Выход из резонанса происходит, таким образом, за счет нелинейного сдвига частоты $\omega = \omega(A)$. Кроме того, для нелинейного осциллятора резонанс существует и на гармониках внешней силы. В общем случае, даже при синусоидальном воздействии, в такой неавтономной системе возможны совершенно нетривиальные эффекты – динамика системы может оказаться чрезвычайно сложной, в том числе и стохастической (случайной). Эти эффекты обнаруживаются лишь при наличии нелинейностей.

Ограничимся пока рассмотрением системы, близкой к линейному автономному осциллятору, т.е. будем считать малыми не только нелинейность и диссипацию энергии, но и амплитуду внешней силы. Тогда становится очевидным и метод решения – это один из асимптотических методов, например, метод медленно меняющихся амплитуд. Возьмем в качестве исходной системы нелинейный электрический колебательный контур с сегнетоэлектриком (см. подразд. 1.3) при наличии линейного затухания. Уравнение его собственных колебаний имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2\left(1 + \gamma x^2\right)x = 0.$$

Подобное же уравнение можно записать и для маятника при достаточно малых амплитудах колебаний. Пусть внешняя сила изменяется по закону $f = f_0 \cos\omega t$. Тогда уравнение вынужденных колебаний можно записать как

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2\left(1 + \gamma x^2\right)x = f_0 \cos\omega t, \tag{3.27}$$

где β – коэффициент затухания, γ – коэффициент нелинейности, f_0 – амплитуда внешней силы, ω – ее частота, ω_0 – частота собственных колебаний. Для возможности применения метода медленно меняющихся амплитуд потребуем, чтобы внешняя сила была мала по амплитуде и имела тот же порядок малости, что и малые силы, связанные с нелинейностью и диссипацией энергии. В этом случае внешнюю силу можно объединить с этими малыми силами и свести рассмотрение задачи к уравнению типа

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f_1\left(x, \dot{x}, t\right) \quad \left(\mu << 1\right),$$

которое отличается от рассмотренного ранее уравнения (2.13) тем, что функция f_1 зависит не только от переменной x и ее производной $\dot{x},$ но и явно от времени.

Так как мы хотим исследовать резонанс, будем искать решение на частоте внешней силы

$$x = A(t)\cos\left[\omega t + \theta(t)\right],$$

где $A(t)$ – амплитуда колебаний, $\theta(t)$ – сдвиг фазы колебаний относительно внешней гармонической силы. Введем в рассмотрение линейную расстройку частоты

$$\varepsilon = \omega - \omega_0 \ll \omega_0.$$

В этом случае при достаточно малых значениях расстройки уравнение (3.27) преобразуется к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega t - 2\beta\dot{x} - \gamma\omega_0^2 x^3 + 2\varepsilon\omega x.$$

Тогда система укороченных уравнений (2.26), применяемая в методе ММА, будет выглядеть как

$$\dot{A} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\Big[f_0\cos\omega t - \gamma\omega_0^2 A^3\cos^3\left(\omega t + \theta\right) + 2\beta A\omega\sin\left(\omega t + \theta\right) +$$

$$+\,2\varepsilon A\omega\cos\left(\omega t+\theta\right)\Big]\sin\left(\omega t+\theta\right)dt,$$

$$A\dot{\theta}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi/\omega}\Big[\,f_0\cos\omega t-\gamma\omega_0^2A^3\cos^3\left(\omega t+\theta\right)+2\beta A\omega\sin\left(\omega t+\theta\right)+$$

$$+\,2\varepsilon A\omega\cos\left(\omega t+\theta\right)\Big]\cos\left(\omega t+\theta\right)dt.$$

После выполнения интегрирования приходим к системе уравнений

$$\dot{A}=-\frac{f_0}{2\omega}\sin\theta-\beta A,\quad A\dot{\theta}=-\frac{f_0}{2\omega}\cos\theta+\frac{3\gamma\omega_0^2}{8\omega}A^3-\varepsilon A. \tag{3.28}$$

Отсюда можно найти стационарную амплитуду вынужденных колебаний A_0 при условии $\dot{A}=0, \dot{\theta}=0,$ т.е.

$$\beta A_0=-\frac{f_0}{2\omega}\sin\theta_0,\quad -\varepsilon A_0+\frac{3\gamma\omega_0^2}{8\omega}A_0^3=\frac{f_0}{2\omega}\cos\theta_0.$$

Из этих уравнений следует

$$\beta^2+\left(\delta A_0^2-\varepsilon\right)^2=\left(\frac{f_0}{2\omega A_0}\right)^2, \tag{3.29}$$

где

$$\delta=\frac{3\gamma\omega_0^2}{8\omega}. \tag{3.30}$$

Из (3.29) нетрудно найти связь расстройки и амплитуды установившихся вынужденных колебаний (резонансную кривую)

$$\varepsilon=\delta A_0^2\pm\sqrt{\left(\frac{f_0}{2A_0\omega}\right)^2-\beta^2}. \tag{3.31}$$

На рис. 3.14, *а* приведено типичное семейство соответствующих резонансных кривых на плоскости $\left(A_0^2,\varepsilon\right)$ для различных значений амплитуды вынуждающей силы f_0. Отчетливо видно, что все эти кривые разбиваются на два типа. Когда f_0 меньше некоторого предельного значения f_0^* резонансные кривые однозначны и напоминают резонансные кривые линейного осциллятора с затуханием. Их максимум смещен в сторону больших частот, если собственная частота осциллятора с ростом амплитуды колебаний растет (так называемая жесткая упругая сила $\gamma > 0$). Если же с ростом амплитуды колебаний собственная частота убывает (мягкая упругая сила $\gamma < 0$), то максимум резонансных кривых смещается в сторону меньших частот. При $f_0 > f_0^*$ резонансные кривые уже неоднозначны. Связано это с тем, что для определения стационарных амплитуд необходимо решать уравнение третьей степени относительно A_0.

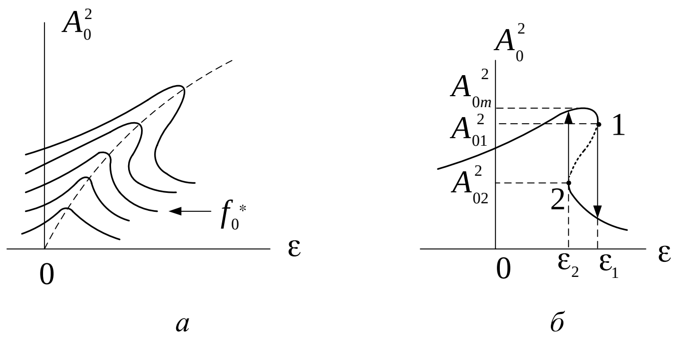


Рис. 3.14

Устойчивость найденных решений можно определить известным методом возмущений, подробно рассмотренным в подразд. 2.5. Такой анализ устойчивости различных ветвей резонансных кривых показывает, что средняя ветвь, отмеченная пунктиром от точки *1* до точки *2* на рис. 3.14, *б*, неустойчива. При изменении расстройки, двигаясь вдоль резонансной кривой слева направо, будем наблюдать следующее. При $\varepsilon = 0$ – точный резонанс по линейному приближению – амплитуда колебаний далеко не максимальна. Максимум амплитуды A_{0m} наблюдается для некоторого значения расстройки

$\varepsilon > 0$. При дальнейшем возрастании расстройки амплитуда падает и при $\varepsilon = \varepsilon_1$ происходит скачкообразный срыв колебаний до существенно меньшей амплитуды. При обратном ходе расстройки скачок происходит при $\varepsilon = \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и амплитуда при этом резко возрастает. Значения амплитуд A_{01} и A_{02}, при которых происходит срыв колебаний, определяется из уравнения

$$\frac{dA_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \infty$$

(в точках A_{01} и A_{02} касательная к резонансной кривой вертикальна).

Для определения значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_{01}, A_{02}$ и A_{0m} запишем уравнение (3.31) для резонансной кривой несколько иначе:

$$\left(\varepsilon - \delta A_0{}^2\right)^2 = \left(\frac{f_0}{2A_0\omega}\right)^2 - \beta^2,$$

или

$$\left(\beta^2 + \delta^2 A_0^4 - 2\delta\varepsilon A_0^2 + \varepsilon^2\right) A_0^2 = \left(\frac{f_0}{2\omega}\right)^2. \tag{3.32}$$

Найдем теперь уравнение для касательной $dA_0 / d\varepsilon$. Для этого продифференцируем по ε уравнение (3.32), помня, что от ε зависит только A_0:

$$\frac{dA_0}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon A_0 + \delta A_0^3}{\varepsilon^2 + \beta^2 - 4\delta\varepsilon A_0^2 + 3\delta^2 A_0^4}.$$

Приравнивая выражение для производной $dA_0 / d\varepsilon$ нулю, находим $A_{0m}^2 = \varepsilon / \delta$. Тогда из (3.31) следует

$$A_{0m}^2 = \frac{f_0}{2\beta\omega}.$$

Значения A_{01} и A_{02} (они лежат на вертикальных касательных $dA_0 / d\varepsilon = \infty$) можно найти из совместного решения уравнения

$$\varepsilon^2 + \beta^2 - 4\delta\varepsilon A_0^2 + 3\delta^2 A_0^4 = 0 \qquad (3.33)$$

и уравнения (3.32) для резонансной кривой.

Величина внешней силы f_0^*, при которой на резонансной кривой появляется гистерезис (неоднозначность), определяется из условия равенства корней уравнения (3.33) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, т.е. обращения в нуль его дискриминанта

$$4\delta^2 A_0^4 - 3\delta^2 A_0^4 - \beta^2 = 0.$$

Откуда $A_0^2 = \beta / \delta.$ При этом $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2\beta$ и из (3.31) следует

$$f_0^* = \sqrt{\frac{8\omega^2\beta^3}{\delta}},$$

где значение δ определяется выражением (3.30).

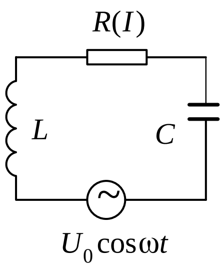


Рис. 3.15

Рассмотрим теперь влияние нелинейного закона диссипации на резонанс в колебательной системе. Для этого обратимся к электрическому колебательному контуру с постоянными реактивными элементами L, C и нелинейным затуханием (рис. 3.15). Пусть сопротивление зависит от тока по закону $R(I) = R_0\left(1 + \gamma_0 I^2\right)$. Это соотношение качественно передает зависимость омического сопротивления проводников от протекающего через них тока за счет их нагрева. Тогда уравнение, описывающее поведение данного контура при внешнем гармоническом воздействии, можно записать в виде

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x}\left(1 + \gamma\dot{x}^2\right) + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t, \qquad (3.34)$$

где β – коэффициент затухания, $\beta = R_0 / 2L$; γ – коэффициент нелинейности; f_0 – амплитуда внешней силы, $f_0 = U_0 / L$; ω – ее частота; ω_0 – частота собственных колебаний, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Как и ранее введем в рассмотрение линейную расстройку частоты $\varepsilon = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$. В этом случае для достаточно малых значений расстройки уравнение (3.34) преобразуется к виду

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega t - 2\beta\dot{x} - 2\beta\gamma\dot{x}^3 + 2\varepsilon\omega x. \tag{3.35}$$

Для применимости метода медленно меняющихся амплитуд потребуем, чтобы все слагаемые в правой части (3.35) были малы по сравнению с членами в его левой части. Решение уравнения (3.35) ищем в виде

$$x = A(t)\cos\left[\omega t + \theta(t)\right], \quad \dot{x} = -A(t)\omega\sin\left[\omega t + \theta(t)\right].$$

После выполнения абсолютно тех же расчетов, что и в предыдущей задаче, находим уравнение резонансной кривой стационарной амплитуды для колебательного контура с нелинейным сопротивлением:

$$A_0 = \frac{f_0}{2\omega\sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2\left(1 + \frac{3}{4}\gamma\omega\beta A_0^2\right)^2}}.$$

В случае линейного контура $(\gamma = 0)$ это уравнение совпадает с уже известным нам уравнением (3.9) для амплитуды вынужденных колебаний. На рис. 3.16 приведено несколько резонансных кривых для разных значений f_0 (пунктиром отмечены резонансные кривые для линейного контура). Видно, что резонансные кривые

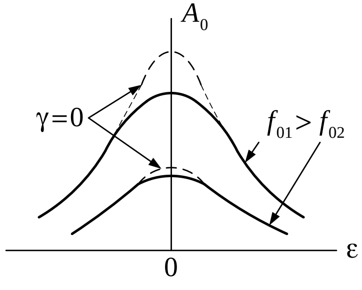


Рис. 3.16

для контура с нелинейным затуханием являются более плоскими в области расстроек, близких к нулю. Это изменение тем больше, чем больше резонансная амплитуда. Связано это с ростом эффективного затухания. Вдали от области малых расстроек резонансные кривые линейного и нелинейного контуров практически совпадают. В то же время эти кривые нигде не пересекаются и резонансная кривая нелинейного контура при $\gamma > 0$ даже вдали от резонанса всегда расположена ниже резонансной кривой линейного контура.

Глава 4
ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1. Параметрическое возбуждение

До сих пор мы рассматривали колебательные системы, в которых происходили либо свободные колебания, определяемые начальными условиями, либо чисто вынужденные, возникающие под действием внешней силы. Однако, как известно, существует еще один вид воздействия на колебательные системы, который заключается в том, что внешней силой производится изменение одного из параметров системы. Такое возбуждение колебаний называют *параметрическим резонансом,* а сами системы, параметры которых изменяются во времени и в пространстве, называют *параметрическими*.

Простейшая механическая параметрическая система – математический маятник с изменяющейся со временем длиной нити $l = l(t)$ или с перемещающейся точкой подвеса. Электрический аналог такой системы – колебательный контур с изменяющейся со временем емкостью $C = C(t)$. Математический анализ таких систем приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых зависят от времени.

Будем различать два класса задач, соответствующих двум классам параметрических систем.

1. *Резонансные параметрические системы*. К ним относятся системы, для которых характерное время изменения параметров того же порядка, что и характерное время изменения переменных в системе. Например, если частота гармонического осциллятора, описываемого уравнением $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, зависит от времени и время изменения параметра порядка $t_{\text{хар}} \sim 2\pi / \omega_0$, то такой осциллятор относится к классу резонансных параметрических систем.

2. *Нерезонансные параметрические системы*. Им соответствуют системы, параметры которых меняются очень быстро или очень медленно по сравнению с характерным временем изменения переменных.

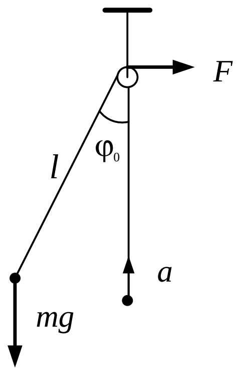


Рис. 4.1

Классический пример параметрического резонанса – раскачивание качелей ребенком, регулярно приседающим и поднимающимся и тем самым периодически изменяющим положение центра тяжести системы (правда, ребенок об этом не подозревает!). Для выяснения механизма этого способа возбуждения колебаний обратимся к математическому маятнику, длину которого можно менять, подтягивая и опуская нить, переброшенную через блок (рис. 4.1). Пусть в момент каждого прохождения через равновесное положение, когда нить натянута наиболее сильно, маятник подтягивается внешней силой F на некоторую небольшую высоту $a \ll l$. А в каждом крайнем положении нить опускается на ту же длину a. Таким образом, в течение каждого периода колебаний маятник будет дважды удлинен и укорочен; другими словами, частота периодического изменения параметра системы (длины l) будет в два раза больше частоты собственных колебаний.

Поскольку удлинение нити происходит при наклонном положении маятника, то в эти моменты он опускается на высоту $a\cos\varphi_0$ (φ_0 – угловая амплитуда колебаний), что меньше высоты подъема в моменты подтягивания нити. Поэтому за каждое подтягивание и опускание нити внешняя сила производит против силы тяжести работу

$$A_{mg} = mga\left(1-\cos\varphi_0\right) \approx \frac{1}{2}mga\varphi_0^2$$

(угол φ_0 предполагаем малым, т.е. $\cos\varphi_0 \approx 1-\varphi_0^2/2$). Кроме того, внешняя сила производит работу против центробежной силы (растягивающей нить) в нижнем положении маятника:

$$A_{\text{цб}} = \frac{mv_0^2}{l}\cdot a\,,$$

где v_0 – максимальная скорость маятника. Таким образом, полная работа внешней силы за период колебаний маятника составит

$$A = 2\left(\frac{1}{2}mga\varphi_0^2 + \frac{mv_0^2}{2}a\right).$$

С учетом того, что $v_0 = l\varphi_0\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – собственная частота колебаний маятника, имеем

$$A = 6\frac{a}{l}\frac{mv_0^2}{2}.$$

Видно, что работа, производимая внешней силой над маятником, положительна и пропорциональна его энергии. Поэтому энергия маятника будет систематически возрастать, получая за каждый период небольшое приращение, пропорциональное самой этой энергии и величине $\mu = a/l$. В этом и заключается механизм параметрического резонанса. Периодическое изменение параметров колебательной системы с частотой, удвоенной по сравнению с собственной частотой, может привести к систематическому возрастанию ее средней энергии W, причем скорость этого возрастания пропорциональна самой энергии

$$\frac{dW}{dt} \sim W.$$

Это соотношение того же вида, как и при затухающих колебаниях, с тем, однако, отличием, что производная dW/dt *положительна*, а не отрицательна. Это значит, что энергия (а с нею и амплитуда) колебаний экспоненциально возрастает со временем.

Точно такая же ситуация может наблюдаться и в электрическом колебательном контуре. Рассмотрим линейный колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных L, R и C. Пусть емкость конденсатора меняется во времени с помощью какого-то внешнего устройства по закону, изображенному на рис. 4.2, *а*. Предположим, кроме того, что заряд на конденсаторе меняется по закону, близкому к гармоническому.

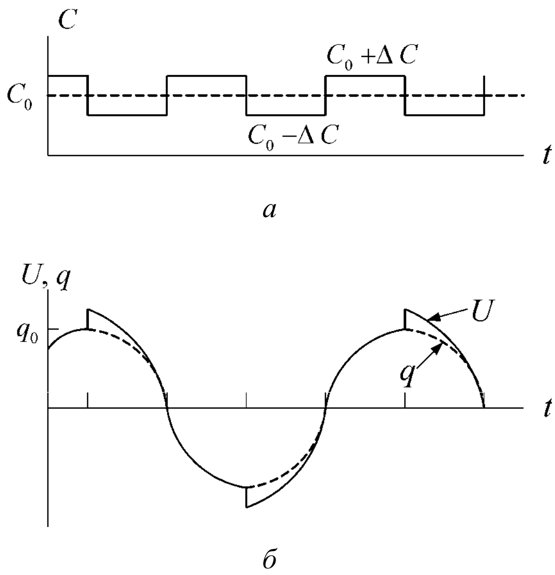


Рис. 4.2

При каждом уменьшении емкости C_0 на $2\Delta C$ энергия конденсатора увеличивается. Заряд же q при скачкообразном изменении емкости не меняется, так как является инерционной величиной. Пусть частотные и фазовые соотношения между $q(t)$ и $C(t)$ таковы, что емкость конденсатора уменьшается в те моменты, когда заряд на емкости проходит через экстремум (рис. 4.2, *б*), а обратное увеличение емкости – при разряженном конденсаторе. Тогда вложение энергии в систему будет максимальным, так как при раздвижении обкладок конденсатора для уменьшения его емкости совершается максимальная работа против кулоновских сил. Частота изменения параметра (емкости) в этом случае в два раза выше частоты собственных колебаний в контуре.

Рассчитаем приращение энергии в контуре ΔW в момент скачка емкости:

$$\Delta W = \frac{q_0^2}{2}\left[\frac{1}{C_0 - \Delta C} - \frac{1}{C_0 + \Delta C}\right] = \frac{q_0^2}{2}\frac{2\Delta C}{C_0^2 - \left(\Delta C\right)^2}.$$

Полагая $\Delta C << C_0$, можно записать

$$\Delta W \approx \frac{q_0^2}{2C_0}\frac{2\Delta C}{C_0} = W_0\frac{2\Delta C}{C_0},$$

где W_0 – энергия, запасенная в конденсаторе до скачка емкости, $W_0 = q_0^2 / 2C_0$. Если ввести глубину модуляции параметра

$$\mu = \frac{\Delta C}{C_0},$$

то общее приращение энергии в контуре за один период колебаний при параметрической «накачке» составит

$$2\Delta W = \frac{q_0^2}{2C_0}4\mu = W_0 \cdot 4\mu. \tag{4.1}$$

Заметим, что, как и в случае раскачки качелей, величина вложения энергии пропорциональна самой энергии.

Определим теперь потери энергии в контуре. Если считать колебания заряда приближенно гармоническими, т.е. $q = q_0 \sin\omega t$, то средняя мощность потерь составляет $\frac{1}{2}R\dot{q}^2 = \frac{1}{2}R\omega^2 q_0$. Тогда энергия, теряемая системой за один период колебаний T,

$$W_{\text{дис}} = \frac{1}{2}R\omega^2 q_0^2 T = \pi R\omega q_0^2. \tag{4.2}$$

Сравнивая (4.1) и (4.2), получаем условие, при выполнении которого вкладываемая энергия превосходит потери, и в системе происходит нарастание колебаний

$$\frac{q_0^2}{2C_0}4\mu > \pi R\omega q_0^2 \rightarrow \mu > \mu_{\text{порог}} = \frac{1}{2}\pi R\sqrt{\frac{C_0}{L}} = \frac{\lambda}{2}, \qquad (4.3)$$

где λ – логарифмический декремент затухания контура, $\lambda = \pi R\sqrt{C_0 / L}$. Если емкость меняется с той же периодичностью, но по другому закону, то качественно получится тот же результат.

В рассмотренном примере параметр изменялся дважды за период возбуждаемых колебаний. Однако можно производить вложение энергии за счет изменения параметра один раз за период, два раза за три периода и вообще при выполнении условия

$$\Omega = \frac{2\omega}{n},$$

где Ω – частота изменения параметра; ω – частота возбуждаемых колебаний, $n = 1, 2, 3,...$ При этом, конечно, скорость вложения энергии в систему будет тем меньше, чем больше n.

Аналогичные соотношения мы получим, если скачком меняется индуктивность L. При этом $W_L = \frac{1}{2}LI^2$. Однако поскольку при изменении индуктивности изменяется так же и ток I, то для расчета энергии удобнее пользоваться выражением энергии через магнитный поток Ф, который является инвариантом при скачкообразном изменении индуктивности. Тогда при изменении L на величину $2\Delta L \left(\Delta L << L_0\right)$

$$\Delta W = \frac{\Phi_0^2}{2}\left(\frac{1}{L_0 - \Delta L} - \frac{1}{L_0 + \Delta L}\right) \approx W_0 \cdot 2\mu,$$

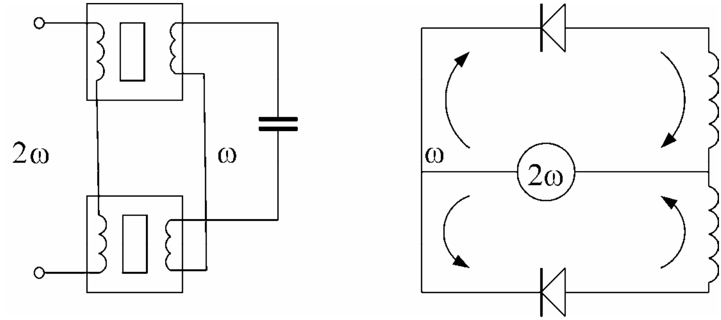
где $\mu = \Delta L / L_0$.

Отметим, что в линейной колебательной системе при выполнении условия параметрического возбуждения колебаний (условия параметрического резонанса) происходит неограниченное нарастание амплитуды возбужденных колебаний. Связано это с тем, что и потери, и вложение энергии в данном случае пропорциональны квадрату амплитуды колебаний (пропорциональны колебательной энергии системы). Для вынужденных колебаний в линейных системах при силовом воздействии вложение энергии пропорционально первой степени амплитуды колебаний, а потери по-прежнему пропорциональны квадрату амплитуды, что приводит к образованию конечной амплитуды вынужденных колебаний.

Очевидно, что параметрическое возбуждение колебаний возможно лишь при изменении одного из реактивных параметров L или C. Изменение R может привести лишь к изменению закона диссипации, но система остается диссипативной.

Ранее уже отмечалось, что для нелинейных систем не представляется возможным провести четкое разграничение между силовым и параметрическим воздействиями. При силовом воздействии вынужденный колебательный процесс будет за счет нелинейных свойств системы приводить к периодическому изменению соответствующих параметров. Поэтому, в конечном счете, результирующий вынужденный процесс может иметь некоторое сходство с параметрически возбуждаемым колебательным процессом; может нарушаться монотонность изменения амплитуды при изменении соотношения частот и могут наблюдаться интенсивные колебания при частотных соотношениях, типичных для параметрических систем.

В связи с этими особенностями поведения нелинейных систем представляется разумным собственно параметрическим воздействием считать воздействие, при котором принудительное изменение реактивных параметров системы не сопровождается введением в систему соответствующих периодических сил, способных вызвать обычным путем вынужденные колебания. Это, например, может быть реализовано при механическом изменении емкости или индуктивности. Возможно также осуществление балансных схем (рис. 4.3), в которых подбором соответствующих элементов можно добиться практически полной компенсации ЭДС, наводимых на частоте накачки $\Omega = 2\omega$, и рассматривать последние как колебательные цепи с периодически изменяющимися параметрами. В первой схеме



а *б*

Рис. 4.3

(рис. 4.3, *а*) происходит периодическое изменение индуктивности с частотой 2ω, во второй (рис. 4.3, *б*) – периодическое изменение емкости, образованной двумя запертыми *p*–*n*-переходами в полупроводниковых диодах, также с частотой накачки $\Omega = 2\omega$.

4.2. Параметрический резонанс в консервативной линейной системе. Уравнение Матье

Приступим теперь к математическому описанию параметрического резонанса и начнем с простейшего случая линейной колебательной системы без затухания. Рассмотрим, например, электрический колебательный контур, включающий в себя индуктивность L и емкость C, которая периодически изменяется со временем. В предыдущем разделе мы задавали ступенчатое изменение емкости (рис. 4.2), которое внешне выглядит очень просто, но представляет значительные трудности для его аналитического описания. Поэтому воспользуемся разложением данной ступенчатой функции в ряд Фурье и возьмем только первые два слагаемых

$$C(t) = C_0 + \Delta C \cos \Omega t = C_0 \left(1 + \mu \cos \Omega t\right).$$

Здесь C_0 – среднее значение емкости, Ω – частота ее изменения, $\mu = \Delta C / C_0$ – глубина модуляции емкости. В этом случае уравнение колебаний заряда на емкости будет иметь вид

$$\ddot{x} + \frac{1}{LC_0}\left(1+\mu\cos\Omega t\right)^{-1} x = 0.$$

И при малой глубине модуляции $\left(\mu \ll 1\right)$ последнее уравнение переходит в уравнение

$$\ddot{x} + \omega_0^2\left(1-\mu\cos\Omega t\right)x = 0, \tag{4.4}$$

где ω_0 – частота собственных колебаний, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$.

Данное уравнение хорошо известно из теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и носит название *уравнения Матье*. К подобному виду нетрудно привести уравнение колебаний математического маятника, длина подвеса которого изменяется по закону $l = l_0\left(1+\mu\cos\Omega t\right)$. Теория этих уравнений разработана с большой полнотой, известны и все существенные свойства их решений, обычно записываемых в виде

$$x = c_1\chi(t)e^{\lambda t} + c_2\chi(-t)e^{-\lambda t}, \tag{4.5}$$

где $\chi(t)$ – ограниченные функции с периодом, равным периоду изменения параметра или половине этого периода, а λ – комплексная величина, называемая *характеристическим показателем*. Вещественная часть λ определяет, имеет ли решение возрастающий характер или нет.

При произвольных μ функции вида (4.5) выражаются через специальные функции – функции Матье, которые затабулированы и свойства которых хорошо известны. Мы же попытаемся решить задачу (4.4) в простых функциях, считая $\mu \ll 1$. При $\mu = 0$ решение уравнения (4.4) известно:

$$x(t) = x_0(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right).$$

Поэтому есть надежда, что и при $\mu \neq 0,$ но малом, решение будет мало отличаться от известного, а поправки можно будет вычислять рекуррентным способом, т.е. каждое последующее приближение будет определяться предыдущим. Итак, воспользуемся теорией возмущений, в основе которой лежит знание решения при $\mu = 0.$ Будем искать решение (4.4) в виде

$$x(t) = x_0(t) + \mu x^{(1)}(t) + \mu^2 x^{(2)}(t) + \ldots + \mu^n x^{(n)}(t)\,. \tag{4.6}$$

Этот ряд не обязательно должен сходиться: нужно только, чтобы он сходился асимптотически. Ряд называется асимптотически сходящимся, если решение переходит в точное при стремлении к нулю малого параметра.

Решение в виде (4.6) имеет смысл только в том случае, когда поправки $x^{(i)}$ к нулевому приближению x_0 не нарастают со временем. Подставим (4.6) в (4.4) и сгруппируем члены при одинаковых степенях μ. Это дает нам уравнение

$$\begin{gathered}\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x + \mu\left[\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) - x_0\omega_0^2\cos\Omega t\right] + \\ +\mu^2\left[\ddot{x}^{(2)}(t) + \omega_0^2 x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)\omega_0^2\cos\Omega t\right] + \ldots \\ \ldots + \mu^n\left[\ddot{x}^{(n)}(t) + \omega_0^2 x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)\omega_0^2\cos\Omega t\right] \equiv 0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Все скобки в (4.7) имеют разный порядок величины и скомпенсировать друг друга не могут, поэтому для выполнения тождества каждая из скобок должна равняться нулю. Таким образом, мы получаем рекуррентную систему уравнений для нахождения i-го приближения. Как видно из (4.7), каждое из уравнений представляет собой уравнение гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила в виде набора гармоник. Например, для поправки первого приближения $x^{(1)}$ имеем

$$\ddot{x}^{(1)}(t) + \omega_0^2 x^{(1)}(t) = \omega_0^2 A\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)\cos\Omega t$$

или

$$\ddot{x}^{(1)}(t)+\omega_0^2 x^{(1)}(t)=\frac{\omega_0^2 A}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_0-\Omega\right)t+\varphi\right]+\cos\left[\left(\omega_0+\Omega\right)t+\varphi\right]\right\}.$$

Отсюда видно, что вынуждающая сила в правой части содержит две гармонические составляющие – на частотах $\left(\omega_0-\Omega\right)$ и $\left(\omega_0+\Omega\right)$. Чтобы поправка $x^{(1)}(t)$ не нарастала со временем, необходимо, чтобы эти гармоники были нерезонансны с колебаниями на частоте ω_0, т.е. необходимо, чтобы $\left|\omega_0-\Omega\right|\neq\omega_0$ и $\Omega\neq 2\omega_0$. Но ведь нас как раз и интересует случай параметрического резонанса, наступающего именно на этой частоте! При резонансе же наблюдается секулярный рост во времени поправки $x^{(1)}(t)$ и поэтому решение вида $x(t)=$ $=x_0(t)+\mu x^{(1)}(t)$ имеет смысл лишь на временах порядка нескольких периодов. Как исправить решение, чтобы им можно было пользоваться и при резонансе? Единственный выход из положения – считать амплитуду и фазу главной части решения уже не постоянными величинами, а медленно меняющимися функциями времени, т.е. $A=A(\mu t),\ \varphi=\varphi(\mu t)$. В подобном суммировании резонансных составляющих в разных порядках теории возмущений с главной частью решения и заключается основная идея большинства методов малого параметра, в том числе и для нелинейных систем.

Вернемся теперь к нашей задаче и рассмотрим резонансный случай $\Omega=2\omega_0+\mu\delta$, где $\mu\delta=\delta'$ – малая расстройка. Тогда уравнение (4.4) примет вид

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\mu\omega_0^2\cos\left[\left(2\omega_0+\delta'\right)t\right]x\,, \tag{4.8}$$

а его решение

$$x(t)=A(\mu t)\cos\left[\left(\omega_0+\delta'/2\right)t\right]+B(\mu t)\sin\left[\left(\omega_0+\delta'/2\right)t\right]+\mu x^{(1)}(t)\,. \tag{4.9}$$

Здесь $A(\mu t)$ и $B(\mu t)$ – медленно меняющиеся по сравнению с $\cos[...]$ и $\sin[...]$ функции времени. Эти функции и определим как раз из условия ненарастания добавки $x^{(1)}(t)$. Подставим (4.9) в уравнение (4.8) и приравняем коэффициенты при μ в первой степени. Тогда, считая $\dot{A} \sim \mu A$ и $\dot{B} \sim \mu B$ (в этом мы скоро убедимся), получаем для $x^{(1)}(t)$ уравнение

$$\ddot{x}^{(1)} + \omega_0^2 x^{(1)} = \omega_0 \left[2\dot{A} + \delta' B - \frac{\mu\omega_0}{2} B \right] \sin\left[\left(\omega_0 + \delta'/2\right) t \right] + \\ + \omega_0 \left[-2\dot{B} + \delta' A + \frac{\mu\omega_0}{2} A \right] \cos\left[\left(\omega_0 + \delta'/2\right) t \right]. \tag{4.10}$$

Воспользуемся теперь свободой в выборе $A(\mu t)$, $B(\mu t)$ и потребуем, чтобы в правой части (4.10) резонансные слагаемые (т.е. с частотой ω_0) отсутствовали. Для этого определим $\dot{A}$ и $\dot{B}$ равенствами

$$\dot{A} = -\frac{\mu}{2}\left(\delta - \frac{\omega_0}{2} \right) B, \quad \dot{B} = \frac{\mu}{2}\left(\delta + \frac{\omega_0}{2} \right) A$$

(отсюда, кстати, видно, что наше предположение $\dot{A} \sim \mu A$ и $\dot{B} \sim \mu B$ оправдывается). Это и есть искомые уравнения для медленно изменяющихся амплитуд. Решение такой линейной системы уравнений, как обычно, ищем в виде $A, B \sim \exp(\lambda t)$. Тогда из условия нетривиальности решения получаем характеристическое уравнение для определения λ:

$$\lambda^2 = -\frac{\mu^2}{4}\left(\delta^2 - \frac{\omega_0{}^2}{4} \right).$$

Отсюда хорошо видно, что при достаточно малой расстройке

$$-\frac{\omega_0}{2} < \delta < \frac{\omega_0}{2} \tag{4.11}$$

амплитуды A и B будут нарастать и в системе реализуется параметрическая неустойчивость. Неравенство (4.11) определяет зону основного резонанса, границы которой определяются уравнением

$$\frac{\mu}{4} = \pm\left(\frac{2\omega_0}{\Omega} - 1\right).$$

При выводе этого уравнения мы использовали соотношение $\frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{\omega_0}{2\omega_0 + \mu\delta} \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\delta}{2\omega_0}\right)$, которое с учетом (4.11) приобретает вид $\frac{\omega_0}{\Omega} \approx \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\mu}{4}\right)$. На рис. 4.4 отображены границы зоны неустойчивости, соответствующей основному резонансу.

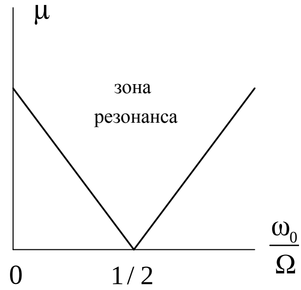


Рис. 4.4

Подобным же образом можно определить границы области второй зоны параметрического резонанса, когда $\Omega = \omega_0 + \mu\delta$. Соответствующий расчет дает для этих границ условие

$$-\frac{5\mu\omega_0}{24} < \delta < \frac{\mu\omega_0}{24},$$

из которого следует, что спектральная ширина второй зоны параметрической неустойчивости существенно у́же первой зоны ($\delta \sim \mu$).

При большой глубине модуляции μ правая часть уравнения $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x \omega_0^2 \cos\Omega t$ уже не является малой и асимптотический метод решения неприменим. В этом случае требуется численное интегрирование. Если не полагать глубину модуляции малой, то уравнение Матье для большей общности результатов удобно представить в виде

$$\ddot{x} + \left(a - 2q\cos 2\tau\right)x = 0, \tag{4.12}$$

где a и q – некоторые постоянные (не обязательно положительные), $\tau = \omega_0 t$ – безразмерное время. Результаты интегрирования уравнения Матье (4.12) для двух различных комбинаций a и q изображены на рис. 4.5. Хотя в обоих случаях параметр q системы одинаков (q = 0,1),

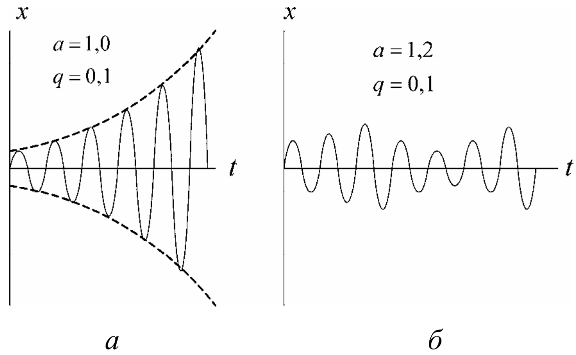


Рис. 4.5

но колебания имеют различный характер из-за различия параметра a $\left(a = 1;\ a = 1{,}2\right)$. В первом случае (рис. 4.5, *а*) колебания возрастают, система неустойчива; во втором случае (рис. 4.5, *б*) колебания остаются ограниченными, т.е. система устойчива.

Полная диаграмма зон устойчивых и неустойчивых решений уравнения Матье в переменных *a* и *q* представлена на рис. 4.6 и называется *диаграммой Айнса–Стретта* (заштрихованы зоны ус-

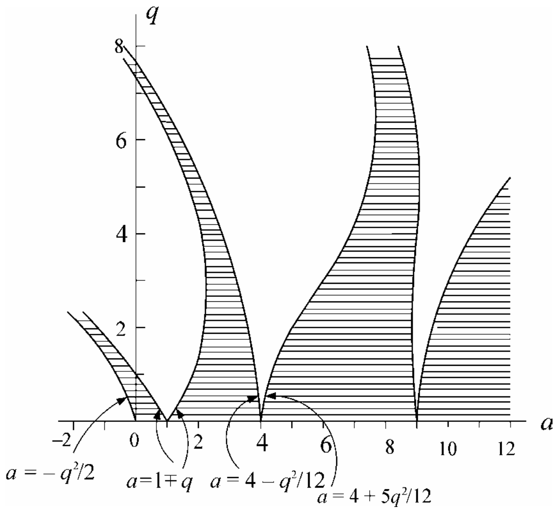


Рис. 4.6

тойчивости). Диаграмма Айнса–Стретта полностью освобождает от выполнения каких-либо операций по решению уравнения Матье. Достаточно составить это уравнение для конкретных значений параметров a и q, тогда диаграмма сразу дает ответ об устойчивости или неустойчивости системы.

4.3. Движение в быстро осциллирующем поле. Маятник Капицы

В предыдущем разделе, изучая поведение систем с изменяющимися параметрами, мы ограничивались специфическим случаем, когда частота изменения параметра системы была того же порядка, что и ее собственная частота ($\Omega \approx 2\omega_0 / n, n$ – малые числа). При этом, как мы убедились, возможна экспоненциальная неустойчивость. А что будет, если параметр системы меняется очень быстро по сравнению с собственной частотой системы ω_0?

Рассмотрим нелинейный осциллятор, на который действует зависящая от x периодическая сила:

$$\ddot{x} + f(x) = F(x)\cos\omega t. \tag{4.13}$$

Здесь $\omega >> 1/T$, где $T = 2\pi / \omega_0$ – характерный период движения автономного осциллятора. Разумно искать решение (4.13) в виде суммы медленной и быстро осциллирующей составляющих:

$$x(t) = X(t) + \mu\chi(t), \tag{4.14}$$

где $X(t)$ и $\chi(t)$ изменяются соответственно с характерными временами $T \sim 2\pi / \omega_0$ и $\tau \sim 2\pi / \omega$, а $\mu \sim \omega_0 / \omega << 1$ – малый параметр. Такой вид решения физически оправдан, так как, благодаря инерционности, осциллятор должен слабо откликаться на быстрые внешние пульсации. Подставим (4.14) в (4.13):

$$\ddot{X} + \mu\ddot{\chi} + f\left(X + \mu\chi\right) = F\left(X + \mu\chi\right)\cos\omega t. \tag{4.15}$$

Разложим функции $f\left(X+\mu\chi\right)$ и $F\left(X+\mu\chi\right)$ в ряд и ограничимся в силу малости μ двумя членами:

$$f\left(X+\mu\chi\right)\approx f(X)+\mu\chi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_X, \quad F\left(X+\mu\chi\right)\approx F(X)+\mu\chi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X.$$

Тогда уравнение (4.15) переходит в уравнение

$$\ddot{X}+\mu\ddot{\chi}=-f(X)-\mu\chi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_X+\left[F(X)+\mu\chi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X\right]\cos\omega t. \qquad (4.16)$$

Это уравнение содержит пульсационные (быстрые) и медленно изменяющиеся слагаемые. Для того чтобы их отделить одно от другого, проведем усреднение (4.16) по малому периоду $\tau=2\pi/\omega$:

$$\left\langle\ddot{X}\right\rangle_\tau+\mu\langle\ddot{\chi}\rangle_\tau=-\langle f(X)\rangle_\tau-\mu\left\langle\chi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_X\right\rangle_\tau+$$
$$+\left\langle\left[F(X)+\mu\chi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X\right]\cos\omega t\right\rangle_\tau.$$

Пользуясь тем, что при усреднении по быстрому времени функция $X(t)$ изменяется медленно, получаем два связанных уравнения для быстрой и медленной функций χ и X:

$$\ddot{X}=-f(X)+\mu\left\langle\chi\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X\cos\omega t\right\rangle_\tau, \qquad (4.17)$$

$$\mu\ddot{\chi}=-\mu\chi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_X+F(X)\cos\omega t. \qquad (4.18)$$

Так как в уравнении (4.18) слагаемое $\mu\chi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_X$ мало по сравнению с $\mu\ddot{\chi}\sim\mu\omega^2\chi\sim\omega_0\omega\chi$, то им можно пренебречь. Это позволяет уравнение (4.18) сразу проинтегрировать (при интегрировании по быстрому времени функцию $F(X)$ можно считать константой). В результате находим

$$\chi = -\frac{F(X)}{\mu\omega^2}\cos\omega t.$$

Подставляя это соотношение в (4.17), получаем

$$\ddot{X} + f(X) = -\frac{1}{\omega^2}\left\langle F(X)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X \cos^2\omega t\right\rangle_\tau .$$

Так как $\left\langle \cos^2\omega t\right\rangle = 1/2,$ то уравнение, описывающее медленные движения осциллятора, приобретает вид

$$\ddot{X} + f(X) + \frac{1}{2\omega^2}F(X)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X = 0. \qquad (4.19)$$

Мы получили очень важный результат, совершенно неожиданный с точки зрения интуитивных представлений. Вместо того, чтобы, «мелко вибрируя» под действием быстрых внешних пульсаций, сохранять усредненное движение по траекториям, совпадающим с траекториями автономного аналога, новый эффективный осциллятор ведет себя совершенно иначе – в возвращающей силе появляется дополнительное не малое слагаемое, пропорциональное квадрату амплитуды внешних пульсаций $F(X)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X$.

Впервые этот результат был получен в 1951 г. П.Л. Капицей и продемонстрирован на маятнике с быстро вибрирующей в вертикальном направлении точкой подвеса. Теоретическая модель маятника Капицы представлена на рис. 4.7. Здесь обозначено: математический маятник массы m на невесомом стержне длиной l свободно вращается в точке подвеса A, которая колеблется вдоль оси Y с частотой ω и амплитудой A.

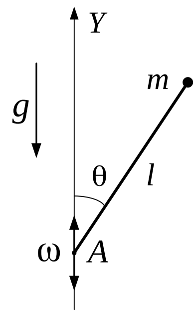


Рис. 4.7

Для описания движения маятника Капицы удобно перейти в неинерциальную систему отсчета, связанную с колеблющейся точкой подвеса. В этом случае к моменту внешних сил $M_{\text{вн}}$, действующих на маятник, следует добавить момент сил инерции M_{in}. Задавая закон движения точки подвеса в виде $y = A\sin\omega t$, для M_{in} нетрудно получить

$$M_{in} = -mlA\omega^2 \sin\theta \sin\omega t.$$

Тогда уравнение движения маятника будет иметь вид

$$ml^2\ddot{\theta} = M_{\text{вн}} - mlA\omega^2 \sin\theta \sin\omega t. \qquad (4.20)$$

Если момент внешних сил обусловлен силой тяжести, то $M_{\text{вн}} = mgl\sin\theta.$ В уравнении (4.20) угол θ складывается из двух частей: медленно изменяющейся составляющей $\varphi(t)$ и быстро осциллирующей $\beta(t)$:

$$\theta(t) = \varphi(t) + \beta(t)$$

($\varphi(t)$ и $\beta(t)$ имеют тот же смысл, что и функции $X(t)$ и $\mu\chi(t)$ в соотношении (4.14) соответственно). Для усредненных за время $\tau = 2\pi/\omega$ величин будем иметь $\langle\theta(t)\rangle \approx \varphi(t), \langle\beta(t)\rangle = 0,$ т.е., как и в общем варианте, мы исключили из уравнений движения путем усреднения угол β, а угол θ заменяем углом φ, характеризующим то положение маятника, около которого происходят мелкие вибрации. Результат влияния вибраций точки подвеса на колебания маятника в этом приближении оказывается простым: появляется «вибрационный» момент, обусловленный силами инерции и стремящийся расположить маятник так, чтобы его стержень всегда был ориентирован по направлению вибраций подвеса, т.е. вдоль оси Y. Рассчитаем этот момент. Если уравнение (4.20) поделить на ml^2, то за величину $F(X)$, где $X = \varphi(t)$, необходимо принять

$$F(\varphi) = -\frac{A\omega^2}{l}\sin\varphi.$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X = -\frac{A\omega^2}{l}\cos\varphi.$$

В этом случае

$$\frac{1}{2\omega^2}F(X)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_X = -\frac{1}{2}\frac{A^2\omega^4}{\omega^2 l^2}\sin\varphi\cos\varphi.$$

И умножая это выражение на ml^2 (для перехода к моменту силы), находим окончательно среднее значение вибрационного момента

$$\langle M \rangle = -\frac{mA^2\omega^2}{4}\sin 2\varphi. \tag{4.21}$$

Этот момент не зависит от длины маятника и пропорционален квадрату амплитуды колебаний точки подвеса. Теперь уравнение движения маятника (4.20) с учетом (4.21) можно представить в виде

$$ml^2\ddot{\varphi} = M_{\text{эф}},$$

где $M_{\text{эф}} = M_{\text{вн}}(\varphi) - \dfrac{mA^2\omega^2}{4}\sin 2\varphi.$

В поле силы тяжести $M_{\text{вн}}(\varphi) = mgl\sin\varphi.$ Таким образом, среди состояний равновесия маятника, определяемых из равенства

$$M_{\text{эф}} = M_{\text{вн}}(\varphi) - \frac{mA^2\omega^2}{4}\sin 2\varphi = 0,$$

появляется состояние с $\varphi = 0,$ соответствующее положению маятника «вверх ногами»! Чтобы это состояние равновесия было устойчивым, необходимо $dM_{\text{эф}}/d\varphi < 0,$ откуда следует условие устойчивости

$$A^2\omega^2 > 2gl. \tag{4.22}$$

Такой маятник производит весьма неожиданное впечатление, так как может совершать колебания после начального толчка, находясь в положении «вверх ногами».

Результат (4.22) можно получить и из диаграммы Айнса–Стретта, опирающейся на решение уравнения Матье. Для «обычного» математического маятника уравнение колебаний при малых углах отклонения φ имеет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Если же привести в колебания точку подвеса маятника с амплитудой A и частотой ω последнее уравнение переходит в уравнение

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{A\omega^2}{l}\cos\omega t\right)\varphi = 0. \tag{4.23}$$

Это уравнение приводится к уравнению Матье в форме (4.12), если положить

$$2\tau = \omega t,\ a = \frac{4g}{\omega^2 l},\ q = \frac{2A}{l}. \tag{4.24}$$

Теперь из диаграммы Айнса–Стретта непосредственно видно, во-первых, что сколь бы малой ни была амплитуда A, неустойчивость нижнего положения маятника наступает вблизи значений $a = 1, 4, 9, \ldots,$ т.е. при

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g}{l}},\quad \sqrt{\frac{g}{l}},\quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{g}{l}},\ldots$$

Но самое удивительное заключается в том, что из диаграммы Айнса–Стретта следует и устойчивость *верхнего* положения маятника. Для этого достаточно формально изменить знак перед членом, содержащим ускорение g в уравнении (4.23), соответственно получаем

$$a = -\frac{4g}{\omega^2 l}$$

(остальные члены остаются прежними). Тогда из рис. 4.6 видно, что положение маятника «вверх ногами» (когда $a < 0$) может быть устойчивым. При небольших амплитудах A колебаний точки подвеса (когда $0 < |q| < 1$) устойчивость верхнего положения достигается, если выполняется неравенство $|a| < q^2/2$. В соответствии с (4.24) это условие принимает вид

$$A^2\omega^2 > 2gl,$$

что совпадает с выражением (4.22), полученным другим способом.

4.4. Параметрический резонанс в нелинейных системах (параметрический генератор)

Ранее уже отмечалось, что в линейной колебательной системе при выполнении условия параметрического резонанса происходит *неограниченное* нарастание амплитуды возбужденных колебаний. Это связано с тем, что и потери, и вложения энергии в данном случае пропорциональны квадрату амплитуды колебаний, т.е. запасу самой колебательной энергии. Ограничение амплитуды колебаний при параметрическом воздействии можно достичь за счет нелинейности системы. Даже без дальнейшего анализа ясно, что наличие нелинейности, вызывая неизохронность, будет приводить к изменению частоты собственных колебаний в связи с ростом амплитуды колебаний, а следовательно, к нарушению условий резонанса и к ограничению амплитуды параметрически возбужденных колебаний. Таким образом, для теоретического исследования параметрической генерации колебаний необходимо привлечь к рассмотрению нелинейные характеристики параметров колебательной системы. Их анализ позволит получить как закон установления амплитуды колебаний, так и значения стационарных амплитуд.

Рассмотрим более подробно методом медленно меняющихся амплитуд (ММА) процессы, происходящие в параметрическом генераторе при ограничении амплитуды колебаний в нем с помощью нелинейных элементов.

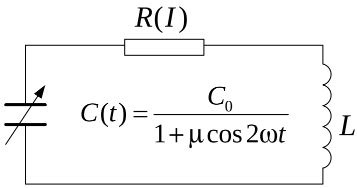


Рис. 4.8

Одноконтурный параметрический генератор с нелинейным затуханием. Его принципиальная схема представлена на рис. 4.8. Будем полагать, что со временем изменяется только реактивный параметр $C(t)$, а активное (омическое) сопротивление зависит от проходящего по нему тока $R(I)$. Такая система при определенных условиях, накладываемых на параметры системы, может стать одноконтурным параметрическим генератором.

Если омическое сопротивление увеличивается при увеличении проходящего через него тока, то повышается диссипация энергии и, как следствие, наступает баланс между параметрически подкачиваемой энергией и энергией, рассеиваемой на сопротивлении, что приводит к ограничению амплитуды колебаний. Пусть сопротивление зависит от тока по закону

$$R = R_0\left(1+\alpha_0 I^2\right),$$

где $\alpha_0 > 0$ – коэффициент нелинейности. Таким нелинейным сопротивлением на частотах до сотен килогерц может служить обыкновенная лампа накаливания. Зададим закон изменения емкости во времени в виде

$$C(t) = \frac{C_0}{1+\mu\cos 2\omega t}.$$

Здесь μ – глубина модуляции, ω – частота возбуждаемых колебаний в системе, примерно равная половине частоты параметрического резонанса Ω, что соответствует первой области параметрического возбуждения. Тогда применение закона Ома для колебаний заряда на емкости дает

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C_0}\left(1+\mu\cos 2\omega t\right)q = 0.$$

Для обеспечения общности результатов введем безразмерное время $\tau = \omega t$ и обозначим $q = x.$ В этом случае предыдущее уравнение запишется в виде

$$\ddot{x} + \frac{R_0}{\omega L}\left(1+\alpha_0\omega^2\dot{x}^2\right)\dot{x} + \frac{{\omega_0}^2}{\omega^2}\left(1+\mu\cos 2\tau\right)x = 0\,,$$

где дифференцирование ведется уже по безразмерному времени τ, а величина $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$. Отличие частоты возбуждаемых в контуре колебаний ω от частоты ω_0 будем задавать через относительную расстройку $\xi = 1 - \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$. Тогда, если ввести обозначения

$$\frac{R_0}{\omega L} = 2\beta,\ \ \alpha = \alpha_0\omega^2,$$

приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + 2\alpha\beta\dot{x}^3 + \left(1-\xi\right)\left(1+\mu\cos 2\tau\right)x = 0.$$

В этом уравнении величина β, как нетрудно убедиться, почти совпадает с логарифмическим декрементом затуханий (в дальнейшем будем называть ее просто декрементом), а величина α играет роль коэффициента нелинейности. Полагая, что колебательная система обладает малой диссипацией, а расстройка ξ и глубина модуляции μ так же малы, последнее уравнение можно привести к виду (2.13), предполагающему применение метода ММА,

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\beta\dot{x} - 2\alpha\beta\dot{x}^3 - \mu x\cos 2\tau \qquad (4.25)$$

(здесь опущен член второго порядка малости $\sim \mu\xi$). В соответствии с методом ММА (см. подразд. 2.5) решение уравнения (4.25) для первой области неустойчивости, как и для автономных систем, будем искать в виде

$$x = u\cos\tau + v\sin\tau, \quad \dot{x} = -u\sin\tau + v\cos\tau,$$

где $u(\tau)$ и $v(\tau)$ – медленно меняющиеся функции времени τ. Тогда для рассматриваемого случая можно записать укороченные уравнения, которые после усреднения примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi x - 2\beta\dot{x} - 2\alpha\beta\dot{x}^3 - \mu x\cos 2\tau\right)\sin\tau d\tau = \\
&= -\beta\left(1 + \frac{3}{4}\alpha A^2\right)u - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{2} + \xi\right)v = \varphi(u, v), \\
\dot{v} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi x - 2\beta\dot{x} - 2\alpha\beta\dot{x}^3 - \mu x\cos 2\tau\right)\cos\tau = \\
&= \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\mu}{2}\right)u - \beta\left(1 + \frac{3}{4}\alpha A^2\right)v = \psi(u, v),
\end{aligned} \tag{4.26}$$

где A^2 – квадрат амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний в системе, $A^2 = u^2 + v^2$.

В стационарном состоянии $\dot{u} = \dot{v} = 0$. Тогда из рассмотрения системы однородных уравнений (4.26) вытекает, что в системе возможно состояние покоя $(u_0 = v_0 = A_0 = 0)$ – первое стационарное состояние системы. Второе стационарное состояние системы с отличной от нуля амплитудой можно найти из (4.26), если ее записать в виде

$$\beta\left(1 + \frac{3}{4}\alpha A_0^2\right)u_0 = -\frac{1}{2}\left(\xi + \frac{\mu}{2}\right)v_0,$$

$$\beta\left(1 + \frac{3}{4}\alpha A_0^2\right)v_0 = \frac{1}{2}\left(\left(\xi - \frac{\mu}{2}\right)\right)u_0.$$

Поскольку $u_0 \neq 0$ и $v_0 \neq 0,$ то эта система эквивалентна равенству

$$\beta^2\left(1+\frac{3}{4}\alpha A_0^2\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\xi^2 - \frac{\mu^2}{4}\right).$$

Откуда находим выражение для стационарной амплитуды колебаний A_0:

$$A_0^2 = \frac{4}{3\alpha}\left(-1 \pm \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \xi^2}\right). \tag{4.27}$$

Так как коэффициент нелинейности $\alpha > 0$ и $\beta > 0,$ то знак минус перед корнем нужно опустить (по определению амплитуда должна быть положительна). Тогда из (4.27) видно, что условием существования стационарной отличной от нуля амплитуды колебаний является неравенство

$$\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \xi^2} > 1.$$

Из него вытекает, во-первых, что расстройка в системе не может превосходить величины

$$\xi^2 = \frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2, \tag{4.28}$$

и, во-вторых, на глубину модуляции должно быть наложено условие

$$\mu^2 > 16\beta^2 + 4\xi^2. \tag{4.29}$$

При нулевой расстройке ($\xi = 0$) выражение (4.29) практически совпадает с выражением (4.3) для порогового значения глубины модуляции $\mu_{\text{порог}}$, полученным из энергетических соображений и для ступенчатого закона модуляции. Выражения (4.28) и (4.29) определяют возможность или невозможность возбуждения параметрических колебаний в системе. Кроме того, из (4.27) видна роль нелинейности сопротивления. Если $\alpha \to 0$, т.е. уменьшать нелинейность системы, то амплитуда параметрических колебаний будет постепенно увеличиваться, и в пределе для линейной системы обращается в бесконечность, что согласуется с теорией параметрического возбуждения линейных диссипативных систем.

На рис. 4.9 представлены кривые параметрического возбуждения для разных величин декремента затухания β и фиксированной глубины модуляции. Область возбуждения симметрична относительно нулевой расстройки и сужается при увеличении потерь. Кроме того, ширина области параметрического возбуждения не зависит от нелинейности системы, а определяется только соотношением параметров μ, ξ и β. В частности, при данном μ и потерях в системе, больших или равных β_1, параметрические колебания невозможно возбудить. Области параметрического возбуждения для разных коэффициентов нелинейности и фиксированных μ и β приведены на рис. 4.10.

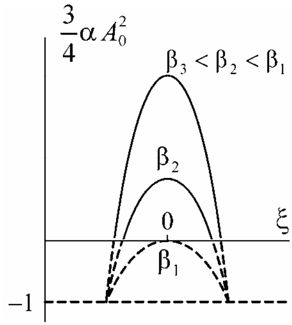


Рис. 4.9

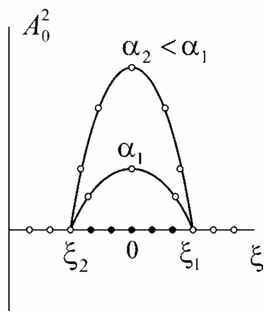


Рис. 4.10

Амплитуда параметрических колебаний в системе максимальна при нулевой расстройке и составляет

$$A_0^2\Big|_{\xi=0} = \frac{4}{3\alpha}\left(\frac{\mu}{4\beta} - 1\right).$$

Границы области возбуждения можно найти из выражения для стационарной амплитуды (4.27), приравнивая его нулю

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2}, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2}\ .$$

Исследование устойчивости найденных стационарных решений системы уравнений (4.26) можно провести методом малых вариаций, подробно описанным в подразд. 2.5. После выполнения простых, но достаточно громоздких выкладок для значений λ, входящих в детерминант (2.21) и характеризующих экспоненциальную неустойчивость состояний покоя системы $\left(u_0 = v_0 = A_0 = 0\right)$, получаем

$$\lambda = -\beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \xi^2}\ .$$

Для определения области неустойчивости найденных решений необходимо потребовать, чтобы Reλ было больше нуля. Это сразу дает нам соотношение параметров, при котором состояние покоя является неустойчивым

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \xi^2} > \beta \rightarrow \xi^2 < \frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2\ .$$

Последнее выражение в точности соответствует условию существования ненулевой стационарной амплитуды A_0. Таким образом, для области расстроек, удовлетворяющих неравенству $\xi^2 < \dfrac{\mu^2}{4} - 4\beta^2$, для которых существует стационарная отличная от нуля амплитуда A_0, состояние покоя неустойчиво. Следовательно, оно неустойчиво внутри области параметрического резонанса (от ξ_1 до ξ_2). Состояние покоя устойчиво вне области параметрического резонанса, когда Reλ < 0, и для соотношения параметров системы получается неравенство вида $\xi^2 > \mu^2/4 - 4\beta^2$.

Аналогичным образом проводится и анализ устойчивости состояний с ненулевой стационарной амплитудой $\left(A_0 \neq 0\right)$. В результате находим, что эта амплитуда устойчива $\left(\mathrm{Re}\,\lambda < 0\right)$ во всей области расстроек, где она существует $\left(-\xi_2 \leq \xi \leq \xi_1\right)$. Области устойчивых стационарных решений системы (4.26) на рис. 4.10 отмечены темными кружочками, а области неустойчивости стационарных состояний – светлыми кружочками.

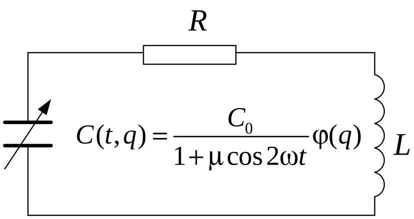


Рис. 4.11

Одноконтурный параметрический генератор с нелинейным реактивным элементом. Его принципиальная схема представлена на рис. 4.11. Будем полагать, что $L = \text{const}$, $R = \text{const}$, а емкость является не только функцией времени, но и нелинейно зависит от заряда q, т.е. $C = C(t)\varphi(q)$. Пусть емкость по-прежнему меняется со временем по закону

$$C(t) = \frac{C_0}{1+\mu\cos 2\omega t},$$

а напряжение на емкости U_C составит

$$U_C(q,t) = \frac{q}{C(t)}\left(1+\gamma q^2\right),$$

($\gamma > 0$ – коэффициент нелинейности), т.е. в отсутствие модуляции параметра напряжение на емкости изменяется по закону кубической параболы (конденсатор с сегнетоэлектриком, в котором с увеличением заряда емкость уменьшается (см. подразд. 1.3)).

Для такой схемы закон Ома имеет вид

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + U_C\left(q,t\right) = 0.$$

Как и в предыдущей задаче, введем обозначения $q = x, \tau = \omega t$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$, $\omega_0^2/\omega^2 = 1 - \xi, 2\beta = R/(\omega L)$ и будем полагать величины γ, ξ, β и μ малыми. В этом случае приходим к нелинейному дифференциальному уравнению движения, допускающему применение метода ММА

$$\ddot{x} + x = \xi x - 2\beta\dot{x} - \gamma x^3 - \mu x\cos 2\tau, \tag{4.30}$$

в котором отсутствуют члены второго порядка малости ($\gamma\xi$ и $\mu\xi$). Решение (4.30), как и прежде, ищем в виде

$$x = u\cos\tau + v\sin\tau, \quad \dot{x} = -u\sin\tau + v\cos\tau.$$

Тогда укороченные уравнения для u и v после усреднения примут вид

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi x - 2\beta\dot{x} - \gamma x^3 - \mu x\cos 2\tau\right)\sin\tau d\tau = \\
&= -\beta u - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{2} + \xi\right) - \frac{3}{4}\gamma A^2\right]v = \varphi(u, v), \\
\dot{v} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\xi x - 2\beta\dot{x} - \gamma x^3 - \mu x\cos 2\tau\right)\cos\tau = \\
&= -\beta v - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{2} - \xi\right) + \frac{3}{4}\gamma A^2\right]u = \psi(u, v),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

где $A^2 = u^2 + v^2$ – квадрат амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний в системе.

По-прежнему будем искать только стационарные решения этих уравнений. При $\dot{u} = \dot{v} = 0$ могут реализовываться два режима: состояние покоя системы $u_0 = v_0 = A_0 = 0$ и состояние с отличной от нуля амплитудой колебаний $u_0 \neq 0, v_0 \neq 0, A_0 \neq 0$. Нулевые стационарные решения $u_0 = v_0 = A_0 = 0$ возможны в системе при любых величинах параметров μ, β, γ и ξ (разумеется, в пределах малости этих величин). Стационарное, отличное от нуля решение системы (4.31) определяется из системы уравнений

$$\beta u_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{2}+\xi\right)-\frac{3}{4}\gamma A_0^2\right]v_0,$$

$$\beta v_0 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mu}{2}-\xi\right)+\frac{3}{4}\gamma A_0^2\right]u_0.$$

Откуда находим выражение для квадрата стационарной амплитуды

$$A_0^2 = \frac{4}{3\gamma}\left(\xi \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4}-4\beta^2}\right), \tag{4.32}$$

из которого следует, что чем меньше коэффициент нелинейности γ, т.е. чем ближе нелинейная система к линейной, тем больше возможная в системе амплитуда параметрических колебаний.

Определим теперь условия существования действительных значений отличной от нуля стационарной амплитуды. Так как $\gamma > 0$, то чтобы не исключать из рассмотрения область отрицательных расстроек ξ, необходимо потребовать выполнение условия $\mu^2/4 > 4\beta^2$. Тогда для выполнения условия $A_0^2 > 0$ необходимо

$$\xi^2 < \frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2,$$

что определяет минимальный порог глубины модуляции $\mu^2 > 4\xi^2 + 16\beta^2$.

На рис. 4.12 приведены кривые параметрического резонанса для одноконтурного параметрического генератора с ограничением амплитуды за счет нелинейной емкости (прямая *2* соответствует знаку плюс в выражении (4.32), а прямая *1* – знаку минус). Эти кривые отличаются от аналогичных кривых для случая нелинейной диссипации (см. рис. 4.9, 4.10) тем, что область возбуждения уже не ограничена замкнутой кривой. Граничные значения расстроек ξ_1 и ξ_2 находятся из условия $A_0^2 = 0$ и соответственно будут

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2} \text{ и } \xi_2 = -\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - 4\beta^2}.$$

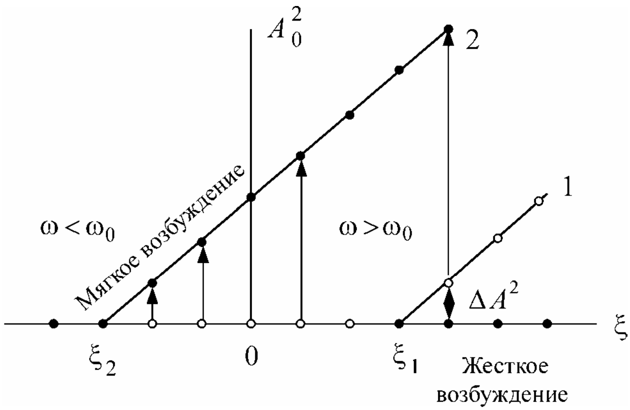


Рис. 4.12

Устойчивость найденных стационарных решений системы (4.31) можно провести методом малых возмущений. Тогда для случая ненулевой стационарной амплитуды определитель (2.21) принимает вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \lambda & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\beta - \lambda & -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu}{2} + \xi\right) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mu}{2} - \xi\right) & -\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(функции φ и ψ определяются из (4.31)). Откуда находим

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{4} - \xi^2}.$$

Состояние покоя системы неустойчиво $(\mathrm{Re}\lambda > 0)$ при $\xi^2 < \mu^2/4 - 4\beta^2$. Видно, что состояние покоя неустойчиво именно в пределах области существования ненулевой амплитуды параметрических колебаний. Вне данной области, т.е. при $\xi^2 > \mu^2/4 - 4\beta^2$, существует устойчивое стационарное состояние покоя, так как при этом условии $\mathrm{Re}\lambda < 0$.

Более подробный анализ устойчивости стационарных ненулевых решений показывает (см. рис. 4.12), что устойчивы состояния с темными кружками и неустойчивы – со светлыми кружками. При движении из области отрицательных расстроек амплитуда, оставаясь вначале нулевой, после значения $\xi_2 = -\sqrt{\mu^2/4 - 4\beta^2}$, мягко (плавно) начинает увеличиваться. В области расстроек от ξ_2 до ξ_1 состояние покоя неустойчиво и малейшие флуктуации в системе нарастают до $A_0^2 \neq 0$. При движении в обратном направлении (из области положительных расстроек) параметрические колебания можно возбудить при значениях, больших $\xi_1 = \sqrt{\mu^2/4 - 4\beta^2}$, но такое возбуждение может быть только жестким. Если системе, находящейся правее точки ξ_1, сообщить толчок ΔA^2, больший амплитуды колебаний в нижнем (неустойчивом) стационарном состоянии, то колебания в системе раскачаются до значения $A_0^2 \neq 0$, соответствующего устойчивой стационарной амплитуде для данной расстройки. При сообщении толчка, меньшего ΔA^2, в системе не возникает устойчивой параметрической генерации, такое возмущение со временем затухнет и снова наступит состояние покоя.

Экспериментальное исследование работы одноконтурных параметрических генераторов показывает, что кривые параметрического резонанса для них в действительности имеют вид, представленный на рис. 4.13. Здесь, как и ранее, темными кружочками отмечены устойчивые состояния, светлыми – неустойчивые. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, в использованном нами математическом приближении отсутствовали члены второго порядка малости ($\gamma\xi$ и $\mu\xi$). Уже учет только этих членов второго порядка малости приводит к согласию с экспериментом. Во-вторых, в реальных колебательных системах с нелинейными реактивными элементами необходимо учитывать также их нелинейную проводимость, например, сопротивление запертого полупроводникового диода или конденсатора с сегнетоэлектриком. Это сопротивление увеличивается с ростом амплитуды параметрических колебаний, в результате чего для областей параметрического возбуждения таких систем характерно сочетание специфических черт, присущих как системам с нелинейной реактивностью (наклон области возбуждения), так и системам с нелинейной диссипацией (замкнутость кривой, ограничивающей область возбуждения).

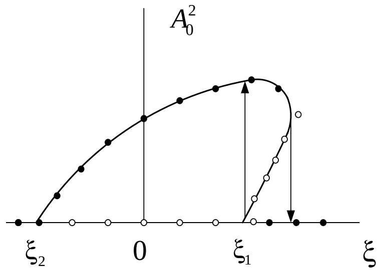


Рис. 4.13

При изучении одноконтурных параметрических генераторов мы, задавая закон изменения реактивного параметра во времени, например $C(t) = C_0/(1+\mu\cos 2\omega t)$, не рассматривали конкретный механизм его изменения. Такие генераторы принято называть *параметрическими генераторами первого рода*, в отличие от *параметрических генераторов второго рода* (*параметрических преобразователей*), в которых изменение нелинейного реактивного параметра происходит в результате действия некоторой периодической силы, включенной в колебательную систему. В подобных системах параметрический механизм возбуждения колебаний реализуется за счет управления нелинейным параметром с помощью напряжения накачки, что можно осуществить включением генератора напряжения в последовательный колебательный контур, содержащий нелинейный реактивный элемент.

Процесс параметрического возбуждения колебаний в таком генераторе можно представить следующим образом. Колебательный контур одноконтурного параметрического генератора представляет собой высокодобротную колебательную систему. В ней еще до включения генератора накачки вследствие тепловых флуктуаций существуют колебания с широким спектром частот, причем колебание с одной из частот ω, на которую примерно настроен контур параметрического генератора, значительно превышает все остальные по среднеквадратичной амплитуде. Тогда включение генератора накачки с частотой 2ω приведет к возрастанию амплитуды шумовой компоненты с частотой, равной половине частоты накачки (для первой области параметрической неустойчивости).

Таким образом, в системе при определенных условиях, накладываемых на параметры и характеристики нелинейного элемента, можно возбудить параметрические колебания, частота которых точно в два раза ниже частоты генератора накачки, а амплитуда напряжения накачки через нелинейный реактивный элемент влияет на амплитуду параметрических колебаний и ширину области возбуждения. Поэтому такой генератор и называют параметрическим преобразователем, т.е. устройством, преобразующим один периодический процесс в другой периодический процесс, причем оба процесса являются когерентными.

Глава 5
АВТОКОЛЕБАНИЯ

5.1. Основные определения и классификация автоколебательных систем

Большинство нелинейных динамических систем в общем случае неконсервативны. Практически в любой системе присутствуют потери (трение, излучение, нагрев и т.д.), и обычно система не является энергетически изолированной – на нее действуют различные внешние силы и поля, как статические, так и переменные. Какие принципиально новые (по сравнению с консервативными системами) явления возникают в диссипативных системах, в которых энергия может не только диссипировать из-за потерь, но и восполняться за счет неустойчивостей, связанных с неравновесностью системы? Самое важное и замечательное среди таких явлений – генерация незатухающих колебаний, свойства которых не зависят от того, когда и из какого начального состояния была запущена система. Эти колебания устойчивы как по отношению к внешним возмущениям, так и к изменению начальных условий. Системы, обладающие свойством генерировать такие колебания, были названы автоколебательными. Колебания в таких системах связаны с предельными циклами – асимптотически замкнутыми фазовыми траекториями.

Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, раскачка крыльев самолета в набегающем потоке воздуха при определенных условиях (флаттер), колебания шасси самолета при посадке на посадочную полосу (шимми), колебания воздуха в органной трубе, маятника в «ходиках», колебания тока в радиотехническом генераторе и др. – хорошо известные примеры автоколебаний. Автоколебания отличаются от собственных колебаний (их частота определяется параметрами системы, а амплитуда и фаза – начальными условиями) и вынужденных колебаний (их амплитуда, частота и фаза определяются внешней силой) тем, что их амплитуда и частота определяются только параметрами системы и не зависят от начальных условий (по крайней мере, в конечных пределах), а фаза несущественна (характеристики источника, естественно, влияют на параметры системы).

Для поддержания устойчивых вынужденных колебаний требуется внешнее периодическое воздействие. При параметрическом возбуждении колебаний происходит периодическое изменение параметров системы также за счет периодического внешнего воздействия. Автоколебательные системы принципиально нелинейны и неконсервативны, а сами автоколебания принципиально отличаются от других колебательных процессов в диссипативных системах тем, что для их поддержания, вообще говоря, не требуется периодических воздействий извне.

Рис. 5.1

В простейших автоколебательных системах, или автогенераторах, обычно можно выделить колебательную систему с затуханием (рис. 5.1), усилитель, нелинейный ограничитель – звено обратной связи. Если через W обозначить запас колебательной энергии в системе, то в стационарном режиме автоколебаний изменение энергии за период по определению равно нулю, т.е. $W\left(t+T\right)-W\left(t\right)=0,$ или $\left\langle \Delta W\right\rangle_T=0.$ Для консервативных систем $dW/dt\equiv 0,$ поскольку запас колебательной энергии $W=\text{const}.$ В случае диссипативных систем $dW/dt=-N(t),$ где $N(t)>0$ – функция диссипации, характеризующая мощность потерь в системе. Но для автоколебательных систем возможны интервалы времени при определенных амплитудах и скоростях, при которых $N(t)<0.$ Очевидно, это присуще только активным системам. Для таких систем должно быть выполнено равенство

$$\int_0^T F(t)dt=0. \qquad (5.1)$$

Отсюда вытекает, что в линейной и нелинейной диссипативных системах невозможен автоколебательный процесс. Для осуществления такого процесса функция диссипации $N(t)$ должна быть знакопеременной. При этом в течение одной части периода происходит пополнение колебательной энергии (что можно описать с помощью понятия отрицательного сопротивления), в течение другой его части – уменьшение энергии. Тогда можно обеспечить энергетический баланс. Если, к примеру, считать, что в электрической колебательной системе сопротивление зависит от протекающего через него тока $R = R(I),$ то для реализации автоколебаний необходимо потребовать, чтобы функция $R(I) \cdot I^2$ была знакопеременной. Только в этом случае можно выполнить условие (5.1), а для этого необходимо, чтобы знакопеременной была функция $R(I)$.

По поводу формы автоколебаний можно сделать некоторые предварительные физически обоснованные предположения. Если колебательная система (рис. 5.1) представляет добротный колебательный контур и в системе происходят автоколебания, то эти колебания будут близки к гармоническим; свойства цепи обратной связи лишь в небольшой степени повлияют на форму колебаний и в основном она служит только для пополнения колебательной энергии в течение части периода автоколебаний. Если при наличии автоколебаний разорвать цепь обратной связи, то в системе будут наблюдаться затухающие колебания. Автоколебательные системы, удовлетворяющие таким условиям, будем называть *автоколебательными системами осцилляторного (томсоновского) типа.* В осцилляторных системах потери энергии за период, а следовательно, и величина добавляемой энергии значительно меньше запаса энергии, накопленной в основной колебательной системе.

Если же колебательная система представляет собой апериодический контур, состоящий в основном из RL- или RC-элементов, то форма автоколебаний существенно зависит от свойств цепи обратной связи. Если в такой колебательной системе выполнены условия самовозбуждения, то форма генерируемых колебаний, как правило, далека от синусоидальной, а период колебаний связан со временем релаксации системы (хотя в некоторых случаях подбором параметров автоколебательной системы можно заставить ее генерировать колебания, близкие к гармоническим). Такие автоколебательные системы принято называть *релаксационными*. В них после разрыва канала, по которому восполняются потери, колебания апериодически затухают независимо от формы этих колебаний до разрыва цепи обратной связи. Таким образом, в релаксационных автоколебательных системах происходит 100%-й обмен энергии (рассеиваемой на пополняемую) в течение каждого периода автоколебаний.

Как уже отмечалось, для получения автоколебаний в системе необходимо, чтобы функция диссипации была знакопеременной. В механических колебательных системах с трением данная ситуация может быть реализована, если зависимость силы трения от скорости имеет так называемый падающий участок. В обычных системах с трением коэффициент затухания β, входящий в уравнение движения вида

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

является всегда положительной величиной. Это соответствует тому, что на преодоление сил трения расходуется энергия. Если бы значение β было отрицательным, то энергия системы возрастала бы и «трение» в этом случае являлось источником энергии. Ясно, что в системе, не обладающей собственным источником энергии, это не возможно, поэтому β всегда положительно. Но если система обладает собственным резервуаром энергии, то, вообще говоря, можно допустить, что $\beta < 0$ и что энергия системы возрастает за счет «трения». Конечно, это уже не будет трение в обычном смысле. Но поскольку оно характеризуется тем же членом дифференциального уравнения $(\beta\dot{x})$, что и обычное трение, о нем говорят как об «отрицательном трении» и «отрицательном сопротивлении».

Рассмотрим простейший пример – груз на быстродвижущейся ленте (рис. 5.2). Сила трения ленты о груз есть некоторая, вообще

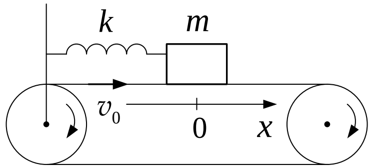


Рис. 5.2

говоря, довольно сложная функция относительной скорости ленты v_0 и тела $\dot{x}$, обозначим ее как $F\left(v_0 - \dot{x}\right)$. Если считать все остальные силы трения, действующие в этой системе (например, сопротивление воздуха или внутреннее трение в пружине), пропорциональными первой степени скорости с коэффициентом пропорциональности r, то уравнение движения груза массы m запишется как

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + rx = F\left(v_0 - \dot{x}\right).$$

Ограничимся значениями скоростей тела $\dot{x} \ll v_0$ и разложим функцию F в ряд, оставив первые два члена: $F\left(v_0 - \dot{x}\right) \approx$ $\approx F\left(v_0\right) - \dot{x}F'\left(v_0\right)$. Тогда уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + \left[r + F'\left(v_0\right)\right]\dot{x} + kx = F\left(v_0\right). \tag{5.2}$$

Стоящий справа постоянный член определяет только смещение положения равновесия в направлении движения ленты. Что же касается коэффициента $r + F'\left(v_0\right)$, находящегося при $\dot{x}$, то его знак и величина зависят от вида характеристики трения. Величина $F'\left(v_0\right)$ определяет крутизну данной характеристики и в случае падающей характеристики трения $F'\left(v_0\right) < 0$. Если характеристика трения в области v_0 спадает достаточно круто, то $r + F'\left(v_0\right) < 0$ и уравнение (5.2) описывает систему с «отрицательным трением». На практике этот случай реализуется довольно часто, так как характеристики трения сухих поверхностей имеют обычно вид, изображенный на рис. 5.3, и, значит, почти всегда имеют вначале, при малых скоростях, более или менее значительный участок крутого падения. В этой области рассмотренное устройство и будет представлять линейную систему с отрицательным трением.

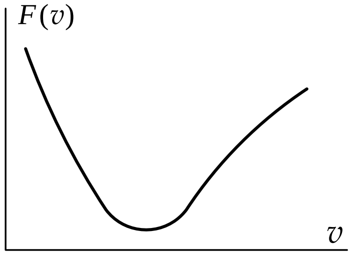


Рис. 5.3

В электрических колебательных системах можно использовать различные по физической природе нелинейные двухполюсники с так называемыми «падающими» участками на своих вольт-амперных характеристиках. На этих участках путем принудительного поддержания определенного тока I_0 или напряжения U_0 обеспечивается появление в системе дифференциального отрицательного сопротивления $\left(dI/dU\right)^{-1}$. Такими падающими характеристиками обладают туннельные диоды, газоразрядные приборы, многосеточные электронные лампы, тиристоры, диоды Ганна, джозефсоновские сверхпроводящие переходы и др. На рис. 5.4, *а* приведена вольт-амперная характеристика туннельного диода – так называемая характеристика *N*-типа, а на рис. 5.4, *б* – вольт-амперная характеристика газоразрядного прибора *S*-типа.

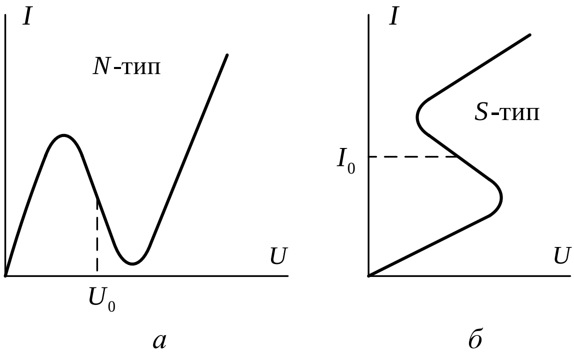


Рис. 5.4

В случае параллельного подсоединения нелинейного двухполюсника с отрицательным дифференциальным сопротивлением к параллельному контуру (рис. 5.5, *а*) необходимо использовать элемент с характеристикой *N*-типа, так как общим для всех элементов такой колебательной системы является напряжение U. Для такой системы нетрудно получить

$$\frac{1}{L}\int U dt + C\frac{dU}{dt} + \frac{U}{R_0} + I_N(U) = 0,$$

или, после дифференцирования по времени,

$$\ddot{U} + \frac{1}{C}\left[\frac{1}{R_0} + \frac{dI_N}{dU}\right]\dot{U} + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Здесь dI_N / dU – дифференциальная проводимость нелинейного элемента с падающей характеристикой, называемая также крутизной характеристики и обозначаемая $S(U)$.

Если на нелинейный элемент подать напряжение, при котором попадаем на падающий участок вольт-амперной характеристики, то при соответствующей крутизне характеристики в определенной области изменения напряжения можно добиться условия

$$\left[\frac{1}{R_0} + \frac{dI_N}{dU}\right] < 0,$$

что эквивалентно наличию отрицательного сопротивления.

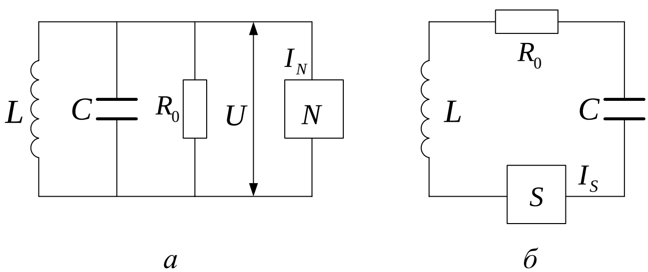


Рис. 5.5

При последовательном соединении элементов L, C, R_0 (рис. 5.5, *б*) и нелинейного двухполюсника с характеристикой *S*-типа общим для них является ток $I = I_S$ и для него нетрудно получить

$$L\frac{dI}{dt}+R_0 I+\frac{1}{C}\int I dt+U_S(I)=0,$$

где U_S -напряжение на элементе *S*-типа. После дифференцирования по времени получаем

$$\ddot{I}+\frac{1}{L}\left[R_0+\frac{dU_S}{dI}\right]\dot{I}+\frac{1}{LC}I=0.$$

Отсюда видно, что подбором дополнительного тока I_0, обеспечивающего в рабочей точке падающую характеристику с соответствующей крутизной, можно добиться условия

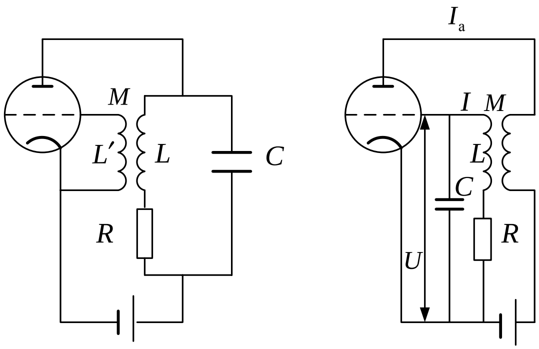
$$\left[R_0+\frac{dU_S}{dI}\right]<0,$$

эквивалентного наличию отрицательного сопротивления.

Заметим, что и для параллельного контура и для последовательного создание неустойчивого состояния равновесия с отрицательным сопротивлением требует введения в систему дополнительных источников напряжения или тока.

Прекрасным примером электрической системы с отрицательным сопротивлением, в которой возможно установление автоколебаний, является классический генератор Ван-дер-Поля. Он включает в себя электронную лампу, колебательный контур и цепь обратной связи между сеткой и анодом. На рис. 5.6 представлена схема генератора Ван-дер-Поля с контуром в цепи анода (рис. 5.6, *а*) и контуром в цепи сетки (рис. 5.6, *б*). Чтобы понять, как формируется здесь отрицательное сопротивление, обратимся к схеме с колебательным контуром, включенным в цепь сетки (рис. 5.6, *б*). Если для простоты пренебречь сеточным током, то для данного контура можем записать $I=-CdU/dt, RI=U-LdI/dt-MdI_{\text{а}}dt.$ Величина M – взаимная индуктивность, $MdI_{\text{а}}/dt$ – ЭДС, которая вводится в контур под воздействием анодного тока $I_{\text{а}}$, протекающего по катушке в цепи анода, U – напряжение на конденсаторе. Из этих уравнений следует

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + RC\frac{dU}{dt} + U = M\,\frac{dI_{\text{а}}}{dt}. \qquad (5.3)$$



а *б*

Рис. 5.6

Будем полагать, что напряжение на конденсаторе U равно напряжению на сетке лампы. Значит, анодный ток $I_{\text{а}}$ есть функция только от U (на самом деле анодный ток зависит довольно сложным образом от напряжения на сетке и анодного напряжения, мы же для упрощения будем пренебрегать анодной реакцией). Тогда $\frac{dI_{\text{а}}}{dt} = \frac{dI_{\text{а}}}{dU}\cdot\frac{dU}{dt} = S\frac{dU}{dt}$, где $S = \frac{dI_{\text{а}}}{dU}$ – крутизна характеристики электронной лампы. В этом случае уравнение (5.3) запишется в виде

$$LC\ddot{U} + \left(RC - MS\right)\dot{U} + U = 0. \qquad (5.4)$$

Если задать такое расположение катушек, при котором взаимная индуктивность будет положительной и достаточно большой, то можно получить значение коэффициента $RC - MS$ отрицательным, что и будет соответствовать отрицательному сопротивлению.

Автоколебания в таком генераторе устанавливаются следующим образом. Случайно возникшие в LCR-контуре малые колебания через катушку индуктивности L' управляют анодным током лампы, который при соответствующем взаимном расположении L и L' усиливает колебания в контуре (взаимное расположение катушек L и L' определяет знак коэффициента взаимной индукции M). При условии, что потери в контуре меньше, чем вносимая в контур энергия, амплитуда колебаний в контуре нарастает. С увеличением амплитуды колебаний, вследствие нелинейной зависимости анодного тока от напряжения на сетке лампы, поступающая в контур энергия уменьшается и при некоторой амплитуде колебаний сравнивается с потерями. В результате устанавливается режим стационарных периодических колебаний, в котором все потери энергии компенсирует анодная батарея. Из уравнения (5.4) видно, что для установления режима стационарных периодических колебаний необходимо выполнение так называемого *условия самовозбуждения*

$$R < \frac{MS}{C}.$$

Если же имеет место неравенство $R > MS/C$, то колебания в контуре затухают медленнее, чем в отсутствие обратной связи. Это ослабление затухания малых колебаний обратной связью называют *регенерацией* колебательного контура.

Рассмотренный нами применительно к генератору Ван-дер-Поля режим возникновения автоколебаний, не требующий начального толчка, называется режимом *мягкого* возбуждения. Для генераторов с одной степенью свободы такому режиму соответствует фазовый портрет, представленный на рис. 5.7, *а*.

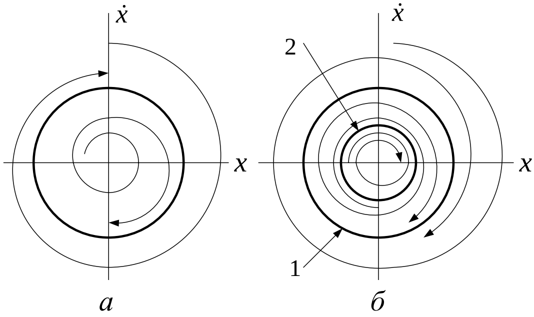


Рис. 5.7

Встречаются также системы с *жестким* возбуждением автоколебаний. В таких системах колебания самопроизвольно нарастают с некоторой начальной амплитуды. Для перехода систем с жестким возбуждением в режим стационарной генерации необходимо начальное возбуждение с амплитудой, большей некоторого критического значения. Фазовый портрет такого генератора приведен на рис. 5.7, *б* (*1* – устойчивый предельный цикл, *2* – неустойчивый предельный цикл). Видно, что для выхода траектории на устойчивый предельный цикл начальная точка на фазовой плоскости должна лежать вне области притяжения устойчивого состояния равновесия. Отсюда ясен и физический смысл неустойчивых предельных циклов: они служат границей между областями начальных условий, из которых система стремится к различным устойчивым режимам движения (на фазовой плоскости таким движениям соответствуют притягивающие траектории – *аттракторы*, например, устойчивые состояния равновесия или предельные циклы).

Размеры предельного цикла определяют амплитуду автоколебаний генератора, время движения изображающей точки по циклу (период), а форма предельного цикла – форму колебаний. Таким образом, задача об исследовании периодических автоколебаний в системе сводится к задаче нахождения предельных циклов в фазовом пространстве и определении их параметров.

5.2. Уравнение Ван-дер-Поля. Зависимость формы автоколебаний от параметров системы

Для получения дифференциального уравнения автоколебаний обратимся к уравнению (5.4). Данное уравнение является нелинейным, так как крутизна характеристики лампы $S(U) = dI_{\text{а}} / dU$ может зависеть от напряжения на сетке U достаточно сложным образом. Обычно экспериментальную зависимость анодного тока $I_{\text{а}}$ от сеточного напряжения U (рис. 5.8) аппроксимируют полиномом либо третьей степени

$$I_{\text{а}}(U) = I_{\text{а}0} + S_1 U - S_3 U^3,$$

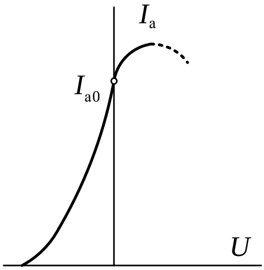


Рис. 5.8

либо пятой степени

$$I_a(U) = I_{a0} + S_1U + S_3U^3 - S_5U^5.$$

Соответственно крутизна характеристики лампы аппроксимируется выражениями типа

$$S(U) = S_1 - 3S_3U^2, \qquad (5.5)$$

$$S(U) = S_1 + 3S_3U^2 - 5S_5U^4. \qquad (5.6)$$

Наличие только нечетных членов в зависимостях $I_a(U)$ обусловлено несимметричностью характеристики лампы относительно ее рабочей точки. Постоянные $S_1 > 0, S_3 > 0$ и $S_5 > 0$, так как только в этом случае наступает реальный режим насыщения анодного тока (в нашей аппроксимации это соответствует загибу кривой $I_a(U)$, на рис. 5.8 это отражено пунктирной линией, но до этой точки обычно не доходят, используя только среднюю часть рабочей характеристики). Нетрудно убедиться, что в случае кубической аппроксимации $I_a(U)$ крутизна характеристики монотонно уменьшается вплоть до тока насыщения. Этот случай, как мы убедимся, соответствует мягкому режиму возбуждения автоколебаний. При аппроксимации $I_a(U)$ полиномом пятой степени крутизна характеристики вначале возрастает до максимума и только потом начинается ее спад – это будет соответствовать жесткому режиму возбуждения автоколебаний.

Ограничимся пока кубической зависимостью $I_a(U)$. Тогда подставляя выражение (5.5) в уравнение (5.4), получаем

$$\ddot{U} - \beta\left(1 - \alpha U^2\right)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0,$$

где $\beta = \left(MS_1 - RC\right)/LC, \alpha = 3S_3M/\left(RC - MS_1\right), \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Величина параметра β показывает, насколько сильно возбужден генератор (при $\beta < 0$ условия возбуждения не выполнены). Величина α характеризует амплитуду автоколебаний, чем меньше α, тем больше амплитуда. Вводя безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и параметры $x = \sqrt{\alpha} U$, $\mu = \beta\omega_0$, получаем окончательно

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0. \tag{5.7}$$

Данное уравнение называется уравнением Ван-дер-Поля и является основной математической моделью автоколебаний с одной степенью свободы.

Каким образом в системе, описываемой уравнением (5.7), устанавливаются автоколебания с некоторым предельным циклом? При малых x случайно возникшие колебания начинают нарастать по амплитуде, так как произведение $\mu\left(1 - x^2\right)$ больше нуля, что соответствует системе с отрицательным трением (происходит раскачка колебаний). Как только амплитуда колебаний превысит некоторое предельное значение, произведение $\mu\left(1 - x^2\right)$ становится отрицательным, что тут же приводит к уменьшению амплитуды. Возникает ситуация, при которой система сама управляет поступлением в нее энергии. Форма предельного цикла и сам характер колебаний существенно зависят от параметра μ. При $\mu = 0$ система становится линейной консервативной. Естественно ожидать, что при малых $\mu \neq 0$ автоколебания будут мало отличаться от гармонических, а нелинейное трение лишь «выбирает» амплитуду устойчивого предельного цикла. При больших μ форма колебаний может существенно отличаться от синусоидальной. Численное интегрирование уравнения Ван-дер-Поля для различных значений μ позволяет выявить не только фазовый портрет системы, но и сам характер установления колебаний.

На рис. 5.9 представлены фазовые портреты, соответствующие уравнению (5.7) при различных значениях параметра нелинейности μ: *а* – квазигармонические колебания $(\mu = 0{,}1)$; *б* – сильно несинусоидальные $(\mu = 1)$; *в* – релаксационные $(\mu = 10)$. Предельные циклы на рис. 5.9 содержат внутри особую точку, причем для $\mu = 0{,}1$ и $\mu = 1$ эта точка является неустойчивым фокусом, а для $\mu = 10$ – неустойчивым узлом. Предельные циклы для лампового генератора можно реально наблюдать на экране электронного осциллографа, подавая одновременно на отклоняющие пластины напряжение с конденсатора колебательного контура q/C и напряжение с последовательно включенного с ним сопротивления $R\dot{q}$.

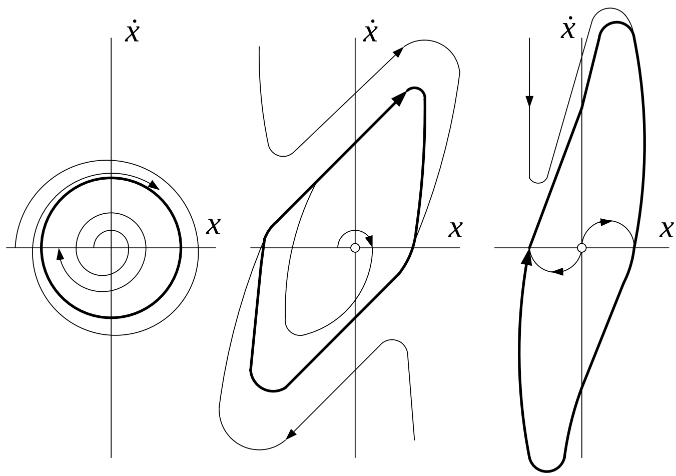


Рис. 5.9

Форма колебаний для различных μ представлена на рис. 5.10. При $\mu = 0{,}1$ (рис. 5.10, *а*) установление колебаний происходит медленно, система добротна и представляет собой автоколебательную систему томсоновского типа. При $\mu = 10$ (рис. 5.10, *в*) стационарные колебания устанавливаются за долю периода, имеют четко выраженный разрывный характер и соответствуют автоколебательной системе релаксационного типа, близкой к *вырожденной* (не содержащей полного набора реактивных элементов, так называемые RC- и LR-системы). При $\mu = 1$ (рис. 5.10, *б*) процесс установления колебаний происходит за несколько периодов, форма этих колебаний существенно отличается от гармонической; такая система является промежуточной между системами томсоновского и релаксационного типов.

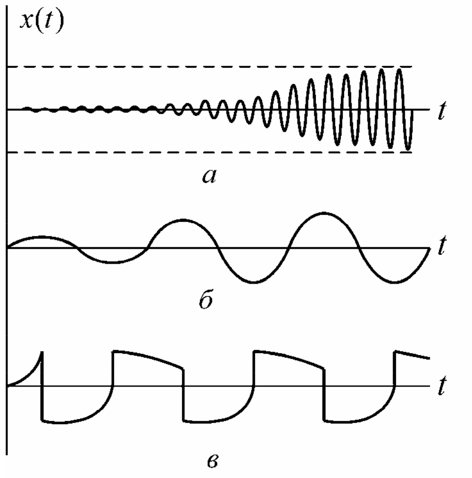


Рис. 5.10

В физической литературе величину μ иногда называют прочностью предельного цикла – при малом $\mu \ll 1$ фазовые траектории слабо притягиваются к предельному циклу, при $\mu \gg 1$ такое притяжение очень сильное, т.е. цикл «прочный». В случаях $\mu \ll 1$ и $\mu \gg 1$ удается достаточно просто решить задачу об автоколебаниях приближенными аналитическими методами.

5.3. Автоколебательные системы томсоновского типа

Ранее уже отмечалось, что для автоколебательных систем томсоновского типа характерны малое затухание и малое вложение энергии за период колебаний по сравнению с запасом колебательной энергии системы. Колебания в таких системах почти гармонические, так как уравнение, описывающее автоколебательные системы томсоновского типа с одной степенью свободы, всегда можно привести к обобщенному уравнению вида $\ddot{x} + x = \mu f\left(x, \dot{x}\right)$, где μ – малый параметр. Поэтому для аналитического исследования таких систем часто используется метод медленно меняющихся амплитуд (ММА).

Рассмотрим, например, ламповый генератор Ван-дер-Поля (см. рис. 5.6). Для данного генератора уравнение колебаний напряжения на конденсаторе имеет вид

$$LC\frac{d^2U}{dt^2} + \left(RC - MS\right)\frac{dU}{dt} + U = 0. \tag{5.8}$$

Аппроксимируем вначале крутизну характеристики лампы $S(U)$ зависимостью (5.5):

$$S(U) = S_1 - 3S_3U^2.$$

Введем для большей общности результатов безразмерное время $\tau = \omega_0 t$ и безразмерное напряжение $x = U/U_0$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, а U_0 – напряжение, при котором анодный ток достигает насыщения. Тогда уравнение (5.8) приводится к виду, аналогичному (5.7):

$$\ddot{x} + x = \left(\beta - \alpha x^2\right)\dot{x}, \tag{5.9}$$

где дифференцирование проводится по безразмерному времени τ, а параметры α и β имеют вид

$$\alpha = \frac{3S_3MU_0^2}{\sqrt{LC}}, \quad \beta = \frac{S_1M - RC}{\sqrt{LC}}. \tag{5.10}$$

Такая форма представления уравнения Ван-дер-Поля позволит нам в дальнейшем с минимальными изменениями рассмотреть не только мягкое возбуждение автоколебаний, но и жесткое. Коэффициент β называется *коэффициентом регенерации* и показывает соотношение между вложениями и потерями энергии в колебательной системе при различных значениях ее параметров. Если считать, что коэффициент регенерации β и коэффициент нелинейности α малы, то к уравнению (5.9) можно применить метод ММА.

После введения переменных $x = u\cos\tau + v\sin\tau$, $\dot{x} = -u\sin\tau + v\cos\tau$ и интегрирования уравнений

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\beta - \alpha x^2\right)\dot{x}\sin\tau d\tau, \quad \dot{v} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\beta - \alpha x^2\right)\dot{x}\cos\tau d\tau$$

получаем систему укороченных уравнений

$$\dot{u} = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4}\alpha z\right)u, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4}\alpha z\right)v,$$

где $z = u^2 + v^2$. От двух укороченных уравнений для u и v можно перейти к одному уравнению для z:

$$\dot{z} = \left(\beta - \frac{1}{4}\alpha z\right)z.$$

Для данного уравнения существует два стационарных решения $\left(\dot{z} = 0\right)$. Одно из них является нулевым решением и соответствует состоянию покоя $u_0 = v_0 = z_0 = 0$, другое – с отличной от нуля амплитудой имеет вид

$$z_0 = A_0^2 = \frac{4\beta}{\alpha}.$$

Исследуем устойчивость стационарных состояний системы. В случае состояния покоя системы полагаем $z = 0 + \eta$, и тогда уравнение для возмущений (малых вариаций) η в первом приближении имеет вид

$$\dot{\eta} = \beta\eta.$$

Отсюда видно, что знак коэффициента регенерации β определяет устойчивость состояния покоя: при $\beta > 0$ состояние покоя неустойчиво, происходит самовозбуждение системы; при $\beta < 0$ состояние покоя устойчиво. В случае ненулевой стационарной амплитуды ее значение при возмущении η запишется как $z = 4\beta/\alpha + \eta$ и тогда уравнение для возмущения примет вид

$$\dot{\eta} = -\beta\eta .$$

При $\beta > 0$ ненулевая стационарная амплитуда устойчива, при $\beta < 0$ – неустойчива.

На рис. 5.11, *а* приведена зависимость квадрата стационарной ненулевой амплитуды A_0^2 от коэффициента регенерации β, где темными кружочками обозначены устойчивые стационарные состояния системы, а светлыми – неустойчивые. Это мягкий режим возбуждения автоколебаний. Таким образом, каждому значению β соответствует только одно отличное от нуля стационарное состояние системы, что на фазовой плоскости соответствует одному предельному циклу – замкнутой фазовой траектории (рис. 5.11, *б*). Вне предельного

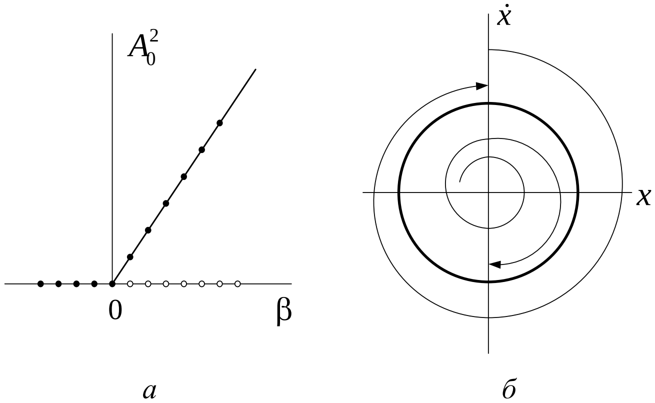


Рис. 5.11

цикла фазовые траектории соответствуют затухающим колебаниям (скручивающиеся спирали), внутри предельного цикла фазовые траектории (раскручивающиеся спирали) соответствуют нарастающим колебаниям; в начале координат находится особая точка типа неустойчивого фокуса.

Посмотрим теперь, что произойдет, если крутизна характеристики аппроксимируется зависимостью (5.6)

$$S(U) = S_1 + 3S_3U^2 - 5S_5U^4.$$

Эта зависимость существенно отличается от рассмотренной выше тем, что ее максимум приходится уже на напряжение не равное нулю. В этом случае уравнение колебаний (5.9) примет вид

$$\ddot{x} + x = \left(\beta + \alpha x^2 - \gamma x^4\right)\dot{x},$$

где $\gamma = 5S_5MU_0^4/\sqrt{LC}$, а остальные обозначения прежние [см. (5.10)]. Укороченное уравнение для $z = u^2 + v^2 = A^2$ в этом случае запишется как

$$\dot{z} = \left(\beta + \alpha\frac{z}{4} - \gamma\frac{z^2}{8}\right)z\,.$$

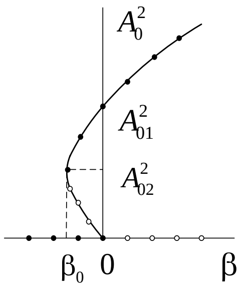
Отсюда нетрудно определить стационарные состояния $\left(\dot{z} = 0\right)$ системы, одно из которых является состоянием покоя $\left(z_0 = 0\right)$ и возможно при любых параметрах системы. Второе отличное от нуля стационарное состояние системы определяется из уравнения

$$\beta + \alpha\frac{z_0}{4} - \gamma\frac{z_0^2}{8} = 0.$$

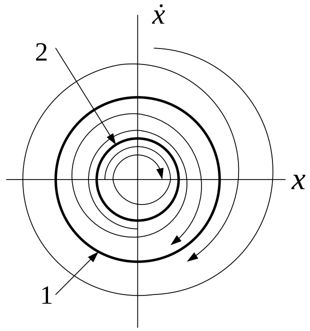
Откуда

$$z_0 = \frac{\alpha}{\gamma} \pm \frac{1}{\gamma}\sqrt{\alpha^2 + 8\beta\gamma}.$$

При $\beta = 0$ возможны два решения $z_0 = z_{01} = A_{01}^2 = 2\alpha/\gamma$ и $z_0 = 0$. Однако оказывается, что и при некоторых отрицательных значениях коэффициента регенерации β можно получить отличную от нуля амплитуду автоколебаний. Предельное отрицательное значение β_0 определяется из условия $\sqrt{\alpha^2 + 8\beta_0\gamma} = 0$, откуда $\beta_0 = -\alpha^2/8\gamma$, при этом $z_0 = z_{02} = A_{02}^2 = \alpha/\gamma$. Зависимость $A_0^2(\beta)$ представлена на рис. 5.12, *а*. По-прежнему состояние покоя системы устойчиво при $\beta < 0$ и неустойчиво при $\beta > 0$. Однако на участке от $\beta_0 = -\alpha^2/8\gamma$ до $\beta = 0$ состояние покоя лишь относительно устойчиво; если амплитуда возмущения η_0 будет такой, что она достигнет нижней неустойчивой ветви амплитудной кривой, то в системе возбудятся автоколебания с отличной от нуля устойчивой стационарной амплитудой. Это жесткий режим возбуждения автоколебаний. В области $-\alpha^2/8\gamma \le \beta \le 0$ система не может самовозбудиться.



а



б

Рис. 5.12

На фазовой плоскости (рис. 5.12, *б*) область жесткого возбуждения для фиксированного $\beta < 0$ представлена двумя предельными циклами (окружностями), один из которых (*1*) устойчив и соответствует амплитудам автоколебаний, лежащим в области $\alpha/\gamma < z_0 < 2\alpha/\gamma$, другой (*2*) неустойчив и соответствует амплитудам в области $0 < z_0 < \alpha/\gamma$. Начало координат на фазовой плоскости является особой точкой типа устойчивого фокуса. Все возмущения, меньшие амплитуды, соответствующей неустойчивому предельному циклу, осцилляторно затухают. Возмущения, бо́льшие амплитуды, соответствующей неустойчивому предельному циклу, осцилляторно увеличиваются и амплитуды этих колебаний стремятся к предельному устойчивому циклу изнутри. Если амплитуда колебаний по какой-либо причине выйдет за пределы устойчивого предельного цикла, то она будет постепенно уменьшаться, стремясь в пределе снаружи «навиться» на предельный цикл.

5.4. Релаксационные (разрывные) колебания

В случае сильной нелинейности $(\mu >> 1)$ колебания становятся релаксационными (разрывными), состоящими из участков «быстрых» и «медленных» движений. Для описания таких разрывных колебаний Мандельштам и Папалекси предложили использовать «*гипотезу скачка*», учитывающую, что при перескоках энергия меняется непрерывно. Суть сводится к следующему.

При больших значениях параметра μ в уравнении Ван-дер-Поля $\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$, описывающем колебания в ламповом генераторе, уже нельзя воспользоваться методом медленно меняющихся амплитуд. Поэтому перепишем данное уравнение так, чтобы в нем появился малый параметр. Для этого обратимся к уравнению Рэлея

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu\left[1 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt} + y = 0,$$

которое после замены переменных $x = \dot{y}$ и однократного интегрирования сводится к уравнению Ван-дер-Поля. Введением нового времени $\tau = t/\mu$ и переменной $x = y/\mu$ в уравнении Рэлея можно перевести параметр μ в коэффициент при старшей производной

$$\mu^{-2}\ddot{x} - \left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x} + x = 0 \to \varepsilon\ddot{x} - \left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x} + x = 0.$$

Данное уравнение является эквивалентом уравнения Ван-дер-Поля, только теперь малый параметр $\varepsilon = 1/\mu^2 << 1$ стоит при старшей производной. Для приведения этого уравнения к общепринятому виду переобозначим малый параметр ε как μ. Тогда имеем уравнение

$$\mu\ddot{x} = \left(1 - \dot{x}^2\right)\dot{x} - x. \tag{5.11}$$

Попытаемся найти асимптотическую форму решения уравнения (5.11) при $\mu \to 0$. Для этого запишем (5.11) в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\dot{x} = y, \quad \mu\dot{y} = \left(1 - y^2\right)y - x. \tag{5.12}$$

Заметим, что при $\mu = 0$ фазовой траекторией будет кубическая парабола $x = \left(1 - y^2\right)y$, приведенная на рис. 5.13, на котором указано также и направление движения изображающей точки (при $\dot{x} > 0$ переменная x может только возрастать, при $\dot{x} < 0$ – только убывать). На рисунке видно, что система получилась динамически противоречивой: единственное состояние равновесия при $x = 0$ неустойчиво, а куда переходит система из точек b и d при $x = \pm x'$, непонятно. В то же время и оставаться в точках b и d система не должна – в этих точках скорость не обращается в нуль. Возникшая неопределенность связана с тем, что математическое описание

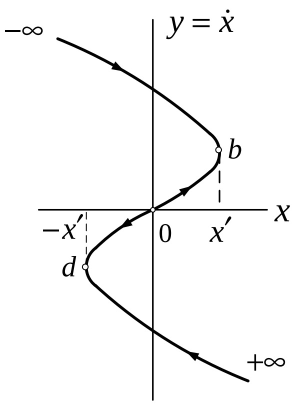


Рис. 5.13

системы с помощью дифференциального уравнения первого порядка $x=\left(1-\dot{x}^2\right)\dot{x}$ не отражает всех ее существенных особенностей. Полагая $\mu=0,$ мы устранили из уравнения Ван-дер-Поля слагаемое, пропорциональное второй производной по времени. Для механической колебательной системы это означает пренебрежение массой, для электрической колебательной системы – пренебрежение индуктивностью. Но при последовательном рассмотрении колебаний необходимо учитывать малую паразитную индуктивность, которая всегда существует в схемах, содержащих соединительные проводники (она потому и является «паразитной»). Это же замечание касается и массы. Тогда систему описывает дифференциальное уравнение второго порядка, что позволяет получить периодическое решение и, следовательно, автоколебательный процесс.

Для устранения возникшей неопределенности учтем, что параметр μ имеет хотя и малое, но все же конечное значение. Уравнение интегральных кривых системы (5.12) имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left[\left(1-y^2\right)y-x\right]}{\mu y}.$$

При $\mu\to 0$ вне кривой $x=\left(1-y^2\right)y$ производная $dy/dx\to\infty$ или $dx/dy\to 0.$ Интегральными кривыми на фазовой плоскости будут прямые $x=\text{const},$ а направление движения по ним определяется вторым уравнением системы (5.12), т.е. при $x>\left(1-y^2\right)y$ изображающая точка двигается в направлении уменьшения $y,$ при $x<\left(1-y^2\right)y$ – в направлении увеличения $y.$ Причем скорость движения на вертикальных участках $x=\text{const}$ при $\mu\to 0$ очень велика. Это так называемые «быстрые» движения. «Медленные» движения происходят на самой кривой $x=\left(1-y^2\right)y,$ а закон движения определяется первым уравнением системы (5.12).

В связи с возможностью совершения системой быстрых и медленных движений появляется несколько вопросов. Во-первых, может ли система переходить от медленных движений к быстрым и наоборот? Во-вторых, в каких точках фазовой траектории возможен такой переход? И, в-третьих, каковы условия таких переходов? Для ответа на эти вопросы обратимся ко второму уравнению (5.12) при $\mu = 0$ и запишем его в виде

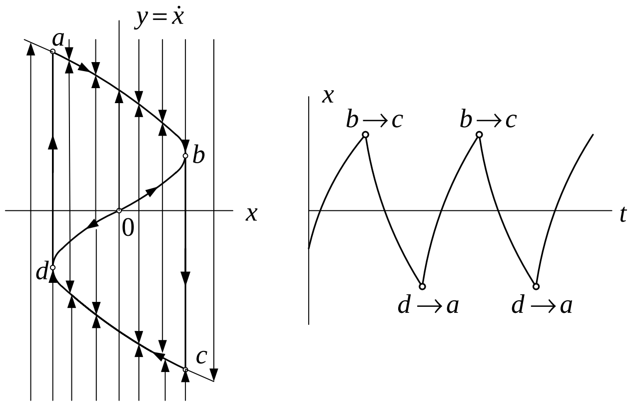
$$x = \left(1 - y^2\right) y = \varphi(y).$$

Дифференцируя данное уравнение по времени, получаем

$$\dot{x} = \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{d\varphi}{dy}\ddot{x}$$

(здесь $\ddot{x}$ представляет собой ускорение). Вблизи точки b (см. рис. 5.13) производная $d\varphi / dy$ стремится к нулю и, так как $\dot{x} \neq 0,$ то ускорение $\ddot{x}$ стремится к бесконечности. Это означает, что вблизи точки b система допускает быстрое изменение скорости при почти неизменной координате $x.$ Наличие «быстрых» движений позволяет снять упомянутое выше противоречие, предполагая, что система в процессе движения может совершать скачки с одной устойчивой ветви кривой на другую. Такое предположение основано на том, что во время скачка (например, скачка тока при индуктивности, равной нулю) энергия в системе не изменяется. Если же скачок происходит в механической системе, то быстрое изменение скорости при неизменной координате также не меняет энергии (мы пренебрегли массой).

Таким образом, с учетом «гипотезы скачка», учитывающей, что при перескоках энергия меняется непрерывно, фазовый портрет системы будет выглядеть следующим образом (рис. 5.14, *а*). Участки «медленных» движений ab и cd устойчивы по отношению к «быстрым» движениям, средний участок bd неустойчив. В точках b и d происходит «скачок» с одной ветви кривой $y(x)$ на другую. При любых начальных условиях система выходит на предельный цикл $abcd$, состоящий из участков «быстрых» и «медленных» движений. В случае быстрых движений система успевает резко изменить скорость, при этом x и t не изменяются – это так называемые релаксационные колебания, форма которых представлена на рис. 5.14, *б*. Участки ab и cd фазового портрета отображаются на плоскости x, t плавными кривыми. Участки bc и da фазового портрета на плоскости x, t отображаются точкой перегиба, в которой касательная к кривой $x(t)$ резко изменяет величину и знак.



а *б*

Рис. 5.14

Такой упрощенный анализ движения не дает, естественно, исчерпывающей характеристики релаксационных колебаний. Более точное решение получается, если учитывать наличие реально существующей паразитной индуктивности, что приводит к конечной скорости скачков.

В качестве второго примера рассмотрим разрывные колебания, которые при определенных условиях могут совершаться в механической колебательной системе с большим трением, но при достаточно малой массе. Для конкретности будем считать, что речь идет о системе, уже рассматривавшейся нами в подразд. 5.1 – пружинный маятник малой массы на движущейся ленте транспортера (см. рис. 5.2). Будем полагать силу трения ленты о груз $F(v)$ функцией относительной скорости ленты v_0 и тела $\dot{x}$, где $v = v_0 - \dot{x}$. Движение груза под действием силы трения $F(v) = F(v_0 - \dot{x})$ и силы упругости $-kx$ определяется уравнением

$$m\ddot{x} = F(v_0 - \dot{x}) - kx.$$

При достаточно малой массе можно пренебречь слагаемым $m\ddot{x}$ и тогда последнее уравнение приобретает вид

$$kx = F\left(v_0 - \dot{x}\right). \tag{5.13}$$

Так как масса груза достаточно мала, а трение велико, то процесс движения груза можно разбить на две существенно различные области:

1. Область, в которой сила упругости гораздо больше произведения массы на ее ускорение. Движение груза в этом случае определяется главным образом силой упругости и силой трения. В данной области координата изменяется существенно, а скорость изменяется сравнительно медленно, т.е. ускорение невелико. Очевидно, в этой области справедливо уравнение (5.13) и в ней совершаются медленные движения.

2. Область, в которой произведение массы на ускорение значительно больше силы упругости пружины и где, следовательно, движение определяется главным образом произведением массы на ускорение и силой трения. Так как масса мала, то ускорения в системе велики. В этой области координата не успевает заметно измениться, но резко изменяется скорость и уравнение (5.13) теряет силу. Так как скорости в системе всегда ограничены, а ускорения в этой области очень велики, то эта область проходится системой за очень короткий промежуток времени по сравнению со временем, в течение которого проходится первая область. Это так называемые быстрые движения.

Реальная характеристика силы трения обычно имеет вид, представленный на рис. 5.3. Мы же несколько идеализируем ее при малых скоростях, полагая, что $F'(v)\big|_{v=0}=0$ (рис. 5.15). Точка $v=0$ соответствует движению груза вместе с лентой, а точка $v=v_0$ соответствует $\dot{x}=0$, т.е. отсутствию движения груза в пространстве. Слева от точки $v=v_0$ находится область движения груза в направлении движения ленты, а справа – область движения груза в направлении, противоположном движению ленты. Так как стационарное движение груза с постоянной скоростью $\dot{x}$ в рассматриваемой модели невозможно, то $\dot{x}=0$ есть единственное состояние равновесия.

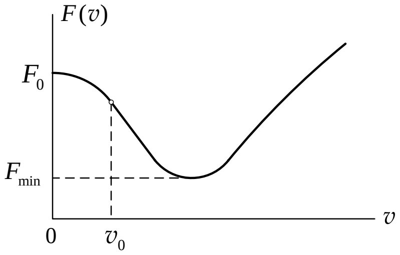
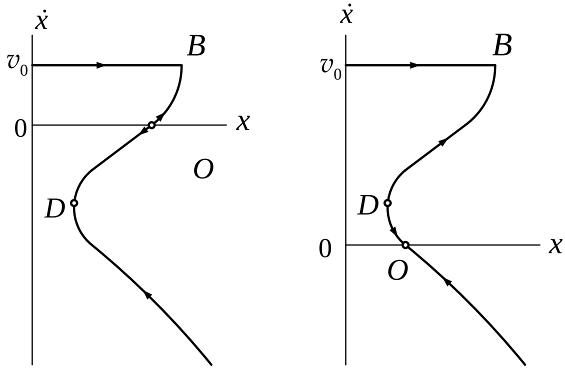


Рис. 5.15

При рассмотрении выбранной нами характеристики трения необходимо иметь в виду следующее. Пока относительная скорость груза равна нулю, сила трения может иметь любое значение в интервале от нуля до F_0, т.е. характеристика трения имеет вертикальную ветвь, совпадающую с осью ординат на участке от $F=0$ до $F=F_0$. Именно благодаря наличию этой вертикальной ветви характеристика трения делается неоднозначной, что в конечном итоге и приведет к наличию в системе периодических колебаний.

В качестве фазовой плоскости, отображающей движение системы, можно было бы выбрать саму плоскость характеристики силы трения (F,v), так как в областях, где происходит непрерывное движение, в силу уравнения (5.13) координата x и сила трения F пропорциональны друг другу. Однако более удобно и привычно взять плоскость переменных x и $\dot{x}$ (напомним, что $\dot{x}$ – это абсолютная скорость груза). Так как скорость груза $\dot{x}$ равна разности скорости ленты и относительной скорости груза v_0-v, то нетрудно сообразить, что фазовая траектория на плоскости $(x, \dot{x})$ может быть получена из кривой $F(v)$ путем поворота ее на угол $\pi/2$ по часовой стрелке и сдвига вверх по оси $\dot{x}$ на величину v_0. При этом возможны два варианта. Если значение $v = v_0$ на графике $F(v)$ (см. рис. 5.15) попадает на падающий участок характеристики трения, то получаем фазовую траекторию, отображенную на рис. 5.16, *а*. Если же значение $v = v_0$ лежит на поднимающемся участке характеристики трения, то получаем фазовую траекторию, отображенную на рис. 5.16, *б*.



а *б*

Рис. 5.16

Направление движения отображающей точки по фазовой траектории определяется знаком $\dot{x}$: при $\dot{x} > 0$ координата x может только возрастать, при $\dot{x} < 0$ – только убывать. Именно это и отражено на рис. 5.16. Эти рисунки отличаются тем, что точка O, отображающая состояние равновесия $(\dot{x} = 0)$, располагается либо на падающем участке характеристики трения (см. рис. 5.16, *а*), либо на поднимающемся участке (см. рис. 5.16, *б*). Видно, что в первом случае состояние равновесия неустойчиво, во втором – устойчиво. Заметим, что в точке B обоих рисунков ускорение груза обращается в бесконечность, так как касательная к кривой характеристики трения отображается вертикальной прямой. В данной точке производная $\frac{d\dot{x}}{dx}=\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}=\infty$, а так как $\dot{x}\neq 0$, то $\ddot{x}\to\infty$. Это же относится и к точке D. Отображающая точка или приближается с обеих сторон к такой точке, или удаляется в обе стороны от нее. В этом отношении «точки бесконечного ускорения» похожи на состояние равновесия и внешне напоминают в первом случае устойчивое, а во втором случае неустойчивое состояние равновесия. В то же время точка устойчивого бесконечного ускорения принципиально отличается от точки равновесия, так как изображающая точка не может оставаться в этой точке ни в коем случае. Появление точки устойчивого бесконечного ускорения есть следствие пренебрежения массой груза, т.е. в этой точке уравнение (5.13) не дает ответа о поведении системы. Чтобы выйти из подобного положения, необходимо рассматривать либо невырожденную систему $(m\neq 0)$, либо, оставаясь в рамках принятой модели, сформулировать условия дальнейшего движения системы.

Если точка бесконечного ускорения является «устойчивой», то изображающая точка, с одной стороны, не может в ней оставаться, а с другой – не может из нее уйти по фазовой кривой, так как уравнение движения предписывает движение по направлению к «устойчивой» точке, а не от нее. Выход из этого конфликта один – скачок изображающей точки в какую-то другую точку фазовой кривой. Но при этом должно быть соблюдено условие скачка, т.е. координата не должна измениться, значит, и сила трения F должна получить прежнее значение, так как $F=kx$. Следовательно, изображающая точка может совершать скачки только в направлении, параллельном оси $\dot{x}$. При этом энергия системы, зависящая от координаты x, не изменяется.

Исходя из рассмотрения приведенной характеристики трения, можно сделать следующие выводы о характере движения груза. Вначале груз «захватывается» лентой и движется вместе с ней с постоянной скоростью v_0. При этом пружина растягивается, возрастает упругая сила и вместе с ней возрастает и сила трения, оставаясь все

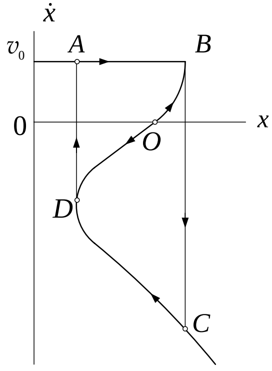


Рис. 5.17

время равной упругой силе. Изображающая точка на фазовой плоскости движется с постоянной скоростью по участку AB (рис. 5.17). Когда сила упругости становится равной силе трения покоя F_0, изображающая точка попадает в точку B – точку устойчивого бесконечного ускорения. Оставаться там она не может, выйти из нее по фазовой траектории также не может. В данный момент происходит скачкообразное изменение скорости, скорость изменяется по величине и направлению при неизменном растяжении пружины. В итоге система приходит в такое новое положение, которое соответствует прежней энергии системы и прежнему значению силы трения, т.е. в точку C.

Далее происходит непрерывное изменение скорости и координаты, причем движение определяется уравнением (5.13) и происходит по участку CD на рис. 5.17 по направлению к точке минимума силы трения. Если бы скорость ленты была такова, что точка O лежала бы на поднимающейся части характеристики трения (см. рис. 5.16, *б*), то состояние равновесия в точке O было устойчивым. Тогда, дойдя до точки O, изображающая точка в ней бы и осталась. Если же точка O лежит на спадающей части характеристики трения, то изображающая точка дойдет до точки минимума силы трения (точка D). В точке D снова происходит скачок скорости при неизменной координате на соответствующую точку A, в которой сила трения имеет то же значение. Далее движение повторяется, т.е. груз совершает периодические движения (автоколебания). Условие возбуждения этих периодических колебаний, очевидно, следующее:

$$F'(v)\big|_{v_0} < 0.$$

Если это условие выполнено, то груз совершает разрывные колебания. Полный размах этих колебаний

$$A = \frac{F_0 - F_{\min}}{k}.$$

В действительности скачки скорости не имеют места, так как система все же обладает некоторой массой. Следовательно, скачок происходит не с бесконечно большими, а с конечным ускорениями, и изображающая точка на фазовой плоскости в процессе скачка будет двигаться не по прямым линиям, а по изгибающимся. Однако при достаточно малой массе и больших силах трения этот изгиб практически не заметен.

И в заключение данного раздела рассмотрим общий подход к разрывным колебаниям в произвольной автономной динамической системе, описываемой уравнениями

$$\mu \frac{dy}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \tag{5.14}$$

где μ – некоторый малый параметр $(0 < \mu << 1)$. Например, для уравнения Ван-дер-Поля $f(x, y) = y, F(x, y) = (1 - y^2)y - x.$ Заметим, что система (5.14) «уравнивает в правах» переменные x и y, и теперь нельзя считать, что y – это скорость изменения переменной x. Отличие x и y заключается только в том, что малый параметр μ стоит при производной dy/dt, т.е. при переменной, способной совершать быстрые движения (скачки). Система уравнений (5.14) при $0 < \mu << 1$ может быть разбита на две подсистемы, описывающие быстрые и медленные движения.

Для того чтобы выделить быстрые движения, перейдем к «быстрому» времени $\tau = t/\mu$ (это время сильно растянуто по отношению к старому, поэтому допускает рассмотрение быстрых процессов). В новом (быстром) масштабе времени система уравнений (5.14) будет иметь вид

$$\frac{dy}{d\tau} = F(x, y), \quad \frac{dx}{d\tau} = \mu f(x, y). \tag{5.15}$$

Рассмотрим поведение фазовых траекторий на плоскости x, y при $\mu \to 0.$ Согласно системе уравнений (5.15) для точек плоскости $x, y,$ не лежащих на кривой $F(x, y) = 0,$ имеем подсистему быстрых движений

$$\frac{dy}{d\tau} = F(x, y), \quad x = x_0 = \text{const}. \tag{5.16}$$

Для точек, принадлежащих кривой $F(x, y) = 0,$ имеем подсистему медленных движений

$$\frac{dx}{d\tau} = \mu f(x, y), \quad F(x, y) = 0.$$

Фазовые траектории быстрых движений расположены на прямых линиях, параллельных оси $y.$ При этом фазовая координата y растет, если $F(x, y) > 0,$ и убывает, если $F(x, y) < 0.$ Для подсистемы быстрых движений (5.16) кривая медленных движений $F(x, y) = 0$ является зависимостью координаты состояния равновесия от параметра $x.$ Фазовые траектории медленных движений расположены на кривой $F(x, y) = 0,$ при этом x растет, если $f(x, y) > 0,$ и убывает при выполнении обратного неравенства. На рис. 5.18 приведено возможное разбиение фазовой плоскости на траектории для системы (5.15) при $\mu \to 0.$ Не рассматривая всех возможных движений, выделим только хорошо известные по приложениям.

1. Медленные движения устойчивы в любой точке кривой $F(x, y) = 0.$ Для выполнения этого условия кривая медленных движений должна быть однозначной по координате x. Всякое быстрое движение приходит к кривой медленных движений. В этом случае малый параметр μ не существенен и в системе (5.14) его можно принять равным нулю. По медленным движениям система или приходит в состояние равновесия, или уходит в бесконечность.

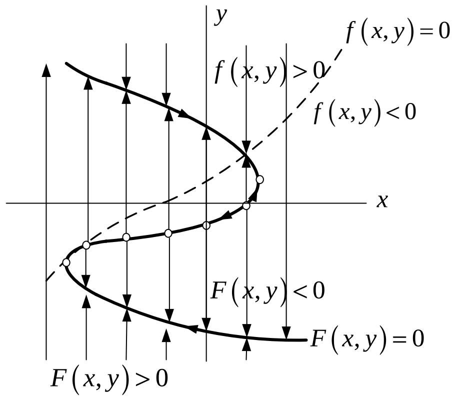


Рис. 5.18

2. Кривая медленных движений неоднозначна по координате x, но любое быстрое движение приводит на одну из ветвей кривой медленных движений. Бесконечность по медленным движениям неустойчива. Здесь возможны следующие режимы поведения системы:

а) единственное состояние равновесия, расположенное на неустойчивой ветви кривой медленных движений. В этом случае существует хотя бы один разрывный предельный цикл. Такой режим назовем *мультивибраторным*;

б) единственное состояние равновесия, расположенное на одной из устойчивых ветвей кривой медленных движений. Такая система откликается на внешний произвольный (в некоторых пределах) импульс стандартным импульсом, параметры которого определяются свойствами системы. Этот режим работы системы назовем *кипп-релейным* или *спусковым*;

в) несколько состояний равновесия, расположенных как на устойчивых, так и на неустойчивых ветвях кривой медленных движений. Такой режим работы назовем *триггерным*.

Техническая реализация вышеупомянутых режимов рассмотрена в прил. 3.

3. Кривая медленных движений $F(x,y)=0$ неоднозначна по координате x, но не любое быстрое движение приводит в ее окрест-

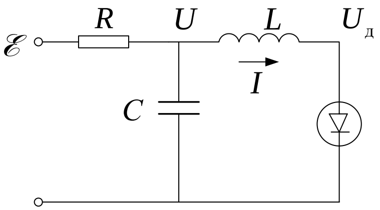


Рис. 5.19

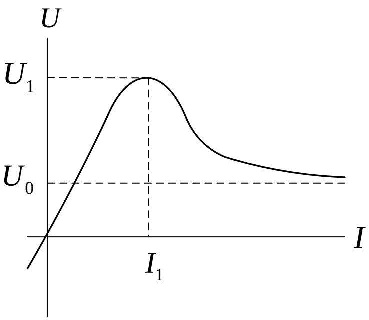


Рис. 5.20

ность. Рассмотрим возможные варианты движений в такой системе на примере схемы с динистором (рис. 5.19).

Применяя правила Кирхгофа, нетрудно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &L\frac{dI}{dt} = U - U_д(I), \\ &RC\frac{dU}{dt} = \mathscr{E} - U - RI, \end{aligned} \qquad (5.17)$$

где U – напряжение на конденсаторе, I – ток через индуктивность, $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока, $U_д(I)$ – ампер-вольтовая характеристика динистора, которая в статическом режиме задается графиком, приведенным на рис. 5.20. При увеличении тока, начиная с некоторых значений, напряжение на динисторе стремится к некоторой постоянной величине U_0. Выбрав в качестве малого параметра $\mu = L/\left(CR^2\right) << 1$, систему уравнений (5.17) можно привести к виду (5.14):

$$\begin{aligned} &\mu\frac{dI}{dt} = F(I,U) = \frac{U - U_д(I)}{CR^2}, \\ &\frac{dU}{dt} = f(I,U) = \frac{\mathscr{E} - U - RI}{RC}. \end{aligned} \qquad (5.18)$$

В качестве фазовой плоскости удобно взять плоскость переменных I, U. Тогда возможное разбиение фазовой плоскости на траектории будет отражаться на рис. 5.21 (отражен случай, когда прямая $U = \mathscr{E} - RI$ проходит правее точки максимума ампер-вольтовой характеристики динистора).

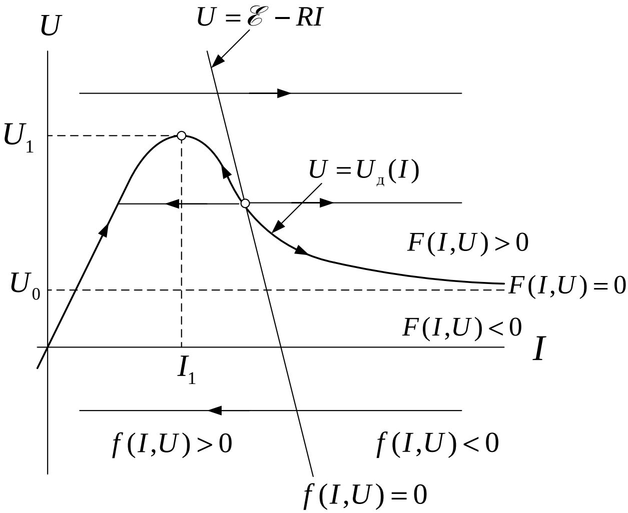


Рис. 5.21

Так как фазовые траектории медленных движений расположены на кривой $F(I,U) = \dfrac{U - U_д(I)}{CR^2} = 0,$ то ампер-вольтовая характеристика динистора и дает фазовый портрет медленных движений. Направление движения отображающей точки задается вторым уравнением (5.18), т.е. при $f(I,U) < 0$ (справа от прямой $U = \mathscr{E} - RI$) значение U убывает со временем, при $f(I,U) > 0$ (слева от прямой $U = \mathscr{E} - RI$) значение U возрастает.

Фазовые траектории быстрых движений (отражены тонкими линиями) расположены на прямых, параллельных оси I. При этом фазовая координата растет, если $F(I,U) > 0,$ т.е. при $U > U_д(I),$ и убывает при $U < U_д(I).$ Любое быстрое движение, начинающееся ниже кривой медленных движений, приводит в μ-окрестность ее левой устойчивой части. А вот куда приводят быстрые движения, начинающиеся выше кривой медленных движений в точках $U < U_1,$

непонятно. Чтобы понять, как ведут себя быстрые движения при достаточно больших значениях I, запишем уравнения (5.18) в виде

$$\mu \frac{dI}{dt} = \frac{1}{CR^2}\left(U - U_0\right),$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{RC}\left(\mathscr{E} - U_0 - RI\right).$$

Если пренебречь слагаемым $\mathscr{E} - U_0$ по сравнению с RI, то получаем следующую систему уравнений, справедливую при достаточно больших I и малых μ:

$$L\frac{dI}{dt} = U - U_0, \quad \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{C}I.$$

Нетрудно убедиться, что фазовые траектории, начинающиеся в точке срыва $\left(I = I_1, U = U_1\right)$, описываются уравнениями

$$\begin{gathered} U = U_0 + \left(U_1 - U_0\right)\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), \\ I = \frac{U_1 - U_0}{\sqrt{L/C}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \end{gathered} \tag{5.19}$$

Так как величина тока ограничена значением $\dfrac{U_1 - U_0}{\sqrt{L/C}}$, то вблизи данного значения происходит смена направления быстрого движения на обратное. Это позволяет выполнить разбиение фазовой плоскости на траектории, что показано на рис. 5.22. На участке OAB происходят быстрые изменения тока I, на участке BO – медленные.

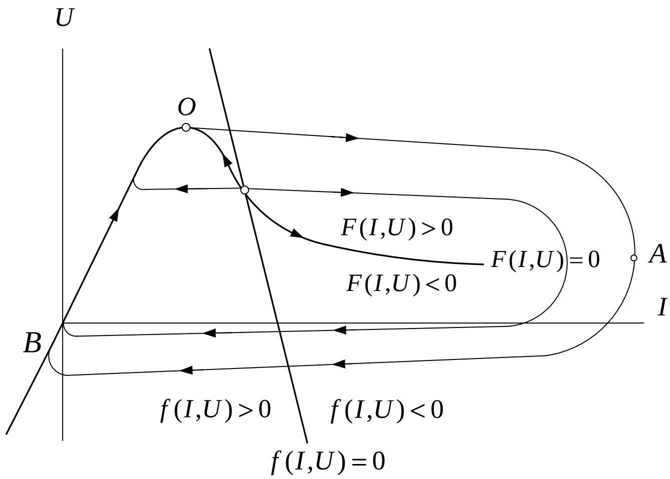


Рис. 5.22

На рис. 5.23 представлены осциллограммы тока и напряжения (отображены как быстрые, так и медленные изменения этих величин со временем). Из уравнений (5.19) видно, что величина импульса

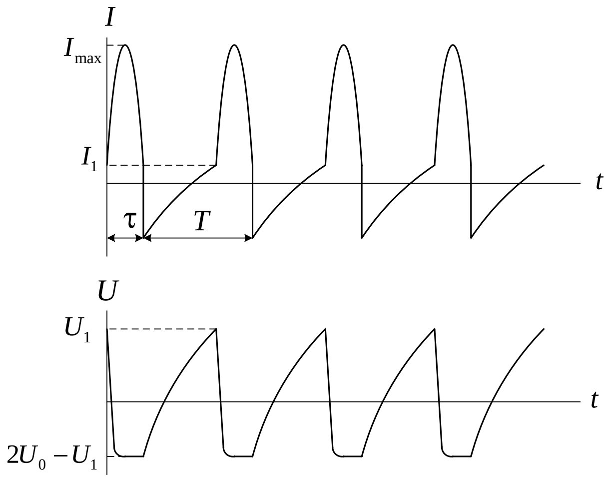


Рис. 5.23

тока составляет $I_{\max} = \dfrac{U_1 - U_0}{\sqrt{L/C}}$, а его длительность у основания $\tau = \pi\sqrt{LC}$. Длительность медленного изменения тока и напряжения T определяется параметрами возрастающего участка ампер-вольтовой характеристики динистора (см. рис. 5.20).

5.5. Устойчивость колебаний в линеаризованных системах

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости колебаний в системах, описываемых дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(x, y), \tag{5.20}$$

где $F(x, y)$ и $f(x, y)$ – некоторые произвольные гладкие функции переменных x, y. В состоянии равновесия $\left(x = x_0,\, y = y_0\right)$ правые части данной системы уравнений обращаются в нуль. Зададим малые отклонения от точки равновесия $\xi = x - x_0, \eta = y - y_0$ и разложим в ряд функции $F(x, y)$ и $f(x, y)$ в малой окрестности $x = x_0,\, y = y_0$, ограничиваясь первыми степенями по ξ и η (это так называемая процедура линеаризации). Тогда система уравнений (5.20) может быть записана в виде

$$\dot{\xi} = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 \cdot \xi + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \cdot \eta,$$

$$\dot{\eta} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \cdot \xi + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 \cdot \eta,$$

где производные $\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_0$, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_0$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_0$ и $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_0$ взяты в точке равновесия.

Задавая решение данной системы уравнений в виде $\xi \sim e^{\lambda t}, \eta \sim e^{\lambda t}$, для определения характеристического показателя λ получаем следующие уравнения:

$$\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 - \lambda\right)\xi + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \cdot \eta = 0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \cdot \xi + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 - \lambda\right)\eta = 0.$$

Для того чтобы данная однородная система уравнений имела нетривиальное решение, необходимо потребовать равенства нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 - \lambda & \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 & \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.21)$$

Это уравнение называется характеристическим, и его корни определяют устойчивость или неустойчивость состояния равновесия. Здесь возможны следующие основные случаи:

1. Оба корня действительные отрицательные (положительные) числа. Состояние равновесия в этом случае является устойчивым (неустойчивым) узлом.

2. Один из корней – действительный, другой – комплексный, причем оба корня имеют отрицательные (положительные) действительные части. Тогда состояние равновесия является устойчивым (неустойчивым) фокусом.

3. Один из корней – действительный, другой – комплексный, причем знаки действительного корня и действительной части другого – разные. Состояние равновесия в этом случае отображается особой точкой типа седло – фокус.

4. Оба корня действительные и разных знаков. Этот случай соответствует особым точкам типа седло – узел.

Рассмотрим для иллюстрации колебания в схеме с неоновой лампой (рис. 5.24). Запишем для данной схемы правила Кирхгофа:

$$
\begin{aligned}
I_0 &= i + I, \\
RI_0 &= E - U, \\
L\frac{dI}{dt} + V - U &= 0,
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

где U – напряжение на конденсаторе, V – напряжение на неоновой лампе, I – сила тока через неоновую лампу, определяемая ее статической характеристикой, приведенной на рис. 5.25.

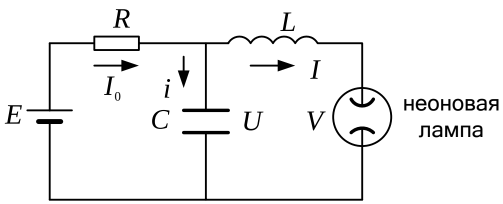


Рис. 5.24

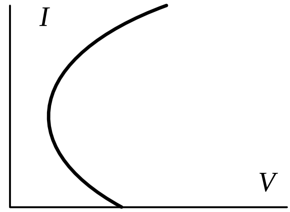


Рис. 5.25

С учетом соотношения $i = C\frac{dU}{dt}$ систему уравнений (5.22) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= \frac{E-U}{RC} - \frac{1}{C}I, \\
\frac{dI}{dt} &= \frac{U - V(I)}{L}.
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Состояние равновесия системы (5.23) определяется из уравнений

$$E - U - IR = 0, \quad U - V(I) = 0.$$

На фазовой плоскости I, U (рис. 5.26) состояние равновесия $\left(I_0, U_0\right)$ является точками пересечения линии $U = V(I)$ и прямой $U = E - IR$ $\left(I = \left(E - U\right)/R\right)$.

Мы рассмотрим случай, когда $R > R_{\text{кр}}$, где $R_{\text{кр}}$ – значение R, при котором прямая $U = E - IR$ пересекает линию $U = V(I)$ в точке, где $V(I)$ имеет вертикальную касательную $V'(I)=0$ (точка D на рис. 5.26). Примем также, что $E>V(0)$. Состояние равновесия при этом будет единственным и расположено на участке линии, где $V'(I)<0$ (участок BD на рис. 5.26). Найдем условия, при которых это состояние равновесия будет неустойчивым, т.е. в данной системе возможно возбуждение колебаний. Характеристическое уравнение (5.21) для системы (5.23) имеет вид

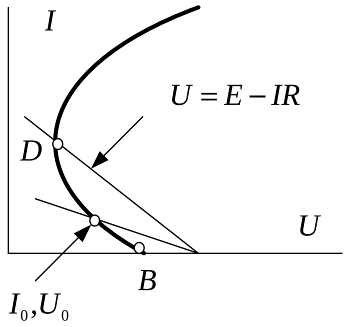


Рис. 5.26

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{RC}-\lambda & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{V'(I_0)}{L}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

или

$$RCL\lambda^2+\left[L+RCV'(I_0)\right]\lambda+R+V'(I_0)=0.$$

При выбранных значениях $R>R_{\text{кр}}$ и $E>V(0)$ $0<-V'(I_0)<R.$ Тогда состояние равновесия будет неустойчивым (хотя бы один из корней характеристического уравнения является положительным действительным числом) при $L+RCV'(I_0)<0$ или $\dfrac{L}{RC}<-V'(I_0).$

Это условие может удовлетворено при больших $R,$ C и достаточно малом $L,$ и в данной схеме при любых начальных условиях будут наблюдаться релаксационные колебания. В предельном случае $L\to 0$ характер этих колебаний на фазовой плоскости I,U будет отображен предельным циклом $ABCDA$ (рис. 5.27).

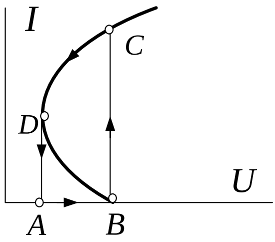


Рис. 5.27

При подключении схемы к источнику питания с ЭДС, большей напряжения зажигания, начинается зарядка конденсатора и растет напряжение на неоновой лампе. После того как лампа вспыхивает первый раз при $E \geq U_B$ в ней скачком появится ток I_C (участок BC). Затем ток начинает падать, причем скорость спадания тока зависит от параметров схемы. Изображающая точка будет двигаться по участку CD (происходит разряд конденсатора). В точке D происходит скачок силы тока – ток упадет до нуля, и лампа погаснет. После этого напряжение на обкладках конденсатора и на лампе начнет возрастать с конечной скоростью, зависящей от величин C и R – участок AB (происходит заряд конденсатора при погашенной лампе). Когда напряжение достигнет значения U_B, лампа снова вспыхнет, и ток скачком возрастет от нуля до I_C. После этого процесс будет повторяться.

5.6. Поведение автоколебательных систем при внешнем воздействии

Поведение автоколебательных систем при внешнем гармоническом воздействии позволяет осуществить синхронизацию колебаний нескольких маломощных источников, стабилизацию излучения (колебаний) мощного генератора с помощью стабилизированного маломощного источника колебаний, решить многие вопросы преобразования частоты и т.п. Осуществить внешнее гармоническое воздействие на автоколебательную систему можно, например, включив источник переменного сигнала $\tilde{U}(t) = U_0 \sin\omega t$ в колебательный контур цепи сетки лампового генератора (рис. 5.28). Для этого случая уравнение (5.4) несколько изменится:

$$LC\ddot{U} + \left[RC - MS(U)\right]\dot{U} + U = U_0 \sin\omega t.$$

Мы не будем проводить детального анализа решения данного уравнения из-за его громоздкости, отметим только некоторые существенные результаты.

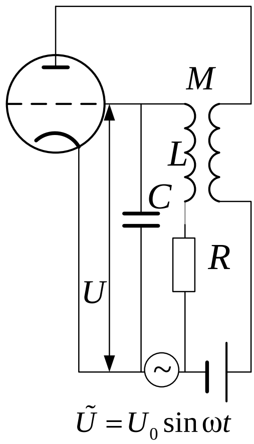


Рис. 5.28

1. Пусть используемая система является недовозбужденной, но регенерированной, т.е. затухание в контуре частично скомпенсировано положительной обратной связью $(RC > MS)$. За счет этой регенерации происходит усиление внешнего воздействия на частоте, в точности равной ω. Это явление называется *синхронизацией* генератора. Для осуществления синхронного режима работы необходимо, чтобы период T_0 автоколебаний (в отсутствие внешней ЭДС) был близок к целому кратному nT периода внешней ЭДС (n – целое число). Синхронный режим возникает за счет совместного действия двух процессов. Во-первых, за счет подавления собственных автоколебательных движений в системе, причем внутри области синхронного режима сохраняется только чисто вынужденный колебательный процесс с частотой внешнего воздействия ω. Во-вторых, может происходить принудительное изменение частоты автоколебаний путем воздействия вынужденных колебаний на форму генерируемых автоколебаний. В томсоновских автоколебательных системах, работающих в мягком режиме, главную роль играет первый процесс. В колебательных системах, далеких от томсоновских, и особенно в релаксационных генераторах, где отсутствуют четко выраженные резонансные свойства, внешний сигнал вследствие нелинейности активного элемента существенно воздействует на форму автоколебаний и в некоторой области расстроек приводит к совпадению частоты автоколебаний с частотой внешнего сигнала, т.е. к возникновению синхронного режима.

2. При действии на колебательный контур недовозбужденной автоколебательной системы внешней ЭДС с частотой ω, близкой

к $n\omega_0$ (n – целое число, ω_0 – собственная частота контура), могут при определенных условиях возбуждаться сильные колебания с частотой, в точности равной ω / n. Это явление называется резонансом n-го рода. Например, резонанс второго рода связан с тем, что при наличии положительной обратной связи в недовозбужденном генераторе внешнее воздействие вызывает периодическое изменение параметров системы с частотой, вдвое большей собственной частоты системы (из-за квадратичного члена аппроксимирующего полинома сеточной характеристики лампы). Это свидетельствует о параметрической природе резонанса второго рода.

Глава 6
СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Предыдущие главы были посвящены изучению колебательных систем с одной степенью свободы. Напомним, что число степеней свободы определяется как минимальное количество независимых переменных, необходимое для описания движений в системе. В механической системе оно равно минимальному числу точек, которые необходимо зафиксировать для того, чтобы прекратить движение. В электрических системах эквивалентом закрепления является либо разрыв участка цепи, если в качестве независимой переменной выбран ток, либо короткое замыкание, если независимой переменной служит напряжение. При идеализации колебательной системы, как правило, пренебрегают теми степенями свободы реальной системы, которым соответствуют частоты, сильно отличающиеся от частот рассматриваемых колебаний. Например, в классической модели математического маятника пренебрегают изгибными колебаниями нити подвеса.

В этой главе мы рассмотрим в основном колебания в системах с двумя степенями свободы. Эти системы можно представить как две отдельные системы с одной степенью свободы, связанные друг с другом. Наличие этой связи приводит к тому, что колебания в одной системе влияют на колебания в другой и наоборот. И в заключение этой главы рассмотрим колебания в системах с произвольным числом степеней свободы. В механических системах связь реализуется через силовое взаимодействие, например, через упругие элементы; в электрических системах связь может быть задана емкостью, индуктивностью или сопротивлением. Главное, что определяет наличие связи между осцилляторами – это перенос энергии, который в конечном итоге приводит к волновому движению.

6.1. Парциальные системы. Нормальные моды колебаний

Системы с одной степенью свободы, на которые можно разбить сложную колебательную систему, называются *парциальными*. Парциальная система может быть выделена из полной системы, если положить равными нулю все остальные координаты. Разбиение полной системы на парциальные неоднозначно, так как независимые координаты могут быть выбраны различными способами. Так, например, колебательная система с двумя степенями свободы, отображенная на рис. 6.1, может быть разбита на парциальные системы тремя способами (рис. 6.2). Каждая такая система обладает собственной *парциальной частотой*.

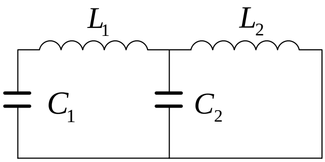
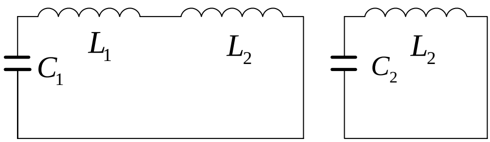
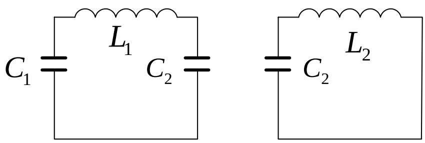


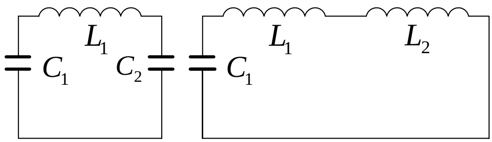
Рис. 6.1



а



б



в

Рис. 6.2

Рассмотрим свободные колебания в системе с двумя степенями свободы на классическом примере двух маятников массами m_1, m_2 и длиной стержней l_1, l_2, связанных пружиной жесткости k (рис. 6.3). Расстояние от точки закрепления пружин до оси вращения маятников – a. Полагая углы отклонения маятников φ_1, φ_2 от положения устойчивого равновесия малыми, запишем для каждого маятника основной закон динамики вращательного движения

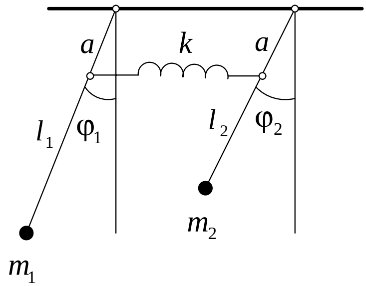


Рис. 6.3

$$\begin{aligned} m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g l_1 \varphi_1 + k a^2 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right), \\ m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g l_2 \varphi_2 - k a^2 \left(\varphi_2 - \varphi_1\right). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь слагаемое $ka^2\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$ дает момент силы упругости, определяемый разностью углов φ_2 и φ_1 (при одинаковых углах отклонения пружина не деформирована). Это слагаемое и определяет связь маятников. Полагая в первом уравнении (6.1) $\varphi_2 = 0$ (т.е. закрепляя второй маятник), получаем уравнение колебаний первой парциальной системы с парциальной частотой ν_1

$$\nu_1^2 = \frac{g}{l_1} + \frac{ka^2}{m_1 l_1^2}.$$

Из второго уравнения (6.1) при $\varphi_1 = 0$ находим вторую парциальную частоту

$$\nu_2^2 = \frac{g}{l_2} + \frac{ka^2}{m_2 l_2^2}.$$

Если ввести коэффициенты связи $\alpha_1 = \dfrac{ka^2}{m_1 l_1^2}$ и $\alpha_2 = \dfrac{ka^2}{m_2 l_2^2}$, то систему уравнений (6.1) можно представить как

$$\begin{aligned} &\ddot{\varphi}_1 + \nu_1^2\varphi_1 - \alpha_1\varphi_2 = 0, \\ &\ddot{\varphi}_2 + \nu_2^2\varphi_2 - \alpha_2\varphi_1 = 0. \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Будем искать ее решение в виде

$$\varphi_1 = A\cos\left(\omega t + \psi\right), \quad \varphi_2 = B\cos\left(\omega t + \psi\right), \qquad (6.3)$$

где ω – частота колебаний в системе, A, B – постоянные.

Подставляя (6.3) в (6.2), находим

$$\begin{aligned} &-\omega^2 A + \nu_1^2 A - \alpha_1 B = 0, \\ &-\omega^2 B + \nu_2^2 B - \alpha_2 A = 0. \end{aligned} \qquad (6.4)$$

Для нетривиальности решения этой системы однородных уравнений относительно A, B необходимо потребовать

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем

$$\omega^4 - \omega^2\left(\nu_1^2 + \nu_2^2\right) + \nu_1^2\nu_2^2 - \alpha_1\alpha_2 = 0\,.$$

Решение данного биквадратного уравнения дает две возможные частоты колебаний системы ω_1 и ω_2:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{1}{2}\left[\nu_1^2 + \nu_2^2 - \sqrt{\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}\,\right], \\ \omega_2^2 &= \frac{1}{2}\left[\nu_1^2 + \nu_2^2 + \sqrt{\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right)^2 + 4\alpha_1\alpha_2}\,\right]. \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Эти частоты не совпадают с парциальными и называются *собственными* или *нормальными* частотами системы. Их значения определяются только свойствами системы и не зависят от разбиения системы на парциальные. В соответствии с принципом суперпозиции полное решение системы уравнений (6.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\psi_2), \\ \varphi_2 &= B_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\psi_2). \end{aligned} \tag{6.6}$$

С учетом соотношений (6.4) постоянные A_1, B_1 (как и A_2, B_2) не являются независимыми. Так из первого уравнения системы (6.4) при $\omega=\omega_1$ находим

$$\left.\frac{B_1}{A_1}\right|_{\omega=\omega_1}=\frac{\nu_1^2-\omega_1^2}{\alpha_1}=\frac{\left[\nu_1^2-\nu_2^2+\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2}\right]}{2\alpha_1}=æ_1. \tag{6.7}$$

Величина $æ_1$ не зависит от начальных условий, полностью определяется параметрами системы и называется *коэффициентом распределения амплитуд на частоте* ω_1. Точно так же можно найти и коэффициент распределения амплитуд на частоте ω_2:

$$æ_2=\left.\frac{B_2}{A_2}\right|_{\omega=\omega_2}=\frac{\nu_1^2-\omega_2^2}{\alpha_1}=\frac{\left[\nu_1^2-\nu_2^2-\sqrt{\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right)^2+4\alpha_1\alpha_2}\right]}{2\alpha_1}. \tag{6.8}$$

Из последних соотношений следует, что амплитуда колебаний одного из маятников на частоте ω_1 (или ω_2) может быть произвольной. Амплитуда же колебаний другого маятника на той же частоте всегда находится в определенном отношении к амплитуде колебаний первого маятника. Таким образом, с учетом соотношений (6.7) и (6.8) колебания маятников имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\psi_2), \\ \varphi_2 &= æ_1 A_1\cos(\omega_1 t+\psi_1)+æ_2 A_2\cos(\omega_2 t+\psi_2), \end{aligned} \tag{6.9}$$

т.е. в общем случае колебания каждого маятника представляют сумму двух гармонических колебаний с частотами ω_1 и ω_2. Постоянные A_1, A_2, ψ_1 и ψ_2 определяются из начальных условий. Причем специальным подбором начальных условий можно получить чисто гармонические колебания системы на частоте ω_1 или ω_2. Рассмотрим, например, довольно часто встречаемый вариант двух одинаковых маятников $(\nu_1 = \nu_2 = \nu, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha)$. В этом случае $æ_1 = 1, æ_2 = -1$, и уравнения (6.9) приобретают вид

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2),$$
$$\varphi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2).$$

Пусть вначале каждый маятник отклонен на величину A и отпущен без начальной скорости: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A, \dot{\varphi}_1(0) = = \dot{\varphi}_2(0) = 0$. Тогда из (6.9) следует

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A\cos\omega_1 t,$$

т.е. переменные φ_1 и φ_2 колеблются только с частотой ω_1 в одинаковой фазе – «синфазные» колебания. Если же вначале первый маятник отклонен на величину A, а второй – на величину $(-A)$ и затем отпущены без начальной скорости, то для углов отклонения имеем

$$\varphi_1 = A\cos\omega_2 t, \quad \varphi_2 = -A\cos\omega_2 t,$$

т.е. переменные φ_1 и φ_2 колеблются уже с частотой ω_2 в противофазе – «противофазные» колебания. Данная ситуация отражена на рис. 6.4, *а*, *б*, где представлены соответственно синфазная и противофазная мода колебаний.

Замечание о фазах колебаний касается не только одинаковых маятников. Связано это со следующим. Из соотношений (6.5) вытекает, что парциальные частоты ν_1 и ν_2 всегда лежат между собственными частотами ω_1 и $\omega_2 > \omega_1$. В свою очередь из соотношений (6.7) и (6.8) следует, что коэффициент распределения амплитуд $æ_1$

на частоте ω_1 всегда больше нуля, а æ_2 всегда меньше нуля. Поэтому колебания маятников на частоте ω_1 всегда происходят в фазе, а колебания на частоте ω_2 – всегда в противофазе.

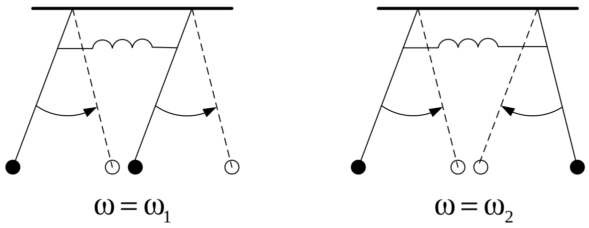


Рис. 6.4

Соотношения (6.9) можно рассматривать как линейное преобразование координат φ_1 и φ_2 в координаты X и Y, где

$$X = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1), \quad Y = A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2). \tag{6.10}$$

Уравнения движений в этих координатах имеют вид

$$\ddot{X} + \omega_1^2 X = 0, \quad \ddot{Y} + \omega_2^2 Y = 0. \tag{6.11}$$

Координаты X и Y, определенные таким образом, называются *нормальными координатами* системы, а уравнения (6.11) описывают *нормальные моды колебаний* и характеризуются одной из нормальных частот системы. Координаты φ_1 и φ_2 связаны с нормальными координатами X и Y соотношениями

$$\varphi_1 = X + Y, \quad \varphi_2 = \text{æ}_1 X + \text{æ}_2 Y.$$

Главной особенностью уравнений движения, записанных в нормальных координатах, является отсутствие членов, описывающих связь между парциальными системами, и каждое такое уравнение содержит только одну зависимую переменную. Кроме того, в выражениях для потенциальной и кинетической энергий, записанных в нормальных координатах, как легко проверить, отсутствуют члены с произведением координат (или их производных).

6.2. Обмен энергией между парциальными системами

Физическая связь между парциальными системами (т.е. их относительные амплитуды) определяется коэффициентами распределения амплитуд $æ_1$ и $æ_2$ на различных частотах. В то же время очень наглядно оценивать взаимодействие парциальных систем по скорости и величине передачи энергии от одного маятника к другому. Для этого рассмотрим процесс колебаний маятников при начальных условиях $\varphi_1(0)=\varphi_0, \varphi_2(0)=0, \dot{\varphi}_1(0)=\dot{\varphi}_2(0)=0.$ В этом случае из (6.9) находим

$$A_1 + A_2 = \varphi_0,\ A_1 æ_1 + A_2 æ_2 = 0,\ \psi_1 = \psi_2 = 0.$$

Тогда амплитуды колебаний маятников

$$A_1 = \varphi_0 \frac{|æ_2|}{æ_1 + |æ_2|}, \quad A_2 = \varphi_0 \frac{æ_1}{æ_1 + |æ_2|},$$

а сами колебания будут представляться выражениями

$$\varphi_1 = \varphi_0 \frac{1}{æ_1 + |æ_2|}\left(|æ_2| \cos\omega_1 t + æ_1 \cos\omega_2 t\right),$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \frac{æ_1 |æ_2|}{æ_1 + |æ_2|}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right).$$

Если частоты ω_1 и ω_2 не слишком далеки одна от другой, то колебания первого маятника можно записать в виде

$$\varphi_1(t) = A(t)\cos\left[\omega_1 t - \psi(t)\right],$$

где

$$A^2(t) = \frac{\varphi_0^2}{\left(æ_1 + |æ_2|\right)^2}\left[æ_1^2 + æ_2^2 + 2æ_1|æ_2|\cos\left(\omega_2 - \omega_1\right)t\right],$$

$$\operatorname{tg}\psi(t) = -\frac{|æ_2|\sin\left(\omega_2 - \omega_1\right)t}{æ_1 + |æ_2|\cos\left(\omega_2 - \omega_1\right)t}.$$

Первое выражение можно рассматривать как меняющуюся со временем амплитуду колебаний с периодом $2\pi/(\omega_2-\omega_1)$. Максимальное значение амплитуды равно φ_0, а минимальное – $\varphi_0\left(æ_1-|æ_2|\right)/\left(æ_1+|æ_2|\right)$. Колебания второго маятника представляют собой биения

$$\varphi_2(t)=\varphi_0\frac{2æ_1|æ_2|}{æ_1+|æ_2|}\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right).$$

При сильном различии парциальных частот, один из коэффициентов распределения много больше другого. Пусть, например, $\nu_1^2>>\nu_2^2$. Тогда из (6.7) и (6.8) следует $æ_1\approx\nu_1^2/\alpha_1$, $|æ_2|\approx\alpha_2/\nu_1^2$. И поскольку, как правило, $\alpha_1\alpha_2<<\nu_1^2\nu_2^2$, то $æ_1>>1, |æ_2|<<1$. В этом случае минимальное значение амплитуды первого маятника приближенно равно $\varphi_0\left(1-2|æ_2|/æ_1\right)$, т.е. амплитуда колебаний первого маятника изменяется мало. Максимальная амплитуда второго маятника приближенно равна $2\varphi_0|æ_2|$, т.е. много меньше амплитуды первого маятника. Таким образом, при слабой связанности обмен энергией между парциальными системами незначителен. На рис. 6.5 представ-

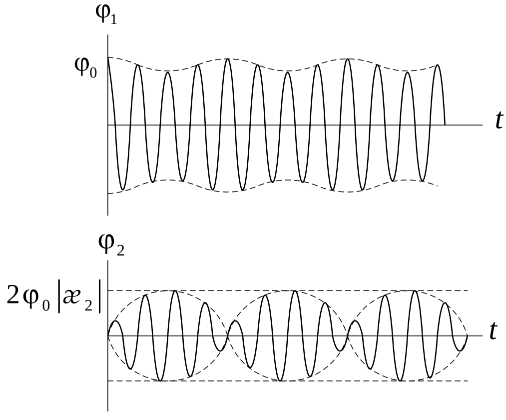


Рис. 6.5

лены соответствующие этому случаю колебания обоих маятников. С приближением $\ae_1$ к $|\ae_2|$ минимальное значение амплитуды первого маятника уменьшается, т.е. растет перекачка энергии от первого маятника ко второму.

При равенстве парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ коэффициенты распределения амплитуд также становятся равными по модулю $\ae_1 = |\ae_2| = \ae,$ а колебания маятников приобретают вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right),$$
$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \ae \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t\right)$$

(для одинаковых маятников $\ae = 1$).

На рис. 6.6 представлены колебания маятников при равенстве парциальных частот $\nu_1 = \nu_2 = \nu.$ Оба маятника совершают биения, огибающая которых сдвинута по времени на $T/4$ $\left(T = 4\pi/\left(\omega_2 - \omega_1\right)\right),$ т.е. периодически происходит полная перекачка энергии от одного маятника к другому. В этом и заключается физический смысл понятия сильной связанности. Время передачи энергии $\tau = T/4 = = \pi/\left(\omega_2 - \omega_1\right),$ и так как обычно $\alpha << \nu^2,$ это время составляет

$$\tau = \frac{\pi\nu}{\alpha},$$

т.е. обратно пропорционально коэффициенту связи $\alpha.$

В любой реальной системе имеет место затухание с постоянной времени $\tau_0.$ Наличие даже малого затухания может кардинально изменить картину колебаний в системе с малой связью, потому что колебания в первом маятнике успеют затухнуть быстрее, чем раскачается второй маятник. Таким образом, сильная связанность в системе проявляется только в том случае, если $\tau << \tau_0.$ При известном затуха-

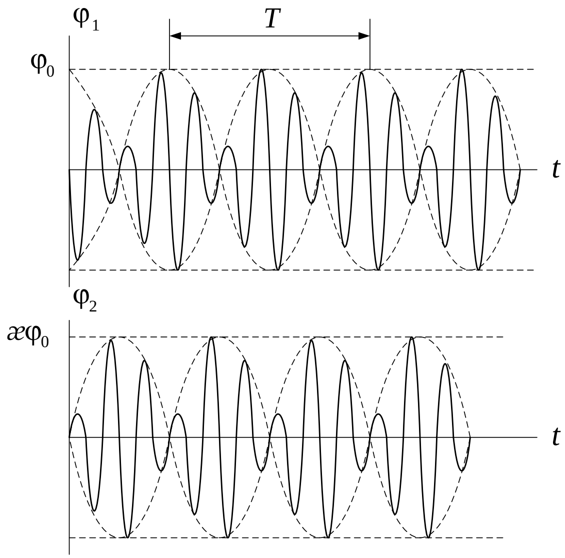


Рис. 6.6

хании в системе это условие накладывает ограничение на величину минимальной связи, при которой происходит сильное взаимодействие двух систем.

6.3. Вынужденные колебания в связанных системах

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в системе из двух индуктивно связанных контуров, в один из которых включена внешняя ЭДС $\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0\cos\Omega t$ (рис. 6.7). Уравнения колебаний токов I_1 и I_2 в этих контурах при отсутствии затухания следуют из закона Ома

$$\begin{gathered}\frac{1}{C_1}\int I_1 dt+L_1\frac{dI_1}{dt}=\mathscr{E}_0\cos\Omega t+M\frac{dI_2}{dt},\\ \frac{1}{C_2}\int I_2 dt+L_2\frac{dI_2}{dt}=M\frac{dI_1}{dt},\end{gathered}\tag{6.12}$$

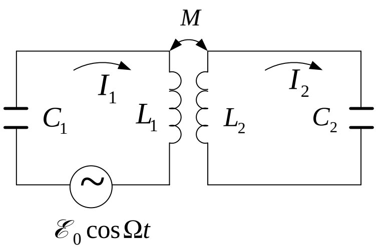


Рис. 6.7

где L_1, L_2, C_1, C_2 – индуктивности и емкости контуров, M – взаимная индуктивность контуров (для нее всегда выполняется соотношение $|M| \le \sqrt{L_1 L_2}$). После дифференцирования по времени уравнения (6.12) принимают вид

$$
\begin{gathered}
\ddot{I}_1 + \nu_1^2 I_1 - \alpha_1 \ddot{I}_2 = -\frac{\mathscr{E}_0}{L_1} \Omega \sin \Omega t, \\
\ddot{I}_2 + \nu_2^2 I_1 - \alpha_1 \ddot{I}_1 = 0,
\end{gathered} \tag{6.13}
$$

где $\nu_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}, \nu_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}, \alpha_1 = M / L_1, \alpha_2 = M / L_2$.

Колебания в системе будут состоять из собственных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и вынужденных колебаний с частотой Ω. Для определения спектра собственных частот положим $\mathscr{E}_0 = 0$ в (6.13) и будем, как и ранее, искать решение в виде $I_1 = A \sin(\omega t + \psi)$, $I_2 = B \sin(\omega t + \psi)$. Тогда приходим к уравнениям

$$
\begin{gathered}
\left(\nu_1^2 - \omega^2\right) A + \alpha_1 \omega^2 B = 0, \\
\left(\nu_2^2 - \omega^2\right) B + \alpha_2 \omega^2 A = 0.
\end{gathered}
$$

Из условия нетривиальности решения данной системы относительно величин A и B получаем уравнение для определения собственных частот

$$
\left(\nu_1^2 - \omega^2\right)\left(\nu_2^2 - \omega^2\right) - \alpha_1 \alpha_2 \omega^4 = 0. \tag{6.14}
$$

Собственные колебания нами уже рассматривались, поэтому ограничимся только вынужденными колебаниями. Будем искать решение уравнения (6.13) в виде

$$I_1 = I_{01}\sin\Omega t, \quad I_2 = I_{02}\sin\Omega t.$$

Подставляя данные выражения в (6.13), получаем уравнения для определения амплитуд токов I_{01}, I_{02}:

$$\left(\nu_1^2-\Omega^2\right)I_{01}+\alpha_1\Omega^2 I_{02}=-\frac{\mathscr{E}_0\Omega}{L_1},$$
$$\left(\nu_2^2-\Omega^2\right)I_{02}+\alpha_2\Omega^2 I_{01}=0.$$

Из данной системы находим

$$I_{01}=-\frac{\mathscr{E}_0\Omega\left(\nu_2^2-\Omega^2\right)}{L_1\left[\left(\nu_1^2-\Omega^2\right)\left(\nu_2^2-\Omega^2\right)-\alpha_1\alpha_2\Omega^4\right]},$$
$$I_{02}=\frac{\alpha_2\mathscr{E}_0\Omega^3}{L_1\left[\left(\nu_1^2-\Omega^2\right)\left(\nu_2^2-\Omega^2\right)-\alpha_1\alpha_2\Omega^4\right]}. \qquad (6.15)$$

На рис. 6.8 приведены зависимости амплитуд токов от частоты внешней силы. В точках $\Omega=\omega_1$ и $\Omega=\omega_2$ амплитуды I_{01} и I_{02} обращаются в бесконечность (это видно и без графиков, если сравнить знаменатели в выражениях (6.15) с уравнением (6.14) для собственных частот). Таким образом, в системе с двумя степенями свободы резонанс происходит на обеих собственных частотах системы. При $\Omega<\nu_2$ токи I_1 и I_2 совершают противофазные колебания, а при $\Omega>\nu_2$ – синфазные колебания. Точка $\Omega=\nu_2$ интересна тем, что в ней ток первого

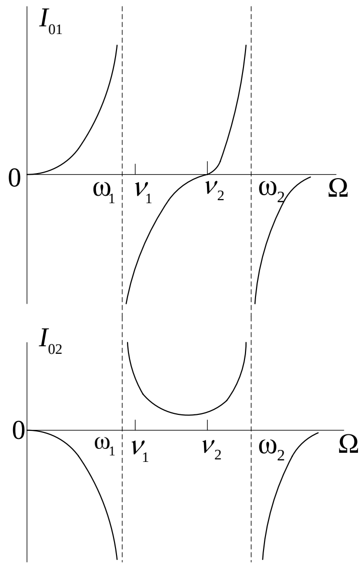


Рис. 6.8

контура, в который включена внешняя ЭДС, обращается в нуль. Данная ситуация уже обсуждалась нами в подразд. 3.3. Во втором контуре колебания не обращаются в нуль ни при каком конечном значении Ω. В общем случае частота успокоения колебаний всегда равна парциальной частоте того контура, который получается при разрыве цепи в точке включения внешней ЭДС.

Физическая природа отсутствия колебаний в первом контуре связана с тем, что взаимная ЭДС $\mathscr{E}_1 = MdI_2/dt$, наводимая в первом контуре колебаниями второго контура на частоте внешней силы $\Omega = \nu_2$ в точности компенсирует внешнюю ЭДС. Нетрудно проверить, что

$$\mathscr{E}_1 = M\frac{dI_2}{dt} = M\Omega I_2 \cos\Omega t = -\mathscr{E}_0 \cos\nu_2 t.$$

Поэтому вынужденные колебания в первом контуре на частоте ν_2 и не совершаются.

Учет затухания в контурах при вынужденных колебаниях приводит к тому, что амплитуды колебаний при резонансе становятся конечными и при $\Omega = \nu_2$ амплитуда колебаний в первом контуре не обращается в нуль (кроме тривиального значения $\Omega = 0$). Таким образом, демпфирование в системе с потерями никогда не бывает полным. Однако уменьшение амплитуды колебаний на частоте ν_2 при малом затухании весьма значительно. На рис. 6.9 приведена резонансная кривая в первом контуре при наличии потерь. Наличие потерь приводит к уменьшению амплитуды колебаний вблизи резонанса и к уширению резонансной кривой. При достаточной близости частот ω_1

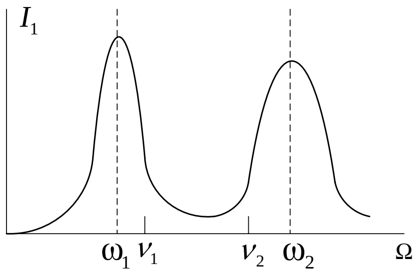


Рис. 6.9

и ω_2 потери могут превратить резонансную кривую в одногорбую, полностью сгладив провал между частотами.

6.4. Колебания в системе с произвольным числом степеней свободы

В качестве последнего примера системы, состоящей из большого числа связанных осцилляторов, рассмотрим электрическую линию передачи, состоящую из N одинаковых индуктивностей L и конденсаторов C, соединенных как показано на рис. 6.10. Будем полагать, что концы этой цепи закорочены, т.е. напряжения на них равны нулю $U_0 = U_{N+1} = 0$.

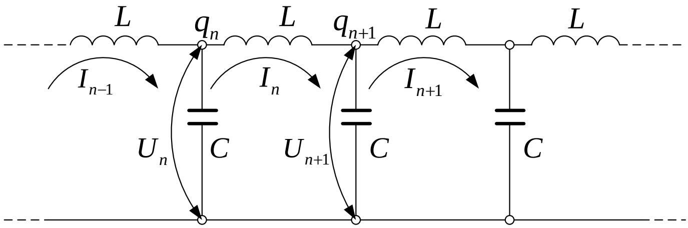


Рис. 6.10

Запишем закон Ома для произвольно выделенного участка цепи с номером n, содержащего одну индуктивность и емкость и по которому протекает ток I_n:

$$L\frac{dI_n}{dt} = U_n - U_{n+1}\,.$$

Здесь $U_n = q_n / C$ – напряжение на конденсаторе с зарядом q_n.

Из закона сохранения заряда следует

$$\frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n.$$

Из этих уравнений нетрудно получить одно уравнение, связывающее вторую производную $\ddot{q}_n$ с величинами заряда в данной точке и двух соседних

$$\ddot{q}_n = \frac{1}{LC}\left(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}\right), \quad n = 1, 2, 3, ..., N. \tag{6.16}$$

Точно так же в силу пропорциональности заряда и напряжения будет выглядеть и уравнение для напряжения U_n:

$$\ddot{U}_n = \frac{1}{LC}\left(U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}\right), \quad n = 1, 2, 3, ..., N.$$

Предположим, что в случае нормальной моды колебаний с частотой ω временна́я зависимость заряда q_n является гармонической, т.е. в компле́ксном виде

$$q_n(t) = Q_n \exp\left(i\omega t\right), \tag{6.17}$$

где Q_n – максимальный заряд. Аналогично

$$q_{n-1} = Q_{n-1} \exp\left(i\omega t\right), \quad q_{n+1} = Q_{n+1} \exp\left(i\omega t\right)$$

(напомним, что i – мнимая единица). Подставляя эти значения в уравнение (6.16), получаем

$$-\omega^2 Q_n e^{i\omega t} = \frac{1}{LC}\left(Q_{n-1} - 2Q_n + Q_{n+1}\right) e^{i\omega t}$$

или после сокращения на $\exp\left(i\omega t\right)$

$$-Q_{n-1} + \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) Q_n - Q_{n+1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, ..., N, \tag{6.18}$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Уравнение (6.18) является рекуррентным соотношением, позволяющим найти значение Q_n по значениям Q_{n-1} и Q_{n+1} в двух соседних точках. Систему уравнений (6.18) необходимо дополнить соотношениями $Q_0 = Q_{N+1} = 0.$ Таким образом, мы пришли к системе N линейных уравнений, решив которую можно найти N разных значений ω^2, причем каждое такое значение ω_S будет частотой S-й нормальной моды. Обычно решение подобных систем основано на теории матриц, но мы поступим несколько иначе. Перепишем (6.18) в виде

$$\frac{Q_{n-1} + Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}. \tag{6.19}$$

Видно, что при любом заданном значении частоты нормальной моды ω_S правая часть этого уравнения не зависит от номера $n,$ а это может быть выполнено только для вполне определенного закона изменения Q_n. Предположим, что амплитуда заряда Q_n выглядит следующим образом:

$$Q_n = A\sin\left(n\theta_S\right), \tag{6.20}$$

где A – постоянная, определяемая из начальных условий, а θ_S – некоторая величина, зависящая только от номера моды S. Тогда

$$\frac{Q_{n-1} + Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{A\left[\sin\left(n-1\right)\theta_S + \sin\left(n+1\right)\theta_S\right]}{A\sin n\theta_S} =$$

$$= \frac{2\sin n\theta_S \cos\theta_S}{\sin\theta_S} = 2\cos\theta_S,$$

т.е. наше предположение о выборе вида Q_n полностью оправдалось (левая часть уравнения (6.19) при таком выборе Q_n на самом деле не зависит от номера n). Величину θ_S можно найти из граничных условий (заметим, что мы еще нигде ими не воспользовались). Условие $Q_0 = 0$ выполняется автоматически в соответствии с (6.20). Из второго граничного условия $Q_{N+1} = 0$ находим

$$Q_{N+1} = A\sin\left(N+1\right)\theta_S = 0 \to \theta_S = \frac{\pi s}{N+1}$$

и тогда (6.17) для S-й моды колебаний частоты ω_S приобретает вид

$$q_n = A\sin\frac{ns\pi}{N+1}\exp\left(i\omega_S t\right).$$

Для нахождения разрешенных значений ω_S обратимся к уравнению (6.19), полагая в нем $\omega = \omega_S$:

$$\frac{Q_{n-1}+Q_{n+1}}{Q_n} = \frac{2\omega_0^2 - \omega_S^2}{\omega_0^2} = 2\cos\theta_S = 2\cos\frac{\pi s}{N+1}.$$

Отсюда находим

$$\omega_S^2 = 2\omega_0^2\left[1-\cos\frac{\pi s}{N+1}\right], \tag{6.21}$$

где s может принимать значения $1, 2, 3, ..., N$, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Характер распределения частот для разных N представлен на рис. 6.11 (значения частот отображены стрелками).

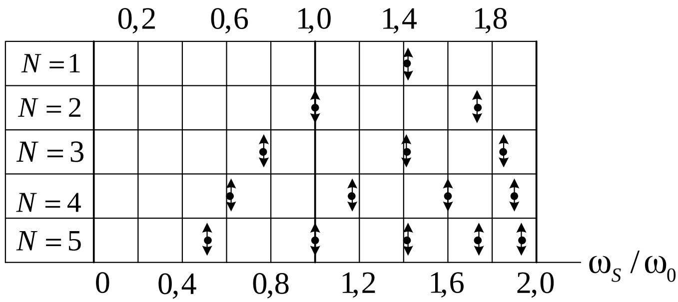


Рис. 6.11

Кроме того, из (6.21) видно, что существует максимальная частота собственных колебаний $\omega_{\max} = 2\omega_0$, которая называется *крити-*

ческой. Наличие такой предельной верхней частоты характерно для всех колебательных систем, образованных из одинаковых элементов, периодически повторяющихся во всей структуре системы. В свою очередь, если линия передачи длинная (но конечная), то существует и не равная нулю самая низкая частота $\omega_{\min}$. Так как $\pi/(N+1) << 1$, то, разлагая косинус в ряд, находим

$$\omega_{\min} \approx \omega_0 \frac{\pi}{N+1}.$$

В заключение данной главы покажем, как связанные колебания в периодической структуре линии передачи переходят в волны, распространяющиеся в непрерывной среде. Пусть линия передачи представляет собой двухпроводную линию, обладающую емкостью и индуктивностью. Обозначим емкость и индуктивность единицы длины такой линии через C_0 и L_0. Выделим на линии малый участок длиной δx. Произведение LC для этого участка будет равно $L_0 C_0 (\delta x)^2$. Тогда уравнение (6.16) для малого участка примет вид

$$\ddot{q}_n = \frac{1}{L_0 C_0 (\delta x)^2}\left(q_{n-1} - 2q_n + q_{n+1}\right). \tag{6.22}$$

Величина $1/\sqrt{L_0 C_0}$, как нетрудно убедиться, имеет размерность скорости, поэтому обозначим

$$\frac{1}{L_0 C_0} = v^2,$$

где v – некоторая скорость. Перепишем правую часть (6.22):

$$\frac{1}{\delta x}\left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\delta x} - \frac{q_n - q_{n-1}}{\delta x}\right) = \frac{1}{\delta x}\left[\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_n\right].$$

Так как величины δq и δx малы, то в пределе ($\delta x \to 0$) получаем

$$\left[\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{n+1}-\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{n}\right]\approx\left[\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{x+\delta x}-\left(\frac{\delta q}{\delta x}\right)_{x}\right]\approx\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\delta x\,.$$

Таким образом, (6.22) принимает вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}=v^2\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\,.$$

Последнее соотношение является типичным волновым уравнением, где $v=1/\sqrt{L_0C_0}$ – фазовая скорость волны.

Глава 7

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ

7.1. Фазовая и групповая скорость волн

Эта глава будет посвящена задачам, связанным с процессом распространения колебаний в различных средах, т.е. волновым процессам. Основным уравнением, описывающим распространение колебаний, является волновое уравнение, которое для одномерных задач выглядит как

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \qquad (7.1)$$

Здесь $\xi = \xi(x,t)$ – некоторая изменяющаяся во времени и пространстве величина, например, для упругих волн это может быть смещением частиц от положения равновесия, для электромагнитных волн это может быть проекцией напряженности электрического (или магнитного) поля; v – так называемая *фазовая скорость* волны (скорость перемещения в пространстве постоянного значения фазы волны). Значение фазовой скорости v не следует путать со скоростью изменения величины ξ. Как правило, $v >> \partial\xi / \partial t$. Очень наглядным примером, поясняющим отличие v и $\partial\xi / \partial t$, является трогание с места состава из большого числа вагонов. Каждый из вагонов, начиная с первого, трогается с места с небольшой скоростью (аналог $\partial\xi / \partial t$), а вдоль состава с гораздо большей скоростью бежит звук трогающихся вагонов (аналог v).

Общее решение уравнения (7.1), как легко убедиться, можно записать в виде

$$\xi(x,t) = f\left(t - x / v\right), \qquad (7.2)$$

где f – некоторая произвольная функция аргумента $t - x / v.$ Если источник волны совершает гармонические колебания с частотой $\omega,$

то выражение (7.2) приобретает вид так называемой бегущей монохроматической волны

$$\xi(x,t) = A\cos\left(\omega t \pm kx + \alpha\right). \tag{7.3}$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны. Знак «–» перед kx относится к волне, распространяющейся вдоль оси X, знак «+» – против оси X.

Данное выражение часто представляют в комплексном виде

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\left\{A\exp\left[i\left(\omega t \pm kx + \alpha\right)\right]\right\},$$

где знак Re означает вещественную часть комплексной экспоненты и его обычно опускают. При подстановке выражения (7.3) в уравнение (7.1) между параметрами ω, k и v обнаруживается связь

$$\omega = kv. \tag{7.4}$$

Выражение (7.4) называется *дисперсионным соотношением* или *законом дисперсии* и его можно воспринимать как определение фазовой скорости волны. Если величины ω и k пропорциональны друг другу, то фазовая скорость от них не зависит и определяется только свойствами среды. Волны, удовлетворяющие простому дисперсионному соотношению $\omega/k = \mathrm{const}$, называются *недиспергирующими* волнами и подчиняются волновому уравнению (7.1). В общем случае закон дисперсии (7.4) может быть более сложным, т.е. частота ω является нелинейной функцией волнового числа k. Нелинейная зависимость частоты волны от волнового числа (дисперсия) имеет большое значение при распространении негармонических волн. Связано это с тем, что гармоническое колебание определенной частоты и амплитуды не может нести никакой информации о передаваемом сигнале, так как каждый последующий цикл колебаний является точной копией предыдущего. Чтобы передать определенную информацию с такой волной, ее нужно *промодулировать*, т.е. изменить какой-либо параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала. В бегущей волне такими изменяющимися параметрами могут быть амплитуда, частота и фаза. Соответственно различают амплитудную, частотную и фазовую модуляцию. Во всех этих случаях волны распространяются в виде так называемых *волновых пакетов*, образованных из гармоник с близкими частотами, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью. В связи с этим возникает естественный вопрос, а с какой же скоростью распространяется волновой пакет? Для того чтобы это понять, рассмотрим простейший случай распространения в одном направлении двух бегущих монохроматических волн с близкими значениями частоты ω, волнового числа k и одинаковой амплитуды a:

$$\xi_1(x,t) = a\cos[\omega t - kx],$$
$$\xi_2(x,t) = a\cos\left[(\omega + \delta\omega)t - (k + \delta k)x\right],$$

причем $\delta\omega << \omega, \delta k << k.$ В соответствии с принципом суперпозиции результирующее колебание $\xi(x,t)$ запишем в виде

$$\xi(x,t) = \xi_1 + \xi_2 = 2a\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)\cos(\omega t - kx).$$

При достаточно малых $\delta\omega$ и δk последнее выражение можно интерпретировать как бегущую волну $\cos(\omega t - kx)$ с переменной амплитудой

$$A = \left|2a\cos\left(\frac{\delta\omega}{2}t - \frac{\delta k}{2}x\right)\right|.$$

Если для монохроматической волны амплитуда постоянна, то теперь она изменяется как во времени, так и в пространстве, т.е. максимум амплитуды перемещается в пространстве с некоторой скоростью. Разумно принять за скорость движения волнового пакета скорость перемещения максимальной амплитуды, т.е. скорость перемещения постоянного значения фазы амплитуды. Это и есть так называемая *групповая скорость* u. Для ее определения зафиксируем постоянное значение фазы амплитуды $(\delta\omega/2)t-(\delta k/2)x=\text{const}$ и найдем его дифференциал

$$d\left(\frac{\delta\omega}{2}t-\frac{\delta k}{2}x\right)=0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dx}{dt}=u=\frac{\delta\omega}{\delta k}$$

или в пределе ($\delta\omega\to 0, \delta k\to 0$)

$$u=\frac{d\omega(k)}{dk}.$$

Введенное таким образом значение групповой скорости определяет не только скорость распространения информации, но и скорость распространения энергии в немонохроматической волне с произвольным законом дисперсии. Групповая скорость u связана с фазовой скоростью v соотношением Рэлея

$$u=v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}, \quad \text{либо} \quad u=v+k\frac{dv}{dk}.$$

Значения u и v совпадают только в том случае, если фазовая скорость не зависит от длины волны (или волнового числа). Это имеет место, например, при распространении света в вакууме. Для электромагнитных волн в вакууме (пустом пространстве) всегда выполняется соотношение $\omega=ck$, где $c=3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Тогда $v=u=c$ независимо от длины волны. Заметим, что подобное соотношение выполняется только для электромагнитных волн в вакууме, для волноводов это уже не выполняется!

7.2. Волны в одномерной цепочке атомов

Перейдем к задаче о нахождении структуры и закона дисперсии упругих волн на модели кристаллической решетки. Конечно, задача о волнах в кристаллической решетке, состоящей из микроскопических объектов – атомов или ионов, требует, строго говоря, квантово-механического рассмотрения. Однако, как мы убедимся, классическая теория (но с учетом дискретности решетки) дает результаты, отражающие существенные особенности упругих колебаний и волн в твердых телах.

Рассмотрим сначала простейшую одномерную модель – прямолинейную цепочку одинаковых атомов массы m, находящихся на одинаковых расстояниях b друг от друга. Такая модель, конечно, не даст точных количественных результатов, пригодных для трехмерного тела, но позволит сильно упростить анализ и сохранить самые существенные результаты. Будем полагать, что все атомы связаны друг с другом пружинками жесткостью χ (упругая постоянная). Пусть по такой цепочке атомов вдоль оси X с некоторой скоростью v бежит продольная синусоидальная волна частоты ω (рис. 7.1, продольные смещения атомов отложены по вертикали в увеличенном масштабе).

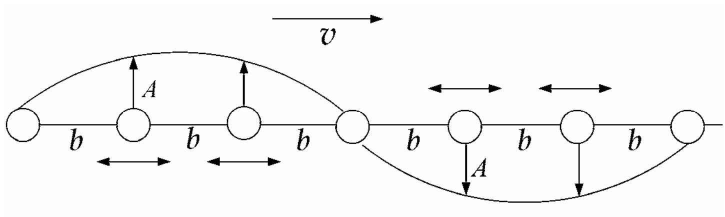


Рис. 7.1

Учтем только силы, действующие на каждый атом цепочки, со стороны двух соседних атомов (приближение ближайших соседей). Пронумеруем положение каждого атома в цепочке:

$$...x_{n-2}, \quad x_{n-1}, \quad x_n, \quad x_{n+1}, \quad x_{n+2}...$$

Смещение n-го атома от положения равновесия обозначим как ξ_n. Относительные смещения соседних атомов $(\xi_n - \xi_{n-1})$ будем считать малыми по сравнению с постоянной решетки b. За счет упругой связи между соседними атомами их колебания не будут независимыми. Эта связь заключается во втором законе Ньютона. Запишем этот закон для атома с номером n с учетом закона Гука:

$$m\ddot{\xi}_n = F_{n+1,n} + F_{n-1,n},$$

где $F_{n+1,n} = \chi\left(\xi_{n+1} - \xi_n\right)$ – сила взаимодействия атомов с номерами n и $n+1$, соответственно $F_{n-1,n} = \chi\left(\xi_{n-1} - \xi_n\right)$ – сила взаимодействия атомов с номерами $n-1$ и n. Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний n-го атома будет иметь вид

$$m\ddot{\xi}_n = \chi\left[\left(\xi_{n+1} - \xi_n\right) - \left(\xi_n - \xi_{n-1}\right)\right] = \chi\left(\xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1}\right) \qquad (7.5)$$

(сила упругости определяется не отклонением от положения равновесия каждого атома, а разностью этих отклонений; если бы все ξ_n были одинаковыми, то вся цепочка атомов была бы однородно смещена, и никаких колебаний не было).

Нахождение общего решения уравнения (7.5) для очень большого числа атомов N – трудная задача. Поэтому рассмотрим, прежде всего, случай, когда $N \to \infty$, т.е. цепочка атомов бесконечно простирается в обе стороны. Такая цепочка обладает трансляционной симметрией, т.е. совмещается сама с собой при сдвиге на любое целое число периодов b. Логично ожидать, что существует частное решение уравнения (7.5), соответствующее этому типу симметрии: все атомы совершают одинаковые гармонические колебания, но фазы этих колебаний сдвинуты на одну и ту же величину при переходе от каждого атома к соседнему. Такое решение представляет бегущую монохроматическую волну с частотой ω и постоянной амплитудой A:

$$\xi_n(x,t) = A\cos\left(\omega t - kx_n + \alpha\right)$$

(где $x_n = nb$), или в комплексном виде

$$\xi_n = A\exp\left[i\left(\omega t - kx_n\right)\right] \qquad (7.6)$$

(значение начальной фазы в нашей задаче можно опустить).

Если волновое число k заменить на $k = (2\pi / b)p$, где p – любое целое число, то колебания всех атомов цепочки не изменятся. Поэтому, не нарушая общности, можно рассматривать значения k только в пределах

$$-\frac{\pi}{b} \le k \le \frac{\pi}{b}.$$

При таких значениях k длина волны λ может изменяться в интервале

$$\infty > \lambda \ge 2b.$$

Из-за дискретности структуры не имеет смысла говорить о распространении волн с длиной $\lambda < 2b$. Например, если положить $\lambda = b$, то в этом случае смещения всех атомов в каждый момент времени были бы одинаковыми, т.е. цепочка атомов перемещалась бы как единое целое.

Подставляя выражение (7.6) в уравнение (7.5) нетрудно получить

$$\omega^2 = \frac{\chi}{m}\left(2 - e^{ikb} - e^{-ikb}\right) = 2\frac{\chi}{m}(1 - \cos kb).$$

Ограничиваясь положительными значениями k, отсюда находим

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}} \sin\frac{kb}{2} = \omega_{\max} \sin\frac{kb}{2}, \tag{7.7}$$

где $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}}$ (чуть позднее мы поймем смысл данной величины).

Фазовая скорость волны v определяется выражением

$$v = \frac{\omega}{k} = b\sqrt{\frac{\chi}{m}} \frac{\sin\frac{kb}{2}}{\frac{kb}{2}},$$

из которого следует, что скорость волны зависит от волнового числа и, следовательно, имеет место дисперсия.

В низкочастотном пределе $(\omega << \omega_{\max})$ фазовая скорость волны уже не зависит от частоты и определяется по формуле

$$v = b\sqrt{\frac{\chi}{m}}.$$

Нетрудно видеть, что это значение в точности совпадает со скоростью упругих волн в твердом теле. Для этого выделим в твердом теле в направлении распространения волны маленький цилиндр с площадью сечения S и высотой $b.$ Запишем для него закон Гука:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta b}{b} = \frac{\chi \Delta b}{S},$$

где Δb – деформация цилиндра под действием силы F.

Из этого соотношения следует, что параметр $\chi,$ указанный в постановке задаче (упругая постоянная решетки), можно выразить через модуль Юнга E:

$$\chi = \frac{ES}{b}.$$

Тогда скорость волны в низкочастотном пределе

$$v = \sqrt{\frac{\chi}{m}}b = b\sqrt{\frac{ES}{mb}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где ρ – плотность среды.

Точно такое же выражение получается для скорости упругих волн в модели сплошной среды.

Оценим величину $\omega_{\max}$ для железа:

$$\omega_{\max} = \frac{2}{b}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 2\sqrt{\frac{2\cdot 10^{11}}{7{,}8\cdot 10^{3}}}\cdot\frac{1}{10^{-10}} \approx 10^{14}\,\text{с}^{-1}.$$

Групповая скорость волны

$$u = \frac{d\omega}{dk} = b\sqrt{\frac{\chi}{m}}\cos\frac{kb}{2}.$$

На рис. 7.2 отображена зависимость фазовой и групповой скоростей от волнового числа k. Обращение групповой скорости в нуль при $k = \pi/b$ связано с тем, что с физической точки зрения в рассматриваемом случае атомы как бы не связаны, а изолированы и каждый из них совершает гармоническое колебание с частотой $\omega = \omega_{max}$. При колебаниях на этой частоте центр инерции любой пары соседних атомов никуда не двигается, а фазы колебаний соседних атомов отличаются на π (рис. 7.3).

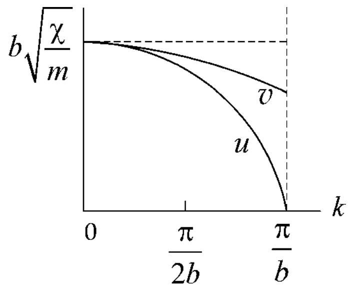


Рис. 7.2

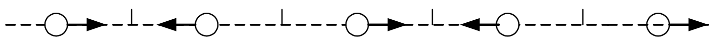


Рис. 7.3

Если центр инерции любой пары соседних атомов неподвижен, то каждый атом совершает колебания около центра инерции и на атом действуют с двух сторон пружинки жесткостью 2χ (увеличение жесткости связано с уменьшением длины пружинки в два раза). Таким образом, эффективная жесткость становится равной 4χ и частота колебаний каждого атома составит

$$\omega = \sqrt{\frac{4\chi}{m}} = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}} = \omega_{max}.$$

Очевидно, при этом не должно происходить никакого переноса энергии вдоль всей цепочки атомов, а так как скорость переноса энергии определяется именно групповой скоростью, то ее значение обращается в нуль именно при $\omega = \omega_{max}$.

Зависимость частоты колебаний от волнового числа представлена на рис. 7.4. Из него, во-первых, хорошо видно, почему достаточно рассматривать значения волнового числа только в пределах $-\pi/b \le k \le \pi/b$. Во-вторых, для малых k (длинные волны) можно пользоваться непрерывной моделью твердого тела, в которой реализуется линейный закон дисперсии $\omega = k \cdot c$, где c – скорость звука (при малых k нет существенной разницы между фазовой и групповой скоростями).

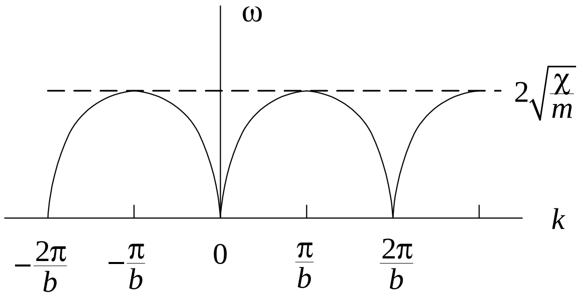


Рис. 7.4

Посмотрим теперь, каким образом должна отразиться ограниченность длины цепочки на спектре колебаний атомов твердого тела. Пусть число атомов в ней равно N, а ее длина равна L. Для цепочки из N атомов Борном и Карманом были предложены так называемые периодические условия $\xi(n) = \xi(n+N)$, которые можно интерпретировать как

$$\xi(x) = \xi(x+L). \tag{7.8}$$

Частными решениями уравнения (7.5) в такой ограниченной цепочке атомов являются волны с одинаковой частотой, распространяющиеся за счет отражения от концов цепочки в разных направлениях:

$$\xi(x,t) = A\exp\left[i\left(\omega t \pm kx\right)\right].$$

Условие периодичности (7.8) будет выполнено только в том случае, если волновое число k принимает следующие значения:

$$k = \frac{2\pi}{L}n,$$

где n – целое число.

При наложении отраженных волн внутри цепочки устанавливается стоячая волна, причем на длине цепочки в соответствии с условием (7.8) должно укладываться целое число длин волн. Каждой такой стоячей волне соответствует собственное, или нормальное, колебание цепочки атомов. Таким образом, ограниченность длины цепочки атомов приводит к тому, что спектр нормальных колебаний становится дискретным, эквидистантным по k с интервалом $2\pi/L$ между разрешенными значениями волнового числа. К этому же выводу можно прийти и в общем случае, рассматривая собственные колебания в трехмерной кристаллической решетке, состоящей из одинаковых частиц. Только в таком твердом теле, если пренебречь анизотропией, к продольным колебаниям добавляются еще две ветви (моды) поперечных колебаний. При этом число нормальных колебаний утраивается.

Обобщим проведенный выше анализ на случай колебаний решетки в кристаллах с более чем одним атомом на примитивную ячейку. Для качественного решения воспользуемся опять одномерной цепочкой, состоящей из двух разных по массе атомов, чередующихся друг с другом (рис. 7.5). Обозначим их массы через M и $m\,(M > m)$, а их смещения из положения равновесия – через ξ_n и η_n соответственно. Постоянная упругой связи, как и ранее, равна χ. Расчет проведем в приближении ближайших соседей, т.е. примем во внимание силы взаимодействия только соседних атомов. Тогда по аналогии с уравнением (7.5) и в соответствии с рис. 7.5 получаем

$$M\ddot{\xi}_n = \chi(\eta_n - 2\xi_n + \eta_{n+1}),$$
$$m\ddot{\eta}_n = \chi(\xi_{n-1} - 2\eta_n + \xi_n). \tag{7.9}$$

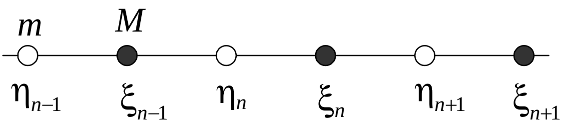


Рис. 7.5

Как и ранее, будем искать частное решение этой системы уравнений в виде бегущих волн:

$$\xi_n = \xi_0 \exp\left[i\left(\omega t - knb\right)\right],$$
$$\eta_n = \eta_0 \exp\left[i\left(\omega t - knb + kb/2\right)\right], \tag{7.10}$$

полагая, что k изменяется в интервале

$$-\frac{\pi}{b} \le k \le \frac{\pi}{b},$$

причем под b теперь будем понимать расстояние между двумя соседними одинаковыми атомами. Сдвиг фазы бегущих волн на $kb/2$ в выражениях (7.10) связан с тем, что положение разных атомов с одинаковыми номерами n отличается на $b/2$. После подстановки выражений (7.10) в систему уравнений (7.9) приходим к системе линейных однородных уравнений:

$$\left(M\omega^2 - 2\chi\right)\xi_0 + \chi\left(e^{\frac{ikb}{2}} + e^{-\frac{ikb}{2}}\right)\eta_0 = 0,$$
$$\chi\left(e^{\frac{ikb}{2}} + e^{-\frac{ikb}{2}}\right)\xi_0 + \left(m\omega^2 - 2\chi\right)\eta_0 = 0. \tag{7.11}$$

Приравняв определитель этой системы нулю, получаем биквадратное уравнение относительно ω:

$$Mm\omega^4 - 2\chi(M+m)\omega^2 + 2\chi^2(1-\cos kb) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\chi}{Mm}\left(M + m \pm \sqrt{M^2 + m^2 + 2Mm\cos kb}\right). \tag{7.12}$$

Из-за того, что перед квадратным корнем стоит двойной знак, получаются две ветви частот.

Рассмотрим сначала поведение выражения (7.12) при $M = m$ (этот вариант уже обсуждался ранее, и нам есть с чем сравнить). В этом случае

$$\omega^2 = \frac{2\chi}{m}\left(1 \pm \cos\frac{kb}{2}\right),$$

или для знака плюс

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}}\cos\frac{kb}{4},$$

для знака минус

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\chi}{m}}\sin\frac{kb}{4},$$

что отображено на рис. 7.6. Это решение должно быть эквивалентным решению для цепочки одинаковых атомов (7.7). Нужно только помнить, что сейчас параметр b в два раза превышает прежнее значение постоянной решетки. Второе из написанных решений (пропорциональное синусу) совпадает с найденным ранее решением (7.7), а первое (пропорциональное косинусу), как нетрудно видеть, фактически ему эквивалентно. При сдвиге всей кривой (c) на $2\pi/b$ каждая точка этой кривой переходит в кривую (s). Это означает, что можно не рассматривать первое решение (косинус).

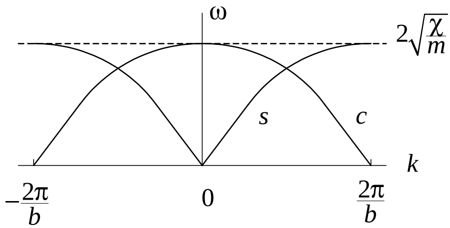


Рис. 7.6

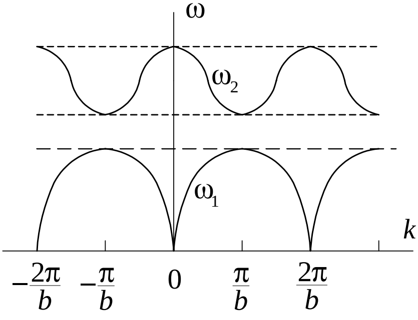


Рис. 7.7

При $M \neq m$ получаем две разные ветви частот (рис. 7.7). Знаку минус в выражении (7.12) соответствует ветвь $\omega_1(k)$, знаку плюс – ветвь $\omega_2(k)$. Ветвь $\omega_1(k)$ называется акустической или дебаевской, ветвь $\omega_2(k)$ – оптической или борновской. Происхождение этих названий связано с тем, что начальный участок акустической ветви соответствует звуковым (акустическим) волнам, а частоты оптической ветви при всех k находятся в оптическом (а именно в инфракрасном) диапазоне.

При малых k частота ω_1 также мала и изменяется линейно в зависимости от k. В этом случае, как видно из уравнений (7.11) и рис. 7.7, $\xi_0 = \eta_0$. Это значит, что атомы, расположенные на малом по сравнению с длиной волны отрезке колеблются в одинаковых фазах. Оптическая же ветвь $\omega_2(k)$ характеризуется тем, что при $k \to 0$ частота стремится к максимуму. Из уравнений (7.11) и рис. 7.7 следует, что $M\xi_0 = -m\eta_0$. Это означает, что соседние атомы с массами M и m колеблются в противоположных фазах.

На границе интервала $-\pi/b \le k \le \pi/b$ характер колебаний атомов существенно изменяется. На рис. 7.8, *а* отображен характер колебаний акустической моды, а на рис. 7.8, *б* – оптической моды. Отметим, что в каждой моде движутся лишь атомы одного типа. Меньшей частоте соответствует мода, в которой движутся более тяжелые атомы (черные кружочки).

а *б*

Рис. 7.8

В трехмерной кристаллической решетке, элементарная ячейка которых содержит s атомов, существует $3s$ ветвей нормальных колебаний. Из них три ветви акустические: одной соответствуют продольные колебания, двум другим – поперечные. Остальные $(3s-3)$ ветвей – оптические, при которых происходят сильные смещения атомов элементарной ячейки друг относительно друга.

7.3. Уравнение Клейна–Гордона. Природа дисперсии

Обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (7.13)$$

и его дисперсионное соотношение $\omega=kv$ предполагают отсутствие дисперсии, т.е. фазовая скорость волны $v=\omega/k$ не зависит от волнового числа k. А как может выглядеть уравнение, подобное (7.13), но описывающее распространение одномерных волн в среде с дисперсией? Для ответа на этот вопрос рассмотрим бесконечную одномерную цепочку не из частиц (атомов), а из тождественных связанных осцилляторов. Это может быть, например, цепочка математических маятников массы m, имеющих собственную частоту $\omega_0=\sqrt{g/l}$. Связь маятников осуществляется пружинами жесткости χ (рис. 7.9, *а*). Или это может быть цепочка одинаковых пружинных маятников с собственной частотой ω_0, связанных между собой пружиной (рис. 7.9, *б*).

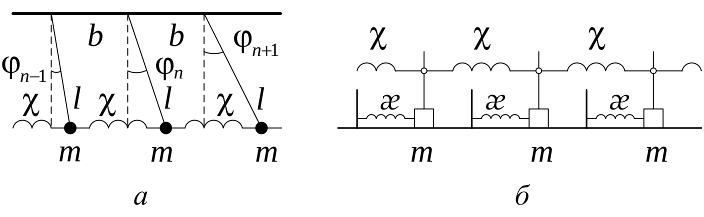


Рис. 7.9

Принципиальное отличие таких колебательных систем от рассмотренной нами ранее одномерной цепочки атомов заключается в том, что, если убрать связывающие пружины жесткости χ, то колебания в системе остаются. Если же убрать упругую связь между атомами в одномерной цепочке, то ни о каких колебаниях не может быть и речи. Электрическим аналогом таких одномерных механических систем из большого числа осцилляторов является эквивалентная схема из LC-цепочек (рис. 7.10). Следует заметить, что с помощью различных комбинаций LC-цепочек можно реализовать практически любую дисперсионную зависимость, поэтому такие цепочки могут служить моделями при исследовании распространения волн в различных средах. Например, рассмотренная нам ранее в подразд. 6.4 цепочка, отображенная на рис. 6.10, вообще не обладает дисперсией, так как при предельном переходе уравнения колебаний в ней сводятся к обычному волновому уравнению (7.13).

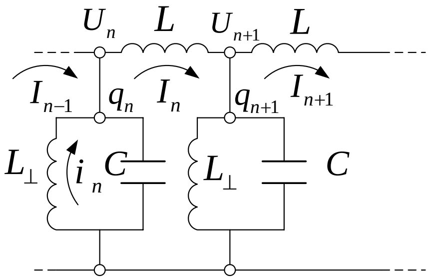


Рис. 7.10

Вернемся к нашей цепочке (см. рис. 7.10) и запишем закон Ома для произвольно выделенного участка с номером n, содержащего индуктивность L с током I_n

$$L\frac{dI_n}{dt} = U_n - U_{n-1}\,.$$

здесь $U_n = q_n / C$.

Из закона сохранения заряда следует

$$\frac{dq_n}{dt} = I_{n-1} - I_n + i_n\,,$$

где i_n – ток, протекающий через индуктивность $L_\perp$. Его значение при выбранном нами направлении подчиняется уравнению

$$L_{\perp}\frac{di_n}{dt}=-\frac{q_n}{C}.$$

Из этих уравнений можно получить одно уравнение, связывающее вторую производную $\ddot{q}_n$ с величинами заряда в данной точке и двух соседних

$$\ddot{q}_n=\frac{1}{LC}\left(q_{n-1}-2q_n+q_{n+1}\right)-\frac{1}{L_{\perp}C}q_n,\quad n=1,2,3,\ldots \tag{7.14}$$

Это уравнение отличается от (6.16) наличием в правой части дополнительного слагаемого $q_n/(L_{\perp}C)$. Если ввести обозначение

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L_{\perp}C}},$$

то (7.14) можно переписать в виде дифференциально-разностного уравнения с разностью второго порядка

$$\ddot{q}_n+\omega_0^2q_n=\frac{1}{LC}\left(q_{n-1}-2q_n+q_{n+1}\right). \tag{7.15}$$

Легко проверить, что совершенно аналогично будут выглядеть и уравнения, описывающие колебания в бесконечных цепочках осцилляторов, представленных на рис. 7.9. Для рис. 7.9, *а*:

$$\ddot{\varphi}_n+\omega_0^2\varphi_n=\frac{\chi}{m}\left(\varphi_{n-1}-2\varphi_n+\varphi_{n+1}\right),$$

где $\omega_0^2=g/l$, φ_n – малый угол отклонения. Для рис. 7.9, *б*:

$$\ddot{\xi}_n+\omega_0^2\xi_n=\frac{\chi}{m}\left(\xi_{n-1}-2\xi_n+\xi_{n+1}\right),$$

где $\omega_0^2=æ/m, \xi_n$ – смещение маятника с номером n от положения равновесия.

Решение системы (7.15) будем, как и в предыдущем разделе, искать в виде одночастотных колебаний (аналогично (7.6))

$$q_n = A\exp\left[i\omega t - inkb\right],\quad q_{n-1} = A\exp\left[i\omega t - i(n-1)kb\right],$$
$$q_{n+1} = A\exp\left[i\omega t - i(n+1)kb\right], \tag{7.16}$$

где b – пространственный период повторения отдельных ячеек в бесконечной цепочке осцилляторов. Подставляя (7.16) в (7.15), получим для действительных значений волнового числа k закон дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{LC}\left(1-\cos kb\right) = \omega_0^2 + \frac{4}{LC}\sin^2\frac{kb}{2}, \tag{7.17}$$

а для мнимых значений $k = -i\varepsilon$ (ε – действительная величина)

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2}{LC}\left(1-\operatorname{ch}\varepsilon b\right) = \omega_0^2 - \frac{4}{LC}\operatorname{sh}^2\frac{\varepsilon b}{2} \tag{7.18}$$

($\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ – гиперболические синус и косинус). Задавая в уравнении (7.17) частоту ω (т.е. оказывая на цепочку внешнее воздействие), можно найти значение волнового числа k. Если k получится действительным, то вдоль цепочки будет распространяться бегущая волна с частотой ω, если k – мнимое, то волна будет экспоненциально затухающей. Действительно, при $k = -i\varepsilon$ для q_n имеем $q_n = A\exp\left(i\omega t - inkb\right) = A\exp\left(i\omega t - n\varepsilon b\right)$, т.е. с ростом номера ячейки n значение $q_n \to 0$.

Дисперсионное уравнение (7.17) определяет диапазон частот от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \omega^* = \sqrt{\omega_0^2 + 4/(LC)}$, что соответствует значениям k от $k = 0$ до $k = \pi/b$ (рис. 7.11). Диапазон частот $\omega_0 < \omega < \omega^*$ с соответствующими волновыми числами определяет область «прозрачности», в которой волны распространяются без затухания. Из (7.17) следует, что условие $\omega < \omega_0$ возможно только, если $\sin^2(kb/2) < 0$, т.е. при мнимых k, соответствующая дисперсионная кривая представлена на рис. 7.12. Данным значениям $0 < \omega < \omega_0$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 = = (2/b)\operatorname{Arsh}\left(\sqrt{LC}/2\omega_0\right)$ ($\operatorname{Arsh} x$ – обратный гиперболический синус) соответствует область непрозрачности, в которой амплитуда колебаний, возбуждаемых на границе цепочки, экспоненциально спадает с ростом номера ячейки.

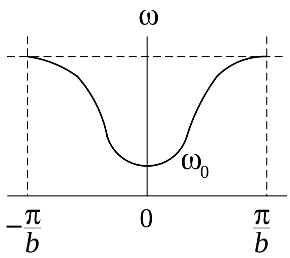


Рис. 7.11

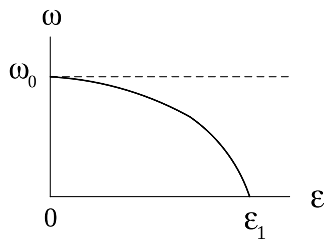


Рис. 7.12

Предположим теперь, что характерный пространственный период волнового движения λ (длина волны) много меньше пространственного периода повторения ячеек b. Тогда дифференциально-разностное уравнение (7.15) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных. Это можно сделать либо так, как мы делали в подразд. 6.4, либо используя разложение искомой функции в ряд Тейлора при малых b. Однако прежде чем это проделать, необходимо понять, во что перейдут величины LC и $L_\perp C$ при устремлении пространственного периода b к нулю. Для произведения LC можно записать $LC = L_0 C_0 b^2$, где L_0, C_0 – индуктивность и емкость единицы длины цепочки (при этом мы предполагаем, что индуктивность L и емкость C можно непрерывно распределить по длине цепочки). А вот произведение $L_\perp C$, как это ни странно, от величины b не зависит. Поясним это. Рассмотрим произвольную ячейку, содержащую параллельно соединенные индуктивность $L_\perp$ и емкость C. Разобьем данную ячейку на m одинаковых микроячеек, каждая из которых должна содержать некоторую индуктивность и емкость (рис. 7.13). Так как и емкости, и индуктивности, попавшие в каждую микроячейку, оказываются соединенными параллельно с остальными микроячейками, то емкость микроячейки уменьшается в m раз, а индуктивность микроячейки увеличивается в m раз (вспомним, что при параллельном соединении емкости складываются, а для индуктивностей складываются величины, обратные индуктивностям: $C_{\text{парал}} = \sum C_i$, $1/L_{\text{парал}} = \sum 1/L_i$). В итоге произведение $L_\perp C$, а с ним и величина $\omega_0 = 1/\sqrt{L_\perp C}$ останутся неизменными.

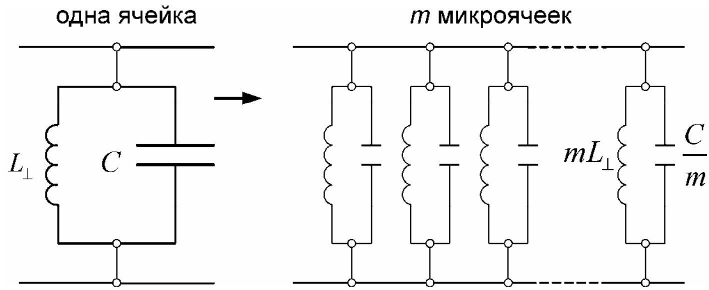


Рис. 7.13

При устремлении параметра b к нулю величины $q_n(t), q_{n+1}(t)$ и $q_{n-1}(t)$ можно заменить на следующие:

$$q_n(t) \to q(x,t),$$

$$q_{n+1}(t) \to q\left[\left(x+b\right),t\right] = q(x,t) + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}b^2 + ...,$$

$$q_{n-1}(t) \to q\left[\left(x-b\right),t\right] = q(x,t) - \frac{\partial q(x,t)}{\partial x}b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}b^2 + ...$$

Тогда, переходя от дискретной координаты $x_n = nb$ к непрерывной, вместо уравнения (7.15) получаем уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + \omega_0^2 q(x,t) = 0, \tag{7.19}$$

где введено обозначение $v^2 = 1/\left(L_0 C_0\right)$. Это линеаризованное уравнение Клейна–Гордона, впервые появившееся в теории поля. Его применяют во многих задачах, в том числе при распространении электромагнитных волн в плазме, при распространении волн в волноводах и др.

Обсудим теперь подробнее смысл допущений, сделанных при выводе уравнения Клейна–Гордона. Во-первых, функция $q_n(t)$ была определена в дискретных точках оси X, мы же заменили ее непрерывной. Во-вторых, мы разложили функцию $q(x,t)$ в ряд и отбросили старшие члены разложения (в этом неточность уравнения (7.19)). Кроме того, проделывая эти операции, мы не определили точно, по сравнению с чем b мало. Для ответа на эти вопросы получим вначале дисперсионное уравнение для (7.19). Полагая $q(x,t) \sim \exp\left(i\omega t - ikx\right)$, после подстановки в (7.19) имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2,$$

или с учетом $v^2 = 1/\left(L_1 C_1\right)$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{k^2 b^2}{LC}. \tag{7.20}$$

Нетрудно увидеть, что соотношение (7.20) получается из (7.17) при $kb \ll 1$. Итак, когда мы говорим о малости b по сравнению с характерным пространственным периодом волнового движения, то мы говорим о малости безразмерной величины kb и, следовательно, о малости b по сравнению с длиной волны λ, так как $k = 2\pi/\lambda$. Таким образом, наши допущения справедливы для достаточно длинных волн, и цепочку осцилляторов можно рассматривать как непрерывную среду, описываемую уравнением Клейна–Гордона. Однако все приближения нарушаются, когда $\lambda \sim b$, т.е. длина волны в структуре соизмерима с ее пространственным периодом. Таким образом, условие $kb \ll 1$ означает переход от упорядоченных структур к одномерной сплошной среде.

Если в уравнении (7.19) устремить ω_0 к нулю, то мы получаем обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2},$$

дисперсионное соотношение которого

$$\omega = \pm kv,$$

или для анализируемой модели

$$\omega = \pm \frac{kb}{\sqrt{LC}}. \tag{7.21}$$

На рис. 7.14, *а* представлены дисперсионные кривые для сред с линейной дисперсией, описываемой уравнением (7.21), на рис. 7.14, *б* – дисперсией, описываемой уравнением (7.20). Из них видно, что дисперсия проявляется особенно сильно вблизи ω_0. В то же время при достаточно больших ω дисперсии нет (линейная зависимость $\omega(k)$). Попытаемся систематизировать полученные результаты, чтобы понять, с чем связано существование дисперсии в среде.

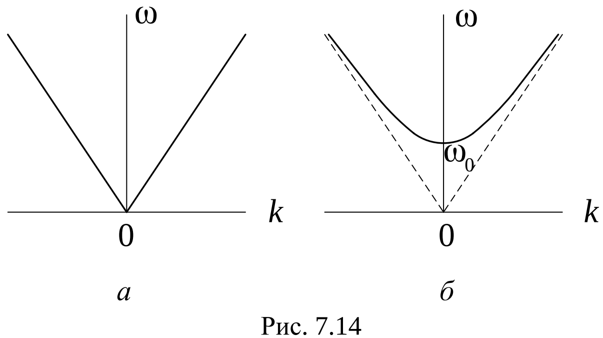


Рис. 7.14

Вернемся к уравнению Клейна–Гордона, описывающему распространение одномерных волн в среде с дисперсией, в частности в цепочке осцилляторов с собственными частотами ω_0, расположенных на расстоянии $b \ll \lambda$ (дисперсионная кривая – сплошная кривая на рис. 7.14, *б*). Ранее уже говорилось, что при $\omega_0 \to 0$ дисперсия исчезает. Это происходит потому, что исчез собственный временной масштаб, характеризующий среду. Когда каждый из осцилляторов имеет собственный период $T = 2\pi/\omega_0$, «среда» из осцилляторов не будет воспринимать частоту меньше собственной. На этой критической частоте все осцилляторы будут колебаться синфазно – волн нет, существуют только колебания. Если теперь обратиться к уравнениям (7.15) и (7.17), в которых соотношение между b и λ может быть любым, то нетрудно видеть, что дисперсия в системе сохраняется даже при $\omega_0 \to 0$. В этой среде дисперсия определяется собственным пространственным масштабом – периодом «решетки». С этим же связана дисперсия в «решетке» из равноудаленных частиц разной массы (7.12). Что касается цепочки из связанных осцилляторов, когда $\omega_0 \neq 0$ и b сравнимо с λ, то дисперсия определяется и временным, и пространственным масштабами.

Таким образом, можно сказать, что существование дисперсии в среде связано с наличием в ней собственных, независимых от параметров волны пространственных или временных масштабов. Дисперсия, связанная с наличием в среде временных масштабов, обычно называется *временнóй*, а с наличием пространственных масштабов – *пространственной*. Если в среде нет никаких пространственных или временных масштабов (как, например, при распространении звука в воде или электромагнитных волн в вакууме), т.е. нет характерных частот или периодов, то распространяющаяся несинусоидальная волна искажаться не будет. В этом случае дисперсия отсутствует. При распространении волн в периодических структурах (кристаллах) волны низкой частоты распространяются без искажений, а для высоких частот уже имеет значение расстояние между ионами – дискретность среды.

7.4. Волны в линиях передачи

Обычно переменные электрические сигналы передают по двухпроводной линии. В области частот 50–60 Гц потери этой линии на излучение достаточно малы (они пропорциональны четвертой степени частоты). На частотах от нескольких килогерц до нескольких тысяч мегагерц потери на излучение становятся очень ощутимыми и поэтому электромагнитные сигналы передаются по *коаксиальным линиям* (провод внутри цилиндрического внешнего проводника – для защиты от излучения). Рассмотрим вначале задачу о распространении электрических сигналов в длинной двухпроводной линии, в которой с помощью генератора могут возбуждаться переменные токи высокой частоты (система Лехера). Связь проводов с генератором может быть либо емкостной, либо индуктивной. Примем, что по отношению к поперечным размерам системы условие квазистационарности выполнено (расстояние между проводами много меньше cT, где T – период колебаний, c – скорость света), а по отношению к продольным размерам – нет (для частот порядка сотни мегагерц длина линии составляет несколько метров). Поэтому электрические токи в проводах не квазистационарны, сила тока I, а также линейная плотность заряда q существенно изменяются вдоль проводов.

Пусть для конкретности данная двухпроводная линия является коаксиальным кабелем, не обладающим активным сопротивлением (рис. 7.15, *а*).

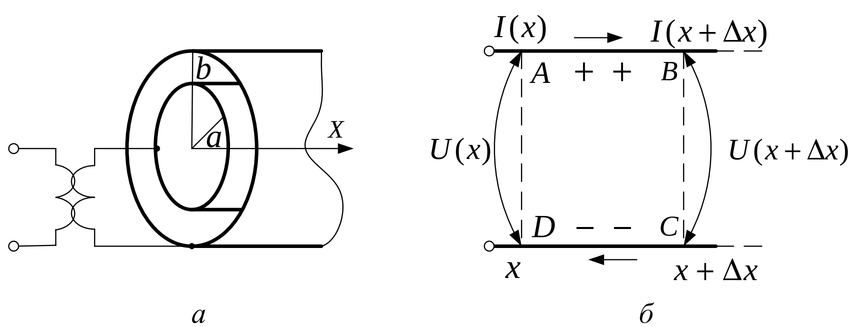


Рис. 7.15

Схематично данная линия отображена на рис. 7.15, *б*. При выполнении условия квазистационарности по отношению к поперечным размерам можно ввести емкость и индуктивность единицы длины – C_0 и L_0. Так как ток I изменяется со временем, то наличие индуктивности вызовет падение напряжения между проводами, различное вдоль оси X. Для расчета $U(x)$ выделим небольшой контур $ABCD$ (см. рис. 7.15, *б*) и применим к нему основной закон электромагнитной индукции $\oint E_l dl = -d\Phi / dt$. Интеграл по контуру равен $U(x+\Delta x) - U(x)$ (напомним, что сами провода не обладают активным сопротивлением). Производная же $d\Phi / dt$ будет равна $L_0 \Delta x \cdot dI / dt$. Таким образом,

$$U(x+\Delta x) - U(x) \approx -L_0 \Delta x \frac{\partial I}{\partial t}.$$

С учетом приближенного равенства $U(x+\Delta x) - U(x) \approx \dfrac{\partial U}{\partial x} \Delta x,$ последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}. \qquad (7.22)$$

Так как $I(x) \neq I(x+\Delta x)$, то на участке Δx появляется заряд $q = C_0 \Delta x U$. Скорость изменения этого заряда $dq / dt = C_0 \Delta x \cdot dU / dt$ должна быть равна разности токов $I(x) - I(x+\Delta x) \approx -dI / dx \cdot \Delta x$. Таким образом,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (7.23)$$

В уравнениях (7.22) и (7.23) мы поставили знаки частных производных, подчеркивая, что значения тока и напряжения зависят от двух переменных x и t. Эти уравнения называются *основными уравнениями двухпроводной линии передачи*. Объединяя их, нетрудно получить уравнения, описывающие процессы распространения тока и напряжения вдоль проводов:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=\frac{1}{C_0 L_0}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{1}{C_0 L_0}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \qquad (7.24)$$

Уравнения (7.24) являются типично волновыми уравнениями, т.е. в однородной передающей линии напряжения и токи распространяются вдоль линии как волна со скоростью

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}.$$

Этот же результат был получен нами ранее в подразд. 6.4, правда, из других соображений. Приведенный же сейчас вывод позволит нам получить гораздо больше информации о распространении волн в линиях передачи. Найдем, прежде всего, скорость распространения волны тока и напряжения вдоль коаксиального кабеля. Опираясь на определения емкости и индуктивности, для их значений на единицу длины коаксиального кабеля нетрудно получить

$$L_0=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}, \quad C_0=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}.$$

Тогда

$$v=\frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c,$$

т.е. вдоль коаксиального кабеля электрические колебания распространяются в виде волны со скоростью света. Нужно подчеркнуть, что этот результат основан на двух предположениях: 1) в промежутке между проводами нет ни диэлектриков, ни магнитных материалов; 2) все токи текут только по поверхности проводников. Любопытно, что в этих двух предположениях произведение $L_0 C_0$ равно $1/c^2$ для любой параллельной пары проводников независимо от формы их сечения (требуется только постоянство сечения).

До сих пор нами не вводилось никаких предположений о форме колебаний в системе Лехера. Допустим теперь, что колебания и волны являются гармоническими с частотой ω. Тогда решения системы уравнений (7.24) для волн, распространяющихся вдоль оси X, имеют вид

$$I_+ = I_0 \sin(\omega t - kx), \quad U_+ = U_0 \sin(\omega t - kx),$$

а для волн, распространяющихся против оси X

$$I_- = I_0 \sin(\omega t + kx), \quad U_- = U_0 \sin(\omega t + kx),$$

где I_0 и U_0 – максимальные значения тока и напряжения, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число (напомним, что $v = \omega/k$). Из уравнения (7.22) следует

$$-kU_+' = -\omega L_0 I_+',$$

где штрихом обозначено дифференцирование по аргументу $\omega t - kx$. Интегрируя это уравнение и опуская константу интегрирования, получаем

$$U_+ = vL_0 I_+ .$$

Отношение

$$\frac{U_+}{I_+} = vL_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_0,$$

где постоянная для линии передачи величина $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$ называется *волновым сопротивлением* или *характеристическим импедансом*. Отметим, что эта величина представляет собой чистое сопротивление. Точно так же для волны, бегущей против оси X, получаем

$$\frac{U_-}{I_-} = -Z_0.$$

Напомним, что в общем случае импеданс может быть и комплексным числом. Он определяется как коэффициент пропорциональности (см. подразд. 3.2) между напряжением и током, изменяющимися по гармоническому закону и заданными в комплексном виде; например, для индуктивности $Z_L = i\omega L,$ для емкости $Z_C = 1/(i\omega C)$. Значение волнового сопротивления $Z_0 = \sqrt{L_0 / C_0}$ можно получить и из простых энергетических соображений. Так как линия бесконечна, то вдоль нее распространяется бегущая волна. В бегущей волне, как известно из механики, выполняется равенство плотностей кинетической и потенциальной энергий. Здесь же имеем

$$\frac{1}{2} L_0 I^2 = \frac{1}{2} C_0 U^2.$$

Откуда находим

$$U = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} I .$$

Очень похоже на закон Ома, но аналогия чисто внешняя, так как U есть напряжение между проводами, тогда как в законе Ома речь идет о напряжении вдоль проводов.

Для коаксиальной линии волновое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\varepsilon_0 c} .$$

Множитель $1/(\varepsilon_0 c)$ имеет размерность сопротивления и равен 120π Ом. Геометрический фактор $\ln(b/a)$ зависит от размеров только логарифмически (т.е. слабо), так что коаксиальная линия (и большинство других линий), как правило, обладают волновым сопротивлением порядка нескольких сотен ом и меньше.

В неограниченной линии, возбуждаемой с одного конца, всегда возникала бы бегущая волна. Волны напряжения и тока находятся в фазе и переносят энергию, которая все время поступает в линию от генератора. Предположим теперь, что линия передачи с волновым сопротивлением Z_0 имеет конечную длину, а на ее конце, противоположном генератору, имеется нагрузка с импедансом Z (рис. 7.16). В этом случае волна, бегущая вправо (U_+, I_+), может отразиться в виде волны, бегущей влево (U_-, I_-). Граничные условия на нагрузке с импедансом Z должны быть следующими:

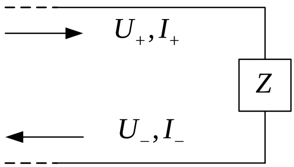


Рис. 7.16

$$U_+ + U_- = U, \quad I_+ + I_- = I,$$

где U, I – напряжение и ток на нагрузке. Кроме того,

$$U_+ = I_+ Z_0, \quad U_- = -I_- Z_0, \quad U = IZ.$$

Из этих уравнений нетрудно найти связь токов и напряжений в отраженной и падающей волнах и их значения на нагрузке Z:

$$\frac{U_-}{U_+} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}, \quad \frac{I_-}{I_+} = \frac{Z_0 - Z}{Z + Z_0},$$

$$\frac{U}{U_+} = \frac{2Z}{Z + Z_0}, \quad \frac{I}{I_+} = \frac{2Z_0}{Z + Z_0}.$$

Посмотрим, что же отсюда следует.

1. Если линия оканчивается нагрузкой с импедансом, равным волновому сопротивлению самой линии $(Z = Z_0)$, то отраженной волны нет (линия, как говорят, согласована), и вся энергия, переносимая волной, поглощается на нагрузке. Таким образом, при $Z = Z_0$ волна, бегущая вдоль оси X, ведет себя так, как будто линия передачи бесконечно длинная.

2. Если концы линии передачи замкнуты накоротко, то $Z = 0$. Отсюда $U = U_+ + U_- = 0$. Следовательно, $U_+ = -U_-$, т.е. происходит полное отражение волны напряжения с изменением фазы на π. При таких условиях, как известно, должны возникать стоячие волны. Покажем это. В любой точке x линии мы можем представить две рассматриваемые волны напряжения в виде

$$U_+ = Z_0 I_+ = U_0 \exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right], \quad U_- = -Z_0 I_- \exp\left[i\left(\omega t + kx\right)\right].$$

В случае полного отражения и изменения фазы на π полное напряжение

$$U\left(x,t\right) = U_+ + U_- = U_0\left(e^{-ikx} - e^{ikx}\right)e^{i\omega t} = -2iU_0 \sin kx \cdot \exp\left(i\omega t\right).$$

Для тока имеем

$$I(x,t) = I_+ + I_- = \frac{U_0}{Z_0}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)e^{i\omega t} = \frac{2U_0}{Z_0}\cos kx \cdot \exp\left(i\omega t\right).$$

Отсюда видно, что в любой точке x напряжение изменяется как $\sin kx,$ а ток – как $\cos kx,$ т.е. напряжение и ток сдвинуты по фазе в пространстве друг относительно друга на $\pi/2.$ Кроме того, множитель $\left(-i\right)$ в выражении для напряжения показывает, что и во времени напряжение отстает по фазе от тока на $\pi/2.$ Так как во всех точках линии напряжение сдвинуто по фазе относительно тока на $\pi/2$ как в пространстве, так и во времени, то средняя выделяемая мощность равна нулю и энергия никуда не переносится. Это и есть признак стоячей волны. Перенос энергии происходит только от узла к пучности и наоборот. Узлы напряжения и тока расположены вдоль линии так, как показано на рис. 7.17, причем ток I всегда максимален там, где $U = 0,$ и наоборот. Наиболее сильные колебания тока и напряжения в линии возникают при тех же условиях, что и во всякой стоячей волне. Например, если на обоих концах линии пучности напряжения (концы разомкнуты), то это происходит тогда, когда в линии укладывается целое число полуволн. Данное обстоятельство используется как для демонстрации самих стоячих волн в системе Лехера, так и для определения длины волны.

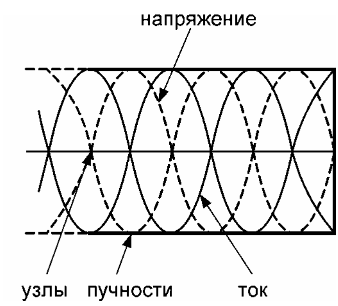


Рис. 7.17

В заключение данного раздела рассмотрим роль сопротивления в линии передачи. Мы учтем это сопротивление, полагая, что линия передачи содержит последовательно включенный резистор R_0 (в омах на единицу длины) и параллельный, шунтирующий резистор между проводами, который будем задавать проводимостью (она обратна сопротивлению). Эту проводимость, имеющую размерность сименс на метр, обозначим Y_0. Модель короткого элемента линии передачи, имеющего длину dx, приведена на рис. 7.18.

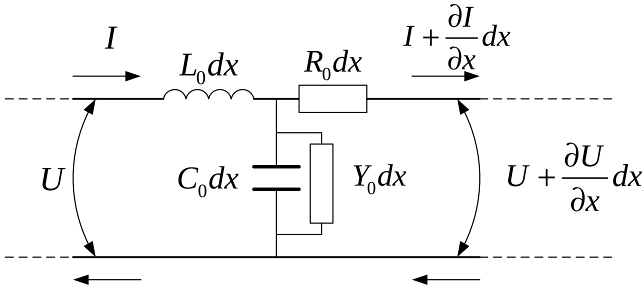


Рис. 7.18

В нее входит резистор с сопротивлением R_0dx, соединенный последовательно с индуктивностью L_0dx, и резистор с проводимостью Y_0dx, шунтирующий конденсатор с емкостью C_0dx. В данной ситуации возможен ток не только вдоль линии, но и поперек нее.

Временну́ю зависимость напряжения и тока, как и ранее, представим в виде

$$U = U_0 e^{i\omega t}, \quad I = I_0 e^{i\omega t}.$$

Поэтому

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = i\omega L_0 I, \quad C_0 \frac{\partial U}{\partial t} = i\omega C_0 U.$$

Теперь изменения напряжения и тока на элементе линии длиной dx определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -L_0 \frac{\partial I}{\partial t} - R_0 I = -\left(R_0 + i\omega L_0\right) I, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C_0 \frac{\partial U}{\partial t} - Y_0 U = -\left(Y_0 + i\omega C_0\right) U, \end{aligned} \tag{7.25}$$

поскольку ток через резистор, шунтирующий конденсатор, равен $\left(Y_0 dx\right) U$.

Дифференцируя первое уравнение (7.25) по x и используя второе уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\left(R_0 + i\omega L_0\right)\frac{\partial I}{\partial x} = \left(R_0 + i\omega L_0\right)\left(Y_0 + i\omega C_0\right) U = \gamma^2 U.$$

Аналогичное уравнение получаем и для тока

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\left(Y_0 + i\omega C_0\right)\frac{\partial U}{\partial x} = \left(R_0 + i\omega L_0\right)\left(Y_0 + i\omega C_0\right) I = \gamma^2 I,$$

где $\gamma^2 = \left(R_0 + i\omega L_0\right)\left(Y_0 + i\omega C_0\right)$. Величина γ, очевидно, комплексна, и ее можно представить в виде $\gamma = \beta + ik$ (β и k – действительные числа).

Решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \gamma^2 U = 0,$$

описывающее зависимость $U(x)$, имеет вид $U = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$, где A и B – постоянные. Таким образом, полное выражения для U, учитывающее временную и координатную зависимости, можно представить как

$$U(x,t) = \left(Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}\right) e^{i\omega t}$$

или, поскольку $\gamma = \beta + ik$,

$$U(x,t) = Ae^{-\beta x} \exp\left[i\left(\omega t - kx\right)\right] + Be^{\beta x} \exp\left[i\left(\omega t + kx\right)\right].$$

Данное выражение описывает две волны: одна бежит вправо, и ее амплитуда уменьшается соответственно множителю $e^{-\beta x}$, а другая бежит влево, и ее амплитуда уменьшается экспоненциально с расстоянием соответственно множителю $e^{\beta x}$. Величины β и k, входящие в формулу $\gamma = \beta + ik$, являются коэффициентом затухания волны и ее волновым числом.

Ток I изменяется точно так же. И поскольку мощность равна IU, то потери энергии за счет джоулева тепла изменяются с расстоянием как $e^{-2\beta x}$. Когда свойства линии передачи являются чисто индуктивными или емкостными, мы имеем чисто волновое уравнение с решениями в виде синуса или косинуса. Введение же сопротивления или элемента потерь приводит к экспоненциальному затуханию с расстоянием вдоль линии передачи.

7.5. Волноводы. Граничная частота и скорость волн в волноводе

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, на частотах до нескольких тысяч мегагерц электромагнитные сигналы передаются по коаксиальным линиям. При дальнейшем повышении частоты из коаксиального кабеля можно убрать центральный провод, и полая труба – *волновод* – начинает передавать сигналы ничуть не хуже. Это выглядит очень странно, если пользоваться представлением о передающей линии, как о распределенных индуктивности и емкости. Но ведь известно, что внутри пустой металлической трубы могут распространяться электромагнитные волны. Если труба прямая, то через нее *все видно*! Значит электромагнитные волны больших частот через трубу, бесспорно, проходят.

Начнем с волновода в виде прямоугольной трубы, ее проще всего анализировать. Запустим в нее электромагнитную волну, например, с помощью «антенны», подключенной к генератору высокочастотных сигналов через коаксиальный кабель. Какого типа волны могут существовать в прямоугольной трубе? Выберем оси координат следующим образом: ось Z направим вдоль трубы, а оси X, Y – вдоль стенок (рис. 7.19). Известно, что когда волны света бегут по трубе, их электрическое поле (вектор $\vec{E}$) поперечно, поэтому начнем с поиска таких решений, в которых вектор $\vec{E}$ перпендикулярен оси Z, т.е. поле имеет только одну компоненту E_y. При этом поле должно меняться как вдоль оси Z, так и вдоль оси X, т.е. $E_y = f(x, z)$. На вертикальных стенках поле должно обращаться в нуль, так как на поверхности проводника не должно остаться никаких касательных составляющих электрического поля. Кроме того, известно, что быстропеременные поля не проникают в глубь хороших проводников – в этом проявляется так называемый скин-эффект. Таким образом, предположительно зависимость $E_y(x)$ должна иметь вид, представленный на рис. 7.20.

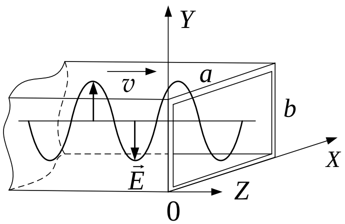


Рис. 7.19

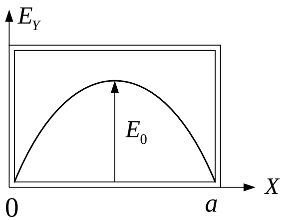


Рис. 7.20

Конечно, может быть несколько узлов $E_y(x)$, но мы рассмотрим пока самый простой случай, когда поле обращается в нуль только вблизи вертикальных стенок. Эта зависимость очень похожа на синус, например $E_0 \sin k_x x$, где k_x – некоторое волновое число для направления X . Так как волна бежит вдоль оси Z, то разумно принять зависимость E_y от координаты z в виде бегущей волны, например в виде $\cos(\omega t - k_z z)$, или в более удобной математической форме $\exp\left[i(\omega t - k_z z)\right]$. Итак, допустим, что волна в прямоугольном волноводе имеет вид

$$E_y = E_0 \sin k_x x \cdot \exp\left[i\left(\omega t - k_z z\right)\right]. \tag{7.26}$$

Такое поле подходит к горизонтальным стенкам перпендикулярно, и при правильном выборе k_x не будет иметь составляющих, параллельных вертикальным стенкам. Для этого, очевидно, необходимо потребовать, чтобы полволны $\sin k_x x$ укладывалось по ширине волновода

$$k_x a = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Значения n большие единицы представляют сложные конфигурации полей, поэтому ограничимся самым простым случаем $n = 1$, т.е. $k_x a = \pi$, откуда находим разрешенное значение k_x:

$$k_x = \frac{\pi}{a}.$$

Наконец, наше электрическое поле должно удовлетворять волновому уравнению для электромагнитной волны в пустом пространстве

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \tag{7.27}$$

Заметим, что из данного уравнения не следует, что скорость электромагнитной волны в волноводе равна c. Она была бы равна c, но при отсутствии проводящих стенок волновода. Найдем производные, следуя уравнению (7.26): $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k_x{}^2 E_y$, $\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = 0$ (от y ничего не зависит), $\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = -k_z{}^2 E_y$, $\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_y$. После подстановки найденных производных в уравнение (7.27) получаем

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

Если E_y не обращается всюду в нуль, то это уравнение выполняется всегда, если

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{7.28}$$

Так как значение k_x мы уже зафиксировали $(k_x = \pi / a)$, то из (7.28) следует

$$k_z = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x{}^2} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Именно с такими k_z бежит волна вдоль оси Z (знак «$\pm$» дают волны, бегущие в разных направлениях оси Z). Соотношение (7.28), переписанное в форме

$$\omega^2 = c^2 k_z^2 + \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2,$$

является законом дисперсии для волн, распространяющихся в волноводе. Отсюда сразу следует, что волны разной частоты распространяются с разной скоростью. В данном случае дисперсия волн в волноводе связана с наличием в нем собственного пространственного масштаба – конечной ширины волновода a. Если $a \to \infty$, то дисперсия исчезает, и сигналы любой формы будут распространяться без искажения с одинаковой скоростью, равной скорости света в вакууме.

Найдем длину волны, бегущей в волноводе:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Эта длина волны, конечно, отличается от длины волны той же частоты, но в пустом пространстве $\lambda_0 = 2\pi c / \omega$. Их связь определяется формулой

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}},$$

т.е. волна, попавшая в волновод, как бы растягивается по сравнению с волной в пустом пространстве.

Рассмотрим теперь выражения для k_z:

$$k_z = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

На больших частотах $k_z \approx \omega / c,$ т.е. $v = c.$ При уменьшении частоты значение k_z также уменьшается до тех пор, пока ω не сравняется с $\omega_c = \pi c / a.$ При дальнейшем уменьшении частоты значение k_z становится чисто мнимым числом $k_z = \pm i\tilde{k},$ где $\tilde{k}$ – действительное положительное число

$$\tilde{k} = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{c^2}}.$$

Если теперь вернуться к (7.26), то для E_y следует писать

$$E_y = E_0 \sin k_x x \cdot e^{\pm\tilde{k}z} e^{i\omega t},$$

т.е. мы приходим к полю, которое колеблется во времени как $\exp(i\omega t),$ а по оси Z меняется как $\exp\left(\pm\tilde{k}z\right).$ Конечно, знак перед $\tilde{k}$ следует выбирать так, чтобы поле экспоненциально убывало при удалении от источника (он обязан быть в волноводе). Итак, при частотах ниже $\omega_c = \pi c / a$ волны вдоль волновода не распространяются, осциллирующее поле проникает в волновод лишь на расстояние порядка $1/\tilde{k}.$ По этой причине частоту ω_c называют *граничной частотой* волновода. Если $\omega << \omega_c,$ поле проникает только на глубину $l \sim a / \pi,$ т.е. на треть ширины волновода.

Фазовая скорость волн в волноводе

$$v = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}}.$$

Это выражение для фазовой скорости удобно переписать с учетом значения граничной частоты

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}.$$

Отсюда следует, что для частот выше граничной (для которых и существует бегущая волна) значение фазовой скорости больше скорости света. В этом нет ничего удивительного, так как фазовая скорость означает только то, как быстро перемещаются узлы волн, а не энергия или информация. Чтобы узнать, как быстро движутся *сигналы* в волноводе, необходимо найти групповую скорость u:

$$u = \frac{d\omega}{dk_z} = \left(\frac{dk_z}{d\omega}\right)^{-1} = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}.$$

Как и следовало ожидать, ее значение всегда меньше скорости света.

Групповая скорость волн – это также скорость, с какой энергия передается по волноводу. Для определения мощности P, передаваемой по волноводу, необходимо плотность потока энергии j (вектор Умова–Пойнтинга) помножить на площадь поперечного сечения $S = ab$:

$$P = jS.$$

Здесь $j = wu$, $w = w_H + w_E$ – объемная плотность энергии электромагнитного поля (w_H – объемная плотность магнитной энергии, w_E – электрической). Так как волна бегущая, то $w_H = w_E$. Если среднее квадратичное значение напряженности электрического поля в волноводе равно $\langle E \rangle$, то

$$w = 2w_E = 2 \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E \rangle^2 .$$

И для мощности, передаваемой по волноводу, получаем

$$P = \varepsilon_0 \langle E \rangle^2 c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} S.$$

Эта мощность может быть очень велика – именно для этого и применяют волноводы.

ЗАДАЧИ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Метод медленно меняющихся амплитуд (метод усреднения)

1–9. Найти зависимость частоты колебаний от амплитуды для системы, описываемой уравнением вида $\ddot{x} + \omega^2 x = \mu f(x)$, где $0 < \mu << 1$ – малый параметр, а функция $f(x)$ задана следующими уравнениями:

1. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ x - 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ x & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad x < -1, \\ x & \text{при} \quad |x| \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при} \quad x < -1, \\ 2x & \text{при} \quad |x| \le 1, \\ x + 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$

6. $f(x) = x^3$.

7. $f(x) = x^3 - x^5$.

8. $f(x) = \dfrac{x\left(1 - x^2\right)}{1 + x^2}$.

9. $f(x) = -\operatorname{sh} x$, (sh – гиперболический синус).

10. Найти зависимость частоты от амплитуды в колебательном контуре с нелинейной индуктивностью (рис. 3.1). Потокосцепление и ток в катушке связаны соотношением $LI = \Phi + \alpha\Phi^3$ (потерями энергии пренебречь).

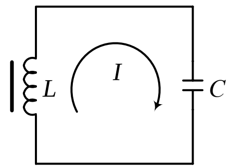


Рис. 3.1

Устойчивость состояний равновесия

Здесь и далее характеристики нелинейных элементов приведены в прил. 1. Методы составления уравнений рассмотрены в прил. 2.

11. Найти условия возбуждения лампового генератора с контуром в цепи анода (рис. 3.2). В плоскости параметров $h = \sqrt{L_0 / L}$, R выделить область возбуждения (сеточным током и реакцией анодного напряжения пренебречь).

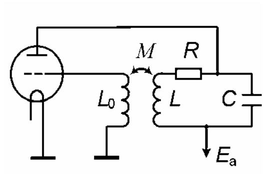


Рис. 3.2

12. Найти условия возбуждения лампового генератора с контуром в цепи сетки (рис. 3.3). В плоскости параметров $h = \sqrt{L_0 / L}$, R выделить область возбуждения (сеточным током и реакцией анодного напряжения пренебречь).

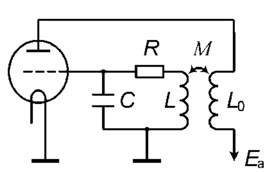


Рис. 3.3

13. Найти условия возбуждения лампового генератора с контуром в цепи катода (рис. 3.4). В плоскости параметров $h = \sqrt{L_0 / L}$, R выделить область возбуждения. Определить зависимость частоты колебаний от величины омического сопротивления (сеточным током и реакцией анодного напряжения пренебречь).

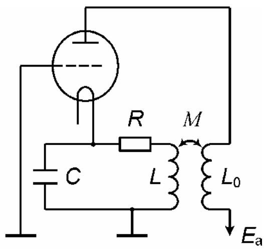


Рис. 3.4

14. Найти условия возбуждения транзисторного генератора с контуром в цепи коллектора (рис. 3.5). Для случая $k_{\text{св}} = 1$ в плоскости параметров h, δ выделить область возбуждения $\left(k_{\text{св}} = M / \sqrt{LL_0},\quad \delta = R\sqrt{C / L},\quad h = \sqrt{L_0 / L}\right)$. Как изменятся условия возбуждения, если не учитывать ток базы? Реак-

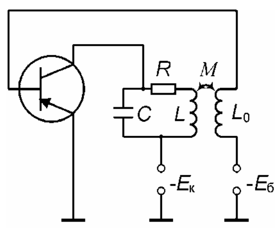


Рис. 3.5

цией коллекторного напряжения пренебречь.

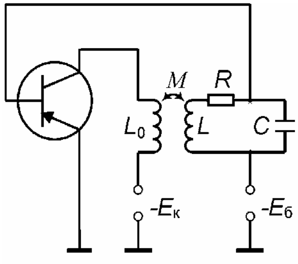


Рис. 3.6

15. Найти условия возбуждения транзисторного генератора с контуром в цепи базы (рис. 3.6). В плоскости параметров h, δ выделить область возбуждения $\left(\delta = R\sqrt{C/L},\quad h = \sqrt{L_0/L}\right)$. Реакцией коллекторного напряжения пренебречь. (Сравнить результат с ответом к задаче 14.)

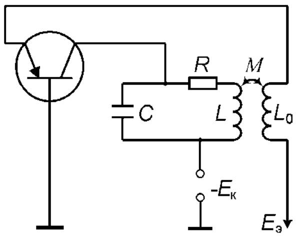


Рис. 3.7

16. Найти условия возбуждения генератора на транзисторе с заземленной базой и с контуром в цепи коллектора (рис. 3.7). Для случая $k_{св} = 1$ в плоскости параметров h, δ выделить область возбуждения $\left(\delta = R\sqrt{C/L},\quad h = \sqrt{L_0/L}\right)$. Реакцией коллекторного напряжения пренебречь.

17. Найти условия возбуждения и частоту колебаний генератора с контуром в цепи эмиттера (рис. 3.8). В плоскости параметров h, δ выделить область возбуждения $\left(\delta = R\sqrt{C/L},\quad h = \sqrt{L_0/L}\right)$. Реакцией коллекторного напряжения пренебречь.

18. Найти условия возбуждения генератора на транзисторе (рис. 3.9). В плоскости параметров $h, k_{св}$ выделить область возбуждения $\left(h = \sqrt{L_0/L},\ k_{св} = M/\sqrt{L_э L_к}\right)$. Найти условия существования области возбуждения.

19. Найти условия возбуждения и частоту колебаний генератора на транзисторе (рис. 3.10). В плоскости параметров $h, k_{св}$ выделить область возбуждения и вывести условия ее существования $\left(h = \sqrt{L_б/L_к}, k_{св} = M/\sqrt{L_б L_к}\right)$.

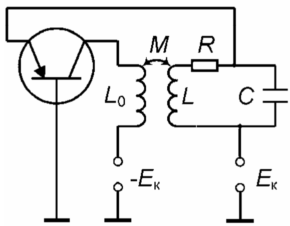


Рис. 3.8

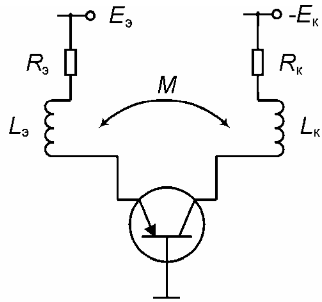


Рис. 3.9

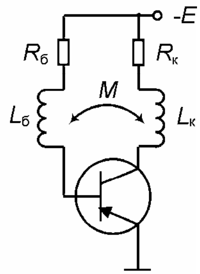


Рис. 3.10

20. Найти условия устойчивости состояния равновесия, находящегося на падающем участке вольт-амперной характеристики туннельного диода (рис. 3.11). В плоскости параметров $G_{диф}, R$ выделить область устойчивости ($G_{диф}$ – дифференциальная проводимость туннельного диода).

21. Найти условия устойчивости состояния равновесия, находящегося на падающем участке вольт-амперной характеристики туннельных диодов для схемы, представленной на рис. 3.12. В плоскости параметров $G_{диф}, R$ выделить область устойчивости. Считать, что диоды идентичны.

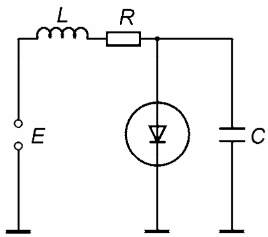


Рис. 3.11

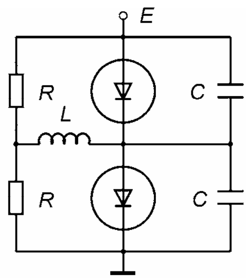


Рис. 3.12

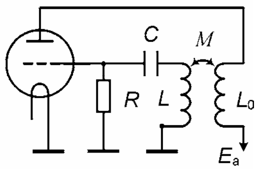


Рис. 3.13

22. Найти условия возбуждения блокинг-генератора (рис. 3.13). В плоскости параметров (h, μ) для $k_{св} = 1$ выделить область возбуждения ($h = \sqrt{L/L_0}$, μ – статический коэффициент усиления лампы, сеточным током пренебречь).

23. Найти условия возбуждения генератора на электронной лампе (рис. 3.14). В плоскости параметров $\delta = S\sqrt{L/C}$ и $\delta_0 = R\sqrt{C/L}$ выделить область возбуждения (сеточным током и реакцией анодного напряжения пренебречь).

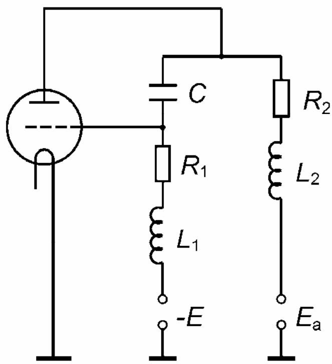


Рис. 3.14

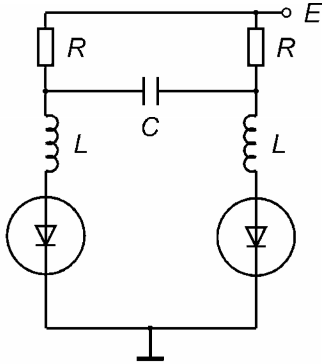


Рис. 3.15

24. Найти условия устойчивости состояния равновесия, находящегося на падающем участке вольт-амперной характеристики динисторов для схемы, представленной на рис. 3.15. В плоскости параметров $R, R_{\text{диф}}$ выделить область устойчивости ($R_{\text{диф}}$ – абсолютная величина дифференциального сопротивления динистора).

Релаксационные (разрывные) колебания

25–34. Провести разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории, полагая $0 < \mu << 1$:

25. $\mu \dfrac{dx}{dt} = x\left(1 - x^2\right) - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x.$

26. $\mu\dfrac{dx}{dt} = x\left(1-x^2\right) - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 2y.$

27. $\mu\dfrac{dx}{dt} = -y - x\left(2-3x^2+x^4\right), \quad \dfrac{dy}{dt} = x.$

28. $\mu\dfrac{dx}{dt} = -y - x\left(x^2-5\right)\left(x^2-1\right), \quad \dfrac{dy}{dt} = x.$

29. $\mu\dfrac{dy}{dt} = -y\left[x^2+2\left(y+1\right)\left(y-5\right)\right], \quad \dfrac{dx}{dt} = x\left(y-1\right), \quad x\ge 0,\ y\ge 0.$

30. $\mu\dfrac{dy}{dt} = -y\left[x^2+2\left(y+1\right)\left(y-5\right)\right], \quad \dfrac{dx}{dt} = x\left(xy-1\right), \quad x\ge 0,\ y\ge 0.$

31. $\mu\dfrac{dy}{dt} = y\left[1-y^2-\left(x-y\right)^2\right], \quad \dfrac{dx}{dt} = 3y-x, \quad y\ge 0.$

32. $\mu\dfrac{dx}{dt} = 2e^x - e^{2x} - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x+1.$

33. $\mu\dfrac{dx}{dt} = 2e^x - e^{2x} - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x-1.$

34. $\mu\dfrac{dx}{dt} = 6e^x - e^{2x} - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x+5-y.$

35. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I возможные качественно различные разбиения на траектории для генератора на туннельном диоде (рис. 3.16), где $\mu = CR^2/L \ll 1.$

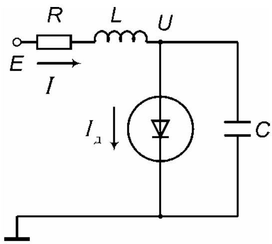


Рис. 3.16

36. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I поведение спусковой схемы, собранной на туннельном диоде (рис. 3.17, *а*). Считать $\mu \ll 1,\ E_1 = \text{const},$ функция $E(t)$ приведена на рис. 3.17, *б*. Каким условиям должны удовлетворять величины E_1, E_0, R, τ_1 и τ_2, чтобы на любой (в некоторых пределах) импульс схема откликалась одинаковым импульсом?

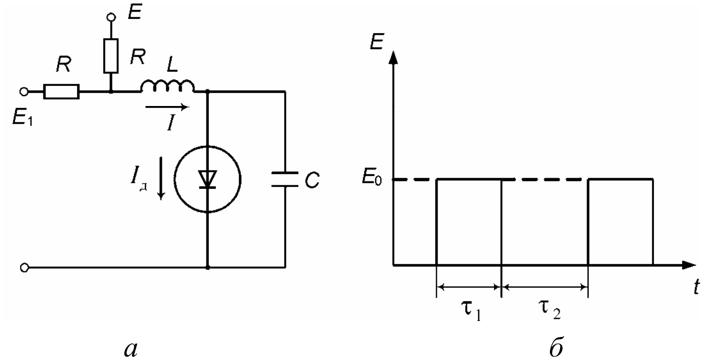


Рис. 3.17

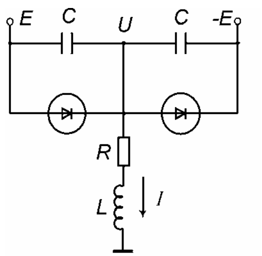


Рис. 3.18

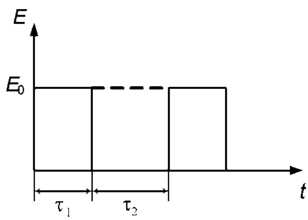


Рис. 3.19

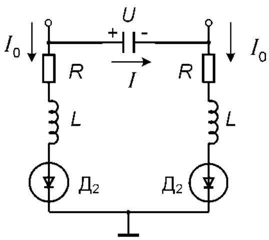


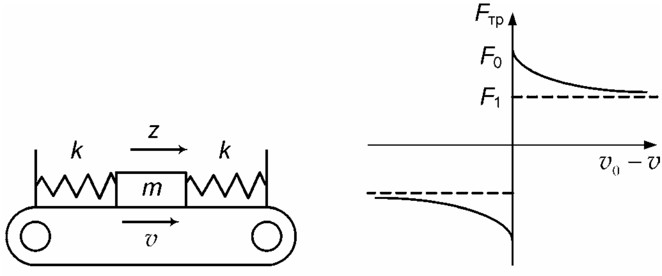
Рис. 3.20

37. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I возможные режимы работы генератора на двух туннельных диодах (рис. 3.18). Упрощающие предположения такие же, как и в задаче 35.

38. Решить задачу 37 для случая, когда напряжение $E = E(t)$ (рис. 3.19). Полагать, что при $E = E_0 = \text{const}$ схема находилась в триггерном режиме. Каким условиям должны подчиняться величины τ_1 и τ_2, чтобы схема каждым импульсом $\left(E = 0\right)$ перебрасывалась в другое состояние равновесия?

39. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I возможные режимы поведения схемы на динисторах (рис. 3.20). При решении задачи считать, что $\mu = L/\left(R^2C\right) \ll 1$. Нарисовать зависимость напряжения и тока от времени.

40. Груз массой m (рис. 3.21, *а*), укрепленный на двух пружинах жесткостью k, лежит на ленте конвейера, движущейся со скоростью v. Полагать, что $\mu = mkv^2 / F_0^2 \ll 1$, а сила трения между грузом и лентой конвейера, как функция относительной скорости $v_0 - v$, асимптотически уменьшается до некоторого значения F_1 (рис. 3.21, *б*).



а *б*

Рис. 3.21

41. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I: $U = (U_1 - U_2)/2$, $I = (I_1 - I_2)/2$ возможные режимы поведения схемы на туннельных диодах (рис. 3.22). Считать $\mu = CR^2 / L \ll 1$, где R – дифференциальное сопротивление туннельного диода в точке перегиба вольт-амперной характеристики. (Потоком рассеяния в катушках индуктивности пренебречь).

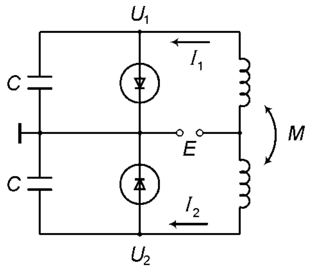


Рис. 3.22

42. Рассмотреть на фазовой плоскости U, I поведение схемы на динисторе (рис. 3.23). Принять $\mu = L / \left(R^2 C\right) \ll 1$. Найти амплитуду и длительность импульса, генерируемого схемой.

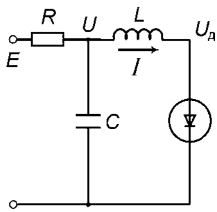


Рис. 3.23

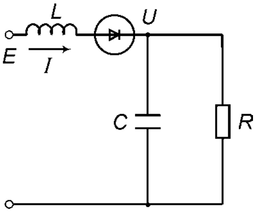


Рис. 3.24

43. Рассмотреть поведение схемы на динисторе (рис. 3.24). Условия задачи такие же, как и в задаче 42.

44. Рассмотреть на фазовой плоскости поведение лампового генератора (рис. 3.25, *а*) при $\mu = L/\left(R^2C\right) \ll 1$. Считать, что анодный ток зависит только от напряжения на сетке (рис. 3.25, *б*), сеточным током пренебречь.

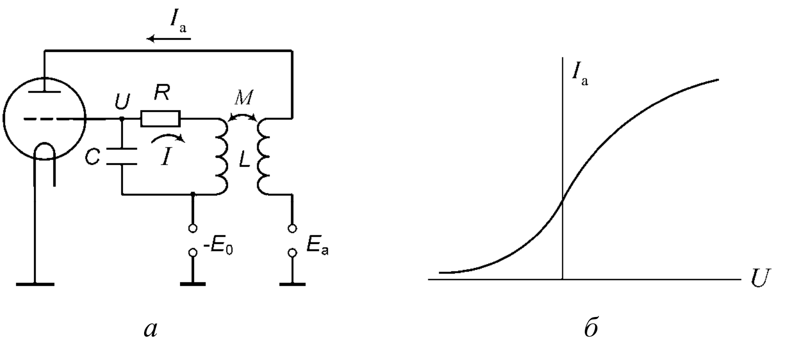


Рис. 3.25

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Метод медленно меняющихся амплитуд (метод усреднения)

1–9. Приведены соотношения, определяющие зависимость поправки на частоту $\Delta\omega$ от амплитуды колебаний A. Эта зависимость показана на рисунках.

1. Рис. О.1.

$$\Delta\omega = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad A \le 1, \\ -\dfrac{\mu}{\pi A\omega}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}} \;\; \text{при} \quad A > 1. \end{cases}$$

2. Рис. О.2.

$$\Delta\omega = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad A \le 1, \\ \dfrac{\mu}{2\pi\omega}\left[\dfrac{1}{A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}} - \arccos\dfrac{1}{A}\right] \;\; \text{при} \quad A > 1. \end{cases}$$

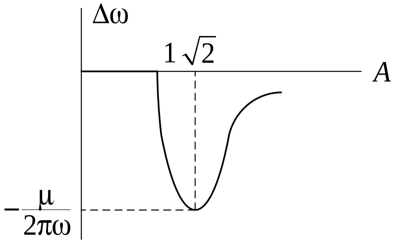


Рис. О.1

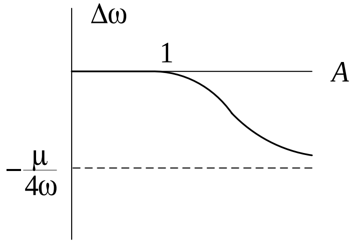


Рис. О.2

3. Рис. О.3.

$$\Delta\omega = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad A \le 1, \\ -\dfrac{\mu}{2\pi\omega}\left[\arccos\dfrac{1}{A} + \dfrac{1}{A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}\right] \quad \text{при} \quad A > 1. \end{cases}$$

4. Рис. О.4.

$$\Delta\omega=\begin{cases}-\dfrac{\mu}{2\omega} & \text{при} \quad A\le 1,\\ -\dfrac{\mu}{\omega}\left[\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{A}\right] & \text{при} \quad A>1.\end{cases}$$

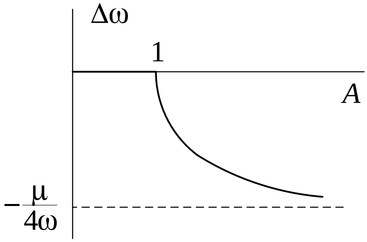


Рис. О.3

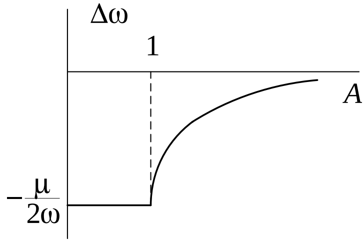


Рис. О.4

5. Рис. О.5.

$$\Delta\omega=\begin{cases}-\dfrac{\mu}{\omega} & \text{при} \quad A\le 1,\\ -\dfrac{\mu}{\omega}\left[1+\dfrac{1}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}-\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{A}\right] & \text{при} \quad A>1.\end{cases}$$

6. $\Delta\omega=-\dfrac{3\mu\rho^2}{2\omega}, \quad \rho=\dfrac{A}{2}.$

7. Рис. О.6.

$$\Delta\omega=-\frac{\mu}{2\omega}\left(3\rho^2-10\rho^4\right), \quad \rho=\frac{A}{2}.$$

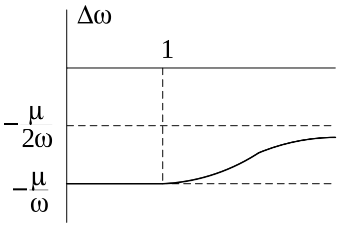


Рис. О.5

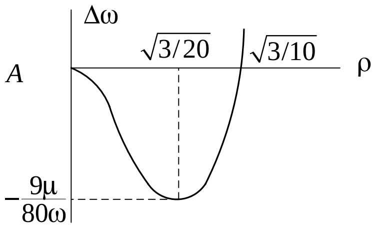


Рис. О.6

8. Рис. О.7.

$$\Delta\omega = \frac{\mu}{2\omega}\left\{1 - \frac{1}{\left[1+\sqrt{1+4\rho^2}\right]\sqrt{1+4\rho^2}}\right\}, \quad \rho = \frac{A}{2}.$$

9. Рис. О.8.

$$\Delta\omega = \frac{\mu}{2\omega}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{2n}}{n!(n+1)!}, \quad \rho = \frac{A}{2}.$$

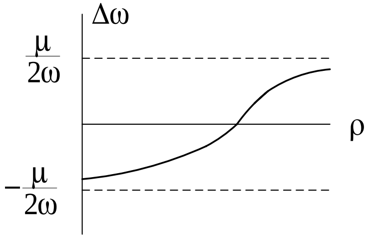


Рис. О.7

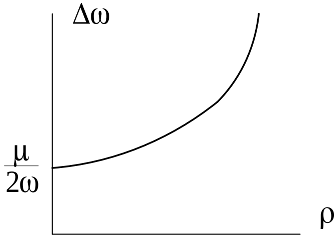


Рис. О.8

10. В безразмерных переменных колебания в контуре описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + x = -x^3, \quad x = \sqrt{\alpha}\Phi, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

Зависимость безразмерной частоты от амплитуды колебаний определяется формулой $\omega = 1 + 3\rho^2$.

Устойчивость состояний равновесия

11–24. Приведены условия возбуждения. На рисунках области возбуждения заштрихованы.

11. $R < k_{\text{св}} hS\left(L/C\right)$, где $k_{\text{св}} = M/\sqrt{L_0 L}$. Частота колебаний определяется как $\omega = 1/\sqrt{LC}$ (рис. О.9).

12. $R < k_{\text{св}} SL / hC$, где $k_{\text{св}} = M / \sqrt{L_0 L}$. В отличие от предыдущей задачи здесь с увеличением коэффициента трансформации h условия возбуждения ухудшаются (рис. О.10).

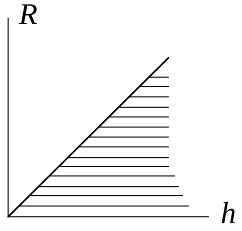


Рис. О.9

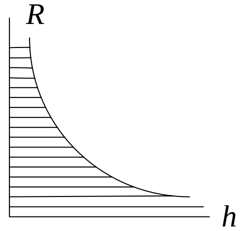


Рис. О.10

13. $R < Sr^2 \left(k_{\text{св}} / h - 1 \right)$, где $k_{\text{св}} = M / \sqrt{L_0 L}$, $r = \sqrt{L / C}$ – волновое сопротивление контура. Частота колебаний вблизи границы возбуждения определяется как $\omega = \sqrt{\left(1 + RS\right) / LC}$ (рис. О.11).

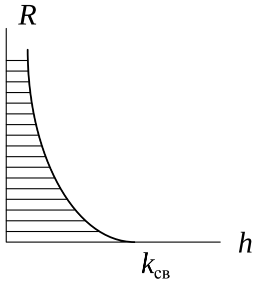


Рис. О.11

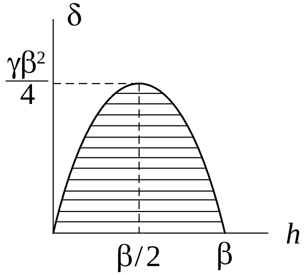


Рис. О.12

14. $\left[1 + \delta\gamma h^2\right]\left[\delta + \gamma h^2 - \beta k_{\text{св}} \gamma h\right] < \left(1 - k_{\text{св}}^2\right)\gamma h^2$, где $\gamma = \left(1 - \alpha\right) g_{\text{э}} \sqrt{L / C}$, $\beta = \alpha / \left(1 - \alpha\right)$. При $k_{\text{св}} = 1$ условия возбуждения определяются неравенством $\delta < \gamma h \left(\beta - h\right)$. При отсутствии тока базы $\left(\alpha \to 1\right)$ условие возбуждения определяется неравенством $\delta < h \gamma_0 k_{\text{св}}$, где $\gamma_0 = g_{\text{э}} \sqrt{L / C}$ (рис. О.12).

15. $\delta<\gamma\left(k_{\text{св}}\beta/h-1\right)$, где $\beta=\alpha/(1-\alpha)$, $\gamma=(1-\alpha)g_{\text{э}}\sqrt{L/C}$. При малом значении h результаты решения отличаются от решения предыдущей задачи, что говорит о неправильности принятой идеализации: при больших значениях δ нельзя пренебрегать реакцией коллекторного напряжения (рис. О.13).

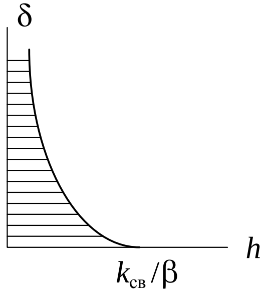


Рис. О.13

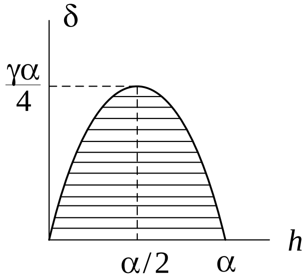


Рис. О.14

16. $\left[1+\delta\gamma h^2\right]\left[\delta+\gamma h^2-\alpha k_{\text{св}}\gamma h\right]<\left(1-k_{\text{св}}^2\right)\gamma h^2$, где $\gamma=g_{\text{э}}\sqrt{L/C}$, $k_{\text{св}}=M/\sqrt{L_0L}$. Для коэффициента связи $k_{\text{св}}$ = 1 условие возбуждения имеет вид $\delta<\gamma h(\alpha-h)$ (рис. О.14).

17. $\delta<\gamma\left(\alpha k_{\text{св}}/h-1\right)$, где $k_{\text{св}}=M/\sqrt{L_0L}$, $\gamma=g_{\text{э}}\sqrt{L/C}$. Частота колебаний определяется как $\omega=\sqrt{\left(1+Rg_{\text{э}}\right)/LC}$ (рис. О.15).

18. $k_{\text{св}}>\dfrac{r_{\text{э}0}}{h}+hr_{\text{к}0}$, где $r_{\text{э}0}=\dfrac{R_{\text{э}}+R_{\text{э}0}}{\alpha_N R_{\text{э}0}+\alpha R_{\text{к}0}}\approx\dfrac{R_{\text{э}}+R_{\text{э}0}}{\alpha R_{\text{к}0}}$, $r_{\text{к}0}=$
$=\dfrac{R_{\text{к}}+R_{\text{к}0}}{\alpha_N R_{\text{э}0}+\alpha R_{\text{к}0}}\approx\dfrac{R_{\text{к}}+R_{\text{к}0}}{\alpha R_{\text{к}0}}$, $R_{\text{э}0}=\dfrac{1}{g_{\text{э}}\left(1-\alpha\alpha_N\right)}$, $R_{\text{к}0}=\dfrac{1}{g_{\text{к}}\left(1-\alpha\alpha_N\right)}$,
α – коэффициент усиления по току, α_N – инверсный коэффициент усиления по току. Область возбуждения существует при $\left(R_{\text{э}}+R_{\text{э}0}\right)\left(R_{\text{к}}+R_{\text{к}0}\right)<\alpha^2R_{\text{к}0}^2/4$ (рис. О.16).

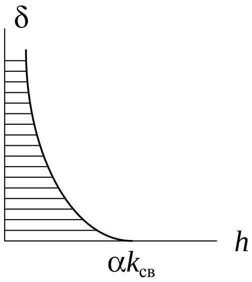


Рис. О.15

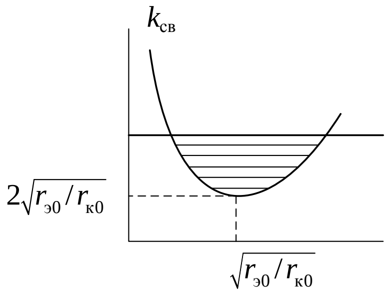


Рис. О.16

19. $k_{св} > hr_{к0} + r_{б0}/h,$ где для случая $R_{к0} >> R_{э0}$ $r_{к0} = $
$= \dfrac{R_к + (1-\alpha) R_{к0}}{\alpha R_{к0}}$, $r_{б0} = \dfrac{R_б + R_{э0}}{\alpha R_{к0}}$. Область возбуждения такая же, как и в предыдущей задаче. Условие ее существования $R_б R_к < 1/4$.

20. Условия устойчивости: $R > r^2 G_{диф}$, $RG_{диф} < 1$, где $r = \sqrt{L/C}$ (рис. О.17).

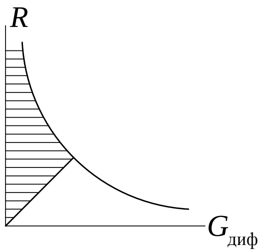


Рис. О.17

21. Условия устойчивости: $1 - RG_{диф} > 0$, $R > r^2 G_{диф}$, где $r = \sqrt{2L/C}$. Область устойчивости такая же, как и в предыдущей задаче.

22. Условия возбуждения $\left(h^2 + \gamma Q\right) \times$
$\times \left(\gamma + h^2 - \gamma k_{св} \mu h\right) < \gamma h^2 Q \left(1 - k_{св}^2\right)$, где $\gamma = R/R_i$, $Q = L/\left(R^2 C\right)$, $\mu = SR_i$. Для $k_{св} = 1$ условие возбуждения имеет вид $\mu > 1/h + h/\gamma$ (рис. О.18).

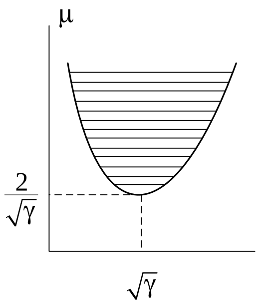


Рис. О.18

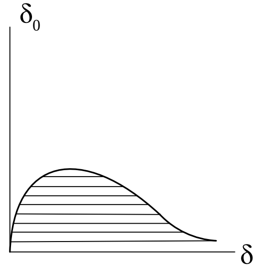


Рис. О.19

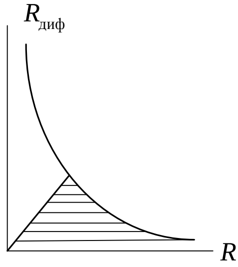


Рис. О.20

23. Условия возбуждения $\delta_0\left[1+\delta\delta_0\gamma(1-\gamma)\right]\times$ $\times\left[1+\delta\delta_0\left(\gamma+h-2\gamma h\right)\right]<\delta h(1-h)$, где $\delta=S\sqrt{L/C}$, $\delta_0=R\sqrt{C/L}$, $h=L_1/L$, $\gamma=R_1/R$, $R=R_1+R_2$, $L=L_1+L_2$ (рис. О.19).

24. Условия устойчивости: $R_{\text{диф}}<R$, $R_{\text{диф}}R<L/2C$ (рис. О.20).

Релаксационные (разрывные) колебания

25. Единственное неустойчивое состояние равновесия и единственный устойчивый предельный цикл. Разбиение фазовой плоскости на фазовые траектории показано на рис. О.21.

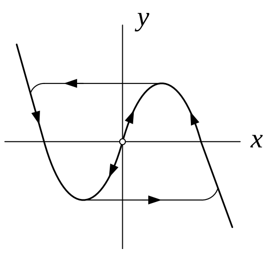


Рис. О.21

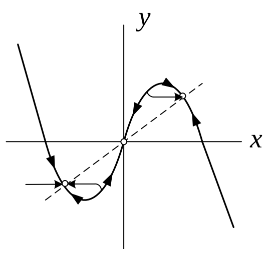


Рис. О.22

26. Два симметрично расположенных состояния равновесия типа устойчивого узла и одно в начале координат – типа седла. Замкнутые фазовые траектории отсутствуют (рис. О.22).

27. Единственное устойчивое состояние равновесия в начале координат. Замкнутые фазовые траектории отсутствуют (рис. О.23).

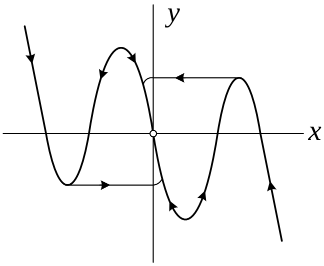


Рис. О.23

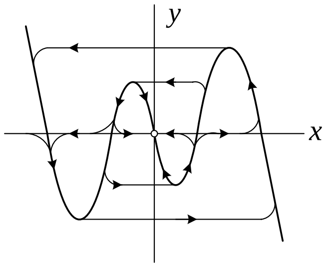


Рис. О.24

28. Единственное устойчивое состояние равновесия и два предельных цикла: внутренний – неустойчивый, наружный – устойчивый (рис. О.24).

29. Три состояния равновесия: два седла и неустойчивый узел. Существует единственный предельный цикл (рис. О.25).

30. Четыре состояния равновесия: два седла, устойчивый и неустойчивый узлы. Существует единственный предельный цикл (рис. О.26).

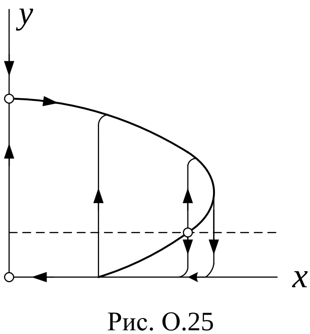


Рис. О.25

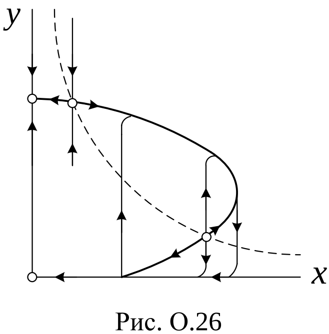


Рис. О.26

31. Два состояния равновесия (седло и неустойчивый узел) и единственный предельный цикл (рис. О.27).

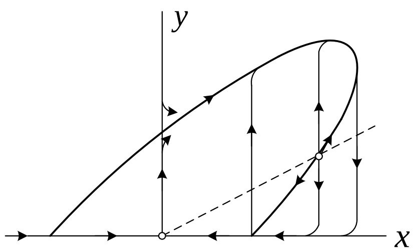


Рис. О.27

32. Реализуется блокинг-режим. Имеется одно неустойчивое состояние равновесия и единственный устойчивый предельный цикл. Величина импульса по координате x: $x_0 = 1/\sqrt{\mu}$, его длительность $\tau = \pi\sqrt{\mu}$ (рис. О.28).

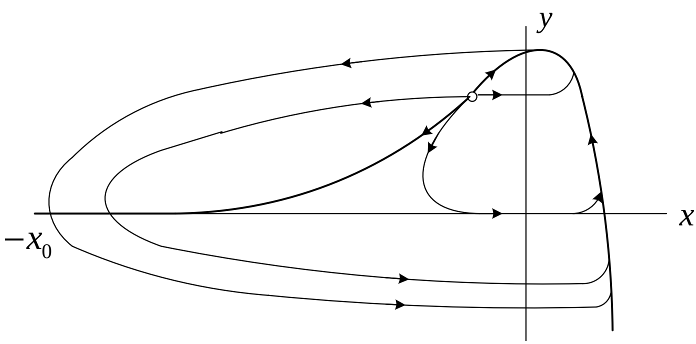


Рис. О.28

33. Одно устойчивое состояние равновесия. Система ведет себя аналогично ждущему блокинг-генератору (рис. О.29). При начальных условиях $y = y_0$, $x = 0$ параметры импульса такие же, как и в задаче 32.

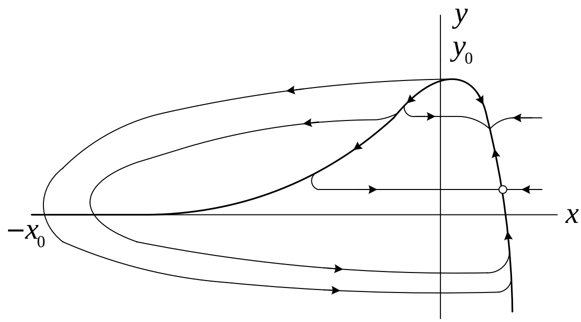


Рис. О.29

34. Одно устойчивое (узел) и два неустойчивых (седло, фокус) состояния равновесия (рис. О.30). Система ведет себя аналогично ждущему блокинг-генератору. При начальных условиях $y = y_0$, $x = 0$ амплитуда импульса $x_0 = y_0/\sqrt{\mu}$, длительность импульса $\tau = \pi\sqrt{\mu}$.

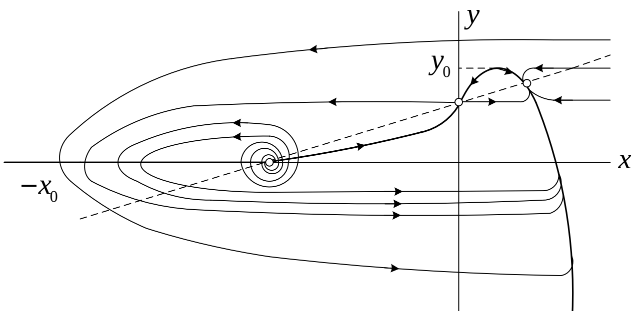


Рис. О.30

В задачах **35–45** перед решениями приведены уравнения системы.

35. $L\dfrac{dI}{dt} = E - U - RI$, $C\dfrac{dU}{dt} = I - I_{\text{д}}(U)$. Возможны три случая качественно различных разбиений фазовой плоскости на траектории: режим спусковой схемы (рис. О.31, *а*, *б*), триггерный (рис. О.31, *в*) и мультивибраторный (рис. О.31, *г*) режимы.

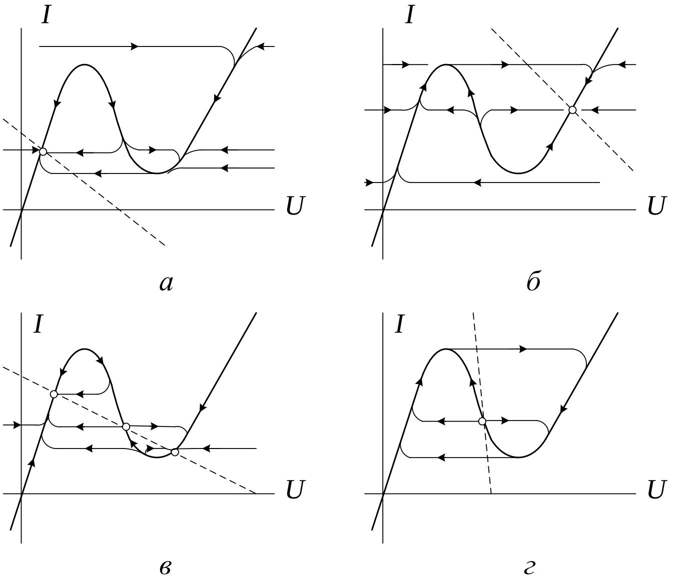


Рис. О.31

36. $\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{E_1}{2}+\dfrac{E_0}{2}-\dfrac{R}{2}I-U, \quad C\dfrac{dU}{dt}=I-I_{\text{д}}(U).$ Величины E_1, E_0 и R необходимо выбрать так, чтобы в отсутствие внешнего импульса нагрузочная прямая $\dfrac{E_1}{2}-\dfrac{R}{2}I-U=0$ пересекала левую устойчивую ветвь вольт-амперной характеристики, а при наличии импульса – падающий участок или правую устойчивую ветвь (рис. О.32). Кроме того, должны выполняться неравенства $\tau_3<\tau_1\ll\tau_4<\tau_2$, где τ_3 – время движения изображающей точки по левой устойчивой ветви вольт-амперной характеристики (при наличии внешнего импульса) от точки A, в которой находилась система в момент прихода импульса до

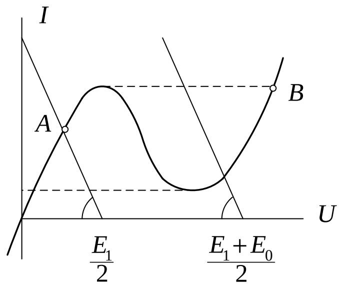


Рис. О.32

точки срыва; τ_4 – время движения изображающей точки по правой ветви (при отсутствии внешнего импульса) от точки B до точки срыва.

37. $2C\dfrac{dU}{dt}=I_{\text{д}}\left(E-U\right)-I_{\text{д}}\left(E+U\right)-I,\;\; L\dfrac{dI}{dt}=U-RI.$ Кроме тривиального режима (кривая медленных движений не имеет неустойчивых ветвей) возможен мультивибраторный режим при малых значениях R (рис. О.33, *а*) и триггерный при больших значениях R (рис. О.33, *б*). В очень узком интервале значений E возможен мультивибраторный режим с жестким возбуждением (рис. О.33, *в*) и триггерный с тремя устойчивыми состояниями равновесия рис. О.33, *г*).

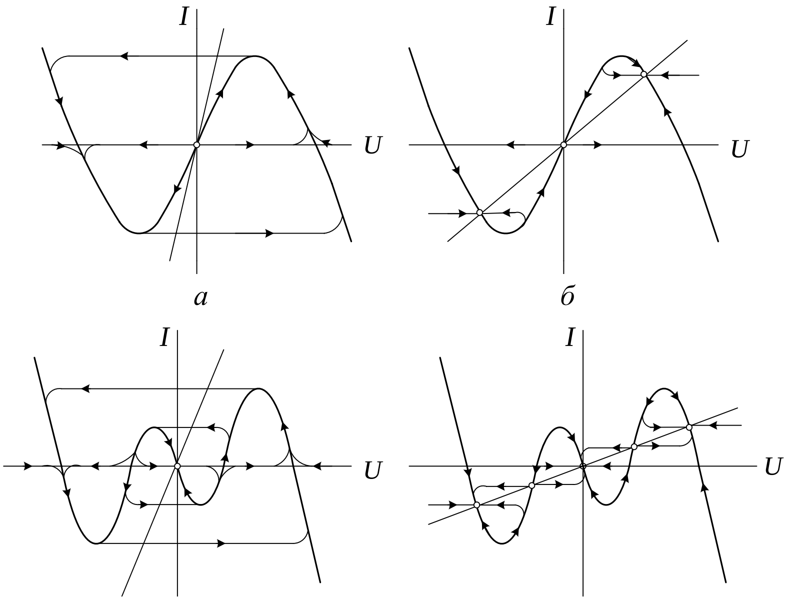


Рис. О.33

38. На рис. О.34 показаны кривые медленных движений. Чтобы каждый импульс перебрасывал систему в противоположное состояние равновесия, необходимо потребовать выполнения условий

$\tau_{20} >> \tau_2 > \tau_0$, $\tau_1 >> \tau_{10}$ где τ_0 – время движения изображающей точки от состояния A_1 до состояния B_1 при $E = 0$, τ_{20} – постоянная времени медленного движения при $E = 0$, τ_{10} – время движения изображающей точки от состояния B_2' до состояния A_1 при $E = E_0$.

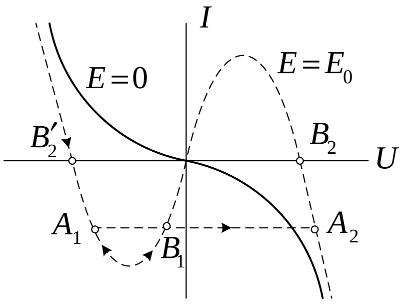


Рис. О.34

39. $2L\dfrac{dI}{dt} = U_1(I_0 - I) - U_1(I_0 + I) - 2RI - U$, $C\dfrac{dU}{dt} = I$. Кроме триггерного режима возможен мультивибраторный с мягким (рис. О.35, *а*) и с жестким (рис. О.35, *б*) режимом возбуждения. Эпюры напряжений и токов показаны на рис. О.35, *в*.

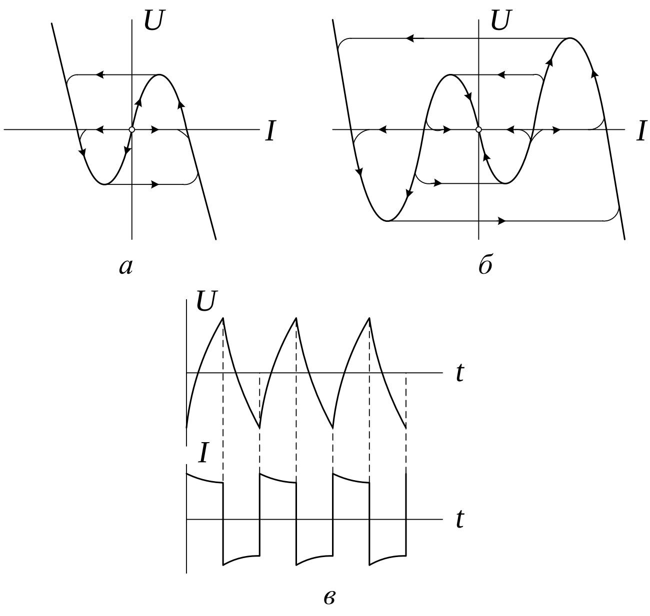


Рис. О.35

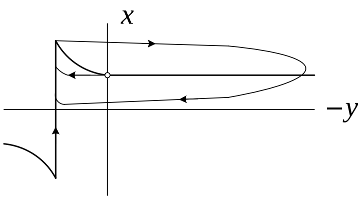
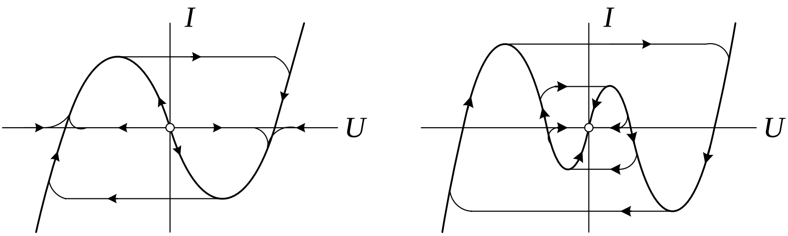


Рис. О.36

40. $\mu\dfrac{dy}{d\tau} = -x - f\left(y-1\right),\ \dfrac{dx}{d\tau} = y,$ где $x = \dfrac{kv^2}{F_0}z,\quad \tau = \dfrac{kv}{F_0}t,\quad y = \dfrac{v_0}{v},$ $f = \dfrac{F_{\text{тр}}}{F_0}$. Разбиение фазовой плоскости на траектории показано на рис. О.36. В безразмерных переменных длительность импульса $\tau_0 = \pi\sqrt{\mu}$, а его амплитуда $y_0 = \left(F_0 - F_1\right)/\left(F_0\sqrt{\mu}\right)$.

41. $2L\dfrac{dI}{dt} = -U,\quad C\dfrac{dU}{dt} = I - \dfrac{1}{2}\left[I_{\text{д}}\left(E+U\right) - I_{\text{д}}\left(E-U\right)\right]$. В системе возможен мультивибраторный режим с мягким (рис. О.37, *а*) и жестким (рис. О.37, *б*) режимами возбуждения.



а *б*

Рис. О.37

42. $L\dfrac{dI}{dt} = U - U_{\text{д}}(I),\quad RC\dfrac{dU}{dt} = E - U - RI$. В системе возможны режимы: блокинг-кипп-релейный (рис. О.38, *а*, *б*), блокинг-мультивибраторный (рис. О.38, *в*). Величина генерируемого импульса $I = \dfrac{U_{\max} - U_0}{R\sqrt{\mu}}$, длительность импульса у основания $\tau = \pi RC\sqrt{\mu}$, где $U_{\max}$ – значение напряжения, соответствующего максимуму вольт-амперной характеристики, $U_0 = \lim\limits_{I\to\infty} U_{\text{д}}(I)$.

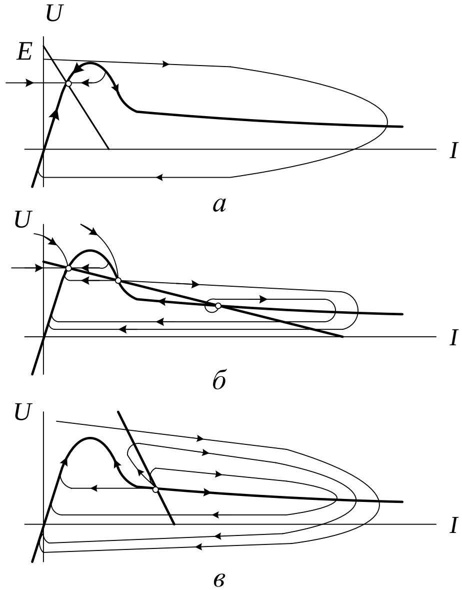


Рис. О.38

43. Уравнения схемы $L\dfrac{dI}{dt}=E-U-U_{\text{д}}(I),\quad RC\dfrac{dU}{dt}=RI-U$ приводятся к уравнениям задачи 42 путем замены U на $E-U$.

44. Уравнение генератора

$$LC\frac{d^2U}{dt^2}+RC\frac{dU}{dt}-M\frac{dI_A}{dt}+U+E_0=0,$$

которое можно свести к системе

$$\frac{dU_1}{d\tau}=-\left(U+E_0\right),\qquad \mu\frac{dU}{d\tau}=U_1-U+$$

$$+f(U),\quad \text{где}\quad \tau=RCt,\mu=L/\left(CR^2\right),$$

$f=MI_A/RC$. Разбиение фазовой плоскости на траектории при достаточно большой величине M/RC показано на рис. О.39.

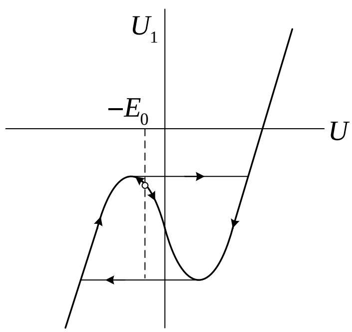


Рис. О.39

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. Основы теории колебаний / В.В. Мигулин [и др.]. – М.: Наука, 1978. – 392 с.
3. Пейн Г. Физика колебаний и волн. – М.: Мир, 1979. – 389 с.
4. Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика / Р. Фейнман [и др.]. – М.: Мир, 1977. – Т. 6. – 347 с.
5. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
7. Сборник задач по теории колебаний / под ред. Л.В. Постникова и В.И. Королева. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Математические модели активных двухполюсников и четырехполюсников

1. ***Электронная лампа.*** Электронная лампа в статическом режиме, а также на достаточно низких частотах, когда можно пренебречь междуэлектродными емкостями, описывается алгебраическими уравнениями вида

$$I_{\text{а}} = F\left(U_{\text{а}}, U_{\text{с}}\right), \quad I_{\text{с}} = f\left(U_{\text{с}}\right), \tag{П.1.1}$$

где $U_{\text{а}}$ и $U_{\text{с}}$ – напряжения на аноде и управляющей сетке, измеренные относительно катода, $I_{\text{а}}$ и $I_{\text{с}}$ – анодный и сеточный токи.

Уравнениями вида (П.1.1) можно описывать электронную лампу с произвольным числом сеток, если управляющее напряжение подается только на одну из них. В справочниках приводятся два семейства статических характеристик: семейство анодно-сеточных характеристик $I_{\text{а}} = I_{\text{а}}\left(U_{\text{с}}\right)$, снятых при постоянном анодном напряжении, и семейство анодных характеристик $I_{\text{а}} = I_{\text{а}}\left(U_{\text{а}}\right)$, снятых при постоянном напряжении на управляющей сетке.

Если напряжения $U_{\text{а}}$ и $U_{\text{с}}$ мало отличаются от некоторых постоянных уровней $U_{\text{а}0}$ и $U_{\text{с}0}$, т.е. $U_{\text{а}} = U_{\text{а}0} + u_{\text{а}}, U_{\text{с}} = U_{\text{с}0} + u_{\text{с}}$, то, разложив нелинейные функции системы (П.1.1) в степенной ряд с центром разложения $U_{\text{а}0}$ и $U_{\text{с}0}$, получим для малых отклонений токов и напряжений в линейном приближении

$$i_{\text{а}} = Su_{\text{с}} + u_{\text{а}} / R_i, \quad i_{\text{с}} = S_{\text{с}} u_{\text{с}}. \tag{П.1.2}$$

Здесь $i_{\text{а}} = I_{\text{а}} - F\left(U_{\text{а}0}, U_{\text{с}0}\right); \quad i_{\text{с}} = I_{\text{с}} - f\left(U_{\text{с}0}\right);$

S – крутизна анодно-сеточной характеристики, $S = \left(\dfrac{\partial I_{\text{а}}}{\partial U_c}\right)_{U_{\text{с}} = U_{\text{с}0}, U_{\text{а}} = U_{\text{а}0}}$;

R_i – внутреннее сопротивление лампы, $R_i = 1 / \left(\dfrac{\partial I_{\text{а}}}{\partial U_{\text{с}}} \right)_{U_{\text{с}} = U_{\text{с}0},\, U_{\text{а}} = U_{\text{а}0}}$;

$R_{\text{с}}$ – крутизна сеточной характеристики, $S_{\text{с}} = \left(\dfrac{\partial I_{\text{с}}}{\partial U_{\text{с}}} \right)_{U_{\text{с}} = U_{\text{с}0}}$.

Если параметр R_i достаточно велик по сравнению с величиной сопротивления, включенного в анодную цепь лампы в качестве анодной нагрузки, то членом $u_{\text{а}} / R_i$ в уравнениях (П.1.2) можно пренебречь. В этом случае пренебрегают влиянием анодного напряжения на анодный ток – анодной реакцией. При отрицательных смещениях на сетке лампы величина $S_{\text{с}}$ достаточно мала и тогда можно пренебречь сеточным током. С учетом сделанных допущений уравнения электронной лампы будут иметь вид

$$i_{\text{а}} = S u_{\text{с}}, \quad i_{\text{с}} = 0.$$

2. ***Транзистор.*** В качестве уравнений транзистора обычно рассматриваются уравнения Эберса–Молла. В обозначениях рис. П.1.1 они имеют вид

$$\begin{aligned} I_{\text{к}} &= I_{\text{к}0} \left[\exp\left(\frac{eU_{\text{к}}}{kT} \right) - 1 \right] - \alpha_N I_{\text{э}0} \left[\exp\left(\frac{eU_{\text{э}}}{kT} \right) - 1 \right], \\ I_{\text{э}} &= I_{\text{э}0} \left[\exp\left(\frac{eU_{\text{э}}}{kT} \right) - 1 \right] - \alpha_I I_{\text{к}0} \left[\exp\left(\frac{eU_{\text{к}}}{kT} \right) - 1 \right], \end{aligned} \qquad (\text{П.1.3})$$

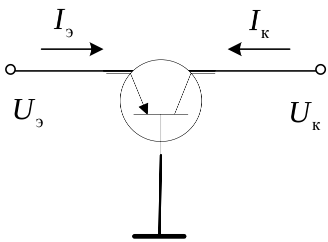


Рис. П.1.1

где $I_{\text{к}0}$ – ток, протекающий через запертый коллекторный переход при закороченной эмиттерной цепи; $I_{\text{э}0}$ – ток, протекающий через запертый эмиттерный переход при закороченной коллекторной цепи; $\alpha_N = 0{,}99...0{,}999$ – коэффициент усиления по току, $\alpha_I = 0{,}2...0{,}3$ – инверсный коэффициент усиления по току; e – элементарный заряд; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура. Уравнения (П.1.3) основаны на уравнении Шокли, описывающем вольт-амперную характеристику идеального полупроводникового перехода. Нужно только учесть, что транзистор включает в себя два таких перехода, включенных навстречу друг другу.

Для достаточно низких частот величины $I_{к0}, I_{э0}, \alpha_I$ и α_N имеют постоянные значения. Если $U_к$ и $U_э$ мало отклоняются от некоторых постоянных значений $U_{к0}, U_{э0}$, то, положив $U_к = U_{к0} + u_к$, $U_э = U_{э0} + u_э$ для выражений (П.1.3) в линейном приближении можно записать

$$i_к = g_к u_к - \alpha_N g_э u_э, \quad i_э = g_э u_э - \alpha_I g_к u_к. \qquad (П.1.4)$$

Здесь $i_к$, $i_э$ – малые отклонения токов от постоянных значений, $i_к = I_к - I_{к0}\left[\exp\left(\frac{eU_{к0}}{kT}\right)-1\right] + \alpha_N I_{э0}\left[\exp\left(\frac{eU_{э0}}{kT}\right)-1\right]$, $i_э = I_э - I_{э0}\times$ $\times\left[\exp\left(\frac{eU_{э0}}{kT}\right)-1\right] + \alpha_I I_{к0}\left[\exp\left(\frac{eU_{к0}}{kT}\right)-1\right]$;

$g_к$ – проводимость коллекторного перехода при закороченном на базу эмиттере, $g_к = \frac{e}{kT} I_{к0} \exp\left(\frac{eU_{к0}}{kT}\right)$;

$g_э$ – проводимость эмиттерного перехода при закороченном на базу коллекторе, $g_э = \frac{e}{kT} I_{э0} \exp\left(\frac{eU_{э0}}{kT}\right)$.

В номинальном режиме на коллектор подается постоянное отрицательное смещение $U_{к0}$ порядка нескольких десятков вольт, на эмиттер – положительное смещение $U_{э0}$ порядка десятых долей вольта. При таких смещениях величина $1/g_к$ составляет сотни килоом ($\sim 10^5$ Ом), а величина $1/g_э$ – десятки ом ($\sim 10^2$ Ом), т.е. можно считать, что $g_к \ll g_э$. Если в коллекторной цепи в качестве нагрузки включено сопротивление $R_к << 1/g_к$, то членами $g_к u_к$ и $\alpha_I g_к u_к$ в уравнениях (П.1.4) можно пренебречь. В этом случае уравнения транзистора примут вид

$$i_к = -\alpha_N g_э u_э, \quad i_э = g_э u_э, \qquad (П.1.5)$$

т.е. реакция коллекторного напряжения не учитывается.

Для транзистора с общим эмиттером (рис. П.1.2) уравнения транзистора, без учета реакции коллектора, запишутся в виде

$$i_к = \alpha_N g_э u_б, \quad i_б = (1-\alpha_N) g_э u_б. \qquad (П.1.6)$$

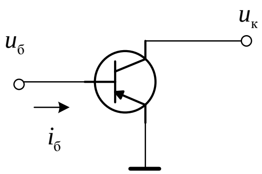


Рис. П.1.2

Если в цепь базы включено сопротивление $R_б << 1/(1-\alpha_N) g_э$, то током базы можно пренебречь, и тогда уравнения транзистора примут наиболее простой вид:

$$i_к = \alpha_N g_э u_б, \quad i_б = 0. \qquad (П.1.7)$$

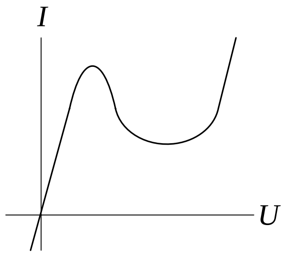


Рис. П.1.3

3. ***Туннельный диод.*** В статическом режиме туннельный диод может быть описан уравнением $I = f(U)$, где нелинейная функция $f(U)$ чаще всего задается графиком (рис. П.1.3), который может быть аппроксимирован с той или иной точностью аналитическим уравнением.

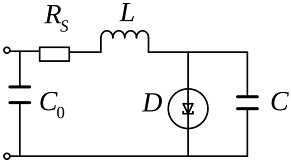


Рис. П.1.4

В зависимости от условий задачи применяют кусочно-линейную аппроксимацию, с помощью полиномов или с помощью экспонент. На достаточно высоких частотах диод представляется в виде эквивалентной схемы, приведенной на рис. П.1.4, где введены обозначения: R_S – сопротивление растекания; L – индуктивность выводов; C_0 – монтажная емкость; C – емкость *n–p*-перехода; D – туннельный диод в статическом представлении.

4. ***Динистор.*** В статическом режиме динистор описывается уравнением вида $U = F(I)$, где $F(I)$ задается графиком, приведенным на рис. П.1.5. При увеличении тока I, начиная с некоторых значений, напряжение на выводах динистора стремится к некоторой постоянной величине U_1. Если последовательно с динистором включено сопротивление, то с ростом тока, начиная с некоторых значений, напряжение линейно нарастает. На высоких частотах необходимо учитывать индуктивность выводов, которая в эквивалентной схеме включается последовательно с самим динистором.

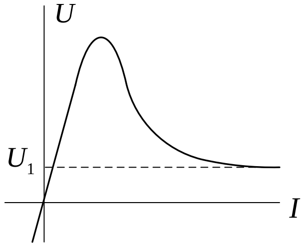


Рис. П.1.5

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Методы составления уравнений для электрических цепей

Любая электрическая схема может быть представлена как совокупность соединенных электрических элементов – двухполюсников и четырехполюсников, которые в свою очередь, подразделяются на линейные и нелинейные. К двухполюсникам относятся пассивные элементы: омическое сопротивление, электрические емкость и катушка индуктивности, а также активные: источники напряжения и источники тока, электронные лампы, туннельные диоды, динисторы.

В линейных двухполюсниках связь между током и напряжением на нем определяется следующими формулами: $U_R = RI$, $R > 0$ – для омического сопротивления; $U_L = LdI/dt$ – для индуктивности; $U_C = (1/C)\int Idt$ – для электрической емкости. Для нелинейных элементов (туннельный диод, динистор) связь между током и напряжением в линейном приближении будет такой же, как и для омического сопротивления. Однако если постоянное смещение выбрано на падающем участке вольт-амперной (или ампер-вольтовой) характеристики, то сопротивление R будет отрицательным.

Для получения уравнений, описывающих процессы в электрических схемах, пользуются обычно двумя методами. К ним относятся метод узловых потенциалов и метод контурных токов. При использовании метода узловых потенциалов за переменные величины выбирают потенциалы (напряжения) в независимых узлах (узел – точка соединения выводов двухполюсников или четырехполюсников). С помощью первого закона Кирхгофа записываются уравнения для токов в виде алгебраической суммы. В этом случае токи в узлах выражаются через напряжения в узлах с помощью уравнений, описывающих соответствующие двухполюсники и четырехполюсники.

При использовании метода контурных токов за переменные выбираются токи в независимых контурах. С помощью второго закона Кирхгофа записываются уравнения для падений напряжений вдоль выбранного контура, при этом само падение напряжения выражается через токи в контурах с помощью соотношений, описывающих соответствующие двухполюсники и четырехполюсники. Число уравнений при использовании того или другого метода должно равняться числу независимых переменных. Кроме того, иногда бывает удобным использование закона Ома для неоднородного участка цепи.

Рассмотрим для примера транзисторный генератор с колебательным контуром в цепи коллектора (рис. П.2.1). Нашей задачей является получение такой полной системы уравнений, из которой можно найти уравнение для какой-либо переменной, описывающей колебания в данном генераторе. Будем пренебрегать для простоты током базы и реакцией коллекторного напряжения. В этом случае уравнения транзистора (П.1.7) примут вид

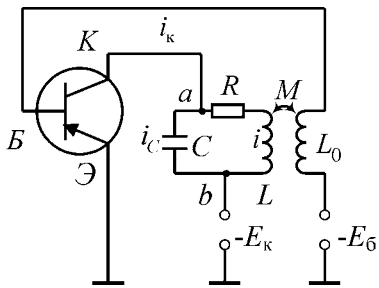


Рис. П.2.1

$$i_к = g_э u_б, \quad i_б = 0. \tag{П.2.1}$$

Так как мы пренебрегли током базы, то напряжение на базе можно записать в виде

$$u_б = M\frac{di}{dt}, \tag{П.2.2}$$

где i – ток, протекающий через катушку индуктивности L и формирующий за счет взаимной индуктивности M напряжение в цепи базы. Тогда первое уравнение в (П.2.1) перепишется как

$$i_к = g_э M\frac{di}{dt}. \tag{П.2.3}$$

Обратимся теперь к участку $aRLb$ колебательного контура. Для него на основании закона Ома имеем

$$iR = u_к - L\frac{di}{dt}. \qquad (П.2.4)$$

Кроме того, для узла a

$$i_к = i_C + i, \qquad (П.2.5)$$

где i_C – ток, протекающий по участку, содержащему емкость C. Значение этого тока связано с напряжением на коллекторе

$$i_C = C\frac{du_к}{dt}. \qquad (П.2.6)$$

Из уравнений (П.2.2)–(П.2.6) нетрудно получить уравнение для тока i, протекающего через индуктивность L:

$$LC\frac{d^2i}{dt^2} + \left(RC - g_э M\right)\frac{di}{dt} + i = 0.$$

Это уравнение свидетельствует о том, что в данном генераторе возможен автоколебательный режим, причем, условие его возбуждения определяется неравенством

$$RC < g_э M.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Электронные генераторы

Электронными генераторами называют устройства, предназначенные для получения колебаний электрического напряжения или тока. По форме колебаний их разделяют на генераторы *синусоидальных* колебаний (*LC*-генераторы, *RC*-генераторы) и генераторы *импульсных* колебаний (мультивибраторы, блокинг-генераторы и генераторы линейно изменяющегося напряжения). Возбуждение колебаний (генерация) во всех генераторах достигается за счет введения *положительной обратной связи* в усилитель. При этом сигнал с выхода усилителя (блок K на рис. П.3.1) через цепь обратной связи (блок $æ$) подается на вход усилителя. Для самовозбуждения генераторов необходимо выполнить два условия:

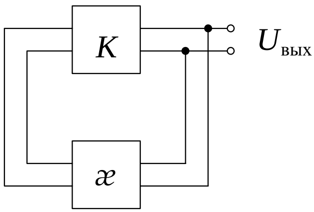


Рис. П.3.1

1) условие баланса фаз: $\varphi_{æ} + \varphi_k = 2\pi n \, (n = 0, 1, 2, ...)$, где φ_k – сдвиг фазы усилителем, $\varphi_{æ}$ – сдвиг фазы цепью обратной связи;

2) условие баланса амплитуд: $æ \cdot k \geq 1$, где k – коэффициент усиления усилителя, $æ$ – коэффициент обратной связи.

Для получения требуемой формы выходного напряжения в блок K (или $æ$) вводится избирательная или времязадающая цепочка. В генераторах гармонических колебаний используется колебательный контур (*LC*-генераторы) или фазосмещающая цепь (*RC*-генераторы). В генераторах импульсных колебаний используется времязадающая *RC*-цепь. Постоянная времени этой цепи $\tau = RC$ определяет частоту (период T) и скважность Q прямоугольных импульсов $Q = T / t_{\text{и}}$, где $t_{\text{и}}$ – длительность импульса (рис. П.3.2).

Электронные генераторы могут работать в двух режимах:

1) «мягкий» режим возбуждения,

2) «жесткий» режим возбуждения.

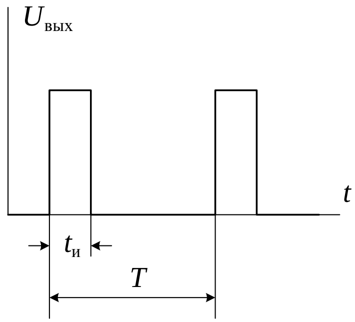


Рис. П.3.2

Эти режимы определяются выбранным классом работы усилителя. В усилителях класса «А» на входе усилителя имеется постоянное напряжение смещения. В этом случае реализуется «мягкий» режим возбуждения колебаний и самовозбуждение происходит при меньших коэффициентах k и $æ$. Однако данный режим обладает низким КПД (порядка 30...40 %). В мощных генераторах используется класс усиления усилителя «В». В них не подается смещение на вход усилителя, возбудить такой генератор сложней и требуются большие значения коэффициентов k и $æ$. Это соответствует «жесткому» режиму возбуждения, но КПД такого генератора составляет 90 % и более.

Мультивибратор. Мультивибраторами (МВ) называются электронные устройства, генерирующие прямоугольные импульсы напряжения (тока) под воздействием процессов заряда-разряда конденсаторов в *RC*-цепях. Мультивибраторы могут работать в автоколебательном и ждущем (заторможенном) режимах. В автоколебательном режиме импульсы на выходе МВ следуют непрерывно друг за другом с периодом T без всяких внешних воздействий. В ждущем режиме МВ генерирует один импульс (или несколько) под воздействием внешнего управляющего сигнала (импульса), подаваемого на вход МВ.

Блокинг-генератор. Это генератор прямоугольных импульсов с высокой скважностью, значительно большей, чем в мультивибраторах (до нескольких тысяч). Особенностью блокинг-генераторов является то, что обратная связь выполняется с помощью импульсного трансформатора (индуктивная связь). Это дает возможность получать очень короткие импульсы (до десятых долей микросекунд) с крутым фронтом. Блокинг-генераторы, как и мультивибраторы, могут работать в автоколебательном и заторможенном режимах.

Триггер. Данное электронное устройство имеет два устойчивых состояния, т.е. на выходе либо есть напряжение, либо его нет. Эти состояния изменяются при подаче на вход запускающих импульсов или изменении комбинаций единиц и нулей, поступающих на вход триггера. Положительная обратная связь позволяет производить эти изменения очень быстро, скачком. При отсутствии запускающих импульсов состояние триггера сохраняется сколь угодно долго.

Спусковая схема. Это триггер с одним устойчивым состоянием или мультивибратор (одновибратор), который формирует один прямоугольный импульс под воздействием внешнего управляющего сигнала.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Некоторые тригонометрические соотношения и интегралы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(-\cos 2x + 1)$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x)$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

$$\sin^6 x = \frac{1}{32}(-\cos 6x + 6\cos 4x - 15\cos 2x + 10)$$

$$\sin^7 x = \frac{1}{64}(-\sin 7x + 7\sin 5x - 21\sin 3x + 35\sin x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$$

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$$

$$\cos^7 x = \frac{1}{64}(\cos 7x + 7\cos 5x + 21\cos 3x + 35\cos x)$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\sin 4x = \cos x\left(4\sin x - 8\sin^3 x\right)$$

$$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x$$

$$\sin 6x = \cos x\left(6\sin x - 32\sin^3 x + 32\sin^5 x\right)$$

$$\sin 7x = 7\sin x - 56\sin^3 x + 112\sin^5 x - 64\sin^7 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x\ .$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1$$

$$\cos 7x = 64\cos^7 x - 112\cos^5 x + 56\cos^3 x - 7\cos x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^{2k+1} - 3}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos^2 x = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k} + 3}{(2k)!} x^{2k}$$

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \sin^3 x dx = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$$

$$\int \sin^4 x dx = \frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} = -\frac{3\sin x\cos x}{8} - \frac{\sin^3 x\cos x}{4} + \frac{3x}{8}$$

$$\int \sin^5 x dx = -\frac{5\cos x}{8} + \frac{5\cos 3x}{48} - \frac{\cos 5x}{80} = -\frac{\sin^4 x \cos x}{5} + \frac{4\cos^3 x}{15} - \frac{4\cos x}{5}$$

$$\int \sin^6 x dx = \frac{5x}{16} - \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64} - \frac{\sin 6x}{192} =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5\sin^3 x \cos x}{24} - \frac{5\sin x \cos x}{16} + \frac{5x}{16}$$

$$\int \sin^7 x dx = -\frac{35\cos x}{64} + \frac{7\cos 3x}{64} - \frac{7\cos 5x}{320} + \frac{\cos 7x}{448} =$$

$$= -\frac{\sin^6 x \cos x}{7} - \frac{6\sin^4 x \cos x}{35} + \frac{8\cos^3 x}{35} - \frac{24\cos x}{35}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x = -\frac{1}{3}\sin^3 x + \sin x$$

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{3\sin x \cos x}{8} + \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3x}{8}$$

$$\int \cos^5 x dx = \frac{5\sin x}{8} + \frac{5\sin 3x}{48} + \frac{\sin 5x}{80} = \frac{\sin x \cos^4 x}{5} - \frac{4\sin^3 x}{15} + \frac{4\sin x}{5}$$

$$\int \cos^6 x dx = \frac{5x}{16} + \frac{15\sin 2x}{64} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin 6x}{192} =$$

$$= \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5\sin x \cos^3 x}{24} + \frac{5\sin x \cos x}{16} + \frac{5x}{16}$$

$$\int \cos^7 x dx = \frac{35\sin x}{64} + \frac{7\sin 3x}{64} + \frac{7\sin 5x}{320} + \frac{\sin 7x}{448} =$$

$$= \frac{\sin x \cos^6 x}{7} + \frac{6\sin x \cos^4 x}{35} - \frac{8\sin^3 x}{35} + \frac{24\sin x}{35}$$

Учебное издание

ПАРШАКОВ Александр Николаевич

ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Учебное пособие

Редактор и корректор *Н.В. Бабинова*

Подписано в печать 8.11.10. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 19,0. Тираж 100 экз. Заказ № 229/2010.

Издательство
Пермского государственного технического университета.
Адрес: 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, к. 113.
Тел. (342) 219-80-33.